ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

A. FABIANO
P. PIETRAMALA

Sur la convexité holomorphe. Théorie locale

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 3 (1990), p. 597-617
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_597_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 3 (1990), 597-617

SUR LA CONVEXITÉ HOLOMORPHE. THÉORIE LOCALE

par A. FABIANO & P. PIETRAMALA

Dans ce travail, on définit une notion de *privilège* pour les voisinages d'un point frontière d'un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$. L'existence de tels voisinages implique en particulier l'existence de sous-ensembles analytiques *touchant* l'ensemble ouvert considéré. On est ainsi conduit à définir une notion de *convexité géométrique* pour de tels ouverts.

Pour des ensembles ouverts convexes au sens de la définition précédente, on démontre des résultats de cohomologie locale analogues à ceux d'Andreotti-Grauert [1], précisant la topologie du dernier groupe de cohomologie non nul. On peut d'ailleurs montrer que la convexité usuelle, basée sur les propriétés de la forme de Levi d'une fonction exhaustive, implique la convexité géométrique.

Le passage du cas local au cas global sera l'objet d'un article ultérieur.

Observons enfin que le présent article se distingue des travaux de Ruget-Ramis [9] par la volonté d'éviter tout recours à la *machinerie faisceautique* : la cohomologie considérée est celle des formes différentielles de Dolbeault.

1. Polyèdres et polyèdres troués.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de $\mathbb{C}^n$ et soit $R = (r_1, \ldots, R_n)$ un élément de $(\overline{\mathbb{R}}_+^*)^n$ (on désigne par $\overline{\mathbb{R}}_+^*$ l'ensemble des nombres réels

Mots-clés : Polyèdre – Voisinage privilégié – Convexité géométrique – Cohomologie des formes différentielles.
Classification A.M.S. : 32F99.

strictement positifs auquel on adjoint $+\infty$). Comme d'habitude, on appelle *polydisque ouvert de centre a et rayon R* dans $\mathbb{C}^n$ l'ensemble

$$D(a;R) = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \ |z_j - a_j| < R_j \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,n\}.$$

On appelle *polyèdre* de $\mathbb{C}^n$ un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé dans un ensemble de la forme $\widetilde{u}^{-1}(D)$, où u désigne une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$, où D désigne un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ et où $\widetilde{u}$ désigne l'application définie sur $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ obtenue en posant

$$\widetilde{u}(z) = (z, u(z)).$$

La cohomologie d'un polyèdre de $\mathbb{C}^n$ est déterminée par le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration dans [10].

PROPOSITION 1. — *Soit P un polyèdre de $\mathbb{C}^n$.*

– *L'application canonique de $H^0(\mathbb{C}^n;\mathcal{O})$ dans $H^0(P;\mathcal{O})$ est d'image dense et les groupes de cohomologie $H^q(P;\mathcal{O})$ sont nuls pour tout entier $q \neq 0$.*

– *Les groupes de cohomologie à supports compacts $H^q_c(P;\mathcal{O})$ sont nuls pour tout entier $q \neq n$, le groupe de cohomologie $H^n_c(P;\mathcal{O})$ est séparé et l'application canonique de $H^n_c(P;\mathcal{O})$ dans $H^n_c(\mathbb{C}^n;\mathcal{O})$ est surjective.*

Soit a un point de $\mathbb{C}$ et soient $r = (r_0,\dots,r_m)$ et $R = (R_0,\dots,R_n)$ deux éléments de $(\overline{\mathbb{R}}_+)^{n+1}$ vérifiant les relations

$$|a| \leqslant r_0 + |a| < R_0 \quad \text{et} \quad r_j < R_j \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,n.$$

On appelle *polydisque troué* de $\mathbb{C}^{n+1}$, l'ensemble

$$E(a;r,R) = D_0 \cup \dots \cup D_n,$$

où l'on a posé

$$D_0 = \{(z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \ |z_0 - a| < r_0 \text{ et } |z_k| < R_k \text{ pour } k = 1,\dots,n\}$$

et, pour $j = 1,\dots,n$,

$$D_j = \{(z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \ |z_j| > r_j \text{ et } |z_k| < R_k \text{ pour } k = 0,\dots,n\}.$$

On appelle *soutien de $E = (a;r,R)$* le polydisque ouvert $D(0;R)$.

On dit qu'un sous-ensemble Q de $\mathbb{C}^n$ est un *polyèdre troué* s'il est à la fois ouvert et fermé dans un ensemble de la forme $\widetilde{u}^{-1}(E)$, où $u = (u_0, u')$

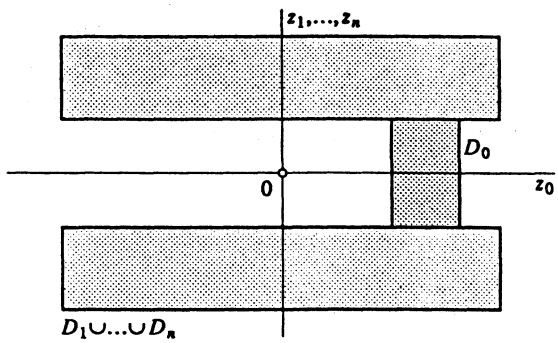

Figure 1

désigne une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$, où E désigne un polydisque troué de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ et où $\tilde{u}$ désigne l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ définie par

$$\tilde{u}(z) = (u_0(z), z, u'(z)).$$

On appelle *soutien de* Q, tout polyèdre P de $\mathbb{C}^n$ qui contient Q et dont toutes les composantes connexes rencontrent Q, tel que l'application canonique de $H^0(P; \mathcal{O})$ dans $H^0(Q; \mathcal{O})$ soit surjective.

La cohomologie d'un polyèdre troué de $\mathbb{C}^n$ est déterminée par le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration dans [10].

PROPOSITION 2. — *On suppose $n > 1$. Soit Q un polyèdre troué de $\mathbb{C}^n$ et soit P un soutien de Q.*

(1_A) *L'application canonique de $H^0(P; \mathcal{O})$ dans $H^0(Q; \mathcal{O})$ est un isomorphisme.*

(2_A) *Les groupes de cohomologie $H^q(Q; \mathcal{O})$ sont nuls pour tout entier $q \neq 0, n-1$.*

(3_A) *Le groupe de cohomologie $H^{n-1}(Q; \mathcal{O})$ est séparé.*

(1_B) *Les groupes de cohomologie à supports compacts $H_c^q(Q; \mathcal{O})$ sont nuls pour tout entier $q \neq 1, n$.*

(2_B) *L'application canonique de $H_c^n(P; \mathcal{O})$ dans $H_c^n(Q; \mathcal{O})$ est un isomorphisme.*

Dans la suite nous aurons besoin du *lemme d'approximation* suivant dont la démonstration est une simple adaptation d'un résultat classique de Cartan [3].

LEMME 1. — *Soit X une variété holomorphe à base dénombrable d'ensembles ouverts, soit $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive d'ensembles ouverts de X et soit q un entier strictement positif. Si pour tout entier ν l'application canonique de $H^{q-1}(A_{\nu+1};\mathcal{O})$ dans $H^{q-1}(A_\nu;\mathcal{O})$ est d'image dense, l'application canonique*

$$H^q(X;\mathcal{O}) \to \varprojlim_{\nu} H^q(A_\nu;\mathcal{O})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

2. Privilège.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$. Pour toute fonction φ indéfiniment dérivable dans X, à valeurs réelles, on pose

$$A(\varphi) = \{z \in X \mid \varphi(z) < 0\} \quad \text{et} \quad B(\varphi) = \{z \in X \mid \varphi(z) > 0\}.$$

Soit φ une telle fonction, et soit ζ un point de X tel que

$$\varphi(\zeta) = 0.$$

Nous dirons qu'un voisinage W de ζ dans $\mathbb{C}^n$ est *φ-privilégié* s'il est composante connexe d'un ensemble de la forme

$$W_0 = \{z \in D(\zeta;\rho) \mid \ |u(z)| < \rho_0\},$$

où $D(\zeta;\rho)$ désigne un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ relativement compact dans X, où ρ_0 désigne un nombre réel strictement positif et où u désigne une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, vérifiant les conditions suivantes :

(1) L'ensemble

$$\{z \in \partial D(\zeta;\rho) \mid \ |u(z)| \leqslant \rho_0\}$$

est contenu dans $B(\varphi)$.

(2) L'ensemble

$$\left\{x \in \overline{D}(\zeta;\rho) \mid u(z) = \frac{\rho_0}{2}\right\}$$

est contenu dans $B(\varphi)$.

(3) Pour tout point z_0 de $\overline{D}(\zeta;\rho)$, il existe une fonction f_{z_0} holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, qui s'annule au point z_0, et qui vérifie la relation

$$\mathrm{Re}(f_{z_0}(z)) < 0$$

pour tout point z appartenant à l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}(\zeta;\rho) \mid \varphi(z) < \varphi(z_0)\}.$$

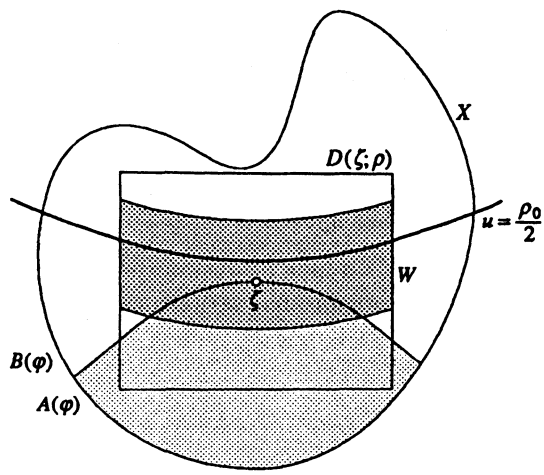

Figure 2

Remarque 1. — Si W est φ-privilégié et si ε est un nombre réel tel que les ensembles

$$\{z \in \partial D(\zeta;\rho) \mid \ |u(z) \leqslant \rho_0\} \quad \text{et} \quad \left\{z \in \overline{D}(\zeta;\rho) \mid u(z) = \frac{\rho_0}{2}\right\}$$

soient contenus dans $B(\varphi+\varepsilon)$, alors W est $(\varphi+\varepsilon)$-privilégié.

En particulier, si W est φ-privilégié, il existe un nombre réel ε_0 strictement positif tel que W soit $(\varphi+\varepsilon)$-privilégié pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$, de la forme

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) < 0\}$$

où φ désigne une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles sur $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que A est *géométriquement convexe* en un point frontière ζ, s'il existe un voisinage W de ζ qui soit φ-privilégié.

3. Le cas absolu.

Soit X un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et soit φ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles dans X, nulle à l'origine. Pour simplifier les choses, nous indiquerons simplement par A et B les ensembles $A(\varphi)$ et $B(\varphi)$. La situation géométrique est la suivante.

THÉORÈME 1. — *Soit W un voisinage φ-privilégié de l'origine.*

– Pour tout ensemble compact K de $A \cap W$, il existe un polyèdre P de $\mathbb{C}^n$ qui contienne K et soit relativement compact dans $A \cap W$.

– Pour tout ensemble compact L de $B \cap W$ et pour tout ensemble compact K de W, il existe un polyèdre troué Q de $\mathbb{C}^n$ qui contienne L et soit relativement compact dans $B \cap W$, et un soutien P de Q qui contienne K et soit relativement compact dans W.

Désignons par $D(0;\rho)$ un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ relativement compact dans X, par ρ_0 un nombre réel strictement positif et par u_0 une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, tels que W soit la composante connexe de l'origine dans l'ensemble

$$W_0 = \{z \in D(0;\rho) \mid \ |u_0(z)| < \rho_0\}$$

et tels que les conditions de privilège soient satisfaites. Remarquons, en passant, que W est un polyèdre de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout point ζ appartenant au polydisque fermé $\overline{D}(0;\rho)$ et pour tout ensemble compact K contenu dans ce polydisque, tel que l'on ait

$$\sup_{z\in K}(\varphi(z)) < \varphi(\zeta),$$

il existe une fonction holomorphe u sur $\mathbb{C}^n$ telle que l'on ait

$$\sup_{z\in K}|u(z)| < (u(\zeta)|.$$

Il suffit en effet de prendre pour u une fonction de la norme $\exp(f)$, où f désigne une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ qui s'annule au point ζ et qui vérifie la relation

$$\mathrm{Re}(f(z)) < 0$$

pour tout point z appartenant à l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}(0;\rho)|\varphi(z) < \varphi(\zeta)\}.$$

Démontrons la première assertion du théorème. Pour $j = 0, \ldots, n$, il existe un nombre réel r_j, strictement compris entre 0 et ρ_j, tel que K soit contenu dans l'ensemble

$$\{z \in D(0;r) \mid \ |u_0(z)| < r_0\}.$$

D'autre part, puisque l'ensemble $\overline{W} \cap \partial A$ est compact, il existe des fonctions holomorphes $u_1, \ldots, u_m$ sur $\mathbb{C}^n$ et des nombres réels strictement positifs $r_{n+1}, \ldots, r_{n+m}$, vérifiant les conditions suivantes :

(a) l'ensemble K est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \ |u_j(z)| < r_{n+j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m\}$$

(b) pour tout point z appartenant à l'ensemble $\overline{W} \cap \partial A$, on a

$$|u_j(z)| > r_{n+j}$$

pour un certain entier j compris entre 1 et m.

On pose alors

$$u' = (u_1, \ldots, u_m) \quad \text{et} \quad u = (u_0, u'),$$

et l'on désigne par $\widetilde{u}$ l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ définie par

$$\widetilde{u}(z) = (u_0(z), z, u'(z)).$$

Par construction, l'intersection de l'ensemble $\partial(A \cap W)$ et de l'ensemble $\widetilde{u}^{-1}(D(0;r))$ est vide et le polyèdre

$$P = \widetilde{u}^{-1}(D(0;r)) \cap A \cap W$$

a toutes les propriétés requises.

Pour démontrer la seconde assertion, on peut toujours supposer que K contient L. Pour $j = 1, \ldots, n$, l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}(0;\rho) \mid \ |z_j| = \rho_j \quad \text{et} \quad |u_0(z)| \leqslant \rho_0\}$$

est contenu dans B. Il existe donc un nombre réel r_j, strictement compris entre 0 et ρ_j, tel que l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}(0;\rho) \mid r_j \leqslant |z_j| \leqslant \rho_j \quad \text{et} \quad |u_0(z)| \leqslant \rho_0\}$$

soit encore contenu dans B.

Il existe alors des nombres réels $R_0, \ldots, R_n$ vérifiant les relations

$$\frac{\rho_0}{2} < R_0 < \rho_0 \quad \text{et} \quad r_j < R_j < \rho_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n,$$

tels que K soit contenu dans l'ensemble

$$\{z \in D(0; R) \mid \ |u_0(z)| < R_0\}.$$

Comme l'ensemble

$$\left\{z \in \overline{D}(0; \rho) \mid u_0(z) = \frac{\rho_0}{2}\right\}$$

est contenu dans B, il existe un nombre réel r_0 strictement compris entre 0 et $R_0 - \rho_0/2$, tel que l'ensemble

$$\{z \in \overline{D}(0; \rho) \mid \ |u_0(z) - \rho_0/2| \leqslant r_0\}$$

soit encore contenu dans B.

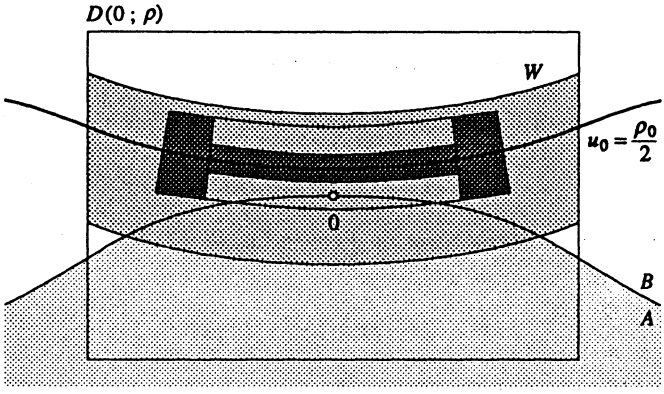

Figure 3

Il existe enfin des fonctions holomorphes $u_1, \ldots, u_m$ sur $\mathbb{C}^n$ et des nombres réels $r_{n+1}, \ldots, r_{n+m}, R_{n+1}, \ldots, R_{n+m}$ tels que

$$0 < r_{n+1} < R_{n+j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) l'ensemble $\overline{W} \cap \partial B$ est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \ |u_j(z)| < r_{n+j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m\},$$

(b) l'ensemble $\overline{W}$ est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \ |u_j(z)| < R_{n+j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m\},$$

(c) pour tout point z appartenant à l'ensemble L, on a

$$|u_j(z)| > r_{n+j}$$

pour un certain entier j compris entre 1 et m.

On pose alors

$$u' = (u_1, \ldots, u_m) \quad \text{et} \quad u = (u_0, u'),$$

et l'on désigne par $\widetilde{u}$ l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ définie par

$$\widetilde{u}(z) = (u_0(z), z, u'(z)).$$

Par construction, l'intersection de l'ensemble $\partial(B \cap W)$ et de l'ensemble

$$\widetilde{u}^{-1}(E(\rho_0/2; r, R))$$

est vide et le polyèdre troué

$$Q = \widetilde{u}^{-1}(E(\rho_0/2; r, R)) \cap B \cap W$$

a toutes les propriétés requises. On peut prendre comme soutien de Q le polyèdre P, union des composantes connexes de l'ensemble

$$P_0 = \widetilde{u}^{-1}(D(0; R)) \cap W$$

qui rencontrent Q. Ceci conclut la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1. — *Soit W un voisinage φ-privilégié de l'origine et soient $r_0, \ldots, r_n, \varepsilon$ des nombres réels strictement positifs vérifiant les relations*

$$r_j < \rho_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n.$$

– *Pour tout voisinage U de l'ensemble*

$$K = W \cap \{z \in \overline{D}(0; r) \mid \ |u(z)| \leqslant r_0 \quad \text{et} \quad \varphi(z) + \varepsilon \leqslant 0\}$$

il existe un polyèdre P de $\mathbb{C}^n$ contenant K et contenu dans U.

– *Pour tout voisinage V de l'ensemble*

$$L = W \cap \{z \in \overline{D}(0; r) \mid \ |u(z)| \leqslant r_0 \quad \text{et} \quad \varphi(z) - \varepsilon \geqslant 0\},$$

et pour tout voisinage U de l'ensemble

$$K = W \cap \{z \in \overline{D}(0;r) \mid \ |u(z)| \leqslant r_0\},$$

il existe un polyèdre troué Q de $\mathbb{C}^n$ contenant L et contenu dans V, et un soutien P de Q contenant K et contenu dans U.

Puisque W est encore $(\varphi + \varepsilon)$-privilégié pour ε suffisamment petit (remarque 1), l'assertion résulte immédiatement du théorème précédent.

COROLLAIRE 2. — *Conservons les notations et les hypothèses du théorème précédent.*

(1_A) *L'application canonique de $H^0(W;\mathcal{O})$ dans $H^0(A \cap W;\mathcal{O})$ est d'image dense.*

(1_B) *Les groupes de cohomologie $H^q(A \cap W;\mathcal{O})$ sont nuls, quel que soit l'entier q non nul.*

Supposons, en plus, que l'entier n soit strictement plus grand que 1.

(2_A) *L'application canonique de $H^0(W;\mathcal{O})$ dans $H^0(B \cap W;\mathcal{O})$ est un isomorphisme.*

(2_B) *Les groupes de cohomologie $H^q(B \cap W;\mathcal{O})$ sont nuls, quel que soit l'entier $q \neq 0$, $n-1$.*

(2_C) *Le groupe de cohomologie $H^{n-1}(B \cap W;\mathcal{O})$ est séparé.*

Il existe, en vertu du théorème précédent, une suite exhaustive $(P_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de polyèdres de $\mathbb{C}^n$ relativement compacts dans $A \cap W$. Les assertions (1_A) et (1_B) résultent alors immédiatement de la proposition 1 et du lemme 1.

Toujours en vertu du théorème précédent, il existe une suite exhaustive $(Q_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de polyèdres troués de $\mathbb{C}^n$ relativement compacts dans $B \cap W$ et une suite exhaustive $(P_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de polyèdres de $\mathbb{C}^n$ relativement compacts dans W tels que P_ν soit un soutien de Q_ν pour tout entier naturel ν.

Pour tout entier q strictement inférieur à $n-1$, l'application canonique de restriction de $H^q(Q_{\nu+1};\mathcal{O})$ dans $H^q(Q_\nu;\mathcal{O})$ est d'image dense. Pour $q = 0$, ceci résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(P_{\nu+1};\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^0(Q_{\nu+1};\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(P_\nu;\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^0(Q_\nu;\mathcal{O}) \end{array}$$

dans lequel les lignes sont surjectives et la première colonne d'image dense. Pour q compris entre 1 et $n-2$, ceci résulte de la proposition 2. Les assertions (2_B) et (2_C) résultent donc de la même proposition et du lemme 1. Démontrons l'assertion (2_A). Pour toute fonction holomorphe f sur $B \cap W$ et pour tout entier ν, il existe une fonction holomorphe g_ν sur P_ν telle que l'on ait

$$f|_{Q_\nu} = g_\nu|_{Q_\nu}.$$

Les fonctions $g_{\nu+1}$ et g_ν coïncident sur Q_ν et donc sur P_ν (rappelons que toutes les composantes connexes de P_ν rencontrent Q_ν). Par recollement, on définit une fonction holomorphe g sur W dont la restriction à $B \cap W$ coïncident avec f.

4. Le cas relatif.

Désignons par r un entier compris entre 1 et n, et posons

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^{n-r+1}.$$

Pour tout point z de $\mathbb{C}^n$, nous désignerons par z' (resp. z'') la projection canonique de z dans $\mathbb{C}^{r-1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n-r+1}$).

Pour tout sous-ensemble Y de $\mathbb{C}^n$, nous désignerons par $M(Y)$ le complexe double ainsi défini :

(1) pour tout couple (p,q) d'entiers, l'ensemble $M^{p,q}(Y)$ est le sous-espace de $\Omega^{0,p+q}(Y)$ constitué des formes différentielles homogènes de degré p en les $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{r-1}$ et de degré q en les $d\bar{z}_r, \ldots, d\bar{z}_n$,

(2) les différentielles d_{I} et d_{II} sont définies respectivement par

$$d_{\mathrm{I}}\omega = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r-1} d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_j} \quad \text{et} \quad d_{\mathrm{II}}\omega = \sum_{r \leqslant j \leqslant n} d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_j}.$$

Remarquons que les éléments de degré q du complexe latéral $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(Y)$[1] (resp. $\widetilde{M}_{\mathrm{II}}(Y)$) sont les formes différentielles de $\Omega^{0,q}(Y)$ holomorphes en les varia-

[1] Étant donné un complexe double

$$M = (M^{p,q}, d_{\mathrm{I}}^{p,q}, d_{\mathrm{II}}^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

les complexes latéraux $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}$ et $\widetilde{M}_{\mathrm{II}}$ sont définis par les relations

$$\widetilde{M}_{\mathrm{I}} = (\operatorname{Ker} d_{\mathrm{II}}^{p,0}, d_{\mathrm{I}}^{p,0})_{p\in\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \widetilde{M}_{\mathrm{II}} = (\operatorname{Ker} d_{\mathrm{I}}^{0,q}, d_{\mathrm{II}}^{0,q})_{q\in\mathbb{Z}}.$$

bles $z_r, \ldots, z_n$ (resp. $z_1, \ldots, z_{r-1}$), c'est-à-dire indépendantes de $d\bar{z}_r, \ldots, d\bar{z}_n$ (resp. $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{r-1}$) et à coefficients holomorphes en les variables $z_r, \ldots, z_n$ (resp. $z_1, \ldots, z_{r-1}$). Remarquons encore que le complexe total de $M(Y)$ s'identifie canoniquement au complexe de Dolbeault

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,0}(Y) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(Y) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^{0,n}(Y) \longrightarrow 0.$$

On a donc des applications linéaires canoniques

$$H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(Y)) \xrightarrow{\chi'} H^q(Y;\mathcal{O}) \xleftarrow{\chi''} H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{II}}(Y)).$$

Nous aurons besoin de deux lemmes techniques concernant le complexe double $M(Y)$.

LEMME 2. — *On désigne par K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^n$ et par U un voisinage ouvert de K, de la forme*

$$U = U' \times U'' \subseteq \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^{n-r+1} = \mathbb{C}^n,$$

et l'on suppose $r > 1$.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) *l'application canonique de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(U)$ dans $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(K)$ est d'image dense,*

(2) *les groupes de cohomologie $H^{p,q}(M_{\mathrm{II}}(K))$ sont nuls pour $q \neq 0$,*

les conditions suivantes sont aussi vérifiées :

(A) *l'espace $H^{r-1}(K;\mathcal{O})$ est indiscret*[2]

(B) *les groupes de cohomologie $H^q(K;\mathcal{O})$ sont nuls pour $q \geqslant r$.*

Il résulte de la condition (2) que l'application canonique

$$\chi' : H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(K)) \to H^q(K;\mathcal{O})$$

est un isomorphisme pour tout entier q. Puisque l'espace $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^q(K)$ est nul pour $q \geqslant r$, la condition (B) est vérifiée.

---

[2] Nous dirons qu'un espace topologique est *indiscret* si sa topologie est la moins fine des topologies, c'est-à-dire celle dont les seuls ensembles ouverts sont la partie vide et la partie pleine.

Pour démontrer (A), considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-2}(U) & \xrightarrow{d_I} & \widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-2}(K) & \xrightarrow{d_I} & \widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(K) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales indiquent les applications canoniques de restriction. La première flèche horizontale est surjective : un élément de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(U)$ est une forme différentielle de degré maximum en les $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{r-1}$, holomorphe en les variables $z_r, \ldots, z_n$, ou encore un élément de $\mathcal{O}(U''; \Omega^{0,r-1}(U'))$, et l'on sait que l'application

$$\overline{\partial} : \Omega^{0,r-2}(U') \to \Omega^{0,r-1}(U')$$

est surjective. La seconde flèche est d'image dense par hypothèse. La deuxième flèche horizontale est donc d'image dense, ce qui démontre l'assertion.

Pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^{n-r+1}$ et pour tout entier q, on désigne par (SEP) la propriété suivante du groupe de cohomologie $H^q(K; \mathcal{O})$:

(SEP) Pour qu'une forme différentielle ω appartenant à $\Omega^{0,q}(K)$ soit $\overline{\partial}$-exacte, il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de K et un représentant de ω dans l'adhérence de $\overline{\partial}(\Omega^{0,q-1}(U))$.

De manière analogue, pour tout entier p, on désigne par $(\mathrm{SEP})_{\mathrm{II}}$ la propriété suivante du groupe de cohomologie $H_{\mathrm{II}}^{p,q}(K)$

$(\mathrm{SEP})_{\mathrm{II}}$ Pour qu'une forme différentielle ω appartenant à $M^{p,q}(K)$ soit d_{II}-exacte, il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de K et un représentant de ω dans l'adhérence de $d_{\mathrm{II}}(M^{p,q-1}(U))$.

LEMME 3. — *On désigne par K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^n$ et par L un sous-ensemble compact de K. On suppose $r < n$.*

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) *les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(K))$ sont nuls pour tout entier $q \neq 0$,*

(2) *l'application canonique de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^q(K)$ dans $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^q(L)$ est bijective pour tout entier q,*

(3) *les groupes de cohomologie $H^{p,q}(M_{\mathrm{II}}(L))$ sont nuls pour $q = 1, \ldots, n-r-1$,*

(4) *le groupe de cohomologie* $H_{\mathrm{II}}^{0,n-r}(L)$ *vérifie la condition* $(\mathrm{SEP})_{\mathrm{II}}$,

les conditions suivantes sont aussi vérifiées :

(A) *l'application canonique de* $H^0(K;\mathcal{O})$ *dans* $H^0(L;\mathcal{O})$ *est bijective,*

(B) *les groupes de cohomologie* $H^q(L;\mathcal{O})$ *sont nuls pour* $q = 1,\dots,$ $n-r-1$,

(C) *le groupe de cohomologie* $H^{n-r}(L;\mathcal{O})$ *vérifie la condition* (SEP).

Il résulte de la condition (3) que l'application canonique

$$\chi' : H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(L)) \to H^q(L;\mathcal{O})$$

est bijective pour $q < n-r$ et de la condition (2) que l'application canonique de $H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(K))$ dans $H^q(\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(L))$ est bijective pour tout entier q. Compte tenu de la condition (1), ceci démontre les conditions (A) et (B).

Démontrons la condition (C). Soit U un voisinage ouvert de L et soit ω une forme différentielle appartenant à l'adhérence de $\overline{\partial}(\Omega^{0,n-r-1}(U))$. Cette forme différentielle s'écrit de manière unique

$$\omega = \sum_{0\leqslant p\leqslant n-r} \omega_p,$$

où, pour $p = 0,\dots,n-r$, la forme différentielle ω_p appartient à $M^{p,n-r-p}(U)$. Pour des raisons évidentes de degré, la forme différentielle ω_0 appartient à l'adhérence de $d_{\mathrm{II}}(M^{0,n-r-1}(U))$. En vertu de la condition (4), il existe donc une forme différentielle η_1 appartenant à $M^{0,n-r-1}(L)$ telle que l'on ait

$$\omega_0|_L = d_{\mathrm{II}}\eta_1.$$

Par récurrence sur l'entier p, on choisit alors, pour $p = 2,\dots,n-r-1$, une forme différentielle η_p appartenant à $M^{p-1,n-r-p}(L)$ telle que l'on ait

$$\omega_{p-1}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta_{p-1} = d_{\mathrm{II}}\eta_p.$$

On a en effet

$$d_{\mathrm{II}}(\omega_{p-1}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta_{p-1}) = (d_{\mathrm{II}}\omega_{p-1} + d_{\mathrm{I}}\omega_{p-2})|_L = 0$$

(rappelons que la forme différentielle ω est $\overline{\partial}$-fermée) et l'assertion résulte de la condition (3). Pour la même raison, il existe une forme différentielle η' appartenant à l'ensemble $M^{n-r-1,0}(L)$, telle que l'on ait

$$\omega_{n-r-1}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta_{n-r-1} = d_{\mathrm{II}}\eta'.$$

La forme différentielle $\omega_{n-r}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta'$ appartient à l'ensemble $M^{n-r,0}(L)$ et vérifie les conditions

$$d_{\mathrm{II}}(\omega_{n-r}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta') = 0 \quad \text{et} \quad d_{\mathrm{I}}(\omega_{n-r}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta') = 0.$$

Les conditions (1) et (2) impliquent alors l'existence d'une forme différentielle η'' appartenant à l'ensemble $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{n-r-1}(L)$ telle que l'on ait

$$\omega_n - r|_L - d_{\mathrm{I}}\eta' = d_{\mathrm{I}}\eta''.$$

On pose

$$\eta_{n-r} = \eta' + \eta'' \quad \text{et} \quad \eta = \eta_1 + \ldots + \eta_{n-r}.$$

On a donc, par construction,

$$d_{\mathrm{II}}\eta_{n-r} = d_{\mathrm{II}}\eta' = \omega_{n-r-1}|_L - d_{\mathrm{I}}\eta_{n-r-1} \quad \text{et} \quad d_{\mathrm{I}}\eta = d_{\mathrm{I}}\eta' + d_{\mathrm{I}}\eta'' = \omega_{n-r}|_L$$

et l'on vérifie aisément que l'on a

$$\overline{\partial}\eta = \omega|_L,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On conserve les notations du paragraphe 2. En particulier, on désigne par X un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et par φ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles dans X qui s'annule à l'origine. On désigne encore par r un entier compris entre 1 et n.

THÉORÈME 2. — *Soit W un voisinage ouvert de l'origine dans X, de la forme*

$$W = W' \times W'' = \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^{n-r+1} = \mathbb{C}^n,$$

où W' désigne un polydisque ouvert de centre d'origine dans $\mathbb{C}^{r-1}$ et W'' un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-r+1}$, qui soit $\varphi(z', \ )$-privilégié pour tout point z' appartenant à W'.

– On suppose $r > 1$. Tout sous-ensemble compact K de $A \cap W$ est contenu dans un sous-ensemble compact $\widetilde{K}$ de $A \cap W$ vérifiant les conditions suivantes :

(A) *Le groupe de cohomologie $H^{r-1}(\widetilde{K}; \mathcal{O})$ est indiscret.*

(B) *Les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{K}; \mathcal{O})$ sont nuls pour tout entier $q \geqslant r$.*

– *On suppose $r < n$. Pour tout sous-ensemble compact L de $B \cap W$ et pour tout sous-ensemble compact K de W qui rencontre toutes les composantes connexes de L, il existe un sous-ensemble compact $\widetilde{L}$ de $B \cap W$ contenant L et un sous-ensemble compact $\widetilde{K}$ de W contenant $\widetilde{L}$, vérifiant les conditions suivantes :*

(A) *L'application canonique de $H^0(\widetilde{K}; \mathcal{O})$ dans $H^0(\widetilde{L}; \mathcal{O})$ est bijective.*

(B) *Les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{L}; \mathcal{O})$ sont nuls pour $q = 1, \ldots, n - r - 1$.*

(C) *Le groupe de cohomologie $H^{n-r}(\widetilde{L}; \mathcal{O})$ vérifie la condition* (SEP).

Le polydisque W' est de la forme

$$W' = D(0; \rho') \quad \text{avec} \quad \rho' = (\rho_1, \ldots, \rho_{r-1})$$

et l'ensemble W'' est composante connexe de l'origine dans un ensemble de la forme

$$W_0 = \{z'' \in D(0; \rho'') \mid \ |u(z'')| < \rho_0\} \quad \text{avec} \quad \rho'' = (\rho_r, \ldots, \rho_n),$$

où le polydisque $D(0; \rho'')$, le nombre réel ρ_0 et la fonction holomorphe u vérifient les conditions de privilège.

Démontrons la première assertion. Il existe des nombres réels $\varepsilon, r_0, \ldots, r_n$ vérifiant les relations

$$\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad 0 < r_j < \rho_j \quad \text{per} \quad j = 0, \ldots, n,$$

tels que l'ensemble K soit contenu dans l'ensemble

$$\widetilde{K} = W \cap \{z \in \overline{D}(0; r) \mid \ |u(z'')| \leqslant r_0 \quad \text{et} \quad \varphi(z) + \varepsilon \leqslant 0\}.$$

Remarquons que, pour ε assez petit, l'ensemble W'' est $(\varphi(z', \ ) + \varepsilon)$-privilégié pour tout point z' appartenant à $\overline{D}(0; r')$ (remarque 1). Nous allons montrer que les ensembles $\widetilde{K}$ et W vérifient les conditions (1) et (2) du lemme 2.

Soit U un voisinage ouvert de $\widetilde{K}$ dans $A \cap W$. Pour tout point ζ' appartenant à $\overline{D}(0; r')$, l'ensemble $U(\zeta')$ est un voisinage ouvert de $\widetilde{K}(\zeta')$ dans $A(\zeta') \cap W$. En vertu du corollaire du théorème 1, il existe donc un polyèdre P'' de $\mathbb{C}^{n-r+1}$, contenant $\widetilde{K}(\zeta')$ et relativement compact

dans $U(\zeta')$. Pour z' assez voisin de ζ', ce polyèdre contient $\widetilde{K}(z')$ et est relativement compact dans $U(z')$.

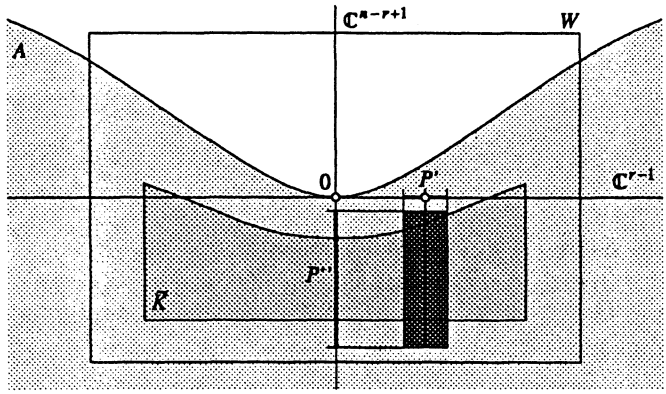

Figure 4

Il existe donc un recouvrement fini $(P'_\iota)_{\iota\in I}$ de $\overline{D}(0;r')$, formé de polydisques ouverts de $\mathbb{C}^{r-1}$ relativement compacts dans W', et, pour chaque indice ι appartenant à I, un polyèdre P''_ι de $\mathbb{C}^{n-r+1}$, contenant $\widetilde{K}(z')$ et relativement compact dans $U(z')$, pour tout point z' appartenant à P'_ι.

On pose

$$P_\iota = P'_\iota \times P''_\iota \quad \text{et} \quad P = \bigcup_{\iota\in I} P_\iota.$$

Un raisonnement élémentaire de topologie générale montre qu'il existe un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de $\widetilde{K}$, relativement compact dans P, qui vérifie la condition suivante :

(*) Pour tout point z appartenant à $\widetilde{U}$ tel que z' appartienne à P'_ι, le point z'' appartient à P''_ι.

Indiquons par $\widetilde{U}'$ la projection canonique de $\widetilde{U}$ dans $\mathbb{C}^{r-1}$, et par $(\chi'_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité sur $\widetilde{U}'$ subordonnée au recouvrement $(P'_\iota)_{\iota\in I}$ (chacune des fonctions χ'_ι a donc un support contenu dans P'_ι et la somme de ces fonctions est égale à 1 sur l'ensemble $\widetilde{U}'$). On définit encore une famille $(\chi_\iota)_{\iota\in I}$ de fonctions en posant

$$\chi_\iota(z) = \chi'_\iota(z')$$

pour tout indice ι appartenant à I et pour tout point z appartenant à P. En vertu de la condition (*), cette famille est une partition de l'unité sur $\widetilde{U}$, subordonnée au recouvrement $(P_\iota)_{\iota\in I}$.

Soit alors ω un élément de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(U)$. Pour tout indice ι appartenant à I, la forme différentielle $\omega|_{P_\iota}$ est limite, dans $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(P_\iota)$, d'une suite $(\beta_{\iota,\nu})_{\iota,\nu\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(P'_\iota \times W'')$ (en fait, pour tout point z' appartenant à P'_ι, la forme différentielle $\omega(z',\ )|_{P''_\iota}$ est limite, dans l'espace des formes différentielles holomorphes de degré $r-1$ sur P''_ι, d'une suite de formes différentielles de degré $r-1$, holomorphes sur W''). Posons, pour tout entier ν,

$$\beta_\nu = \sum_{\iota\in I} \chi_\iota \beta_{\iota,\nu}.$$

Puisque les fonctions χ_ι sont indépendantes des variables $z_r, \dots, z_n$, on définit ainsi une suite d'éléments de $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(W)$, dont on vérifie aisément qu'elle converge vers ω dans $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^{r-1}(\widetilde{U})$, ce qui démontre la première condition du lemme 2.

Pour vérifier la seconde condition, on désigne par q un entier strictement positif et par ω un élément de $M^{p,q}(U)$ tel que l'on ait

$$d_{\mathrm{II}}\omega = 0.$$

Pour tout indice ι appartenant à I, il existe une forme différentielle η_ι appartenant à $M^{p,q-1}(P_\iota)$ telle que l'on ait

$$d_{\mathrm{II}}\eta_\iota = \omega|_{P_\iota}$$

(en fait, pour tout point z' appartenant à P'_ι, la forme différentielle $\omega(z',\ )|_{P''_\iota}$ est $\overline{\partial}$-fermée, donc $\overline{\partial}$-exacte). La forme différentielle définie par

$$\eta = \sum_{\iota\in I} \chi_\iota \eta_\iota$$

appartient à $M^{p,q-1}(P)$ et, puisque les fonctions χ_ι sont indépendantes des variables $z_r, \dots, z_n$, on a

$$d_{\mathrm{II}}\eta|_{\widetilde{U}} = \omega_{\widetilde{U}},$$

ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

Pour démontrer la seconde, on peut toujours supposer que L est contenu dans K. Il existe alors des nombres réels $r_0, \dots, r_n$ vérifiant les relations

$$0 < r_j < \rho_j \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, n,$$

tels que K soit contenu dans l'ensemble

$$K_0 = W \cap \{z \in \overline{D}(0;r) \mid \ |u(z'')| \leqslant r_0\},$$

et un nombre réel ε strictement positif tel que L soit contenu dans l'ensemble

$$\widetilde{L} = W \cap \{z \in \overline{D}(0;r) \mid \ |u(z'')| \leqslant r_0 \quad \text{et} \quad \varphi(z) - \varepsilon \geqslant 0\}.$$

Remarquons que, pour ε assez petit, l'ensemble W'' est $(\varphi(z', \ ) - \varepsilon)$-privilégié pour tout point z' appartenant à $\overline{D}(0;r')$ (remarque 1). Indiquons par $\widetilde{K}$ l'union des composantes connexes de K_0 qui rencontrent $\widetilde{L}$ et montrons que les ensembles $\widetilde{K}$ et $\widetilde{L}$ vérifient les conditions (1), (2), (3) et (4) du lemme 3.

Soient V et U des voisinages ouverts de $\widetilde{L}$ et de $\widetilde{K}$ dans $B \cap W$ et dans W respectivement.

Comme dans la première partie de la démonstration, utilisant la deuxième partie du corollaire du théorème 1, on peut trouver un recouvrement fini $(P'_\iota)_{\iota \in I}$ de $\overline{D}(0,r')$, formé de polydisques ouverts de $\mathbb{C}^{r-1}$ relativement compacts dans W', et, pour chaque indice ι appartenant à I, un polyèdre troué Q''_ι de $\mathbb{C}^{n-r+1}$ et un soutien P''_ι de Q''_ι, tels que Q''_ι contienne $\widetilde{L}(z')$ et soit relativement compact dans $V(z')$, et tels que P''_ι contienne $\widetilde{K}(z')$ et soit relativement compact dans $U(z')$, pour tout point z' appartenant à P'_ι. On pose alors

$$Q_\iota = Q'_\iota \times Q''_\iota, \quad Q = \bigcup_{\iota \in I} Q_\iota \quad \text{et} \quad P_\iota = P'_\iota \times P''_\iota, \quad P = \bigcup_{\iota \in I} P_\iota$$

et l'on désigne par $\widetilde{V}$ et $\widetilde{U}$ des voisinages ouverts de $\widetilde{L}$ et de $\widetilde{K}$, relativement compacts dans Q et dans P respectivement, vérifiant la condition suivante :

(*) Pour tout point appartenant à $\widetilde{V}$ (resp. $\widetilde{U}$), tel que z' appartienne à Q'_ι (resp. P'_ι), le point z'' appartient à Q''_ι (resp. P''_ι).

Indiquons par $\widetilde{V}'$ et $\widetilde{U}'$ les projections canoniques de $\widetilde{V}$ et de $\widetilde{U}$ dans $\mathbb{C}^{r-1}$, et par $(\chi'_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité sur $\widetilde{V}' \cup \widetilde{U}'$ subordonnée au recouvrement $(P'_\iota)_{\iota \in I}$. On définit encore une famille $(\chi_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions en posant

$$\chi_\iota(z) = \chi'_\iota(z')$$

pour tout indice ι appartenant à I et pour tout point z appartenant à P. En vertu de la condition (*), cette famille est une partition de l'unité sur $\widetilde{V}$, subordonnée au recouvrement $(Q_\iota)_{\iota \in I}$, et une partition de l'unité sur $\widetilde{U}$, subordonnée au recouvrement $(P_\iota)_{\iota \in I}$.

La vérification de la condition 1 du lemme 3 est immédiate : l'ensemble K_0 possède un système fondamental de voisinages de la forme $R' \times R''$, où R' est un polydisque de $\mathbb{C}^{r-1}$ et R'' un polyèdre de $\mathbb{C}^{n-r+1}$.

Pour démontrer la condition 2 du même lemme, on désigne par ω une forme différentielle appartenant à $\widetilde{M}_I^q(V)$. Pour tout indice ι appartenant à I, il existe une forme différentielle η_ι appartenant à $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}^q(P_\iota)$ telle que

$$\eta_\iota|_{Q_\iota} = \omega|_{Q_\iota}$$

(en fait, pour tout point z' appartenant à Q'_ι, la forme différentielle holomorphe $\omega(z',\ )|_{Q''_\iota}$ est la restriction d'une forme différentielle holomorphe sur P''_ι). La restriction à $\widetilde{U}$ de la forme différentielle η définie par

$$\eta = \sum_{\iota\in I} \chi_\iota \eta_\iota$$

appartient à $\widetilde{M}_{\mathrm{I}}(\widetilde{U})$ (parce que les fonctions χ_ι sont indépendantes des variables $z_r, \ldots, z_n$), ce qui démontre l'assertion.

La condition 3 du lemme 3 se vérifie comme la condition 2 du lemme 2 dans la première partie du présent théorème.

Pour démontrer la condition 4, enfin, on désigne par ω une forme différentielle appartenant à l'adhérence de $d_{\mathrm{II}}(M^{0,n-r-1}(V))$. Pour tout indice ι appartenant à I, la forme différentielle $\omega|_{Q_\iota}$ appartient à l'adhérence de $d_{\mathrm{II}}(M^{0,n-r-1}(Q_\iota)$. Il existe donc une forme différentielle η_ι appartenant à $M^{0,n-r-1}(Q_\iota)$ telle que l'on ait

$$d_{\mathrm{II}}\eta_\iota = \omega|_{Q_\iota}$$

(en fait, pour tout point z' appartenant à Q'_ι, la forme différentielle $\omega(z',\ )|_{Q''_\iota}$ est $\overline{\partial}$-exacte). La restriction à $\widetilde{V}$ de la forme différentielle

$$\eta = \sum_{\iota\in I} \chi_\iota \eta_\iota$$

appartient à l'ensemble $M^{0,n-r-1}(\widetilde{V})$ et l'on a

$$d_{\mathrm{II}}(\eta|_{\widetilde{V}}) = \omega|_{\widetilde{V}},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE . — *Conservons les notations et les hypothèses du théorème précédent.*

– *On suppose* $r > 1$.

(1_A) *Le groupe de cohomologie* $H^{r-1}(A \cap W; \mathcal{O})$ *est indiscret.*

(1_B) *Les groupes de cohomologie* $H^q(A \cap W; \mathcal{O})$ *sont nuls pour tout entier* $q \geqslant r$.

– *On suppose* $r < n$.

(2_A) *L'application canonique de* $H^0(W; \mathcal{O})$ *dans* $H^0(B \cap W; \mathcal{O})$ *est bijective.*

(2_B) *Les groupes de cohomologie* $H^q(B \cap W; \mathcal{O})$ *sont nuls pour* $q = 1, \ldots, n-r-1$.

(2_C) *Le groupe de cohomologie* $H^{n-r}(B \cap W; \mathcal{O})$ *est indiscret.*

La démonstration est analogue à celle du corollaire 2 du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 193-259.

[2] A. ANDREOTTI et A. KAS, Duality on complex spaces, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 27 (1973), 187-263.

[3] H. CARTAN, Théorie des fonctions de plusieurs variables, Séminaires E.N.S. 1951-1952, Paris 1952.

[4] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton N.J., 1956.

[5] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[6] J.J. KOHN, Boundary Regularity of $\overline{\partial}$ in Recent Developments in Several Complex Variables, Princeton University Press, Princeton N.J. 1981, 243-260.

[7] R. NARASIMHAN, The Levi Problem for Complex Spaces, Math. Ann., 142 (1961), 355-365.

[8] R. NARASIMHAN, The Levi Problem for Complex Spaces II, Math. Ann., 146 (1962), 195-216.

[9] J.P. RAMIS, Théorèmes de séparation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, 27 (1973), 933-997.

[10] R.M. RANGE, Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Springer Verlag, N.Y., 1986.

[11] H.H. SCHAEFER, Topological Vector Spaces, Mac Millan, N.Y., 1966.

Manuscrit reçu le 23 septembre 1988,
révisé le 14 août 1990.

A. FABIANO & P. PIETRAMALA,
Università degli Studi della Calabria
Dipartimento di Matematica
87036 Arcavacata di Rende (Italie).