

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL BÉZIVIN

## **Sur les points où une fonction analytique prend des valeurs entières**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 40, n° 4 (1990), p. 785-809

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1990\\_\\_40\\_4\\_785\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_4_785_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES POINTS OÙ UNE FONCTION ANALYTIQUE PREND DES VALEURS ENTIÈRES

par Jean-Paul BÉZIVIN

---

### 1. Introduction et notations.

Soit  $f(z)$  une fonction entière d'une variable complexe. On note  $|f|(r)$  le maximum du module de  $f(z)$  sur le cercle  $|z| = r$ . L'étude des points où une telle fonction prend des valeurs entières a été inaugurée par G. Pólya avec les résultats suivants ([13]) :

THÉORÈME PO1. — *Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que :*

- a)  $f(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $|f|(r) \leq \exp(cr)$  avec  $c < \log 2$ .

*Alors  $f$  est un polynôme.*

THÉORÈME PO2. — *Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que :*

- a)  $f(n^2) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $|f|(r) \leq \exp(cr^{1/2})$  avec  $c < \log((3 + (5)^{1/2})/2)$ .

*Alors  $f$  est un polynôme.*

Les bornes données pour la constante  $c$  sont les meilleures possibles. Pour des généralisations, notamment à plusieurs variables, voir [2], [3], [7] et [9].

En 1933, A. O. Gel'fond démontre le résultat suivant ([6]) :

**THÉORÈME G.** — Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe et  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $|q| > 1$ . On suppose que :

a)  $f(q^n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b)  $|f|(r) \leq \exp(c(\log r)^2)$  avec  $c < \frac{1}{4 \log |q|}$ .

Alors  $f$  est un polynôme.

En fait, le résultat est un peu plus précis que celui que nous donnons pour l'ordre de la croissance, le lecteur intéressé pourra consulter [6] et [16], et pour des généralisations à plusieurs variables, [4], [5] et [8]. Là encore, la constante  $\frac{1}{4 \log |q|}$  est la meilleure possible.

On peut envisager de généraliser ces résultats dans des directions différentes.

Si l'on conserve l'hypothèse que  $f$  est entière, on peut modifier la suite des points où elle prend des valeurs entières et énoncer le problème très général suivant :

**PROBLÈME.** — Soit  $u(n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{Z}$ , on suppose que  $u(n)$  est une suite récurrente linéaire, et que  $|u(n)| \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe.

Donner des conditions sur la croissance de  $f$  et de la suite  $u(n)$  pour que l'hypothèse :

$$\ll f(u(n)) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout entier naturel } n \gg$$

implique que  $f$  est un polynôme.

Dans le cadre de ce problème, on voit donc que seuls sont résolus complètement (à la connaissance de l'auteur), avec la meilleure croissance possible pour  $f$ , les cas  $u(n) = n$ ,  $u(n) = n^2$ ,  $u(n) = q^n$ , et ceux qui s'y ramènent.

Il semble qu'aucun analogue du théorème PO2 dans le cas de la suite  $q^n$  étudiée par Gel'fond n'ait été publié. Le résultat suivant est un tel analogue.

THÉOREME 1. — Soient  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $|a| > 2$ , et  $q$  la solution de module  $> 1$  de l'équation  $x^2 - ax + 1 = 0$ . Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que :

a)  $f(q^n + q^{-n}) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b)  $|f|(r) \leq \exp(c(\log r)^2)$  avec  $c < \frac{1}{4 \log |q|}$ .

Alors  $f$  est un polynôme.

De plus la constante  $1/(4 \log |q|)$  est la meilleure possible.

On notera que  $u(n) = q^n + q^{-n}$  est une suite récurrente linéaire d'éléments de  $\mathbb{Z}$ , puisque  $q$  est une unité algébrique.

La méthode de démonstration utilise le polynôme d'interpolation de la fonction  $f(z)$  aux points  $u(n) = q^n + q^{-n}$ , et suit d'assez près la démonstration originelle de Gel'fond.

Nous étudierons aussi le cas où  $u(n)$  est un polynôme de degré  $\geq 3$ .

Avant d'énoncer nos résultats, nous donnons deux théorèmes de C. Pisot qui nous seront utiles ([10], [11], [12]) :

THÉOREME PI1. — Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe. On suppose :

a)  $f(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b)  $|f|(r) \leq \exp(\alpha r)$  où  $\alpha$  est une constante positive.

Soit  $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists u \in \mathbb{C}, |u| \leq \alpha \text{ et } z = \exp(u)\}$  et  $\alpha_0$  la valeur de  $\alpha$  telle que le diamètre transfini de  $S_\alpha$  soit égal à 1.

Alors, si  $\alpha < \alpha_0$ ,  $f$  est un polynôme exponentiel.

Pisot donne pour  $\alpha_0$  la valeur approchée 0,843...

THÉOREME PI2. — Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe. On suppose :

a)  $f(n^2) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b)  $|f|(r) \leq \exp \alpha(r)^{1/2}$  où  $\alpha$  est une constante positive.

Soit  $T_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists u \in \mathbb{C}, |u| \leq \alpha \text{ et } z = \exp(u) + \exp(-u)\}$ , et  $\alpha_1$  la valeur de  $\alpha$  telle que le diamètre transfini de  $T_\alpha$  soit égal à 1.

Alors, si  $\alpha < \alpha_1$ , la fonction  $f(z^2)$  est un polynôme exponentiel.

Pisot donne pour  $\alpha_1$  la valeur approchée 0,993...

Nous avons le résultat suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe, et  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{C}[z]$  de degré  $s \geq 3$ .*

*On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(P(n)) \in \mathbb{Z}$  et que la croissance de  $f$  est majorée par :  $|f|(r) \leq \exp(cr^{1/s})$ . Alors :*

a) *Si  $c < \alpha_0 = 0,843\dots$ ,  $f$  est un polynôme.*

b) *Si  $P$  est un polynôme pair et si  $c < \alpha_1 = 0,993\dots$ , alors  $f$  est un polynôme.*

Maintenant, il est peu probable que ces valeurs soient les meilleures possibles.

On peut voir d'autre part que la méthode d'interpolation utilisée par G. Pólya pour les théorèmes PO1 et PO2 ne semble pas conduire à un résultat dans ce cas.

La seconde voie pour la généralisation des théorèmes PO1 et PO2 est d'affaiblir les conditions sur la fonction entière  $f(z)$ . Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Robinson ([14]) qui traite des cas où l'on fait des hypothèses différentes sur les propriétés analytiques de  $f$ . Aucun résultat de ce type n'était semble-t-il connu pour le théorème G.

Nous donnons une telle généralisation, sous la forme suivante :

**THÉORÈME 3.** — *Soient  $f$  une fonction analytique dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ , et  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| > 1$ . On pose, pour  $r > 0$   $|f|(r) = \text{Max}(|f(z)|, |z|=r)$ . On suppose que :*

a)  *$f(q^n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

b)  *$|f|(r) \leq \exp(c(\log r)^2)$  où  $c > 0$ , pour  $\max(r, 1/r)$  assez grand.*

*Si  $c < y_0/(8 \log |q|)$ , où  $y_0 = 0,5988\dots$  est la racine dans  $[0,1]$  de l'équation  $y^5 - y^4 + y^3 - 6y^2 + 10y - 4 = 0$ , alors  $f$  est un polynôme en  $z$  et  $1/z$ .*

Il est fort peu probable que la valeur  $y_0/(8 \log |q|)$  soit la meilleure possible.

D'autre part, si  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $|q| > 1$ , l'exemple de Gel'fond dans [6] montre que la valeur maximale pour  $c$  est  $\leq \frac{1}{4 \log |q|}$ .

Comme conséquence de ce résultat, on a le corollaire suivant, qui nous ramène au problème général :

**COROLLAIRE** — Soient  $f$  une fonction entière d'une variable complexe,  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ , de degré  $s$  et  $t$  respectivement avec  $s + t \geq 1$ .

Soit  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| > 1$ . On suppose que :

- a)  $f(P(q^n) + Q(q^{-n})) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $|f|(r) \leq \exp(\alpha(\log r)^2 / \log |q|)$ , où  $\alpha$  est une constante positive telle que  $8\alpha(\max(s, t))^2 < y_0$ .

Alors  $f$  est un polynôme.

Un cas particulier de ce corollaire est celui où  $P = Q = z$ ; on trouve un résultat analogue à celui du théorème 1, avec une constante plus faible. Notons cependant qu'il est inutile de supposer comme dans le théorème 1 que  $q$  est une unité algébrique.

On peut vérifier que si  $f$  est un polynôme non constant de degré  $s$  et si  $f(q^n + q^{-n}) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors il en résulte que  $q^s$  est une unité algébrique solution d'une équation  $X^2 - aX + 1 = 0$ , avec  $a \in \mathbb{Z}$ , et  $|a| > 2$ .

## 2. Preuve du théorème 1.

Nous écrivons tout d'abord le coefficient d'interpolation de la fonction  $f(z)$  aux points  $u(0), \dots, u(n) = q^n + q^{-n}, \dots$

$$(1) \quad a(n) = \sum_{k=0}^n \frac{f(u(k))}{\prod_{\substack{j \neq k \\ 0 \leq j \leq n}} [u(k) - u(j)]}.$$

On a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{LEMME 1.} \quad - \text{ Soit } d(n) &= q^{-n^2} (q^n + 1)^{-1} \prod_{\ell=1}^{2n} (q^\ell - 1) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (q^n + q^{-n} - q^j - q^{-j}). \end{aligned}$$

Alors  $b(n) = d(n)a(n)$  est une suite à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

*Preuve.* — On a

$$a(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{k^2-k}{2}} (q^k + 1)}{\prod_1^{n-k} (q^\ell - 1) \prod_1^{n+k} (q^\ell - 1)} f(q^k + q^{-k}).$$

La formule (1) montre que, dans  $a(n)$ , les coefficients de  $f(u(k))$  sont rationnels pour toute valeur de  $n$ .

D'autre part,  $d(n) = \sum_{j=0}^{n-1} (q^n + q^{-n} - q^j - q^{-j})$  est un élément de  $\mathbb{Z}$ .

Donc le nombre

$$v(k, n) = \frac{d(n) (-1)^{n-k} q^{\frac{n^2+n}{2} + \frac{k^2-k}{2}} (q^k + 1)}{\prod_1^{n-k} (q^\ell - 1) \prod_1^{n+k} (q^\ell - 1)}$$

est rationnel, et s'écrit

$$v(k, n) = (-1)^{n-k} q^{\frac{-n^2+n}{2} + \frac{k^2-k}{2}} (q^k + 1) \frac{1}{q^n + 1} \frac{\prod_1^{2n} (q^\ell - 1)}{\prod_1^{n-k} (q^\ell - 1) \prod_1^{n+k} (q^\ell - 1)}.$$

Montrons que la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^k + 1}{X^n + 1} \frac{\prod_1^{2n} (X^\ell - 1)}{\prod_1^{n-k} (X^\ell - 1) \prod_1^{n+k} (X^\ell - 1)}$$

est en fait un polynôme.

Soit  $\phi_d(X)$  le polynôme cyclotomique d'ordre  $d$ ,  $d \geq 1$ .

On a :

$$\prod_1^h (X^\ell - 1) = \prod_{\ell=1}^h \prod_{d|\ell} \Phi_d(X) = \prod_{d=1}^h \phi_d(X)^{\alpha(d, h)}$$

où  $\alpha(d, h)$  est la partie entière de  $h/d$ . D'autre part

$$X^h + 1 = \frac{X^{2h} - 1}{X^h - 1} = \prod \phi_d(X),$$

où le produit est fait sur les  $d$  divisant  $2h$  et ne divisant pas  $h$ .

Par suite :

$$F(X) = \prod_{d=1}^{2n} \phi_d(X)^{\beta(d,n,k)}$$

avec

$$\beta(d,n,k) = \left[ \frac{2n}{d} \right] - \left[ \frac{n-k}{d} \right] - \left[ \frac{n+k}{d} \right] + \varepsilon(d,k) - \varepsilon(d,n)$$

où  $[x]$  est la partie entière du nombre réel  $x$ ,  $\varepsilon(d,h) = 1$  si  $d|2h$  et  $d$  ne divise pas  $h$ , et  $\varepsilon(d,h) = 0$  sinon.

Il suffit de montrer que  $\beta(d,n,k) \in \mathbb{N}$  pour montrer que  $F \in \mathbb{Z}[X]$ .  
On a :

$$\left[ \frac{n-k}{d} \right] + \left[ \frac{n+k}{d} \right] \leq \frac{n-k}{d} + \frac{n+k}{d} = \frac{2n}{d}$$

d'où

$$\left[ \frac{n-k}{d} \right] + \left[ \frac{n+k}{d} \right] \leq \left[ \frac{2n}{d} \right].$$

Ceci prouve l'assertion si  $\varepsilon(d,n) = 0$  ou si  $\varepsilon(d,k) = 1$ .

Nous supposons donc dans la suite :

$$\varepsilon(d,n) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(d,k) = 0, \text{ i.e. :}$$

$d|2n$ ,  $d$  ne divise pas  $n$  et ( $d$  ne divise pas  $2k$  ou  $d|k$ ).

Supposons que  $d|k$ ; alors, puisque  $d$  ne divise pas  $n$ ,  $d$  ne divise ni  $n+k$  ni  $n-k$ .

Donc  $\left[ \frac{n+k}{d} \right] < \frac{n+k}{d}$  et  $\left[ \frac{n-k}{d} \right] < \frac{n-k}{d}$ , ce qui implique  $\left[ \frac{n+k}{d} \right] + \left[ \frac{n-k}{d} \right] < \frac{2n}{d} \in \mathbb{N}$ . Par suite  $\left[ \frac{2n}{d} \right] = \frac{2n}{d}$  et  $\left[ \frac{2n}{d} \right] - \left[ \frac{n+k}{d} \right] - \left[ \frac{n-k}{d} \right] \geq 1$ , d'où l'assertion. Supposons que  $d$  ne divise pas  $2k$ .

Alors l'un des deux nombres  $\frac{n+k}{d}$  et  $\frac{n-k}{d}$  n'est pas entier; en effet, sinon leur différence  $\frac{2k}{d}$  le serait.



Donc  $\left[ \frac{n+k}{d} \right] + \left[ \frac{n-k}{d} \right] < \frac{2n}{d}$ , et on conclut comme précédemment.

Il résulte de ceci que  $v(k, n)$  est un élément de  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , donc un entier algébrique, et par suite dans  $\mathbb{Z}$  puisque rationnel.

Ainsi  $b(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n$ .

LEMME 2. — Soit  $f$  une fonction entière d'une variable complexe telle que  $|f(r)| \leq \exp(c(\log r^2))$ , soit  $a(n)$  le  $n$ -ième coefficient d'interpolation de  $f$  sur la suite  $u(n) = q^n + q^{-n}$ , et soit  $\theta > 1$  fixé. On a la majoration :

$$|a(n)| \leq \exp[\theta(c\theta \log |q| - 1)n^2 \log |q| + O(n)].$$

Démonstration. — On a

$$a(n) = 1/(2\pi i) \int f(z) / \prod_{k=0}^n (z - u(k)) dz$$

où l'intégrale est prise sur un cercle de rayon  $R$  plus grand que  $\max_{0 \leq k \leq n} |u(k)|$ .

On choisit  $R = |q|^{n\theta}$ . Soit  $\eta > 1$ , on a  $|u(k)| \leq \eta |q|^k$ , si  $k$  est assez grand.

On a alors

$$|z - u(k)| \geq |q|^{n\theta} - |u(k)| \geq |q|^{n\theta} - \eta |q|^k,$$

donc

$$|z - u(k)| \geq |q|^{n\theta} \left[ 1 - \eta \frac{1}{|q|^{n\theta - k}} \right] = |q|^{n\theta} \left( 1 - \eta \frac{1}{|q|^{(\theta-1)n}} \cdot \frac{1}{|q|^{n-k}} \right).$$

Pour  $n$  assez grand,  $\frac{1}{|q|^{(\theta-1)n}} \eta \leq \frac{1}{2}$ .

Le produit  $\prod_0^n \left( 1 - \frac{1}{2|q|^{n-k}} \right) = \prod_0^n \left( 1 - \frac{1}{2|q|^k} \right)$  a une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par suite, il existe une constante  $c_1$  telle que

$$\prod_0^n |z - u(k)| \geq c_1 |q|^{n(n+1)\theta}$$

pour tout  $n$  assez grand et tout  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $|z| = |q|^{n\theta}$ .

Donc  $|a(n)| \leq |q|^{0n} c_1^{-1} |q|^{-n(n+1)\theta} |f|(|q|^{0n})$ , ce qui démontre l'assertion du lemme.

LEMME 3. — Soient  $f$  une fonction entière d'une variable complexe, et  $u(n) = q^n + q^{-n}$ , où  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| > 1$ . On suppose que  $f(u(n)) = 0$  pour tout  $n$  et que

$$|f|(r) \leq \exp(c(\log r)^2) \quad \text{avec} \quad c < \frac{1}{2 \log |q|}.$$

Alors  $f$  est la fonction nulle.

Démonstration. — Nous utiliserons les résultats de [15]. On ne restreint pas la généralité en supposant que si  $f$  est non nulle, alors  $f(0) \neq 0$ .

Soit alors  $n(R)$  le nombre de zéros de  $f$ , compte tenu de leurs multiplicités, dans le disque de centre 0 et de rayon  $R$ .

La formule (5,5) de [15], page 132, montre que  $\log |f|(r)$  est équivalent à  $\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx$  quand  $r$  tend vers  $+\infty$ .

D'autre part,  $f(u(n)) = 0$  pour tout  $n$  montre que :

$$n(r) \geq \log(r)/\log|q| + o(\log r) \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow +\infty.$$

Par suite

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx \geq \frac{(\log r)^2}{2 \log |q|} + o((\log r)^2).$$

Donc

$$c(\log r)^2 \geq \frac{(\log r)^2}{2 \log |q|} + o((\log r)^2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse  $c < \frac{1}{2 \log |q|}$ . Cette contradiction termine la démonstration du lemme 3.

Preuve du théorème 1. — Soit  $b(n) = d(n)a(n)$  l'expression donnée dans le lemme 1, qui appartient donc à  $\mathbb{Z}$  pour tout  $n$ . La majoration triviale

$$|d(n)| \leq \exp(n^2 \log |q|)$$

jointe au lemme 2 montre que

$$|b(n)| \leq \exp [1 + \theta(c\theta \log |q| - 1)n^2 \log |q| + O(n)].$$

La fonction  $\theta \mapsto 1 + c\theta^2 \log |q| - \theta$  est minimale pour  $\theta_0 = \frac{1}{2c \log |q|}$ , et vaut alors

$$1 - \frac{1}{4c \log |q|} < 0 \quad \text{puisque} \quad c < \frac{1}{4 \log |q|}.$$

Par suite  $b(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et  $b(n) = 0$  pour  $n$  assez grand. Il en est donc de même pour la suite  $a(n)$  des coefficients d'interpolation de la fonction  $f$  sur la suite  $u(n)$ .

Ainsi, il existe un polynôme  $P$ , tel que l'on ait  $P(u(n)) = f(u(n))$  pour tout  $n$ .

Soit  $g(z) = f(z) - P(z)$ . Alors  $g$  vérifie les hypothèses du lemme 3, et par suite est la fonction nulle, ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème 1.

Il reste à voir que la valeur  $\frac{1}{4 \log |q|}$  est la meilleure possible.

Pour cela, posons  $a(n) = \frac{1}{d(n)} = q^{n^2}(q^n + 1) \prod_1^{2n} (q^\ell - 1)$ , et considérons la série :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(z-2) \cdots (z - q^{n-1} - q^{-n+1})}{\prod_1^{2n} (q^\ell - 1)} q^{n^2}(q^n + 1).$$

Commençons par étudier la convergence de la série  $f(z)$ .

Pour  $|z| = R$ , le module du terme général de cette série est majoré à une constante multiplicative près par

$$|q|^{-(n^2+n)/2} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + (R+1)/|q|^k).$$

Dans cette expression, le produit est majoré par le produit infini qui converge, et que l'on peut majorer ([15] formule (5-4) p. 132) par

$$\exp ((\log (R+1)^2)/2 \log |q|)(1+o(1))).$$

Il en résulte que la série  $f(z)$  définit une fonction analytique dans tout  $\mathbb{C}$ . Nous majorons ensuite le module de cette fonction sur le disque de centre zéro, et de rayon  $R$ .

On découpe la somme  $f(z)$  en deux parties :

Tout d'abord, pour  $n \geq \log(R+1)/\log|q| + 1$ , on voit en utilisant l'estimation (10) de [16] page 984 pour le produit

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + (R+1)/|q|^k)$$

que le terme

$$|q|^{-(n^2+n)/2} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + (R+1)/|q|^k)$$

est majoré par le terme général d'une série numérique convergente indépendante de  $R$ .

Par suite, la contribution de cette partie est négligeable.

Pour  $n \leq \log(R+1)/\log|q|$ , nous majorons le produit par  $2^n(R+1)^n |q|^{-(n^2-n)/2}$ , de sorte que le terme général de la série est majoré par l'expression  $2^n(R+1)^n |q|^{-n^2}$ .

On cherche alors le maximum de cette fonction de  $n$ , et le nombre de termes dans cette seconde partie étant petit en comparaison du terme maximal, on obtient

$$|f|(R) \leq \exp((\log R)^2/4 \log|q| + O(\log R)).$$

On a d'autre part l'égalité :

$$a(n)d(n) = 1 = b(n) = \sum_{k=0}^n v(k,n)f(u(k)).$$

On a déjà vu que les  $v(k,n)$  étaient entiers, et de plus  $v(n,n) = 1$ . Ceci permet de démontrer par récurrence que les  $f(u(n))$  sont tous dans  $\mathbb{Z}$ . Comme il est clair que  $f$  n'est pas un polynôme, ceci montre que la constante  $1/(4 \log|q|)$  est bien la meilleure possible.

### 3. Preuve du théorème 2.

Nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 4. — Soient  $s \geq 2$  un entier naturel et  $\gamma_k (1 \leq k \leq s)$  des fonctions algébriques (sur  $\mathbb{C}(z)$ ). On note  $\Gamma_k$  une primitive locale de  $\gamma_k$  et on suppose qu'il existe des fonctions algébriques  $\varphi_k$  non nulles telles que

$$(2) \quad \sum_{k=1}^s \varphi_k \exp(\Gamma_k) = 0$$

sur un ouvert non vide convenable de  $\mathbb{C}$ .

Alors, pour tout  $i (1 \leq i \leq s)$ , il existe  $j = j(i) \neq i$  tel que la fonction  $\exp(\Gamma_i - \Gamma_j)$  soit algébrique.

Démonstration. — Le cas de  $s = 2$  est trivial. On peut, sans perte de généralité, supposer la relation (2) de support minimal (i.e. qu'il n'existe pas de relation de type (2) faisant intervenir moins de  $s$  fonctions parmi les  $\gamma_k$ ).

Par dérivation de la relation (2), on obtient une relation du même type

$$\Sigma(\varphi'_k + \gamma_k \varphi_k) \exp(\Gamma_k) = 0.$$

La relation (2) étant de support minimal, ou bien  $\varphi'_k + \gamma_k \varphi_k = 0$  pour tout  $k$ , ou bien il s'agit de la « même » relation. Dans le premier cas la fonction  $\varphi_k \exp \Gamma_k$  est constante pour tout  $k$  et le résultat est vrai. Dans le deuxième cas, on a pour tout  $i$   $(\varphi'_i + \gamma_i \varphi_i) \varphi_s = (\varphi'_s + \gamma_s \varphi_s) \varphi_i$ .

Il en résulte que la fonction  $\varphi_i \exp \Gamma_i / \varphi_s \exp \Gamma_s$  est constante, ce qui est le résultat annoncé.

LEMME 5. — Soient  $f(z)$  une fonction entière d'une variable complexe, et  $P$  un polynôme non constant et unitaire. On suppose qu'il existe un entier  $s \geq 2$ , des nombres algébriques distincts  $b_i$ , non nuls, et des polynômes  $Q_i$  non nuls, à coefficients algébriques, tels que l'on ait

$$f(P(z)) = \sum_{i=1}^s Q_i(z) b_i^z.$$

Alors le polynôme  $P$  est de degré inférieur ou égal à deux.

*Démonstration.* — On se place au voisinage d'un point convenable de  $\mathbb{C}$ , et on considère une solution série entière  $y(z)$  de l'équation  $P(z) = P(y(z))$ . On a alors l'égalité :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^s Q_i(z) b_i^z = \sum_{i=1}^s Q_i(y(z)) b_i^{y(z)}.$$

Puisque l'entier  $s$  est supérieur ou égal à deux on peut trouver un indice  $i$ , tel que  $b_i \neq 1$ .

D'après le lemme 4, il existe un indice  $j$  tel que  $b_j^{y(z)}/b_i^z$  est une fonction algébrique, puisque les fonctions  $b_k^z b_i^{-z}$  sont transcendentes. Ceci n'est possible que si  $y(z)$  est une fonction de la forme  $az + b$ . (Si  $f$  est une fonction algébrique non constante, la fonction  $\exp f$  est transcendante.)

D'autre part on doit avoir  $P(az + b) = P(z)$ , donc  $a$  est une racine de l'unité (considérer les coefficients des termes de plus haut degré).

En remplaçant dans l'égalité (3), on voit alors que  $b_i^a$  est l'un des  $b_j$ . Mais ceux-ci sont algébriques ; donc d'après le théorème de Gel'fond-Schneider, la constante  $a$  est nécessairement dans  $\mathbb{Q}$ , et par suite c'est 1 ou  $-1$ .

Si  $a = 1$ , l'égalité  $P(z) = P(z + b)$  montre que  $b$  est nul.

Si  $a = -1$ , alors la valeur de  $b$  qui lui correspond est unique.

Il y a donc au plus deux solutions distinctes à l'équation  $P(z) = P(y(z))$ , et comme toutes les solutions de cette équation sont simples (elles sont non constantes comme  $P(z)$  et les racines de  $P'(z)$  sont des fonctions constantes), il en résulte que le degré de  $P$  est au plus 2.

*Preuve du théorème 2.* — a) Posons  $g(z) = f(P(z))$ . Alors  $g(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et on a visiblement :  $|g|(r) \leq \exp(cr + o(r))$ . Comme  $c < \alpha_0$ , il résulte du théorème PI1 que  $g(z)$  est un polynôme exponentiel de la forme :

$$\sum_{i=1}^k Q_i(z) b_i^z$$

avec les  $b_i$  algébriques  $\neq 0$  et les  $Q_i(z) \neq 0$  à coefficients algébriques.

On peut alors appliquer le résultat du lemme 5 ; puisque le degré de  $P$  est supposé plus grand que deux, c'est que l'on a  $s = 1$ .

Reprenant une solution non égale à  $z$  de l'équation  $P(y(z)) = P(z)$ , on voit qu'alors  $b_1^{y(z)-z}$  est une fonction algébrique, ce qui n'est possible que si  $b_1 = 1$ .

Il en résulte que  $g(z)$ , donc  $f(z)$ , est un polynôme, ce qui est le résultat annoncé.

b) La démonstration est analogue à celle du a), le théorème PI2 étant utilisé à la place du théorème PI1.

#### 4. Preuve du théorème 3.

Nous posons  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)z^k$ .

D'après les inégalités de Cauchy et le fait que  $|f|(r) \leq \exp[c(\log r)^2]$ , on voit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on ait

$$(4) \quad |c(k)| \leq \exp\left(-\frac{k^2}{4c} + \lambda\right).$$

Nous notons  $K(n)$  le déterminant de Kronecker de la suite  $f(q^n)$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice  $\bar{K}(n) = (f(q^{i+j}))_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$ .

Avant de commencer la démonstration des lemmes techniques nécessaires à la preuve du théorème 2, nous donnons un schéma de la démonstration.

Il est clair que  $K(n)$  est un élément de  $\mathbb{Z}$ . Nous allons majorer  $K(n)$ , et montrer que  $K(n)$  tend vers zéro si  $n$  tend vers l'infini.

Par suite,  $K(n)$  est nul à partir d'un certain rang. Ceci prouve que  $f(q^n)$  est une suite récurrente linéaire, autrement dit qu'il existe des coefficients  $w_j$  non tous nuls tels que  $\sum_{j=0}^{\sigma} w_j f(q^{n+j}) = 0$  pour  $n$  assez grand.

Nous en déduisons que  $g(z) = \sum_{j=0}^{\sigma} w_j f(zq^j)$  est la fonction nulle et ensuite la conclusion du théorème 2.

## 4.1. Majoration du déterminant de Kronecker.

LEMME 6. — On a l'égalité suivante

$$K(n) = \sum c(k_0), \dots, c(k_n) V(q^{k_i})^2$$

où la sommation a lieu sur les  $(n+1)$ -uplets  $(k_0, \dots, k_n)$  d'éléments de  $\mathbb{Z}$  vérifiant  $k_0 < k_1 < \dots < k_n$ , et où  $V(q^{k_i}) = \prod_{i < j} (q^{k_j} - q^{k_i})$  est le déterminant de Van der Monde construit sur les  $q^{k_i}$   $i = 0, \dots, n$ .

*Démonstration.* — On utilise le développement de Laurent  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)z^k$  en développant successivement les colonnes du déterminant  $K(n)$ .

On obtient :

$$(5) \quad K(n) = \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} c(k_0), \dots, c(k_n) q^{0k_0 + 1 \cdot k_1 + \dots + nk_n} V(q^{k_i}).$$

On voit donc que si, dans le  $(n+1)$ -uplet  $(k_0, \dots, k_n)$  il y a deux éléments égaux, le terme correspondant de la somme (5) est nul.

On se limite donc dans la suite à faire la somme sur les  $(n+1)$ -uplets d'éléments distincts de  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $(\ell_0, \dots, \ell_n)$  un  $(n+1)$ -uplet d'éléments distincts de  $\mathbb{Z}$ , que l'on suppose rangé par ordre croissant :  $\ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_n$ .

En regroupant dans (5) les  $(n+1)$ -uplets  $(k_0, \dots, k_n)$  qui sont des permutations de  $(\ell_0, \dots, \ell_n)$  on obtient

$$K(n) = \sum_{\ell_0 + \dots < \ell_n} c(\ell_0), \dots, c(\ell_n) \sum_{(k_0, \dots, k_n)} q^{0k_0 + \dots + nk_n} V(q^{k_i}).$$

Soit  $\sigma$  la permutation de  $\{0, 1, \dots, n\}$  telle que  $k_i = \ell_{\sigma(i)}$ , on a la relation  $V(q^{k_i}) = \varepsilon(\sigma) V(q^{\ell_i})$ , où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

D'autre part on a

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) q^{0\ell_{\sigma(0)} + \dots + n\ell_{\sigma(n)}} = V(q^{\ell_i}),$$

d'où l'on déduit le lemme.



LEMME 5. — On a la majoration :

$$|K(n)| \leq \sum_{\ell_0 + \dots + \ell_n} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (\ell_0^2 + \dots + \ell_n^2) + (n+1)\lambda \right. \\ \left. + n(n+1) \log (1 + |q|^{-1}) + 2 \left( \sum_0^n j \ell_j \right) \log |q| \right].$$

Preuve. — On a

$$|q^{\ell_j} - q^{\ell_i}| = |q|^{\ell_j} |1 - q^{\ell_i - \ell_j}| \leq (1 + |q|^{-1}) |q|^{\ell_j} \quad \text{si } \ell_j > \ell_i,$$

donc

$$|V(q^{\ell_i})| \leq (1 + |q|^{-1})^{\frac{n(n+1)}{2}} |q|^{\sum_0^n j \ell_j}.$$

D'après le lemme 6, ceci donne, compte tenu de la majoration (4) des coefficients de Laurent  $c(k)$  de la fonction  $f$ , la majoration annoncée.

Nous notons dans la suite :

$$L(n) = \sum_{\ell_0 < \dots < \ell_n} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (\ell_0^2 + \dots + \ell_n^2) + 2 \left( \sum_{j=0}^n j \ell_j \right) \log |q| \right],$$

de sorte que

$$(6) \quad |K(n)| \leq L(n) \cdot \exp((n+1)\lambda) (1 + |q|^{-1})^{n+n^2}$$

Nous allons majorer  $L(n)$ .

Soit  $t$  un entier appartenant à  $\{0, 1, \dots, n+1\}$ .

Nous associons à l'entier  $t$  la partie des  $(n+1)$ -uplets rangés d'éléments de  $\mathbb{Z}$ , tels que les  $t$  premiers soient négatifs, les autres positifs ou nuls, et nous notons  $L_t(n)$  la somme correspondante, c'est-à-dire

$$L_t(n) = \sum_{\substack{\ell_0 < \dots < \ell_{t-1} < 0 \\ 0 \leq \ell_t < \dots < \ell_n}} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (\ell_0^2 + \dots + \ell_n^2) + 2 \left( \sum_{j=0}^n j \ell_j \right) \log |q| \right].$$

On a

$$L(n) = \sum_{t=0}^{n+1} L_t(n).$$

D'autre part on a

$$L_t(n) = M_t N_t(n),$$

avec

$$M_t = \sum_{\ell_0 < \dots < \ell_{t-1} < 0} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (\ell_0^2 + \dots + \ell_{t-1}^2) + 2 \left( \sum_0^{t-1} j \ell_j \right) \log |q| \right]$$

et

$$N_t(n) = \sum_{0 \leq \ell_t < \dots < \ell_n} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (\ell_t^2 + \dots + \ell_n^2) + 2 \left( \sum_t^n j \ell_j \right) \log |q| \right].$$

Pour  $t = 0$ , on posera  $M_0 = 1$  et pour  $t = n + 1$ ,  $N_{n+1}(n) = 1$ .

Nous allons majorer séparément  $M_t$  et  $N_t(n)$ .

LEMME 8. — On a :

$$M_t \leq \exp \left[ -\frac{t^3}{3} \left( \frac{1}{4c} + \log |q| \right) + O(t^2) \right] \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* — Nous commençons par changer les indices de sommation.

Posons  $h_i = -\ell_{t-1-i}$  pour  $i = 0, 1, \dots, t-1$ .

On a alors

$$M_t = \sum_{0 < h_0 < \dots < h_{t-1}} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (h_0^2 + \dots + h_{t-1}^2) - 2 \left( \sum_0^{t-1} (t-1-j) h_j \right) \log |q| \right].$$

Comparons  $M_{t+1}$  et  $M_t$ . On a

$$M_{t+1} = \sum_{0 < h_0 < \dots < h_{t-1}} \exp \left[ -\frac{1}{4c} (h_0^2 + \dots + h_{t-1}^2) - 2 \left( \sum_0^{t-1} (t-1-j) h_j \right) \log |q| \right] S(\underline{h}, h_t, t)$$

où  $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{t-1})$  et

$$S(\underline{h}, h_t, t) = \sum_{h_t > h_{t-1}} \exp \left[ -\frac{h_t^2}{4c} - 2 \left( \sum_0^{t-1} h_j \right) \log |q| \right].$$

Mais  $h_0 \geq 1, \dots, h_{t-1} \geq t$ , donc  $\sum_0^{t-1} h_t \geq 1 + \dots + t = t(t+1)/2$ .

Par suite

$$S(\underline{h}, h_i, t) \leq \exp[-t(t+1) \log |q|] \sum_{k \geq t+1} \exp\left[-\frac{k^2}{4c}\right].$$

On voit facilement que

$$\sum_{k \geq t+1} \exp\left[-\frac{k^2}{4c}\right] \leq m_1 \exp\left[-\frac{(t+1)^2}{4c}\right],$$

où  $m_1$  est une constante positive indépendante de  $t$ ; donc

$$M_{t+1} \leq \exp\left[-\left(\log |q| + \frac{1}{4c}\right)t^2 + m_2 t\right] M_t,$$

où  $m_2$  est une constante positive indépendante de  $t$ .

Par suite  $M_t \leq \exp\left[-\frac{t^3}{3}\left(\log |q| + \frac{1}{4c}\right) + m_3 t^2\right]$ , et l'assertion du lemme est démontrée.

LEMME 9. — On suppose  $8c \log |q| < 1$ ; soit  $\beta > 1$  tel que  $8c\beta \log |q| < 1$ .

On pose  $A(t, n) = \sum_j 16\beta(\beta-1)(\log |q|)^2(j+1)^2$ , où la sommation est étendue aux  $j$ ,  $t \leq j \leq n$ , tels que  $j+1-t \geq 8\beta c(j+1) \log |q|$ , et  $A(t, n) = 0$ , s'il n'existe pas de tels  $j$ .

$$B(t, n) = \sum_i 4c (\log |q|)^2(i+1)^2,$$

où la sommation est étendue aux  $i$ ,  $t \leq i \leq n$ , tels que  $i+1-t < 8\beta c(i+1) \log |q|$ , et  $B(t, n) = 0$  s'il n'existe pas de tels  $i$ .

On a alors  $N_t(n) \leq \exp[-A(t, n) + B(t, n) + O(n^2)]$ , où la constante dans le  $O$  peut être prise indépendante de  $t$ .

Démonstration. — On a

$$N_t(n+1) = \sum_{0 \leq \ell_1 < \dots < \ell_n} \exp\left[-\frac{1}{4c}(\ell_0^2 + \dots + \ell_n^2) + 2\left(\sum_i^{\ell_n} j \ell_j\right) \log |q|\right] R(\underline{\ell}, n),$$

avec

$$R(\underline{\ell}, n) = \sum_{\ell_{n+1} > \ell_n} \exp\left[-\frac{1}{4c} \ell_{n+1}^2 + 2(n+1) \ell_{n+1} \log |q|\right],$$

et

$$R(\underline{\ell}, n) \leq T(t, n) = \sum_{k \geq n+1-t} \exp \left[ -\frac{k^2}{4c} + 2(n+1)k \log |q| \right].$$

Pour majorer  $T(t, n)$  on distingue deux cas.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } n + 1 - t \geq 8\beta c(n+1) \log |q| = v(n).$$

On a alors pour  $k \geq n + 1 - t$

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{k^2}{4c} + 2(n+1)k \log |q| \right] &= \exp \left[ -\frac{k}{4c} (k - 8c(n+1)) \log |q| \right] \\ &\leq \exp [-2k(\beta - 1)(n+1) \log |q|]. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$T(t, n) \leq \sum_{k \geq v(n)} \exp [-2k(\beta - 1)(n+1) \log |q|],$$

donc

$$T(t, n) \leq \exp [-2v(n)(\beta - 1)(n+1) \log |q| + O(n)],$$

soit

$$T(t, n) \leq \exp [-16\beta(\beta - 1)c (\log |q|)^2 (n+1)^2 + O(n)].$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } n + 1 - t < 8\beta c(n+1) \log |q| = v(n).$$

Nous majorons alors  $T(t, n)$  en le séparant en deux parties.

La première est constituée par la somme sur les indices  $k \geq v(n)$ .

On obtient une majoration par une constante indépendante de  $n$  et de  $t$ , en utilisant le résultat du premier cas.

La seconde partie est constituée par la somme sur les indices  $k \leq v(n)$ .

Nous majorons cette partie par le produit du nombre de termes, qui est un  $\exp(O(\log n))$ , par le terme maximal de cette somme.

La fonction  $-\frac{x^2}{4c} + 2(n+1)x \log |q|$  atteint son maximum en  $x_0 = 4c(n+1) \log |q|$ , et ce maximum est  $4c (\log |q|)^2 (n+1)^2$ , de sorte que au total, la première partie de la somme étant inférieure à la seconde, on a

$$T(t, n) \leq \exp [4c (\log |q|)^2 (n+1)^2 + O(n)].$$

Ces deux majorations jointes à

$$N_t(n+1) \leq T(t, n)N_t(n) \quad \text{et} \quad N_t(t) = T(t, t-1)$$

donnent le résultat du lemme.

LEMME 10. — On pose  $\tau = c \log |q|$  et on suppose  $8\tau\beta < 1$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Alors, si on a

$$(i) \quad 16\tau^2(1 - (1 - 8\beta\tau)^3) < (4\tau + 1)(1 - 8\beta\tau)^3$$

et :

$$(ii) \quad \lambda^3 < \frac{4\beta(\beta - 1)}{c + 4\beta(\beta - 1)},$$

il existe une constante  $\mu > 0$  telle que pour tout  $t \in \{0, 1 \dots n\}$   $L_t(n) \leq \exp[-\mu n^3 + O(n^2)]$ , la constante  $\mu$  étant indépendante de  $t$  et la constante dans le  $O$  également.

Démonstration. — Nous allons distinguer plusieurs cas, en reprenant les majorations des lemmes 8 et 9.

1<sup>er</sup> cas :  $t > (1 - 8\beta\tau)(n+1)$ .

Dans ce cas, la somme  $A(t, n)$  est nulle, et

$$B(t, n) = 4c (\log |q|)^2 \sum_i^n (i+1)^2 = 4c (\log |q|)^2 \left[ \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right] + O(n^2),$$

donc

$$\begin{aligned} \log L_t(n) \leq 4c (\log |q|)^2 & \left[ \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(1-8\beta\tau)^3}{3} (n+1)^3 \right] \\ & - \frac{(1-8\beta\tau)^3}{3} \left( \log |q| + \frac{1}{4c} \right) (n+1)^3 + O(n^2). \end{aligned}$$

La condition (i) étant équivalente à

$$\frac{4}{3} c (\log |q|)^2 [1 - (1 - 8\beta\tau)^3] - \frac{(1 - 8\beta\tau)^3}{3} \left( \log |q| + \frac{1}{4c} \right) < 0,$$

on a le résultat désiré.

2<sup>e</sup> cas :  $\lambda(1-8\beta\tau)(n+1) < t \leq (1-8\beta\tau)(n+1)$ .

Nous négligeons le terme  $-A(t, n)$  qui est négatif ou nul.

On a

$$B(t, n) \leq \frac{4}{3} c (\log |q|)^2 \left[ \frac{t^3}{(1-8\beta\tau)^3} - t^3 \right] + O(t^2),$$

donc

$$\log L_t(n) \leq \left\{ \frac{4c}{3} (\log |q|)^2 \left[ \frac{1}{(1-8\beta\tau)^3} - 1 \right] - \frac{1}{3} \left( \log |q| + \frac{1}{4c} \right) \right\} t^3 + O(t^2),$$

et compte tenu de la minoration de  $t$ , on a encore le résultat annoncé grâce à la condition (i).

3<sup>e</sup> cas :  $t \leq \lambda(1-8\beta\tau)(n+1)$ .

Alors, en notant  $[\lambda(n+1)]$  la partie entière de  $\lambda(n+1)$ , on a

$$A(t, n) \sum 16\beta(\beta-1) (\log |q|)^2 (j+1)^2,$$

où la sommation est étendue aux  $j$  entre  $[\lambda(n+1)]$  et  $n$ .

On a donc

$$A(t, n) \geq 16\beta(\beta-1) (\log |q|)^2 ((n+1)^3/3 - \lambda^3(n+1)^3/3) + O(n^2).$$

D'autre part, on a

$$B(t, n) \leq 4c (\log |q|)^2 \sum (i+1)^2,$$

où la sommation est étendue aux  $i$  entre  $t$  et  $[\lambda(n+1)]$ .

Il en résulte que

$$B(t, n) \leq 4c (\log |q|)^2 \lambda^3(n+1)^3/3 + O(n^2).$$

Par suite, en négligeant le terme  $-t^3/3(\log |q| + 1/(4c)) + m_3 t^2$ , on obtient

$$\log L_t(n) \leq \{-16/3\beta(\beta-1) (\log |q|)^2 (1-\lambda^3) + 4c/3 (\log |q|)^2 \lambda^3\} n^3 + O(n^2)$$

et nous aurons encore la conclusion désirée si le coefficient de  $n^3$  est négatif, ce qui est la condition (ii).

LEMME 11. — Soit  $y_0$  la racine dans  $[0, 1]$  de l'équation :

$$y^5 - y^4 + y^3 - 6y^2 + 10y - 4 = 0$$

(on a  $y_0 = 0,5988\dots$ ).

Alors la conclusion du lemme 10 est réalisée si on a :

$$8c \log |q| < y_0.$$

*Démonstration.* — Seule la condition (i) du lemme 10 est à réaliser ; en effet, si pour un  $\tau$  il existe  $\beta$  vérifiant (i), on choisit  $\lambda \in ]0, 1[$  suffisamment petit pour que (ii) soit réalisée.

Pour avoir un couple  $(\beta, \tau)$  tel que la condition (i) du lemme 10 soit réalisée, il suffit d'avoir un réel  $\tau$  tel que le couple  $(1, \tau)$  vérifie une telle inégalité, puisque en prenant  $\beta > 1$  et assez proche de 1 elle est encore réalisée.

On est donc conduit à chercher la valeur maximale de  $\tau$  telle que l'on ait :

$$16\tau^2(1 - (1 - 8\tau)^3) < (4\tau + 1)(1 - 8\tau)^3$$

ou encore, en posant  $y = 8\tau$ ,

$$y^5 - y^4 + y^3 - 6y^2 + 10y - 4 < 0.$$

Une étude de la fonction constituant le premier membre de cette inégalité montre qu'elle est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et s'annule en un point  $y_0 = 0,5989\dots$ , d'où le lemme.

#### 4.2. Démonstration du théorème 3 et du corollaire.

*Démonstration du théorème 3.* — D'après le lemme 11, il existe sous les conditions du théorème 3, une constante  $\mu > 0$  indépendante de  $n$  et  $t$ , telle que :

$$L_t(n) < \exp(-\mu n^3 + O(n^2))$$

où la constante dans le  $O$  peut être prise indépendante de  $t$ .

D'après la formule (7) on a aussi

$$L(n) \leq (n+1) \exp(-\mu n^3 + O(n^2)) = \exp(-\mu n^3 + O(n^2)),$$

de sorte que d'après (6),

$$|K(n)| \leq \exp(-\mu n^3 + (n+1)\lambda + (n^2+n) \log(1+|q|^{-1}) + O(n^2)).$$

Par suite,  $K(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Comme, par hypothèse, c'est un entier, il est nul à partir d'un certain rang, et la suite  $f(q^n)$  est donc récurrente linéaire d'après le critère de Kronecker (cf. [1], page 166).

Il existe donc un entier naturel  $s$  et des constantes  $w_j$  non toutes nulles, telles que l'on ait

$$\sum_{j=0}^s w_j f(q^{n+j}) = 0, \quad \text{pour tout } n \text{ assez grand.}$$

Soit  $g(z)$  la fonction  $\sum_{j=0}^s w_j f(zq^j)$ .

La fonction  $g$  est, comme  $f$ , analytique dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ , et on vérifie

$$|g|(r) \leq \exp(c(\log r)^2 + O(\log r)).$$

D'autre part,  $g(q^n)$  est nul pour tout  $n$  assez grand, disons  $n \geq n_0$ . On en déduit en posant  $h(z) = \prod (1 - z/q^n)$ , où le produit est fait sur les entiers naturels  $n \geq n_0$ , que l'on a

$$g(z) = e(z)h(z)$$

où la fonction  $e(z)$  est analytique dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

La formule (5-4) de [15], page 132 montre alors que

$$\log |h|(r) = (\log r)^2 / (2 \log |q|) + O(\log r).$$

D'autre part, si  $z$  est un nombre complexe de module  $r$ ,  $\log |h(z)|$  est équivalent à  $\log |h|(r)$ , pour une suite de rayons  $r$  tendant vers l'infini ([15], page 136). Soit  $U$  cette suite de rayons.

Par suite, on a l'inégalité suivante pour  $r$  assez grand,  $r \in U$ :

$$|e|(r) \leq \exp((c - 1/(2 \log |q|))(\log r)^2 + o((\log r)^2)).$$

Posons  $e(z) = \sum u(k)z^k$ , où la sommation se fait sur les éléments de  $\mathbb{Z}$ .



Les inégalités de Cauchy montrent que :

$$|u(k)| \leq \exp((c - 1/(2 \log |q|))(\log r)^2 - k \log r + o((\log r)^2))$$

pourvu que  $r$  soit assez grand,  $r \in U$ .

Comme  $c - 1/(2 \log |q|) < 0$ , on voit en faisant tendre  $r$  vers l'infini,  $r \in U$ , que  $u(k)$  est nul pour tout  $k$ , autrement dit  $e(z)$  est la fonction nulle, et donc aussi  $g(z)$ .

Soit  $P(X)$  le polynôme  $P(X) = \sum w_j X^j$ , qui est non nul.

Si le développement de Laurent de  $f$  est  $f(z) = \sum c(k)z^k$ , le coefficient de Laurent de  $z^k$  dans  $g(z)$  est  $P(q^k)c(k)$ ; par suite  $c(k)$  est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de  $k$ , et ceci termine la démonstration du théorème.

*Démonstration du corollaire.* — Posons  $v(z) = f(P(z) + Q(1/z))$ . La fonction  $v(z)$  est alors analytique dans  $\mathbb{C}$  privé de l'origine, et  $v(q^n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $p = \max(s, t)$ . On a alors l'inégalité

$$|v|(r) \leq \exp(\alpha p^2 / \log |q| (\log r)^2 + O(\log r)).$$

Le théorème 3 s'applique alors et montre que  $v(z) \in \mathbb{C}[z, 1/z]$ .

La relation  $f(P(z) + Q(1/z)) = v(z)$  montre alors que  $f$  est algébrique (si l'on pose  $u = P(z) + Q(1/z)$ , on a  $f(u) = v(z)$ ;  $z$  est une fonction algébrique de  $u$ , donc aussi  $v(z)$ ), et donc un polynôme puisqu'elle est entière, d'où le résultat.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. AMICE, Les nombres  $p$ -adiques, Presses universitaires de France, collections Sup., Paris, 1975.
- [2] A. BAKER, A note on integral-valued functions of several variables, Proc. Cambridge Phil. Soc., 63 (1967), 715-720.
- [3] A. BAZYLEWICZ, Critères de reconnaissabilité de fonctions analytiques et fonctions entières arithmétiques, Acta arith., 51 (1988), 311-319.
- [4] J.-P. BÉZIVIN, Une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de Gel'fond, Analysis, 4 (1984), 125-141.
- [5] P. BUNDSCHUH, Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen, J. für die reine angew. Math., 313 (1980), 116-132.

- [6] A. O. GELFOND, Sur les fonctions entières qui prennent des valeurs entières aux points  $\beta^n$ , Mat. Sb., 40 (1933), 42-47.
- [7] F. GRAMAIN, Fonctions entières arithmétiques. Séminaire P. Lelong-H. Skoda (Analyse) 1976-1977, Springer LN in Math., n° 694 (1978), 96-125.
- [8] F. GRAMAIN, Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique. Cinquante ans de polynômes, Proc. Paris, 1988 (M. Langevin et M. Waldschmidt, éd.), Springer LN in Math., n° 1415 (1990), 123-137.
- [9] N. HIRATA, Indépendance linéaire de fonctions arithmétiques et presque arithmétiques, Public Univ. P. et M. Curie, n° 79, exposé 4, 1985-1986.
- [10] C. PISOT, Sur les fonctions arithmétiques à croissance exponentielle, CRAS, 222 (1946), 988-990.
- [11] C. PISOT, Über ganzwertige ganze Funktionen, Jahrb. Deutsche Math. Verein, 52 (1942), 95-102.
- [12] C. PISOT, Sur les fonctions arithmétiques et presque arithmétiques, CRAS, 222 (1946), 1027-1028.
- [13] G. POLYA, Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. circ. Math. Palermo, 40 (1915), 1-16.
- [14] R. ROBINSON, Integer-valued entire functions, Trans. Amer. Math. Soc., 153 (1971), 451-468.
- [15] G. VALIRON, General theory of integral functions, Chelsea publ. comp., New York, 1949.
- [16] R. WALLISSER, On entire functions assuming integer values in a geometric sequence. Théorie des nombres, C.R. Conf. Internat. Univ. Laval, 1987 (J. M. de Koninck et C. Levesque, éd.) de Gruyter, (1989), 981-989.

Manuscrit reçu le 11 avril 1990,  
révisé le 26 octobre 1990.

Jean-Paul BÉZIVIN,  
Université de Caen  
Mathématiques  
Esplanade de la Paix  
14032 Caen Cedex (France).