

BENT FUGLEDE

**Capacitabilité des ensembles sousliniens  
en théorie du potentiel**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 12 (1962), p. 293-297

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1962\\_\\_12\\_\\_293\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__293_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CAPACITABILITÉ DES ENSEMBLES SOUSLINIENS EN THEORIE DU POTENTIEL

par B. FUGLEDE (Copenhague).

---

Dans un travail récent M. Choquet [4] a défini et étudié la notion de *capacité abstraite* sur un ensemble  $E$  par rapport à un ensemble  $\mathcal{H}$  de parties de  $E$ , stable par réunion finie et intersection dénombrable, et tel que  $\emptyset \in \mathcal{H}$ . Pour une telle capacité, tout ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien (en particulier tout ensemble  $\mathcal{H}$ -borélien) est capacitabile. Ce théorème de Choquet s'applique en théorie du potentiel. Nous allons indiquer ici une telle application.

Soit  $E$  un espace localement compact et parfaitement normal <sup>(1)</sup>. Désignons par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties fermées et par  $\mathcal{G}$  l'ensemble des parties ouvertes de  $E$ . Grâce à l'hypothèse  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$  (ou, ce qui revient au même  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta$ ), les diverses définitions classiques de la notion de sous-ensemble borélien de  $E$  sont identiques. En particulier, il y a identité entre la notion d'ensemble  $\mathcal{F}$ -borélien et celle d'ensemble  $\mathcal{G}$ -borélien; nous les appelons ensembles *boréliens*. Nous référons à Choquet [3] pour la définition d'ensemble *souslinien* (i.e.  $\mathcal{F}$ -souslinien).

Considérons maintenant un noyau positif  $k = k(x, y) \geq 0$  sur  $E$ , i.e., une application semi-continue inférieurement de

(1) Un espace topologique est appelé *parfaitement normal* s'il est normal et si tout ensemble ouvert peut se représenter comme réunion dénombrable d'ensembles fermés; voir Bourbaki [1, § 4, exerc. 7]. La notion d'espace parfaitement normal est une extension propre de la notion d'espace métrisable, même au cas d'un espace compact; voir Bourbaki [1, § 2, exerc. 13].

$E \times E$  dans  $\bar{R}_+ = [0, +\infty]$ . Nous supposons qu'il s'agit d'un noyau *consistant* au sens de [5, p. 167]. Un noyau  $k \geq 0$  est dit *consistant* s'il satisfait aux conditions suivantes :

- 1)  $k$  est symétrique :  $k(x, y) = k(y, x)$ .
- 2)  $k$  est de type positif. Cela signifie que l'intégrale d'énergie

$$\|\mu\|^2 = \int_E \int_E k(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

est  $\geq 0$  pour toute mesure de Radon réelle  $\mu$  sur  $E$  telle que l'intégrale double est bien définie.

3) Si un filtre de Cauchy pour la structure uniforme *forte* <sup>(2)</sup> sur l'espace  $\mathcal{E}$  des mesures *positives* d'énergie finie converge *vaguement* <sup>(3)</sup> vers une mesure  $\mu_0 \in \mathcal{E}$ , alors ce filtre converge fortement vers  $\mu_0$ .

Ayant donné un noyau  $k$  de type positif, on définit la *capacité*  $\gamma(K)$  d'un ensemble compact  $K \subset E$  par

$$\gamma(K) = \sup_{\mu} \left( 2 \int d\mu - \|\mu\|^2 \right),$$

où  $\mu$  parcourt l'ensemble des mesures positives d'énergie finie portées par  $K$ . Il est bien connu que  $\gamma$  est une capacité au sens de Choquet [2], définie sur l'ensemble des parties compactes de  $E$ . Puis la capacité intérieure  $\gamma_*(A)$  et la capacité extérieure  $\gamma^*(A)$  d'un ensemble quelconque  $A \subset E$  se définissent par

$$\gamma_*(A) = \sup_{K \subset A} \gamma(K), \quad \gamma^*(A) = \inf_{G \supset A} \gamma(G),$$

où  $K$  et  $G$  désignent des ensembles respectivement compacts et ouverts.

*Définition.* On dit qu'un ensemble  $A \subset E$  est  *$\sigma$ -fini* s'il existe une suite d'ensembles  $X_n \subset E$  tels que  $\gamma^*(X_n) < +\infty$  et  $A \subset \bigcup X_n$ . D'après la définition de  $\gamma^*$ , on peut supposer que les

<sup>(2)</sup> La structure uniforme *forte* sur  $\mathcal{E}$  est définie par l'écart  $(\mu, \nu) \rightarrow \|\mu - \nu\|$  déduit de l'intégrale d'énergie ci-dessus. Pour que la topologie forte soit séparée, il faut et il suffit que le noyau  $k$  satisfasse au principe d'énergie.

<sup>(3)</sup> La structure uniforme *vague* sur  $\mathcal{E}$  est définie par l'ensemble des écarts

$$(\mu, \nu) \rightarrow \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|,$$

où  $f$  parcourt l'espace des fonctions continues sur  $E$  à valeurs réelles et à support compact dans  $E$ . La topologie vague est séparée.

$X_n$  sont ouverts. En vertu de l'hypothèse  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$ , on peut prendre pour  $X_n$  également des ensembles fermés (de capacité extérieure finie), autrement dit des éléments de l'ensemble  $\mathcal{H}$  défini ci-dessous.

**THÉORÈME (4).** — Soit  $k = k(x, y) \geq 0$  un noyau consistant sur un espace localement compact et parfaitement normal  $E$ . Tout ensemble souslinien et  $\sigma$ -fini  $A \subset E$  est capacitabile pour la capacité  $\gamma$  définie ci-dessus :  $\gamma_*(A) = \gamma^*(A)$ .

*Démonstration.* — Désignons par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des parties fermées  $H \subset E$  telles que  $\gamma^*(H) < +\infty$ . Sous les hypothèses du théorème, les résultats suivants ont été obtenus dans un travail antérieur [5, lemme 4.2.2, lemme 4.2.1 et théorème 4.4] :

a) Tout ensemble  $H \in \mathcal{H}$  est  $\gamma$ -capacitable.

b) Pour toute suite décroissante  $(H_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}$ , on a

$$\gamma^*(\bigcap H_n) = \lim \gamma^*(H_n).$$

c) Pour toute suite croissante  $(X_n)$  de parties de  $E$ , on a

$$\gamma^*(\bigcup X_n) = \lim \gamma^*(X_n).$$

En vertu de b) et c), la fonction croissante d'ensemble  $f = \gamma^*$  est une *capacité abstraite* sur  $(E, \mathcal{H})$  au sens de Choquet [4, définition 1]. Grâce à a), tout ensemble  $(f, \mathcal{H})$ -capacitable est  $\gamma$ -capacitable (5). D'après le théorème de Choquet [4, théorème 1] rappelé au début de la note présente, tout ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien est  $(f, \mathcal{H})$ -capacitable et par suite  $\gamma$ -capacitable. Il nous reste seulement à observer qu'il y a identité entre la notion d'ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien et celle d'ensemble souslinien

(4) Pour les ensembles boréliens  $\sigma$ -finis, ce théorème a été énoncé dans un travail antérieur [5, théorème 4.5]. La démonstration actuelle est plus directe que la démonstration originelle (non publiée) de l'auteur.

(5) Pour tout  $A \subset E$ , on définit  $f_*(A) = \sup f(H)$ , où  $H$  parcourt l'ensemble des parties de  $A$  appartenant à  $\mathcal{H}$ . Comme

$$f(H) = \gamma^*(H) = \gamma_*(H) \leq \gamma_*(A),$$

on a toujours

$$f_*(A) \leq \gamma_*(A).$$

Si  $A$  est  $(f, \mathcal{H})$ -capacitable, on obtient

$$\gamma^*(A) = f(A) = f_*(A) \leq \gamma_*(A),$$

d'où  $\gamma^*(A) = \gamma_*(A)$ , i.e.  $A$  est  $\gamma$ -capacitable. Voir aussi la remarque à la fin du travail.

(i.e.  $\mathcal{F}$ -souslinien) et  $\sigma$ -fini. Cela découle du lemme élémentaire suivant.

LEMME. — Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{F}$  une partie de  $\mathfrak{B}(E)$ , stable par intersection dénombrable. Soit  $\mathcal{H}$  une partie héréditaire de  $\mathcal{F}$ . Alors il y a identité entre la notion d'ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien et la notion d'ensemble  $\mathcal{F}$ -souslinien contenu dans la réunion d'une suite d'éléments de  $\mathcal{H}$ .

Nous référons à Choquet [3] pour la terminologie et les notations employées dans la démonstration de ce lemme. Soit d'abord  $A \subset E$  un ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien, et soit  $(H_s)$  un système déterminant sur  $\mathcal{H}$  (a fortiori sur  $\mathcal{F}$ ) de noyau  $A$ . On a, en particulier,  $A \subset \bigcup H_n$ . D'autre part, soit  $A$  un ensemble  $\mathcal{F}$ -souslinien contenu dans la réunion d'une suite d'éléments  $H_n \in \mathcal{H}$ . Comme  $A = \bigcup (A \cap H_n)$ , il suffit de montrer que  $A \cap H$  est  $\mathcal{H}$ -souslinien si  $A$  est  $\mathcal{F}$ -souslinien et  $H \in \mathcal{H}$ . Moyennant un système déterminant  $(F_s)$  sur  $\mathcal{F}$ ,  $A$  se représente comme

$$A = \bigcup_{\sigma} F_{\sigma}, \quad F_{\sigma} = \bigcap_s F_s,$$

donc

$$A \cap H = \bigcup_{\sigma} (F_{\sigma} \cap H), \quad F_{\sigma} \cap H = \bigcap_s (F_s \cap H).$$

Comme  $F_s \in \mathcal{F}$ ,  $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}$  est supposé multiplicatif, on obtient  $F_s \cap H \in \mathcal{F}$ . Vu que  $\mathcal{H}$  est supposé héréditaire dans  $\mathcal{F}$ , il résulte que  $F_s \cap H \in \mathcal{H}$ . Évidemment, l'application

$$s \rightarrow H_s = F_s \cap H$$

est un système déterminant sur  $\mathcal{H}$ ; et  $A \cap H$  est le noyau de ce système, donc un ensemble  $\mathcal{H}$ -souslinien.

*Remarque.* Revenons dans le cadre du théorème ci-dessus. En ce qui concerne la relation entre la capacité  $\gamma$  et la capacité abstraite  $f = \gamma^*$  par rapport à l'ensemble  $\mathcal{H}$  des parties fermées  $H$  de  $E$  telles que  $\gamma^*(H) < +\infty$ , nous avons vu <sup>(5)</sup> sous les hypothèses du théorème que  $f_*(A) \leq \gamma_*(A)$  pour tout  $A \subset E$ . Si  $k(x, x) > 0$  pour tout  $x \in \bar{E}$ , on a  $\gamma(K) < +\infty$  <sup>(6)</sup> pour

<sup>(5)</sup> Voir [5, § 2.1].

tout compact  $K \subset E$ , et par suite

$$f_*(A) = \gamma_*(A) \quad \text{pour tout} \quad A \subset E.$$

En fait, l'inégalité  $\gamma_*(A) \leq f_*(A)$  découle de la relation suivante pour un compact  $K \subset A$ :

$$\gamma(K) = \gamma^*(K) = f(K) \leq f_*(A),$$

valable puisque  $K \in \mathcal{K}$  par l'hypothèse additionnelle. L'identité  $f_* = \gamma_*$  signifie que  $(f, \mathcal{K})$ -capacitabilité équivaut à  $\gamma$ -capacitabilité.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI. *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Paris, Hermann, 1958.
- [2] G. CHOQUET. Theory of Capacities, *Annales Institut Fourier*, V (1953-54), pp. 131-295.
- [3] G. CHOQUET. Ensembles  $\mathfrak{K}$ -analytiques et  $\mathfrak{K}$ -sousliniens. Cas général et cas métrique, *Annales Institut Fourier*, IX (1959), pp. 75-81.
- [4] G. CHOQUET. Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Annales Institut Fourier*, IX (1959), pp. 83-89.
- [5] B. FUGLEDE. On the Theory of Potentials in Locally Compact Spaces, *Acta Mathematica*, 103 (1960), pp. 139-215.