ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICE ORRO

Tangentes limites, cône de Whitney et régularité par intersection

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 3 (1990), p. 739-756

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_739_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 739-756

TANGENTS LIMITES, CONE DE WHITNEY ET REGULARITE PAR INTERSECTION

par Patrice ORRO

INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article les conditions de régularité $b_{\mathrm{cod}q}$ et b^*, sur des stratifications de R^N.

Plus précisément nous traduisons ces conditions en terme de dimension d'espaces de limites de tangents, des espaces conormaux et du cône de Whitney.

La première partie est essentiellement un rappel de définitions, des conditions de régularité et de la notion de stratification. Nous y introduisons également les espaces $T^q_Y X$ et $B^1_Y X$, définis pour tout couple de strates (X, Y), qui interviendront dans la partie 3.

Dans la seconde partie le résultat principal est le théorème 2.1, qui remplace dans le cadre différentiel le lemme des petits chemins du cas analytique.

Dans la partie 3, nous nous fixons un couple de strates (X^n, Y^p) et un point y de Y. Et nous montrons tout d'abord que la $b^r_{\mathrm{cod}q}$- régularité en y de ce couple est équivalente au fait que l'espace $T^q_y X$ (défini en 1.3.3) est contenu dans un fermé dont la dimension est strictement inférieure à celle de $G_{N-p-q}(N-p)$ (théorème 3.1.1). Ce qui nous permet, dans

Mots-clés : Stratifications – Régularité – Sous-analytiques – Fractals.
Classification A.M.S. : 58A35 – 32B10 – 14M15.

le cas où (X, Y) est b-régulier, d'affirmer que $b_{\mathrm{cod}q}$ est équivalent au fait que la dimension topologique de $T_y^q X$ est strictement inférieure à celle de $G_{N-p-q}(N-p)$. Le théorème 3.1.2 donne quand à lui, et à partir de $B_y^1 X$, une condition nécessaire pour la b^*-régularité en y. Le théorème 3.2.1 globalise ces résultats locaux : si l'espace $T_Y^q X$ est non fractal l'ensemble des points de Y où l'on a $b_{\mathrm{cod}q}$ est de $H^{\dim Y}$ mesure de Hausdorff nulle si et seulement si $T_Y^q X$ a une bonne dimension; et, sous hypothèse de dimension sur $B_Y^1 X$ nous montrons que l'ensemble des points de la strate Y où l'on a la b^*-régularité est de $H^{\dim Y}$ mesure de Hausdorff nulle. La partie 3.3 est une application de ces résultats au cas sous-analytique : la partie la plus intéressante du théorème 3.3.2 est sans doute le (iv) où nous caractérisons complètement $b_{\mathrm{cod}q}$ et b^* en terme de dimension des espaces $T_y^q X$ et $B_y^1 X$, ce dernier espace s'identifiant à la fibre en y de l'éclatement de $W_Y(X, R^n)$ (défini en 1.3.2), c'est-à-dire, puisque pour ce résultat nous supposons (X, Y) b-régulier, à la fibre en y du cône de Whitney.

Je remercie David Trotman pour sa ténacité; l'Université Nationale du Bénin pour son hospitalité durant l'année 1987-1988.

1. DEFINITIONS

1.1. Stratifications.

Une stratification S d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^N$ est une partition localement finie de A en sous-variétés de $\mathbb{R}^N$. Nous noterons $|S|$ (support de la stratification) la réunion de $\{T \in S\}$, c'est-à-dire A. Nous supposerons que S vérifie la condition de frontière :

$$\forall (X, Y) \in S \;\; Y \cap \mathrm{adh}(X) \neq \emptyset \;\; \Rightarrow Y \subset \mathrm{adh}(X) \, .$$

1.2. Conditions de régularité.

1.2.1. *Notations.*

Les conditions que nous voulons étudier n'étant relatives qu'à des couples de strates nous ne considèrerons, dans tout ce qui suit, que des couples de strates (X, Y) d'une stratification donnée. X et Y seront donc des sous-variétés de R^N de classe C^a avec $a \geq 1$, telles que $Y \subset \mathrm{adh}(X)-X$. Nous poserons dim(X)=n, dim(Y)=p, avec $p < n < N$.

1.2.2. *Rappels.*

Soit y un point de Y :

(i) (X,Y) est *a-régulier* en y si, pour toute suite x_i de X telle que x_i tend vers y et $T_{x_i}X$ tend vers T dans $G_n(N)$ on a $T_yY \subset T$.

(ii) (X,Y) est *b-régulier* en y si pour toutes suites x_i de X, y_i de Y telles que x_i et y_i tendent vers y, $< x_iy_i >$ tend vers l dans P^{N-1}, et $T_{x_i}X$ tend vers T dans $G_n(N)$ on a $l \subset T$.

(iii) r étant une rétraction sur Y d'un voisinage tubulaire de Y, (X,Y) est dit *b^r-régulier* en y, si pour toute suite x_i de X tendant vers y telle que $< x_ir(x_i) >$ tend vers l dans P^{N-1} et $T_{x_i}X$ tend vers T on a $l \subset T$.

(iv) Soit q un entier compris entre 1 et cod(Y), $1 \leq q < N-p$ et soit E une condition de régularité en y (par exemple a, b...). Nous dirons que (X,Y) est *$E_{\mathrm{cod}q}$-régulier* en y s'il existe un ouvert dense U de l'espace des ailes de codimension q en y [(1)] tel que : $\forall W \in U \ \ W \pitchfork X$ [(2)] et $(W \cap X, Y)$ est E-régulier en y. Nous dirons que (X,Y) est E^*-régulier en y si $E_{\mathrm{cod}q}$ est vrai en y pour tous les q entre 1 et $N-p$. Nous noterons $A_q(y)$, éventuellement A_q si aucune confusion n'est possible, l'ensemble des ailes de codimension q au point y de Y, et nous écrirons $(X,Y) \in E(y)$ pour dire que le couple (X,Y) satisfait à la condition E en y. Dans la suite nous nous intéresserons principalement à l'étude des conditions $b_{\mathrm{cod}q}$ et $b^r_{\mathrm{cod}q}$ sur des espaces a ou b régulier.

1.3. Espaces tangents.

1.3.1. *Espaces des limites d'espaces tangents.*

Soit v l'application $x \in X \to T_xX \in G_n(N)$; son graphe graph$(v)$ est une sous-variété de classe C^{a-1} de $\mathbb{R}^N \times G_n(N)$. Si p_1 est la projection de $\mathbb{R}^N \times G_n(N)$ dans $\mathbb{R}^N$, on pose :

$$T_YX = p_1^{-1}(Y) \cap \mathrm{adh}(\mathrm{graph}(v));$$

(1) Une *aile de codimension* q en y est une sous-variété de R^N de codimension q contenant un voisinage de y dans Y. La topologie sur l'ensemble des ailes est induite par l'application $f : W \to T_yW \in G_{N-p-q}(N-p)$

(2) Si $\dim X + \dim Y < N, W \pitchfork X$ signifie $W \cap X = \emptyset$

$T_Y X$ est l'espace des tangents limites à X le long de Y,

$$T_Y X = \{(y,T) \in Y \times G_n N : \exists \{x_i\} \in X \;\; x_i \to y \;\; et \;\; T_{x_i} X \to T\};$$

$T_Y X$ est un "fibré" au-dessus de Y, nous noterons $T_y X$ la fibre en y (à distinguer du tangent en y à X qui lui n'existe que si y est dans X).

Remarque. — Si X et Y sont des sous-analytiques de $\mathbb{R}^N$, $T_Y X$ est aussi sous-analytique dans $\mathbb{R}^N \times G_n(N)$. En effet, d'après [DW] ou [V], l'application v est sous-analytique; on en déduit aisément que $T_Y X$ est sous-analytique et $\dim T_Y X < n$, car $T_Y X \subset \mathrm{adh}(\mathrm{graph}(v)) - \mathrm{graph}(v)$ et $\dim(\mathrm{graph}\, v) = n$ (cf [Hi],[Ha]).

1.3.2. *Espace conormal de X le long de Y.*

C'est l'espace des limites d'hyperplans tangents à X le long de Y; on peut le voir comme $\mathrm{adh}(P(T^*_X \mathbb{R}^N))|Y$, on le notera $W_Y(X, R^n)$. C'est aussi

$$\{(y,H) \in Y \times G_{N-1}(N) : \exists T \in T_y X \;\; T \subset H\}.$$

De même que $T_Y X$, $W_Y(X, R^n)$ est sous-analytique dès que X et Y le sont, il suffit de voir que $W_Y(X, R^n)$ est la projection sur $\mathbb{R}^N \times G_{N-1}(N)$ de

$$\{(y,T,H) : T \subset H\} \cap T_Y X \times G_{N-1}(N),$$

et on obtient la majoration $\dim W_Y(X, R^n) < N - 1$ pour la dimension de $W_Y(X, R^n)$, en remarquant que

$$W_Y(X, R^n) \subset \mathrm{adh}(P(T^*_X \mathbb{R}^N)) - P(T^*_X \mathbb{R}^N).$$

L'espace des limites de normales est très utilisé en théorie locale des singularités, voir par exemple les articles d'Henry et Merle et ceux de Teissier. Il est d'une utilisation constante en géométrie, notamment dans la théorie des systèmes différentiels (voir par exemple Kashiwara : notes de son cours à Paris-Nord en 1975-76).

1.3.3. *Espaces $B^1_Y X$ et $T^q_Y X$, cône de Whitney.*

Ces espaces s'introduiront naturellement dans la partie 3. Pour y dans Y et pour $1 \leq q < \mathrm{cod}\, Y$ on pose :

$$B^1_y X = \{(y,v,H) \in \{y\} \times P^{N-1} \times G_{N-1}(N) : \exists \{x_i\} \in X < x_i r(x_i) > \to v, \\ T_{x_i} X \to T, v \in T \subset H\},$$

$B^1_Y X$ est la réunion pour y dans Y des $B^1_y X$; dans le cas où le couple (X, Y) est *b*-régulier, $B^1_Y X$ s'identifie au cône de Whitney de [HM2].

$$T^q_y X = \{(y,P) \in \{y\} \times G_{N-p-q}(N-p) : \exists (v,H) \in B^1_y X \;\; v \in P \subset H\} \\ \cup \{(y,P) : \exists v \in \Lambda_y \;\; v \in P\}$$

où Λ_y est l'ensemble des mauvaises limites pour la $b_{\text{cod}q}$- régularité (cf. [NT]) c'est-à-dire :

$\Lambda_y = \{v \in P^{N-1} : \exists \{x_i\} \in X \ \ x_i \to y, T_{x_i}X \to T, < x_i r(x_i) > \to v$ et $v \notin T\}$.

$T^q_Y X$ est la réunion des $T^q_y X$.
$B^1_y X$ est fermé. $T^q_y X$ ne l'est pas toujours, mais il l'est si (X, Y) est b-régulier en y.

2. CONSTRUCTION D'AILES

Nous montrons dans ce paragraphe plusieurs lemmes techniques permettant de construire des ailes ayant un plan tangent donné au point d'étude y. Nous utiliserons pour cela le théorème d'extension de Whitney, dont on peut trouver une démonstration dans Tougeron [To] :

THÉORÈME. — *Si f est une application de classe C^k sur un fermé F de $\mathbb{R}^N$, f est la restriction à F d'une application de classe C^k définie sur $\mathbb{R}^N$ tout entier.*

Rappelons qu'une application f de classe C^k sur F est la donnée d'une famille f^a, où $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$ est un multi-indice de longueur inférieure à k, chaque f^a étant une application continue de F dans $\mathbb{R}$. Ces applications vérifiant en outre les conditions suivantes :
$\forall h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} |h| \leq k f^h(y) - D^h \circ T^h_x f(y) = o(||x-y||^{k-|h|})$ pour x, y dans F;

$$T^h_x f(y) = \sum_{b \leq h} f^b(x) \frac{(x-y)^b}{b!}, D^h = \frac{\partial^{|h|}}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \,.$$

Le théorème de Whitney nous dit que si les f^a vérifient les conditions ci-dessus, il existe $g \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que $D^h g(x) = f^h(x)$ pour x dans F et $|h| \leq k$. Considérons maintenant une aile W de codimension 1, pour le couple (X, Y) au point y. Si x_i et y_i sont des suites de points de $X \cap W$ et Y respectivement, tendant toutes les deux vers y, il existe une sous-suite de la suite des directions $< x_i y_i >$ qui converge vers une limite $l \in P^{N-1}$, et cette limite appartient à $P(T_y W)$.

Nous allons étudier quelles sont les conditions qui permettent d'affirmer qu'inversement, étant donnée une limite de direction l de P^{N-1} on peut associer une aile W vérifiant $l \in P(T_y W)$. On suppose donnée une projection r sur Y dans un voisinage de Y.

LEMME 2.1. — *Soit* $\{x_i\}$ *une suite de points de* $\mathbb{R}^N - Y$ *tendant vers le point* y *de* Y *;* v *une application de* $\{x_i\}$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *telle que* $v(x_i)$ *tende vers* v_o *dans* P^{N-1}*. Supposons que* $< x_i r(x_i) >$ *tende vers l dans* P^{N-1}*, et que* v_o *soit orthogonal à* $\mathbb{R}l + T_yY$ *; alors il existe une sous-suite de* $\{x_i\}$*, encore notée* $\{x_i\}$*, et une application f de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(\{x_i\}) = 0, \operatorname{grad} f(x_i) = v(x_i), \operatorname{grad} f(y) = v_o$ *et* $f^{-1}(0)$ *définisse une aile en* y *pour* Y.

Démonstration du lemme 2.1. — On suppose $y = 0$ et on se ramène à $Y = \mathbb{R}^p$. Pour cela on prend une carte C^1 en 0 pour Y, (U, g), telle que $g(U \cap Y) = V \cap \mathbb{R}^p$ et $dg(0) = \mathrm{id}$, V ouvert de $\mathbb{R}^N$; pour nouveau champ $v(x_i)$ on prend l'image du champ initial par $dg(x_i)$ et pour r la projection sur $\mathbb{R}^p$. Les conditions aux limites sont conservées. Ayant trouvé f pour $Y = \mathbb{R}^p$, l'application satisfaisant les conditions du lemme sera simplement $f \circ g^{-1}$.

Supposons donc $Y = \mathbb{R}^p$ et $y = 0$.

On étend le champ v sur $\mathbb{R}^p$ en prenant une section continue v du fibré normal à $\mathbb{R}^p$ telle que $v(0) = v_o$. Soit K_1 un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $K = K_1 \cup \{x_i\}$. On définit un champ de Whitney F sur K par : $F^o(x) = 0$ pour x dans K, $F^j(x) = v_j(x)$ si $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_N(x))$, $x \in K$. Il nous faut vérifier que $G^k(x, y)$ tend vers 0 avec $||x - y||$ pour x et y dans K et $|k| \leq 1$, avec $G^k(x, y) = (F^k(x, y) - D^k \circ T_x F(y))/||x - y||^{|k|-1}$.

Considérons les cas suivants :

(a) $k = (j)$:
on a $G^k(x, y) = v_j(x) - v_j(y)$ et la continuité uniforme de v sur K montre le résultat.

(b) $k = 0$:
$G^o(x, y) = -\sum_j v_j(x)(y_j - x_j)/||x - y|| = v(x) \cdot (x - y)/||x - y||$; x, y dans K.

- Si x et y sont dans K_1, $G^o(x, y) = 0$ car $v(x)$ est orthogonal à K qui est inclus dans $\mathbb{R}^p$.
- Si x et y sont des éléments de la suite $\{x_i\}$: on peut supposer que la direction $< 0x_i >$ tend vers une limite u, quitte à extraire une sous-suite. Nous allons encore extraire une sous-suite de façon à ce que $G^o(x, y)$ tende vers $v_o.u$, ce qui montrera que $G^o(x, y)$ tend vers 0 avec $||x - y||$ quand x et y sont dans x_i, étant donné que $v_o.u = 0$.

Pour ce faire on prend une sous-suite de x_i vérifiant la condition : si x_p et x_q sont dans la sous-suite et si $p < q$: $||x_p/||x_p|| - u|| < \varepsilon \Rightarrow$

$||(x_p - x_q)/||x_p - x_q|| - u|| < 2\varepsilon$ ce qui est possible car $(x_p - x_q)/||x_p - x_q||$ tend vers $x_p/||x_p||$ quand $q \to +\infty$.
Comme $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\nu > 0 \ ||x_p|| < \nu \Rightarrow ||x_p/||x_p|| - u|| < \varepsilon$, on voit que pour cette sous-suite on a : $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\nu > 0$ t.q x, y dans la sous-suite et $||x|| < \nu$, $||y|| < \nu$ implique $||(x-y)/||x-y|| - u|| < \varepsilon$.

Ceci étant, en prenant pour x_i la nouvelle suite extraite on obtient : $|G^o(x,y) - v(x).u| = ||v(x).(x-y)/||x-y|| - v(x).u||$ quantité inférieure à $||v(x)||||(x-y)/||x-y|| - u||$ qui tend vers 0 quand x et y sont dans x_i ; d'où le résultat lorsque x et y sont dans $\{x_i\}$.
- Si x est dans $\{x_i\}$ et y dans K_1, ou l'inverse :
$G^o(x,y) = v(x).(x-y)/||x-y|| = (v_o + \varepsilon(x)).(x-y)/||x-y||$, et, comme $\varepsilon(x)$ tend vers 0 dans les deux cas étudiés, il nous suffit de regarder $v_o.(x-y)/||x-y||$ (1) que l'on peut écrire $v_o.(x_i - r(x_i))/||x_i - y|| + v_o.(r(x_i)-y)/||x_i - y||$, expression égale à $v_o.(x_i - r(x_i))/||x_i - y||$; ainsi (1) devient $v_o.((x_iy_i)/||x_iy_i||)(||x_iy_i||/||x_iy||)$ avec $y_i = r(x_i)$, or $x_iy_i/||x_iy_i||$ tend vers l et il est facile de voir que $x_iy_i/||x_iy||$ est borné. De v_o orthogonal à l on déduit que $G^o(x,y)$ tend vers 0 dans le dernier cas envisagé.

Ainsi F est un champ de Whitney C^1 sur K, et donc, en utilisant le théorème de Whitney, il existe une fonction f de classe C^1, contenant un voisinage de 0 dans Y, telle que grad $f(x) = v(x)$ pour x dans K.

Remarque. — Si l'on suppose seulement que v_o est orthogonal à la limite u de $< x_iy >$, la démonstration précédente montre l'existence d'une hypersurface C^1 telle que grad$f(y) = v_o$ passant par y et les x_i. Soit maintenant (X, Y) un couple de sous-variétés différentielles, y un point de adh$(X) \cap Y$. Si la suite $\{x_i\}$ du lemme 2.1 est sur X nous allons montrer que l'on peut choisir $W = f^{-1}(0)$ de façon à ce que W soit transverse à X en les x_i et que $\lim T_{x_i}(X \cap W)$ soit choisie d'avance.

LEMME 2.2. — *Supposons sous les hypothèses du lemme 2.1 que $\{x_i\} \subset X$, $\lim T_{x_i}X = T$ et v_o orthogonal à $l + T_yY + T$ (i.e il existe une limite de vecteur normal à X en y orthogonale à $l + T_yY$). Alors si Q est un hyperplan transverse à T, on peut choisir f du lemme 2.1 de façon à ce que $W = f^{-1}(0)$ soit transverse à X aux points x_i et que $T_{x_i}(W \cap X)$ tende vers $T \cap Q$.*

Démonstration. — On peut supposer que $v(x_i)$ est normal à X en x_i ; posons $v_N = v_o$ orthogonal à $l + T_yY + T$ (notations du lemme 2.1 avec $y = 0$). Posons $H = v_N^{\perp}$ et choisissons une base orthonormale de H $h_1, \ldots, h_n, v_{n+1}, \ldots, v_{N-1}$, avec $h_1, h_2, ..., h_n$ base de T $(T + l + T_yY \subset$

H). Dans $[h_1, ..., v_N]$, Q a une équation du type $b_1 z_1 + ... + b_N z_N = 0$, $b_1, \cdots, b_N$ non tous nuls.

Pour toute application ε de la suite $\{x_i\}$ dans $\mathbb{R}^N$, telle que $\varepsilon(x_i)$ tende vers 0, on peut construire d'après le lemme 2.1 une application f_ε telle que $W_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(0)$ soit un germe d'aile C^1 et $\operatorname{grad} f_\varepsilon(x_i) = v(x_i) + \varepsilon(x_i), \operatorname{grad} f_\varepsilon(0) = v_N$. Regardons $T_{x_i}X$ et $T_{x_i}W_\varepsilon$, $T_{x_i}X$ a une base de la forme $h_1(x_i), ..., h_n(x_i)$ avec $h_j(x_i) = h_j + \sum \lambda_k^j(x_i) v_j$, $j = 1...n$, les $\lambda_k^j(x_i)$ étant des réels tendant vers 0 avec x_i; $T_{x_i}X$ admet alors pour équations dans la base $[h_1, ..., v_N]$:

$$z_{n+1} - z_1\lambda_{n+1}^1(x_i) - ... - z_n\lambda_{n+1}^n(x_i) = 0$$
$$\vdots$$
$$z_N - z_1\lambda_N^1(x_i) - ... - z_n\lambda_N^n(x_i) = 0.$$

Quand à $T_{x_i}W_\varepsilon$ il est donné par :

$$z_N - z_1\lambda_N^1(x_i) - ... - z_n\lambda_N^n(x_i) - z_1\varepsilon_1(x_i) - ... - z_N\varepsilon_N(x_i) = 0.$$

En prenant $\varepsilon_j(x_i) = c(x_i)b_j$ où $c(x_i)$ tend vers 0 avec x_i, W_ε et X sont transverses en x_i au voisinage de 0 et $T_{x_i}(W_\varepsilon \cap X)$ est égal à $T_{x_i}X \cap T_{x_i}W_\varepsilon$ dont les équations sont :

$$z_{n+1} - \lambda_{n+1}^1(x_i)z_1 - ... - z_n\lambda_{n+1}^n(x_i) = 0$$
$$\vdots$$
$$z_N - \lambda_N^1(x_i)z_1 - ... - \lambda_N^n(x_i)z_n = 0$$
$$\vdots$$
$$b_1z_1 + ... + b_Nz_N = 0$$

donc $T_{x_i}(W_\varepsilon \cap X)$ tend, quand x_i tend vers 0, vers le plan d'équations

$$[z_{n+1} = ... = z_N = 0 \ ; \ b_1z_1 + ... + b_Nz_N = 0],$$

qui est $T \cap Q$, d'où le résultat.

La transversalité de W et de X sur une suite de points tendant vers y suffit pour que $b_{\text{cod}1}$ ait un sens, toutefois le lemme précédent peut s'améliorer par

LEMME 2.3. — *Dans la conclusion du lemme 2.2, on peut remplacer W transverse à X aux points x_i par W transverse à X au voisinage de y .*

Démonstration. — Son principe est analogue à celui de la démonstration du lemme dans Trotman [Tr2]. Soit x_i une suite de X, telle que

$T_{x_i}X$ tende vers T, W l'aile du lemme 2.2 associée à un plan Q. Au voisinage de $0, W$ est l'image d'un plongement f de $(D, 0)$ dans $(\mathbb{R}^N, 0)$, D étant un disque de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^{N-1}$.

Soit y_i le point $f^{-1}(x_i)$; posons :

$$F = \{g : \text{plongements de } D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N \ t.q\ g(y_i) = x_i \text{ et } dg(y_i) = df(x_i)\},$$

$$V(s, f) = \{g : D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N \ t.q\ \|J^1 g(x) - J^1 f(x)\| < s \ \forall x \in \mathrm{adh}(D(0, r/2))\}.$$

$V(s, f)$ est un ouvert de la topologie faible de $C^1(D, \mathbb{R}^N)$ voisinage de f. $G = F \cap \mathrm{adh}(V(s/2, f))$ est un fermé dans la topologie faible, en effet les deux dernières propriétés des éléments de F sont conservées par limite faible, et la propriété de plongement l'est aussi, quitte à restreindre r et s. G est donc un espace de Baire pour la topologie forte.

Montrons que dans G il existe h transverse à X sur D : pour cela on recouvre X par une famille dénombrable de compacts de coordonnées K_j, tels que chaque x_i appartienne à un seul K_j, et que si $x_i \in K_j$ tout élément de G soit transverse à K_j sur adhD(r/2). L'ensemble $\{g \in G : g \pitchfork_D K_j\} = W_j$ est un ouvert dense de G pour la topologie forte, l'intersection des W_j est alors dense dans G, et comme G n'est pas vide il existe h de G transverse à X sur D. Le lemme 2.3 en résulte.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant qui est le résultat principal de cette section et qui nous sera très utile pour la démonstration des résultats du paragraphe 3.

THÉORÈME 2.1. — *Soit (X, Y) un couple de sous-variétés différentielles de R^N, y un point de $Y \cap \mathrm{adh}(X)$, P un plan de codimension q contenant T_yY, $q \leq n = \dim X$. Pour toute suite $\{x_i\}$ de X telle que* $\lim < x_i r(x_i) >= v \in P$, $\lim T_{x_i}X = T$, $\dim(T \cap P) \geq n - q + 1$, *et pour tout hyperplan Q transverse à T il existe une aile W en y de codimension q, qui contient une suite extraite $\{x_{i_k}\}$, qui est transverse à X et telle que $T_yW = P$, $\lim T_{x_{i_k}}(W \cap X) \subset T \cap Q$.*

Démonstration. — Puisque $\dim(T \cap P) \geq n - q + 1$, T et P sont tous les deux contenus dans un hyperplan H_1. Soit h_1 un vecteur unitaire normal à H_1, h_1 est une limite de vecteur normal à X. On peut donc appliquer le lemme 2.3 (h_1 est orthogonal à $v + T_yY + T + P$) : il existe une aile W^1 de codimension 1, transverse à X, passant par les x_i et telle que $T_yW^1 = H_1, \lim T_{x_i}(W^1 \cap X) = T \cap Q$. Puisque $v + T_yY$ est contenu dans P, si $h_2, ..., h_q$ sont $q - 1$ vecteurs tels que $h_1, ..., h_q$ forment une base de l'orthogonal de P on peut construire des ailes $W^2, ..., W^q$ de codimension

1 passant par les x_i avec $T_y W^i = H_i = h_i^{\perp}$, ceci d'après le lemme 2.1. On peut de plus supposer W^i transverse à X d'après les démonstrations des lemmes 2.1 et 2.3. $W^1 \cap W^2 \cap \ldots \cap W^q = W$ est alors une aile de codimension q, passant par les x_i, transverse à X dans un voisinage de 0. De plus $T_{x_i}(W \cap X)$ est contenu dans $T_{x_i}(W^1 \cap X)$, on a donc à la limite $\lim T_{x_i}(W \cap X) \subset T \cap Q$, d'où le théorème.

Celui-ci permet de choisir des ailes de codimension q en fonction de la limite que l'on veut pour le plan tangent à l'intersection de cette aile avec X, d'où son utilité pour l'étude des conditions de régularité par intersection.

Remarque. — Pour un plan P satisfaisant les conditions du théorème, sauf en ce qui concerne la codimension, c'est-à-dire si $q > n$, on trouve une aile W de codimension q ayant P pour plan tangent en y, et rencontrant X ; donc une aile non transverse à X.

3. REGULARITE PAR INTERSECTION

3.1. Régularité ponctuelle.

Nous nous intéresserons ici à la $b^r_{\mathrm{cod}q}$ régularité d'un couple (X, Y) en un point de $Y \cap \mathrm{adh}(X)$. Les notations sont celles de 1 et 2.

3.1.1. *$b_{\mathrm{cod}q}$ régularité.*

Considérons tout d'abord un plan P de codimension q en y, vérifiant les hypothèses du théorème 2.1, et soit W une aile associée par ce théorème à $Q = (Rv)^{\perp}$; en regardant sur la suite x_i on a $\lim T_{x_i}(W \cap X) \subset T \cap Q$ et, comme $v \notin T \cap Q$, $(W \cap X, Y)$ n'est pas b^r-régulier en y. Inversement, soit P un plan ne satisfaisant pas à ces hypothèses : pour toute suite x_i de X tendant vers y avec $< x_i r(x_i) > \longrightarrow v$ on a soit $v \notin P$, soit $P \pitchfork T$ i.e soit $W \cap X = \emptyset$ soit $P \pitchfork T$. Ainsi, si $x_i \in W \cap X$ pour W aile de codimension q telle que $T_y W = P$, on a $P \pitchfork T$ puisque $< x_i r(x_i) >$ tend vers v contenu dans P et $\lim T_{x_i}(W \cap X) = T \cap P$. Donc dès que $\lim x_i r(x_i) \in T$ pour toute suite x_i, on a la condition b pour $(W \cap X, Y)$. Ce qui nous amène à définir (cf. 1.3.3) :

$$B^1_y X = \{(y, v, H) \in \{y\} \times P^{N-1} \times G_{N-1}(N) : \exists \{x_i\} \in X < x_i r(x_i) > \longrightarrow v, \\ T_{x_i} X \to T, v \in T \subset H\},$$

et pour $1 \leq q < \operatorname{cod} Y$:

$$T_y^q X = \{(y,P) \in \{y\} \times G_{N-p-q}(N-p) : \exists (v,H) \in B_y^1 X \ \ v \in P \subset H\}$$
$$\cup \{(y,P) : \exists v \in \Lambda_y \ \ v \in P\}.$$

Nous avons le lemme :

LEMME 3.1. — *On a équivalence de*

(i) $\forall W \in A_q(y)\ T_yW = P \Rightarrow (W \cap X, Y)$ *est* b^r*-régulier en* y

(ii) $P \notin T_y^q X$.

Démonstration. — a) (ii) $\Rightarrow$ (i) : Puisque $P \in CT_y^q X$ on a, $(\forall (v,H) \in B_y^1 X\ v \notin P$ ou $\neg(P \subset H))$ **et** $(\forall v \in \Lambda_y\ v \notin P)$. Soit W une aile de codimension q en y telle que $T_yW = P$, $\{x_i\}$ une suite de points de $W \cap X$ qui tend vers y (si il n'existe pas de telle suite $W \cap X$ est vide et $(W \cap X, Y)$ est b -régulier), $< x_i r(x_i) >$ tend vers $v \in P$. On a donc $v \in T$ et $P \pitchfork T$, ainsi $v \in \lim T_{x_i}(W \cap X) = T \cap P$ et $(X,Y) \in b^r(y)$.

b) (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $P \in T_y^q X$, deux cas se présentent :
1- $\exists (v,H) \in B_y^1 X : v \in P \subset H$. Si $q \leq n$, on applique le théorème 2.1 avec $Q = (Rv)^{\perp}$. On obtient $\lim T_{x_i}(W \cap X) \subset T \cap Q$ qui ne contient pas v pour W donnée par le théorème 2.1. Ce qui montre $(W \cap X, Y) \notin b^r(y)$ pour $q \leq n$; pour $q > n$, le résultat est obtenu en utilisant la remarque suivant le théorème 2.1.
2- $\exists v \in \Lambda_y$ avec $v \in P$ et $v = \lim(x_i r(x_i))$. Le lemme 2.1 permet de construire une aile W de codimension q passant par les x_i. Si $q > n$ on a tout de suite $(W \cap X, Y) \notin b^r(y)$. Si $q \leq n$, de $T_{x_i}(W \cap X) \subset T_{x_i} X$ on déduit $\lim T_{x_i}(W \cap X) \subset \lim T_{x_i} X$ et donc $v \notin \lim T_{x_i}(W \cap X)$. D'où $(W \cap X, Y) \notin b^r(y)$, et le résultat.

Ce lemme montre que pour avoir $b^r_{\mathrm{cod}q}$ en y, il faut et il suffit que le complémentaire de $T_y^q X$ contienne un ouvert dense, ou encore que $T_y^q X$ soit contenu dans un fermé de dimension topologique strictement inférieure à celle de $G_{N-p-q}(N-p)$. Ce qui est réalisé en particulier dès que $T_y^q X$ est fermé de dimension strictement inférieure à $q(N-p-q)$ ou dès que $\dim_t T_y^q X < q(N-p-q)$.

Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME 3.1.1. — *Soit (X,Y) un couple de sous-variétés différentielles de R^N, y un point de $Y \subset$ adh$(X) - X$. On a équivalence de*

(i) $(X,Y) \in b^r_{\mathrm{cod}q}(y)$

(ii) *$T_y^q X$ est contenu dans un fermé de* $\dim_t < q(N-p-q)$.

Conséquences :

1) Si (X,Y) est b-régulier en y, on peut remplacer (ii) par $\dim_t T_y^q X < q(N-p-q)$; et (i) par $(X,Y) \in b_{\mathrm{cod}q}$. Cf. corollaire 3.1.1 .

2)

COROLLAIRE 3.1.1. — *Si (X,Y) est b-régulier en y, ou si (X,Y) est a-régulier et* $\dim_t T_y^q X = \dim_t \mathrm{adh}(T_y^q X)$, *on a équivalence de :*

$$\text{(i)}\quad (X,Y) \in b_{\mathrm{cod}q}(y) \quad \text{(ii)}\quad (X,Y) \in b^r_{\mathrm{cod}q}(y) \ .$$

Démonstration. — Seul (ii) $\Rightarrow$ (i) demande une démonstration. Pour cela il suffit de vérifier que $\dim_t T_y^q X < q(N-p-q)$ implique $b_{\mathrm{cod}q}$. Or soit $P \in CT_y^q X$ et $W \in A_q(y)$ tels que $T_y W = P$. Si $\{x_i\}$ est une suite de $W \cap X$ tendant vers y, on a, d'après le théorème précédent et sa démonstration $T_y Y \subset \lim T_{x_i}(W \cap X) = \lim T_{x_i} X \cap P$, d'où la a-régularité de $(W \cap X, Y)$ et le résultat.

3)

COROLLAIRE 3.1.2. — *Supposant (X,Y) b-régulier, on a équivalence de :*

(i) *(X,Y) est $b_{\mathrm{cod}1}$-régulier en y.*

(ii) *La dimension topologique de l'espace conormal $W_y(X, R^n)$ est strictement inférieure à $N-p-1$.*

Ce corollaire résulte directement du fait que $W_y(X,R^n) = T_y^1 X$ si on a b en y. Combiné avec les résultats de [O2], il permet de relier la densité des fonctions de Morse sur une stratification avec la $b_{\mathrm{cod}1}$-régularité, cf. [O2].

Remarques sur $\dim_t$ *et* $\dim_h$:
a) Si X est une variété topologique de dimension topologique n ($\dim_t X = n$), et $A \subset X$ un sous-ensemble de dimension (topologique) n, alors il existe un ouvert de X contenu dans A et réciproquement cf [HW].
b) Soit $A \subset X$ métrique, H^k la k-ième mesure de Hausdorff sur X. La dimension de Hausdorff de A, $\dim_h A$, est l'inf. des k tels que $H^k(A) = 0$.
c) On a toujours $\dim_t A \leq \dim_h A$.

3.1.2. *Conditions suffisantes pour la b^* régularité.*

Posons :

$A_1^q = \{(v,H,P) \in P^{N-p-1} \times G_{N-p-1}(N-p) \times G_{N-p-q}(N-p) : (v,H) \in B_y^1 X, v \in P \subset H\}$

$A_2^q = \{(v,P) \in P^{N-p-1} \times G_{N-p-q}(N-p) : v \in \Lambda_y, v \in P\}$.

Regardons les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} A_1^q & \xrightarrow{\alpha_1} & G_{N-p-q}(N-p) \\ \downarrow & & \\ B_y^1 X & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_2^q & \xrightarrow{\alpha_2} & G_{N-p-q}(N-p) \\ \downarrow & & \\ \Lambda_y & & \end{array}$$

T_y^q est la réunion des images de α_1 et α_2 : $T_y^q X = \alpha_1(A_1^q) \cup \alpha_2(A_2^q)$. Le calcul de la dimension de Hausdorff de A_1^q et A_2^q va nous permettre de donner une condition pour assurer que l'on a $b_{\mathrm{cod}q}$ en y. En considérant A_1^q et A_2^q comme fibrés au-dessus de $B_y^1 X$ et Λ_y, il est facile de vérifier les inégalités suivantes, cf. [O1] :

$$\dim_h A_1^q \leq \dim_h B_y^1 X + \dim\{P : v \in P \subset H\} = \dim_h B_y^1 X + (q-1)(N-p-q-1)$$

$$\dim_h A_2^q \leq \dim_h \Lambda_y + \dim\{v : v \in P\} = \dim_h \Lambda_y + q(N-p-q-1).$$

Ainsi, dès que $\dim_h B_y^1 X$ et $\dim_h \Lambda_y$ sont majorées respectivement par $N-p-1$ et q, strictement, celles de A_1^q et A_2^q sont toutes deux strictement inférieures à $q(N-p-q)$. Du fait que α_1 et α_2 sont deux applications lipschitziennes, la dimension de Hausdorff des images $\alpha_1(A_1^q)$ et $\alpha_2(A_2^q)$ est au plus $q(N-p-q)-1$. D'où la dimension de Hausdorff de $T_y^q X$ est strictement inférieure à $q(N-p-q)$ et l'on a $b_{\mathrm{cod}q}$ en y en vertu des résultats de 3.1.1 et de $\dim_t \leq \dim_h$, d'où le théorème :

THÉORÈME 3.1.2. — *Soit (X,Y) un couple de sous-variétés différentielles de R^N, y un point de $Y \subset \mathrm{adh}(X) - X$.*

(i) $\dim_h \Lambda_y < q$ *et* $\dim_h B_y^1 X < N-p-1 \Rightarrow (X,Y) \in b^r_{\mathrm{cod}q}(y)$.

(ii) *Si (X,Y) est b-régulier en y :* $\dim_h B_y^1 X < N-p-1 \Rightarrow (X,Y) \in b^*(y)$.

Remarques. — Dans le cas où X et Y sont des variétés C^1 quelconques, on n'a pas d'équivalences dans (i) et (ii). Il suffit pour le voir de prendre l'une des surfaces construites dans [OT1] de façon à avoir $b_{\mathrm{cod}1}$ et $\dim_h B_y^1 X = N-p-1$. Notons toutefois que, dans ces exemples, on a toujours $\dim_t B_y^1 X < N-p-1$. Au paragraphe 3.3 nous montrerons que dans le cas sous- analytique il y a équivalence des conditions, tout au moins dans (ii).

3.2. Régularité globale.

Nous utiliserons le résultat suivant, extrait de Federer [F] : Soit $p : E \to Y$, une application Lipschitz, alors

$$\int_Y H^{d-p}(E_y)dH^p(y) \leq CH^d(E).$$

E_y est la fibre de p en y, H^k la k-ième mesure de Hausdorff, C une constante. Si Y est de dimension p (Hausdorff), on a

$$\forall d' > d \ H^{d'}(E) = 0 \text{ et donc } \int_Y H^{d'-p}(E_y)dH^p(y) = 0,$$

d'où l'on tire $\forall d' > d$ H^p-presque partout $H^{d'-p}(E_y) = 0$. On en déduit H^p-presque partout $H^{d-p}(E_y) = 0$ et $\dim_h E_y \leq d - p$ pour H^p-presque tout y de Y. En appliquant ceci avec $E = T^1_Y X$ et E=$B^1_Y X$, qui sont des fibrés au-dessus de Y de fibres respectives $T^1_y X$ et $B^1_y X$ on obtient

LEMME 3.2.1. — (i) $\dim_h T^q_Y X < m \Rightarrow \dim_h T^q_y X < m - p$ *H^p-pp sur Y.*

(ii) $\dim_h B^1_Y X < N - 1 \Rightarrow \dim_h B^1_y X < N - p - 1$ *H^p-pp sur Y.*

Ce lemme et les résultats de 3.1 nous amènent à énoncer le :

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit (X, Y) un couple de sous-variétés de R^N, y un point de $Y \subset \text{adh}(X) - X$ où l'on a la a-régularité.*

(i) $\dim_h B^1_Y X < N - 1 \Rightarrow \text{adh}\{y \in Y : \dim_h B^1_y X < N - p - 1\} = Y \Rightarrow \text{adh}\{y \in Y : (X, Y) \in b^*(y)\} = Y$

(ii) $\dim_h T^q_Y X < p + q(N - p - q) \Rightarrow \text{adh}\{y \in Y : \dim_h T^q_y X < q(N - p - q)\} = Y \Rightarrow \text{adh}\{y \in Y : (X, Y) \in b_{\text{cod}q}(y)\} = Y$.

Si $T^q_Y X$ n'est pas fractal les trois conditions précédentes sont équivalentes

Démonstration. — La seule chose à vérifier est que dans le cas où $T^q_Y X$ n'est pas fractal on a l'implication $\text{adh}\{y \in Y : (X, Y) \in b_{\text{cod}q}(y)\} = Y \Rightarrow \dim_h T^q_Y X = p + q(N - p - q)$. Pour cela on linéarise Y comme dans [O1] et on remarque que si $\dim_t T^q_Y X = p + q(N - p - q)$, il y a un ouvert de $Y \times G_{N-p-q}(N-p)$ contenu dans $T_Y^q X$, on trouve donc un ouvert de Y au-dessus duquel $\dim_t T_y^q X = q(N-p-q)$, d'où le résultat en utilisant 3.1.1 conséquence 1.

3.3. Cas sous-analytique.

3.3.1. *Sous-analycité de T^q et B^1.*

Lorsque X et Y sont sous-analytiques, on montre facilement que $T_Y^q X$ et $B_Y^1 X$ sont sous-analytiques, ainsi que les fibres $T_y^q X$ et $B_y^1 X$, cf. [O1] et [OT2]. Par ailleurs on majore la dimension de $B_Y^1 X$ en remarquant que $B_Y^1 X \subset \partial\{(x, xr(x), H_x) : T_x X \subset H_x, x \in X\}$ et en utilisant [Ha], [Hi] on obtient : $\dim B_Y^1 X < \dim\{(x, xr(x), H_x) : x \in X, T_x X \subset H_x\} = N-1$. Ainsi dans le cas où X et Y sont sous-analytiques $\dim B_Y^1 X < N-1$.

Note : Dans le cas sous-analytique la dimension de Hausdorff et la dimension topologique coincident avec la notion usuelle de dimension.

3.3.2 *$b_{\mathrm{cod}q}$ et b^* régularité, cas sous-analytique.*

THÉORÈME 3.3.2. — *Soient X et Y deux sous-variétés de R^N qui sont des sous-analytiques, y un point de $Y \subset \mathrm{adh}(X) - X$.*

(i) $(X,Y) \in b^r_{\mathrm{cod}q}(y) \Leftrightarrow \dim T_y^q X < q(N-p-q)$.

(ii) *Si (X,Y) est a-régulier en y:* $b_{\mathrm{cod}q}(y) \Leftrightarrow b^r_{\mathrm{cod}q}(y)$.

(iii) $\dim \Lambda_y < q$ *et* $\dim B_y^1 X < N-p-1 \Rightarrow (X,Y) \in b^r_{\mathrm{cod}k}(y)$ $k \geq q$.

(iv) *Si (X,Y) est b-régulier en y :*
a) $\dim B_y^1 X < N-p-1 \Leftrightarrow (X,Y) \in b^*(y)$
b) $\dim T_y^q X < q(N-p-q) \Leftrightarrow (X,Y) \in b_{\mathrm{cod}q}(y)$.

Ces propriétés caractérisent la $b_{\mathrm{cod}q}$ et la b^*-régularité en un point pour les sous-analytiques en terme de dimension de fibres au-dessus de Y.

Démonstration. — Seule nécessite une démonstration l'implication $(X,Y) \in b^*(y) \Rightarrow \dim B_y^1 X < N-p-1$ de (iv) a). Tout le reste se déduit facilement des résultats des autres paragraphes. Pour la simplicité de l'écriture nous écrirons B à la place de $B_y^1 X$, et nous poserons $m = N-p$. Supposons que la dimension de B soit supérieure ou égale à $m-1$ et appelons u la projection sur $G_{m-1}(m)$ de la variété d'incidence $G = \{(v,H) \in P^{m-1} \times G_{m-1}(m) : v \in H)\}$.

Si P est un élément de $G_{m-q}(m)$: nous noterons P^ν l'orthogonal de P, l'application qui a P associe P^ν est un isomorphisme de $G_{m-q}(m) \to G_q(m)$; nous désignerons par $\overline{P}$ le projectivisé de P.

Après avoir stratifié u par le rang, de façon compatible avec B, soit T une strate de dimension maximale de B; T est une sous-variété de G de codimension inférieure à $m-2$. Si a est la dimension de $u(T)$ et b celle de $u^{-1}(H_o) \cap T$ pour H_o donné dans $u(T)$, on a, $a + b \geq m - 1$.

T est au voisinage d'un point (v_o, H_o) localement difféomorphe au produit $(F_o \cap T) \times u(T) \subset F_o \times G_{m-1}(m) \subset P^{m-1} \times G_{m-1}(m)$ si F_o est la fibre de u en H_o.

Si P est un plan de codimension q, posons $M(P) = \{(v, H) \in G : v \in P \subset H\}$. M(P) est une sous-variéte de G de dimension $m-2$, et P est dans T^q dès que $M(P)$ rencontre T.

LEMME. — *Pour q donné, $m - a \leq q \leq b + 1$, il existe $P \in G_{m-q}(m)$ tel que $M(P)$ coupe transversalement T.*

Admettons provisoirement le lemme :

En utilisant [GMP] Théorème 1.3.6, ou le lemme de Bertini-Kleiman, on montre que l'ensemble des P tels que $M(P)$ soit transverse à B est un ouvert de $G_{m-q}(m)$. Un point de cet ouvert rencontre $\{P \in G_{m-q}(m) : M(P) \cap T \neq \emptyset\}$ d'après le lemme. Il existe donc un ouvert de plans P tels que $M(P)$ coupe transversalement T dans G. Cet ouvert est contenu dans T^q, ainsi $\dim T^q = \dim G_{m-q}(m)$, et, d'après (iv) b), $b_{\mathrm{cod}q}$ n'est pas vérifié. Le théorème en découle.

Démonstration du lemme. — $M(P)$ s'identifie à $\overline{P} \times \overline{P^\nu} \subset P^{m-1} \times \check{P}^{m-1}$. Nous devons trouver P tel que le cycle $M(P)$, à coefficients dans Z_2, coupe transversalement la sous-variété T. Il est clair que $M(P)$ est transverse à T en (v, H) dès que $\overline{P}$ est transverse à $F_o \cap T$ dans F_o et que $\overline{P^\nu}$ est transverse à $u(T)$ dans $\check{P}^{m-1}$. Avec les identifications actuelles F_0 s'interprète comme $\check{H}_0$.

Soit donc H_0 un point de $u(T)$. L'ensemble des plans P de codimension q dans $\mathbb{R}^m$ tels que $\overline{P^\nu}$ contient H_0 (i.e $\overline{P} \subset \check{H}_0$) est la grassmannienne $G_{m-q}(\check{H}_0)$. Ceux des plans pour lesquels $\overline{P^\nu}$ est transverse à $u(T)$ en H_0 forment un ouvert non vide W de cette grassmannienne. L'intersection $\overline{P^\nu} \cap u(T)$ est alors de dimension $a + q - m \geq 0$. La fibre $T \cap \check{H}_0$ est de dimension b. Il existe donc un ouvert $W' \subset$ W, tel que, pour tout P de W', le plan $\overline{P}$ de codimension $q - 1 \leq b$ dans $\check{H}_0$ coupe transversalement

$T \cap \check{H}_o$.

Ce qui démontre le lemme.

Remarques. — a) Dans [OT2] une partie de ce théorème est utilisée pour montrer l'existence des stratifications b et b^* régulière des sous-analytiques.

b) (iii) est à rapprocher du résultat de [NT] qui montre que le niveau de $b_{\mathrm{cod}q}$ régularité est $\dim \Lambda_y + 1$, sous l'hypothèse $\dim Y = 1$.

c) La proposition (iv) caractérise entièrement b^* et $b_{\mathrm{cod}q}$ en terme de dimension des fibres des projections $B^1_Y X \to Y$ et $T^q_Y X \to Y$.

BIBLIOGRAPHIE

[DW] Z. DENKOWSKA et K. WACHTA, Sur la sous-analycité de l'application tangente, Bull. Acad. Polon. Sci., 30 (1982), 329-331.

[F] H. FEDERER, Geometric measure theory, Springer-Verlag, B erlin, 1969.

[GMP] M. GORESKY et R. MACPHERSON, Stratified Morse theory, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[Ha] R. HARDT, Stratification of real analytic mappings and images, Invent. Math., 28 (1975), 193-208.

[Hi1] H. HIRONAKA, Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publ. Math. I.H.E.S., 36 (1969), 127-138.

[Hi2] H. HIRONAKA, Subanalytic sets, Number theory, in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1973, 453-493.

[HM1] J. P. G. HENRY et M. MERLE, Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, Proc. A. M. S. Summer Institute on singulariries, Arcata, 1981.

[HM2] J. P. G. HENRY et M. MERLE, Stratifications de Whitney d'un ensemble sous-analytique, C.R.A.S., t. 308, Série I, (1989), 357-360.

[HW] W. HUREWICZ et H. WALLMAN, Dimension theory, Princ. Univ. Press, 1948.

[K] M. KASHIWARA, Systems of differential equations, Cours à Paris-Nord, rédigé par T. Monteiro-Fernandès. Progress in Math. Birkhauser (1983).

[LT] D.T. LÊ et B. TEISSIER, Cycles évanescents et conditions de Whitney II, Proc. Sympos. Pure Math., Providence 1983, Part 2, 65-103.

[NT] V. NAVARRO-AZNAR et D. TROTMAN, Whitney regularity and generic wings", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31 (1981), 87-111.

[O1] P. ORRO, Conditions de régularités, espaces tangents et fonctions de Morse sur les espaces stratifiés" Thèse, Orsay, 1984.

[O2] P. ORRO, Espaces conormaux et densité des fonctions de Morse, C.R.A.S., t.305, Série I, (1987), 269-272.

[OT1] P. ORRO et D. TROTMAN, Sur les fibres de Nash de surfaces à singularités isolées" C.R.A.S., Série I, t.299, (1984), 397-399.

[OT2] P. ORRO et D. TROTMAN, On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets", Bull. London Math. Soc., 18(1986), 185-191.

[T] B. TEISSIER, Variétés polaires II, Algebraic geometry, La Rabida, 1981, L.N.M. 961.

[To] J. C. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables", Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Tr1] D. TROTMAN, Comparing regularity conditions on stratifications, Proc. Sympos. Pure Math., 1983, Part 2, 575-586.

[Tr2] D. TROTMAN, Stability of transversality to a stratification implies Whitney *a*-regularity, Invent. Math., 50 (1979), 273-277.

[V] J. L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math., 36 (1976), 295-312.

[W] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math., (1964), 496-549.

Manuscrit reçu le 29 mai 1989,
révisé le 5 janvier 1990.

Patrice ORRO,
Université de Savoie
Département de Mathématiques
B.P. 1104
73011 Chambéry.