ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRIEDRICH-WILHELM BAUER

Dimensionstheorie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 231-291

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__231_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 231-292.

DIMENSIONSTHEORIE UND DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

von **Friedrich-Wilhelm BAUER** (Frankfurt-am-Main).

Zwischen der Dimensionstheorie und der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten besteht ein merkwürdiger struktureller Zusammenhang, der sich mit Hilfe einer Dualität ausdrückt. Die Strukturen, mit deren Hilfe wir die Dualität behandeln wollen, sind die sogenannten « Tangentialstrukturen », die in [4] besprochen werden. Die Sätze, die wir in dieser Arbeit mit Hilfe dieser Theorie behandeln werden, lassen sich kurz so beschreiben:

α) Eine Konstruktion, die zu der, der charakteristischen Klassen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit dual ist.

β) Eine Behandlung des « Hindernisatzes » von K. Sitnikoff [9] über die Charakterisierung der Dimension eines topologischen Raumes $X \subset R^n$ durch lokale Homologieeigenschaften des Restraumes $R^n - \dot{X}$.

γ) Eine Behandlung von Vektorfeldern auf Tangentialstrukturen, deren Konstruktion insbesondere zu einer Homologieform des de Rhamschen Satzes führen.

Den breitesten Raum werden dabei die Überlegungen zu (α) einnehmen, da viel von (β) und (γ) bereits hierin enthalten ist. Im Laufe von (α) werden wir zu jeder Homologiestruktur $\mathfrak{B}$ eine duale Struktur $\tilde{\mathfrak{B}}$ konstruieren, was auf einige Schwierigkeiten stoßen wird. Der in (β) erwähnte Satz wird im Sinne dieser Dualität eine einfache und vernünftige Formulierung zulassen. Der Name « Tangentialstruktur » rührt daher, daß man nach einer Verallgemeinerung einer differenzierbaren Struktur gesucht hat, die noch wesentliche Eigenschaften einer solchen hat, ohne daß man von differenzierbaren Funktionen sprechen muß. Andererseits sollten auch, als anderer Extremfall, die Homologiestrukturen unter den Begriff einer Tangentialstruktur fallen, sodaß man ebenso gut von verallgemeinerten Homologiestrukturen sprechen könnte. Diese Struktur, deren Definition sogleich folgt, erscheint uns als ein natürlicher Ausdruck gewisser struktureller Ähnlichkeiten (1) in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, ähnlich den mannigfachen Definitionen eines Faserraumes oder der einer Garbe. Besonders zwischen letzterer und einer Tangentialstruktur besteht ein unzweifelhafter Zusammenhang, wie z.B. aus unserem de Rhamschen Satz ersichtlich zu sein scheint (5. Abschnitt).

Bezüglich der Beispiele zu einer Tangentialstruktur fassen wir uns hier kürzer und verweisen auf [4]. Die vorliegende Arbeit ist überhaupt als zweiter Teil zu [4] anzusehen und als solcher bereits in [4] angekündigt worden (2).

Wir beginnen mit der Definition einer Tangentialstruktur:

Definition 0.1. — *Zu einer Tangentialstruktur* T *gehört* (1) *eine teilweise geordnete Menge* T, (2) *eine Untermenge* $N = N(T) \subset T$ (*die « Atome » von* T) (3) *ein Verband* A *und* (4) *eine Abbildung* $|*| : T \to A$, *die anordnungserhaltend ist, sodaß gilt:*

(α 1) *Ist* $z \in N$, *so gibt es ein* $a \in T' = T - N(T)$, $a \geqslant z$ *und umgekehrt.*

(α 2) *Ist* $z \in N$, $a \in T$, $a \leqslant z$, *so ist* $a = z$.

(β 1) *Ist* $a \in T$, $b_1, b_2 \in T$, $a \leqslant b_1, b_2$, $|b_1| = |b_2|$, *so ist* $b_1 = b_2$.

(β 2) *Ist* $a \in T'$, $X \geqslant |a|$, *so gibt es ein* $b \geqslant a$, $|b| = X$.

(1) Die Frage, ob derartige Untersuchungen, die sich lediglich mit solchen strukturellen Ähnlichkeiten befassen, interessant und sinnvoll sind, erscheint mir eine Frage der persönlichen Einstellung zu sein, die in der modernen Mathematik immer öfter erhoben wird.

(2) Einige Verbesserungen zu [4] sollen hier nicht mehr behandelt werden, weil wir uns hier ganz den Anwendungen widmen wollen.

Diese Definition ist, wie man sofort sieht, mit der entsprechenden Definition 0.1 in [4] äquivalent. Das dort mit (2) bezeichnete Axiom folgt aus (β 1), alle anderen Axiome sind auch in unserer Definition enthalten.

Wegen der besonderen Wichtigkeit für alles folgende geben wir noch die Definition eines Ideals I:

Eine Teilmenge $\mathrm{I} \subset \mathrm{T}'$ heißt ein Ideal, wenn:

(I 1) mit $a \in \mathrm{I}$, $a_1 \geqslant a$ auch $a_1 \in \mathrm{I}$ ist,

(I 2) es zu $a_1, a_2 \in \mathrm{I}$ ein $a \in \mathrm{I}$ mit $a \leqslant a_1, a_2$ gibt.

Wir zeigen sofort:

(0.1) Ein Ideal erfüllt noch

(I 3) ist $a_1, a_2 \in \mathrm{I}$, $|a_1| = |a_2|$, so ist $a_1 = a_2$.

Beweis. — Wegen (I 2) gibt es ein $a \leqslant a_1, a_2$, wegen (β 1) muß aber $a_1 = a_2$ sein, da $|a_1| = |a_2|$ ist.

(0.2) Man kann (I 2) auch so formulieren:

(I 2′) Ist $a_1, a_2 \in \mathrm{I}$, so gibt es ein $a \leqslant a_1, a_2$, $a \in \mathrm{I}$, $|a| = |a_1| \wedge |a_2|$.

Beweis. — Es ist ein $a' \leqslant a_1, a_2$ in I vorhanden. Da $a' \in \mathrm{T}'$ ist, gibt es wegen (β 2) ein eindeutig bestimmtes $a \geqslant a'$, $|a| = |a_1| \wedge |a_2|$ und ein $a_1' \geqslant a$, $|a_1'| = |a_1|$. Wegen (I 1) ist $a_1' \in \mathrm{I}$ und da $a_1 \in \mathrm{I}$, ist $a_1' = a_1$ wegen (I 3). Es ist also $a_1 \geqslant a$ und ebenso $a_2 \geqslant a$.

Zum Beweis von (0.2) hätte man auch folgende Eigenschaft benutzen können:

(0.3) Sind in einer Tangentialstruktur $a, b, c \in \mathrm{T}'$ und gilt:

$$a \leqslant b$$
$$a \leqslant c$$
$$|b| \leqslant |c|,$$

so ist

$$b \leqslant c.$$

Beweis. — Wegen (β 2) gibt es ein $c' \geqslant b$, $|c'| = |c|$. Wegen der Transivität in einer teilweise geordneten Menge ist $a \leqslant c'$. Da aber $a \leqslant c$ und $|c| = |c'|$ ist, gilt nach (β 1) $c = c'$ und daraus folgt die Behauptung.

Wir werden auch gezwungen sein, Ideale in einer Struktur zu betrachten, die keine Tangentialstruktur mehr ist, sondern nur noch eine teilweise geordnete Menge mit Norm. In diesem Falle kann man (I 3) nicht mehr aus (I 1) und (I 2) herleiten, sondern man muß es als besondere Forderung zum Idealbegriff hinzufügen.

Diese Eigenschaft (0.3) macht die Tangentialstruktur sehr ähnlich einer Homologiestruktur insofern, als wir hier eine Art Inklusionsabbildung $i_X^Y : \{a | a \in T', |a| = Y\} \to \{a | a \in T', |a| = X\}$ für $Y \leqslant X$ in A definieren können, die eindeutig bestimmt ist.

In [4] wird gezeigt, daß die Menge aller $X \subset R^n$ mit $\dim X \geqslant r$ Anlaß zur Definition einer Tangentialstruktur D_r gibt: Die eben betrachteten X sind die Elemente von D'_r und die Atome sind Ideale I, die maximal mit den folgenden beiden Eigenschaften sind:

(D_r^1) Es ist [3] $|I|_A = \bigwedge\limits_{a \in I} |a| = x$ ein Punkt aus R^n.

(D_r^2) Ist $\varepsilon > 0$, so ist $U = U(x, \varepsilon) \in I$ für alle ε-Umgebungen von x.

Wir lassen hier den Beweis, daß D_r auf diese Weise eine Tangentialstruktur wird, fort und verweisen auf [4].

Ist P'_r folgende Menge: Alle geradlinig in den R^n eingebetteten Polyeder einer Dimension $\geqslant r$ und deren Obermengen, so macht man aus P'_r ebenfalls eine Tangentialstruktur, indem man wieder alle Ideale nimmt, die maximal bezüglich (D_r^1), D_r^2) sind und die zusätzlich die Bedingung erfüllen: (P_r^3) Es gibt ein Simplex σ^r und ein $a_0 \in I$, sodaß alle $a \leqslant a_0$ in σ^r für $a \in I$ liegen.

Im dritten Abschnitt werden wir noch fordern, daß die I von Elementen a erzeugt werden, die offen rel. zu einem offenen σ^r sind, d.h., daß jedes $a \in I$ eine rel. σ^r offene Umgebung von $|I|_A$ in σ^r enthält. Die Struktur P_r ist auch mit diesen Atomen normalisiert (s. [4] Def. 1,2 oder nächster Abschnitt dieser Arbeit).

Endlich erinnern wir uns noch an die Tangentialstruktur M_r. Sie gewinnen wir, wenn wir in obiger Definition von P_r « r-dimensionales Polyeder » durch « r-dimensionale, differenzierbar in den R^n eingebettete Mannigfaltikeit » und « Simplex σ^r » durch « differenzierbar in den R^n eingebettete Mannigfaltigkeit

(3) Für ein beliebiges Ideal definieren wir:

$$|I|_A = \bigwedge_{a \in I} |a|, \qquad |I| = \{|a| \, | a \in I\}.$$

V^r (mit Rand) » ersetzen. Das und die Homologiestrukturen, die hier noch besprochen werden, und eine so fundamentale Rolle spielen, sind die Standartbeispiele, die wir behandeln wollen.

Schließlich sei noch an den Begriff eines Koideals K erinnert, der dual zu dem eines Ideals ist:

(K 1) Ist $a \in K$, $a_1 \leqslant a$, so ist $a_1 \in K$.

(K 2) Sind a_1, $a_2 \in K$, so gibt es ein $a \geqslant a_1, a_2$, $a \in K$.

Im Anschluß an den Idealbegriff ist es gut, noch an einige Bezeichnungen zu erinnern, die aus [4] stammen und die hier häufig verwandt werden. Ein Ideal I_X heißt « offen », wenn es der Durchschnitt aller Ideale I mit demselben festen Träger $|I|_A = X$ ist. Ist $a \in T'$ ein festes Element und I ein Ideal in der Tangentialstruktur $\hat{a} = \{b | b \leqslant a\}$, so heißt I offen rel. a, wenn I in $\hat{a}$ offen ist. Wir werden ein Ideal I in T′ auch relativ offen nennen, wenn es ein $a \in T'$ gibt, sodaß die Beschränkung von I auf $\hat{a}$ offen rel. $\hat{a}$ ist. Unter der Beschränkung $I|a$ verstehen wir alle $b \in I$, $b \leqslant a$, oder in anderen Worten: $I \cap \hat{a}$.

Wir erinnern noch an die durch diese « offenen » Elemente in [4] eingeführten Topologien. Der Begriff « offene Menge » $U \subset |W(T)|_A$ und « offenes » $a \in T'$ hat dort einen Sinn bekommen.

Neben den Atomen in einer Tangentialstruktur treten noch weitere Objekte auf, die kein Element aus T′ sind, nämlich die sogenannten Wurzeln.

Wir identifizieren die Atome $z \in N(T)$ mit $(z) = \{a | a \in T', a > z\}$ und betrachten die folgenden Systeme von Teilmengen W (T): Ist $w \in W(T)$, so

(1) gibt es Atome $z \in N(T)$, sodaß

$$(w) = \bigcap (z)$$

ist.

(2) Es ist $|w|_A = \bigwedge_{a \in w} |a| = \bigvee |z|$ ein Element in $A - |T'|$.

Da wir natürlich voraussetzen wollen, das zwei Atome z_1, z_2 mit $(z_1) = (z_2)$ gleich sind, können wir auch von den Wurzeln fordern, daß durch (w) die Wurzel w bestimmt wird, (also zwischen w und (w) kein faktischer Unterschied besteht.) In W(T) kann man in naheliegender Weise eine Anordnung definieren. Man kann T auch zu einer Tangentialstruktur T_1 abändern, in welcher $T'_1 = T'$ und $N(T_1) = W(T_1) = W(T)$ gesetzt wird, letzteres aber (wegen Def. 0.1 (α 2)) ohne Anordnung.

Ein Wort soll noch über das Nullelement $0 \in T$ gesagt werden: Es soll verabredungsgemäß $0 \in N(T)$ sein, sodaß wir eingentlich $T' = T - N(T) - \{0\}$ definieren sollten. Ebenso kann man von einem maximalen Element $E \in T$ sprechen. Es wird natürlich $|0|$ das Nullelement und $|E|$ das maximale Element von A sein und in T soll gelten:

$$0 \leqslant a \quad \text{für alle} \quad a \in T,$$
$$E \geqslant a \quad \text{für alle} \quad a \in T.$$

Wir geben jetzt kurz die wichtigsten Ergebnisse von [4] an, ohne auf Konstruktionen oder Beweise einzugehen.

(I) Es wird für gewisse (die dualisierbaren) Tangentialstrukturen T eine eindeutig bestimmte duale Struktur $\tilde{T}$ angegeben, sodaß

$$\tilde{\tilde{T}} = T \tag{1}$$

ist.

(II) Zu jedem T werden zwei neue Strukturen T^i und T^p (die injektive bezw. projektive Fortsetzung) konstruiert, sodaß insgesamt gilt:

$$(\tilde{T})^i = \widetilde{T^p} \tag{2a}$$
$$(\tilde{T})^p = \widetilde{T^i} \tag{2b}$$
$$P_r^i = D_r \tag{3}$$
$$P_r^p = M_r. \tag{4}$$

Die zugrunde liegende Absicht ist, aus einer einfachen Struktur T durch algebraische Konstruktionen neue Strukturen, nämlich T^i und T^p anzugeben, die komplizierter sind und Gesetzmässigkeiten, die für T (die einfache Struktur) gelten, in T^i und T^p wieder zu finden. Dieses Problem nennen wir « Fortsetzungsproblem ». Da wir noch eine Dualitätsbeziehung zur Verfügung haben, die gemäß (2 a), (2 b) mit den Fortzetzungen verknüpft ist, können wir uns auch fragen, wie wir eine Gesetzmässigkeit in T^p (bezw. T^i) in $\tilde{T}^p$ also in

$\widetilde{T}^i$ (bezw. $(\widetilde{T}^i)$ also in $(\widetilde{T}^p)$) wierderfinden. Auf P_r angewandt: Wir wollen Objekte, die in M_r eine Rolle spielen, in D_r wiederfinden, wie z.B. die charakteristischen Klassen.

Wie schon eingangs gesagt, gilt unser Hauptaugenmerk der Untersuchung von Homologiestrukturen auf Tangentialstrukturen. Im 2. Abschnitt werden wir zu jeder Homologiestruktur $\mathfrak{B}$ auf einer Tangentialstruktur T (denken wir z.B. an die polyedrale Struktur auf P_r) eine duale Struktur $\tilde{\mathfrak{B}}$ konstruieren. Die Schwierigkeiten dieser Konstruktion liegen in der Tatsache, daß $\mathfrak{B}$ zwar eine Tangentialstruktur ist, aber keine dualisierbare, sodaß die Sätze und Konstruktionen aus [4] nicht unmittelbar angewandt werden können. Man hat also die Dualitätskonstruktion aus [4] zu modifizieren, und aus dieser Modifikation werden sich dann in den kommenden Abschnitten in natürlicher Weise die eingangs erwähnten Sätze (α) — (γ) ergeben.

Die vorliegende Arbeit ist in folgender Weise angeordnet:

Im ersten Teil wird zu einer « atomaren » Homologiestruktur (s. [2])$\mathfrak{B}$ die projektive Fortsetzung $\mathfrak{B}^p$ konstruiert und es wird nachgewiesen, daß $\mathfrak{B}^p$ mit der in [2] für Homologiestrukturen angegebenen Fortsetzung $\mathfrak{B}^*$ übereinstimmt. Vor allem aber dient der erste Abschnitt dazu, die Konstruktionen aus [4] noch einmal kurz anzugeben, da mit einigen der dort verwendeten Begriffe ständig operiert wird.

Im 2. Abschnitt befindet sich die bereits erwähnte Dualitätskonstruktion für Homologiestrukturen.

Im 3. Abschnitt werden die Pontrjaginschen Konstruktionen [7] der Grassmannmannigfaltigkeit und der charakteristischen Klassen für differenzierbare Mannigfaltigkeiten auf allgemeine Tangentialstrukturen erweitert und vor allen Dingen dualisiert. Dabei stellt sich heraus, wie die dualen charakteristischen Klassen auf $\tilde{D}_r = (\tilde{P}_r)^p$ aussehen und in welch enger Bezeihung sie zu dem Sitnikoffschen Rechtfertigungssatz aus dem 4. Abschnitt stehen.

Im 4. Abschnitt beweisen wir einen allgemeinen Satz über die Vertauschung von projektiver Fortsetzung einer Homologiestruktur und einer aus der Dualitätskonstruktion durch geringe Abänderungen von $\tilde{\mathfrak{B}}$ hervorgehenden Tangentialstruktur $\check{\mathfrak{B}}$. Aus diesem Satz wird mit Hilfe der universellen

Koeffizientenformel aus [5] aber leicht der Sitnikoffsche Rechtfertigungssatz der Dimensionstheorie folgen.

Im 5. Abschnitt geben wir eine Form des de Rhamschen Satzes an, die ebenfalls eine unmittelbare Folge der Dualitätstheorie für Homologiestrukturen im 2. Abschnitt ist. Zunächst werden Vektorfelder und duale Vektorfelder auf einem Element $a \in P'$ einer Tangentialstruktur P definiert, dann wird gezeigt, daß auf $P_r^p = M_r$ angewandt, unsere Konstruktionen gerade die gewöhnlichen, in einem schwachen Sinne stetigen Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit liefern, während auf P_r die dualen Vektorfelder in eindeutiger Korrespondenz mit den polyedralen Ketten stehen. Auf diese Weise bekommen wir zwei Homologiestrukturen $\mathfrak{B}_T$ und $\mathfrak{B}^T$ heraus, die beide aus $\mathfrak{B}$ hervorgehen (wobei $\mathfrak{B}$ eine vorgebene Homologiestruktur ist). Erstere wurde über den Vektorfeldern, letztere über den dualen Vektorfeldern konstruiert. Es wird gezeigt (was sehr einfach einzusehen ist) daß

$$\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}$$

ist. Beide Gleichungen zusammen ergeben:

$$\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}^T,$$

was einer Homologieformulierung des de Rhamschen Satzes entspricht:

Die Homologietheorie, die auf einer Tangentialstruktur P durch Vektorfelder entsteht, ist isomorph zu der Homologietheorie, die durch duale Vektorfelder (d.h. auf P_r durch Ketten einer festen Triangulation) entsteht.

1. Fortsetzungen und Dualität in Tangentialstrukturen. — Wie wir bereits ausgeführt haben, besteht unsere Methode darin, einfache Tangentialstrukturen T zu komplizierteren fortzusetzen, die wir injektive bzw. projektive Fortsetzung von T genannt haben. Hier wollen wir kurz an die wichtigsten Definitionen aus [4] erinnern und ein Beispiel angeben, welches wir später noch benutzen werden. Es handelt sich um die Konstruktion der projektiven Fortsetzung zu einer vorgegebenen Homologiestruktur.

Beginnen wir mit der *Dualität:* Eine Tangentialstruktur T heißt offen, wenn es zu jedem Atomträger x nur ein Atom z mit $|z| = x$ gibt. Eine offene Tangentialstruktur dualisieren wir, indem wir als das duale DT diejenige Struktur bezeichnen, in welcher Wurzeln und Elemente miteinander vertauscht werden.

Eine Tangentialstruktur T heißt normalisiert, wenn zu festem Atomträger x in der Menge

$$\langle x\rangle = \{a \mid a \in (z),\ |z| = x\} = \bigcup_{|z|=x} (z)$$

jedes (z) gerade ein maximales Ideal und jedes solche maximale Ideal in $\langle x\rangle$ ein (z) zu einem Atom $z \in \mathrm{N(T)}$ ist. Man kann leicht zu jeder offenen Struktur T eine normalisierte Struktur $\mathrm{N_A T}$ angeben, indem man in T jedes (z) in geeigneter Weise zerlegt. Umgekehrt kann man jedes normalisierte T zu einem offenen machen, indem man alle z mit festem $|z|$ zu einem Atom zusammenfasst. Wir nannten diesen Prozeß $\mathrm{N_A^{-1}\,T}$.

Es galt:

$$\mathrm{N_A\,N_A^{-1}\,T = T} \tag{1}$$

für normalisiertes T und

$$\mathrm{N_A^{-1}\,N_A\,T = T} \tag{2}$$

für offenes T.

Zu jeder normalisierten Tangentialstruktur T wurde eine duale Struktur $\tilde{\mathrm{T}}$ durch die Formel:

$$\tilde{\mathrm{T}} = \mathrm{N_A\,DN_A^{-1}\,T}$$

definiert.

Wegen (1) und (2) und wegen

$$\mathrm{D^2T = T}$$

gilt jetzt

$$\tilde{\tilde{\mathrm{T}}} = \mathrm{N_A DN_A^{-1}(N_A DN_A^{-1})\,T = T}.$$

Wir geben jetzt die Definition einer injektiven Fortsetzung und beginnen mit einer schwachen injektiven Fortsetzung:

Sei P eine Tangentialstruktur, so heißt T schwache *injektive*

Fortsetzung von P, wenn es zu jedem hinreichend kleinen $a \in T'$ ein $a_1 \in P'$ und einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : W(a) \to W(a_1)$$

gibt, der der Forderung genügt, daß φ auf $W(a) \cap W(a_1)$ ein Isomorphismus ist. (Im Folgenden werden wir allerdings sogar immer annehmen, daß diese Abbildung die Identität ist.)

Die injektive Fortsetzung ist die größte schwache injektive Fortsetzung.

Eine Abbildung heißt dualisierbar, wenn es:

(1) Zu jedem $w_1 \in OW(a_1)$ einen Monomorphismus $f: \hat{w}_1 \to OW(a)$ gibt, sodaß

$$\varphi f = \text{Identität}$$

ist und wenn:

(2) zu jedem $v \in OW(a)$ ein $w \geqslant v$ und ein Monomorphismus wie unter. (1) existiert, sodaß

$$w \in f\hat{w}_1.$$

Genaues findet man in [4], wo auch die entsprechenden Existenzsätze bewiesen werden.

Die projektive Fortsetzung entsteht aus der injektiven durch Dualisierung.

Die Dualisierung einer Tangentialstruktur ist nur unter speziellen Voraussetzungen möglich:

D 1) T muß einfach sein, d.h., es muß aus $|a_1| = |a_2|$ $a_1, a_2 \in T'$ folgen, daß $a_1 = a_2$ ist.

D 2) Zu jedem $a \in T'$ muß bereits ein $a_1 \leqslant a$ in T' vorhanden sein, sodaß $|a_1| = \bigsqcup_{z \leqslant a} |z|$ ist.

D 3) Es muß zu jedem $w \in W(T)$ $x \leqslant |w|_A$ ein $w_1 < w$, $|w_1|_A = x$ geben.

Das Versagen der Voraussetzung D 3) für Homologiestrukturen verursacht große Schwierigkeiten und ist der Grund, warum wir in dieser Arbeit eine besondere Dualitätskonstruktion für Homologiestrukturen erfinden müssen. Allerdings verdanken eine Reihe von geometrischen Sätzen, wie etwa der Sitnikoffsche Hindernissatz, der im 4. Abschnitt behandelt wird, dieser Tatsache ihre Existenz.

Während die Dualisierung einer Tangentialstruktur T nur unter speziellen Voraussetzungen möglich war, kann man unter sehr viel allgemeineren Bedingungen T fortsetzen. Z. B. braucht T nicht mehr einfach zu sein. Das ist für uns insofern von Bedeutung, als wir Homologiestrukturen fortsetzen wollen, die natürlich nicht mehr einfach sind. Man wird eine nicht einfache Struktur T so fortsetzen, daß man jeden einfachen Zweig von T für sich fortsetzt: Unter einem einfachen Zweig versteht man eine Teilstruktur, $T_1 \subset T$, welche einfach ist. Die Struktur, die aus den Elementen (z) ($z \in N(T)$ für festes z) und dem Atom z besteht, ist ein solcher einfacher Zweig. Man kann noch hinzunehmen alle Atome z_1, die rel. zu einem bel. b, zu dem es ein $a \in (z)$ $a \geqslant b$ gibt, offen sind.

In [4] haben wir die projektive Fortztzung zu P_r konstruiert. Hier wollen wir noch ein Beispiel für eine projektive Fortsetzung geben: Es soll $\mathfrak{B}$ eine exakte, atomare Homologiestruktur sein. Die Definition und Untersuchung einer solchen Struktur ist der Gegenstand von [2]. Im 2. und 4. Abschnitt werden wir noch näher auf Homologiestrukturen eingehen. Der Satz, den wir hier beweisen wollen, ist die Isomorphie

$$\mathfrak{B}^p = \mathfrak{B}^*.$$

Die Homologiestruktur $\mathfrak{B}^*$wurde in [2] konstruiert. Wir geben hier noch einmal die Konstruktionsvorschrift für den absoluten Fall an. Diese Angaben lassen sich leicht auf den relativen Fall verallgemeinern, i.Ü. verweisen wir auf [2].

Die von uns zu behandelnde Struktur $\mathfrak{B}$ soll exakt sein (s. nächsten Abschnitt). Der Bereich, auf welchem $\mathfrak{B}$ erklärt ist, ist eine Tangentialstruktur T (oder genauer gesagt), der Normbereich von T). Die Elemente von $\mathfrak{B}$ sind auf $|T'| \cup \{0\}$ erklärt. Der Bereich der Atome von $\mathfrak{B}$ soll aus allen Idealen I in Elementen aus $\mathfrak{B}'$ bestehen, die folgenden Bedingungen genügen:

(α) Zu jedem $\zeta^X \in I$ gibt es ein ξ^Φ mit $\partial\xi^\Phi = \zeta^X$ ($\partial =$ Randoperator), Ist $\zeta^{X_1} \leqslant \zeta^{X_2}$ in I, so soll $\xi_1^{\Phi_1} \leqslant \xi_2^{\Phi_2}$ sein.

(β) Ist $|I|_A$ der Träger in $|T|$ von I, so soll es zu jedem $a \in T'$, welches die Eigenschaft hat, dass $|I|_A \leqslant \bigcup_{z \leqslant a} |z|$ ist, ein $\zeta^a \in I$ geben.

(γ) Es ist I maximal unter (α) und (β).

DEFINITION 1.1. — *Eine atomare Homologiestruktur, deren Atome aus allen Idealen mit der Eigenschaft* (α) — (γ) *und aus Summe und Differenz solcher Ideale bestehen, nennen wir eine zulässige Homologiestruktur.*

Bei einer zulässigen Struktur gibt es also zu jedem Element ζ^X ein Ideal I, welches (α) — (γ) erfüllt und ζ^X enthält, außerdem ist jedes solche Ideal ein Atom.

Wenn wir uns auch die relativen Atome von $\mathfrak{V}$ durch einen analogen Prozeß angegeben denken, können wir $\mathfrak{V}^*$ erklären:

Sei $X \in |T|$ und $\mathfrak{z} \in N(\mathfrak{V})$, $|\mathfrak{z}| \leqslant X$, so erzeugt $\mathfrak{z}$ in X eine eindeutig bestimmte Klasse ζ^X: Es wird $\mathfrak{z}_1 \sim \mathfrak{z}_2$ in X gesetzt, wenn es ein $r^{(X', Y)} \in N(\mathfrak{V})$ mit $X' \leqslant X$ und $\partial r = z_1 - z_2$ gibt. Entsprechend verfahren wir im relativen Fall. Die so gewonnene (exakte!) Homogiestruktur heißt $\mathfrak{V}^*$. Ihre Atome $\mathfrak{z}^*$ stehen mit den Atomen von $\mathfrak{V}$ in umkehrbar eindeutigem Zusammenhang: Fassen wir $\mathfrak{z}^*$ als Ideal auf, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{V}$ mit $(\mathfrak{z}^*) \supset (\mathfrak{z})$. Wir erklären nun die folgende Abbildung φ: $(\mathfrak{z}^*) \rightarrow (\mathfrak{z})$. Ist $\zeta^X \in (\mathfrak{z})$, dann setzen wir $\varphi\zeta^X = \zeta^X$. Ist $\zeta^X \in (\mathfrak{z}^*)$, $\zeta^X \in (\mathfrak{z})$, dann setzen wir $\varphi\zeta^X = \mathfrak{z}$ mit dem Träger $|\mathfrak{z}| \in |T|$, was nach der Definition des (Quasi-) Epimorphismus aus [4] 2. Abschnitt erlaubt ist.

Auf diese Weise erhalten wir einen lokalen anordnungserhaltenden Epimorphismus von $\mathfrak{V}^*$ auf $\mathfrak{V}$, von dem wir feststellen, daß er dualisierbar ist:

(1) Sei $\zeta^X > \mathfrak{z}_{\mathfrak{V}}$, dann gibt es natürlich einen Monomorphismus f: $\hat{\zeta}^X \cap (\mathfrak{z}_{\mathfrak{V}}) \rightarrow (\mathfrak{z}^*)$, nämlich die Identität und es ist $\varphi f =$ Identität.

(2) Ist umgekehrt $\zeta^X \in (\mathfrak{z}^*)$, dann findet man stets eine Klasse $\xi^{X_1} \geqslant \zeta^X$, die die Eigenschaft hat, daß $\zeta^{X_1} \in \mathfrak{V}$ ist. Man nehme z.B. als $X_1 = E \in A$, das maximale Element.

Es ist also:

$$\mathfrak{V}^p \supseteq \mathfrak{V}^*.$$

Umgekehrt kann man auch zeigen, daß es außer den Elementen $\mathfrak{z}^*$ keine anderen in $W(\mathfrak{V}^p)$ geben kann.

Sei $\mathfrak{z}$ ein Atom in $\mathfrak{V}^p$, so gibt es nach Definition einen dualisierbaren Epimorphismus auf ein geeignetes $\mathfrak{z}_{\mathfrak{V}} \in W(\mathfrak{V})$:

$$\varphi: (\mathfrak{z}) \rightarrow (\mathfrak{z}_{\mathfrak{V}}).$$

Sei ζ^{E_i} eine Folge von Elementen in $(\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})$, die das maximale Element ζ^{E} approximieren: $\bigcup \zeta^{E_i} = \zeta^{E}$, wobei stets

$$E_i \geqslant |\mathfrak{z}| \vee |\mathfrak{z}^*|$$

ist, so wird $\hat{\zeta}^{E} \cap (\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})$ monomorph in $(\mathfrak{z})$ abgebildet und damit auch $\hat{\zeta}^{E_i} \cap (\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})$. Wir finden also in $(\mathfrak{z})$ isomorph ganz $(\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})$ vor. Andererseits gibt es zu jedem $\zeta^{X} \in (\mathfrak{z})$ ein ζ^{X} beliebig gut approximierendes $\zeta_1^{X_1} \geqslant \zeta^{X} \zeta_1^{X_1} \in (\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})$, denn man kann jedes $|\zeta^{X}| \in |(\mathfrak{z})|$ durch eine Folge von $|\zeta_i^{X_i}| \in |(\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}})|$ mit $\bigcap X_i = X$ approximieren, weil man das in $|T'|$ kann $(X_i \in |T'|)$. Nach Definition war ja $|\mathfrak{z}_{\mathfrak{B}}| = |\mathfrak{z}| = \bigcap X_i$, $X_i \in |T'|$ für gewisse X_i. (Hier setzen wir diesen dualisierenden Isomorphismus, der Einfachheit wegen, gleich der Identität). Auf diese Weise wird $\mathfrak{z}$ ein Atom von $\mathfrak{B}^*$.

Wir wissen aus [2], [3], daß

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{S}.$$

die Sitnikoffsche Struktur ist, ein Umstand, der uns noch im 4. Abschnitt beschäftigen wird.

Wir fassen zu einem Satz zusammen:

Satz 1.1. — *Es ist für eine Homologiestruktur* $\mathfrak{B}$, *bei der die Atome in der durch Definition* 1.1 *beschriebenen Weise bestimmt sind*

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^p.$$

Die Theorie der projektiven Fortsetzung wird damit in Zusammenhang mit der Forstsetzungtheorie für atomare Homologiestrukturen aus [2] gebracht.

Wir wollen dabei festhalten, daß nach Definition 1.1 die Atome keine Träger haben, die in $|W(T)|_A$ liegen, sondern in $|T'|$.

2. Dualität für Homologiestrukturen. — Bereits im ersten Abschnitt haben wir etwas über Homologiestrukturen gesagt. Hier wollen wir ihre Dualitätstheorie entwickeln. Dieses Vorhaben stößt aber auf das Hindernis, daß für Homologiestrukturen die Bedingungen der Dualisierbarkeit einer Tangentialstruktur nicht mehr erfüllt sind:

(α) Eine Homologiestruktur ist nicht einfach: Es gibt zu festem Träger $\Phi = (X,\ Y)$ i.A. zwei verschiedene Elemente $\zeta_1^{\Phi_1}$, $\zeta_2^{\Phi_2}$.

(β) Fassen wir eine vorgegebene Homologiestruktur $\mathfrak{B}$ als Tangentialstruktur in der bekannten Weise auf, dann gibt es zu einem Atomträger $|z|$ und zu einem $X \leqslant |\mathfrak{z}|$ i.A. kein $\mathfrak{z}_1^X \leqslant \mathfrak{z}$ $(X \neq 0)$.

(γ) Es ist $\mathfrak{B}$ aus den Elementspaaren eines Normbereiches einer Tangentialstruktur T gegeben, aber nicht auf den Elementen selber (d.h. der Normbereich von $\mathfrak{B}$ ist nicht $|T'|$).

Wir werden trotz dieser drei Hindernisse in diesem Abschnitt zu einer Dualitätstheorie für Homologiestrukturen kommen, die allerdings geometrisch reichhaltiger ist, als die Dualitätstheorie für eine Tangentialstruktur es wäre, die (α) — (γ) erfüllen würde.

Um für den ganzen Verlauf dieser Arbeit klarzustellen, wovon wir sprechen, erinnern wir hier noch einmal an die Definition einer Homologiestruktur, so wie wir sie i.F. verwenden wollen:

Definition 2.1. — *Sei* T *eine Tangentialstruktur und* $A = |T|$ *ihr Normbereich. Mit* A_p *bezeichnen wir die Menge aller Paare* $\Phi = (X,\ Y)$, $X,\ Y \in A$, $X \geqslant Y$. *Zu jeder nicht negativen ganzen Zahl r sei ein Funktor* H_r *von der Menge* A_p *in die Menge aller abelschen Gruppen gegeben. Das soll besagen, daß es zu jedem Paar* $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ *(d.h.* $X_1 \leqslant X_2$, $Y_1 \leqslant Y_2$) *einen induzierten Homomorphismus* $H(i_{\Phi_2}^{\Phi_1}) = i_*$ *geben soll, der transitiv ist:*

Ist $\Phi_1 \leqslant \Phi_2 \leqslant \Phi_3$, *dann ist* $i_{*\Phi_3}^{\Phi_2} . i_{*\Phi_2}^{\Phi_1} = i_{*\Phi_3}^{\Phi_1}$.

Ferner soll es einen Randhomomorphismus

$$\partial : H_r(X,\ Y) \rightarrow H_{r-1}(Y)$$

geben. Mit $\gamma \in A_p$ bezeichnen wir das Paar $(\gamma,\ 0)$.

Für diese Bestimmungsstücke soll gelten:

(1) Die Homologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H_{r+1}(X,\ Y) \rightarrow H_r(Y) \rightarrow H_r(X) \rightarrow H_r(X,\ Y) \rightarrow H_{r-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

ist exakt.

(2) $$\partial i_{*\Phi_2}^{\Phi_1} = i_{*Y_2}^{Y_1} \partial.$$

Genaueres kann man in [2] nachlesen, wo wir allerdings Gründe hatten, nur die teilweise Exaktheit in der Homologiesequenz zu fordern.

Wir beginnen jetzt nach und nach durch geeignete Konstruktionen aus $\mathfrak{B}$ eine Struktur zu machen, die trotz der Einwände (α) — (γ) dualisiert werden kann. Dabei beginnen wir mit (γ):

Sei $\zeta^{\Phi} \in \mathfrak{B}$, $\Phi = (X, Y)$ gegeben. Wir halten das Element $X \in A$ fest und betrachten maximale Ideale $\bar{\zeta}^{X}$ aus Elementen ζ_1^{Φ}, $\Phi_1 = (X, Y_1)$. Ein solches Element hat, wie bereits durch die Schreibweise $\bar{\zeta}^{X}$ angedeutet wird, den Träger X.

Seien $\bar{\zeta}_1^{X_1}$, $\bar{\zeta}_2^{X_2}$ gegeben, wir setzen

$$\bar{\zeta}_1^{X_1} \leqslant \bar{\zeta}_2^{X_2},$$

wenn es zu jedem $\zeta_1^{\Phi_1} \in \bar{\zeta}_1^{X_1}$, $\Phi_1 = (X_1, Y_1)$ ein $\zeta_2^{\Phi_2} \in \bar{\zeta}_2^{X_2}$, $\Phi_2 = (X_2, Y_2)$ mit

$$\zeta_1^{\Phi_1} \leqslant \zeta_2^{\Phi_2}$$

und

$$X_1 \wedge Y_2 = Y_1$$

gibt.

(2.1) Durch obige Definition wird in der Menge $\bar{\mathfrak{B}}$ aller $\bar{\zeta}^{X}$ eine teilweise Ordnung definiert, sodaß aus $\bar{\zeta}_1^{X_1} \leqslant \bar{\zeta}_2^{X_2}$ folgt $X_1 \leqslant X_2$.

Beweis:

(1) Es ist $\bar{\zeta}^{X} \leqslant \bar{\zeta}^{X}$.

(2) Ist $\bar{\zeta}_1^{X_1} \leqslant \bar{\zeta}_2^{X_2}$ und $\bar{\zeta}_2^{X_2} \leqslant \bar{\zeta}_1^{X_1}$, dann gibt es zu jedem $\zeta_1^{\Phi_1} \in \bar{\zeta}_1^{X_1}$ ein $\zeta_2^{\Phi_2} \in \bar{\zeta}_2^{X_2}$, $\Phi_1 = (X_1, Y_1)$, $\Phi_2 = (X_2, Y_2)$ $\zeta_1^{\Phi_1} \leqslant \zeta_2^{\Phi_2}$ und zu diesem $\zeta_2^{\Phi_2}$ ein $\xi_2^{\Phi_1'} \in \bar{\zeta}_1$ mit $\zeta_2^{\Phi_2} \leqslant \xi_2^{\Phi_1'}$. Es ist also $X_1 \leqslant X_2$ und $X_2 \leqslant X_1$, da $\Phi_1' = (X_1, Y_1')$ ist. Daher ist $X_1 = X_2$.

Ist nun $\zeta_1^{\Phi_1} \in \bar{\zeta}_1^{X_1}$, dann gibt es ein $\zeta_2^{\Phi_2} \in \bar{\zeta}_2^{X_2}$, $\zeta_2^{\Phi_2} \geqslant \zeta_1^{\Phi_1}$. Es ist $\Phi_1 = \Phi_2$, da $X_1 = X_2$, also ist $\zeta_1^{\Phi_1} = \zeta_2^{\Phi_2}$ und $\zeta_1^{\Phi_1} \in \bar{\zeta}^{X_2}$. Ebenso beweist man, daß $\zeta_2^{\Phi_2} \in \bar{\zeta}_1^{X_1}$ und es ist damit

$$\bar{\zeta}_1^{X_1} = \bar{\zeta}_2^{X_2}$$

(3) Ist $\bar{\zeta}_1^{X_1} \leqslant \bar{\zeta}_2^{X_2}$, $\bar{\zeta}_2^{X_2} \leqslant \bar{\zeta}_3^{X_3}$, dann ist auch

$$\bar{\zeta}_1^{X_1} \leqslant \bar{\zeta}_3^{X_3}.$$

Der Beweis ist trivial.

In der Menge $\overline{\mathfrak{B}}$ bilden wir Ideale $\mathfrak{w}$ mit Träger in $|W(T)|_A$, die maximal bezüglich dieses Trägers sind und Wurzeln $\mathfrak{w}$, die in einem $\overline{\zeta}$ liegen.

Es ist $\overline{\mathfrak{B}}$ eine teilweise geordnete Menge mit Norm, aber keine Tangentialstruktur, da Def. 0.1 (β1) nicht mehr erfüllt ist : Zu einem $\overline{\zeta}$ und $X \geqslant |\overline{\zeta}|$ gibt es i.A. viele $\overline{\zeta}_1 \geqslant \overline{\zeta}$ mit $|\overline{\zeta}_1| = X$.

Von den maximalen Idealen $\mathfrak{w}$, (in $\overline{\mathfrak{B}}$ oder $\overline{\zeta}$ für festes $\overline{\zeta} \in \overline{\mathfrak{B}}$), die als Träger $|\mathfrak{w}|_A$ Elemente aus $|W(T)|_A$ haben, wollen wir aber dessen ungeachtet als von den Atomen bzw. den durch ihnen erzeugten Wurzeln von $\overline{\mathfrak{B}}$ sprechen und ihre Menge mit $W(\overline{\mathfrak{B}})$ bezeichnen.

Wenn auch $\overline{\mathfrak{B}}$ keine Tangentialstruktur ist, so ist doch die Struktur $|\overline{\mathfrak{B}}|$ versehen mit den Atomen, die durch die Wurzelträger $|\mathfrak{w}| = \{|\overline{\zeta}| \, \overline{\zeta} \in \mathfrak{w}\}$ gebildet werden, eine Tangentialstruktur $[\overline{\mathfrak{B}}]$ mit einem Normbereich $|T'| \cup |W(T)|_A$.

Wenn wir aus $[\overline{\mathfrak{B}}]$ eine normalisierte Struktur machen wollen, dann haben wir allerdings zu viele Wurzeln in $W([\overline{\mathfrak{B}}])$, da es außer den Atomen $\mathfrak{w}$, wo alle $\overline{\zeta} \neq 0$ sind (d.h. es gibt ein $\zeta \neq 0$ in $\overline{\zeta}$) auch noch eine Wurzel $(\mathfrak{w}_1) \supset (\mathfrak{w})$ gibt, mit $\overline{\zeta} = 0$, $\overline{\zeta} \in \mathfrak{w}_1$. Wir denken uns den Bereich von $W([\overline{\mathfrak{B}}])$ von diesen überflüssigen Wurzeln gereinigt und können sodann beweisen :

(2.2) Es ist $T = [\overline{\mathfrak{B}}]$.

Beweis. — Zu jedem $X \in |T'|$ gibt es ein ζ^{Φ} mit $\Phi = (X, Y)$, also ein $\overline{\zeta} \in \overline{\mathfrak{B}}'$ mit $|\overline{\zeta}| = X$. Ist $X_1 \leqslant X_2$, also da T dualisierbar und deshalb einfach ist, $a_1 \leqslant a_2$, so ist ein Paar $\overline{\zeta}_1 \leqslant \overline{\zeta}_2$ vorhanden mit $|\overline{\zeta}_i| = X_i$. Es gibt auch einen Isomorphismus von $W(T)$ und $W(\overline{\mathfrak{B}})$, da unter den Idealen $[(\mathfrak{w})]$ auch das vorkommt, bei dem jedes Element $\overline{\zeta} \in (\mathfrak{w})$ die Null ist (d.h. alle $\zeta = 0$, $\zeta \in \overline{\zeta}$) und dieses Ideal ist ein maximales Ideal aus $|T'|$. Das ist aber, da T dualisierbar, also einfach ist, die Behauptung.

Wir können jetzt dazu übergehen, Dualitätstheorie zu betreiben, allerdings ist das duale einer Homologiestruktur i.A. keine Homologiestruktur mehr, sondern eine Struktur, die wir « zulässig » im Sinne der nun folgenden Definition nennen wollen :

DEFINITION 2.2. — *Eine Tangentialstruktur* $\mathfrak{B}$ *(ohne Atombereich) heißt zulässig bezüglich einer Tangentialstruktur* T, *wenn* $\mathfrak{B}$ *die folgenden Eigenschaften hat:*

(*z* 1) *Die Elemente von* $\mathfrak{B}$ *sind auf dem Bereich* A_p *aller Paare* $\Phi = (X, Y)$ $X \geqslant Y$, $X \in |T'|$ *erklärt. (Mit anderen Worten: Der Normbereich von* $\mathfrak{B}$ *ist der Bereich aller dieser Paare.)*

Man kann, genau wie oben für eine Homologiestruktur, $\overline{\mathfrak{B}}$ *und über den maximalen Idealbereich,* $W(\overline{\mathfrak{B}})$ *bilden. Dabei soll gelten:*

(*z* 2) *Es ist* $|W(T)|_A = |W(\overline{\mathfrak{B}})|_A$. *(Das soll heißen: Ist* $\zeta \in \overline{\mathfrak{B}}$, $x \in |W(|\hat{\zeta}|)|_A \subset |W(T)|_A$ *(d.h.W rel.* T *gebildet),* *so ist auch* $x \in |W(\hat{\zeta})|_A$).

Der Grund für (*z* 2) ist der folgende:

(2.3) Zu jedem $x \in |W(T)|_A$ gibt es eine absteigende Folge $\{\overline{\zeta}^X\}$, $\overline{\zeta}^X \in \overline{\mathfrak{B}}$ sodaß $\wedge X = x$ ist.

Beweis. — Sei $x \in |W(T)|_A$, so gibt es wegen (*z* 2) ein $\mathfrak{w} \in W(\overline{\mathfrak{B}})$ mit $|\mathfrak{w}|_A = x$. Nun ist $(\mathfrak{w})$ aber ein maximales Ideal in $\overline{\mathfrak{B}}$, also tut eine beliebige erzeugende Folge von $(\mathfrak{w})$ das Verlangte.

Mit $W(N_A^{-1}\overline{\mathfrak{B}})$ bezeichnen wir wieder wie gewöhnlich den Bereich aller offenen Wurzeln von $\overline{\mathfrak{B}}$. Wir erinnern noch einmal an das in Abschnitt 3 [4] und im 1. Abschnitt dieser Arbeit Gesagte über N_A^{-1}: Ist T eine Tangentialstruktur, so lässt N_A^{-1} T die Elemente von T′ fest und fasst nur alle Wurzeln w mit $|w|_A = x^A$, für festes x zu einer neuen Wurzel w_0 (oder auch w_X genannt) zusammen. Diese neue Struktur N_A^{-1} T ist sodann offen. Obwohl $\overline{\mathfrak{B}}$ keine Tangentialstruktur ist, hat N_A^{-1} auch hier einen Sinn. Allerdings wollen wir hier noch folgende Verträglichkeit fordern: Ist $\mathfrak{w} \in W(N_A^{-1}\overline{\mathfrak{B}})$, $\overline{\zeta} \in \mathfrak{w}$, so ist $\overline{\zeta} \leqslant \overline{\zeta}_1$ für alle $\overline{\zeta}_1 \in \mathfrak{w}$, $|\overline{\zeta}_1| \geqslant |\overline{\zeta}|$. Diese Foderung war bei dualisierbaren Strukturen überflüssig, weil sie von alleine erfüllt war. Man kann in diesem Zusammenhang auch von maximalen Mengen von Idealen sprechen, sodaß aus $I_1, I_2 \in \mathfrak{w}$ folgt, daß $I_1 \cap I_2$ eine Menge, die die Idealeigenschaft (I 2) erfüllt, ist. Dabei ist stets $|I|_A = |\mathfrak{w}|_A$ fest.

Sei $(\overline{\zeta}, x)\overline{\zeta} \in \overline{\mathfrak{B}}$, $x \leqslant |\overline{\zeta}|$ $x \in |W(T)|_A$ ein derartiges Paar, daß $x \wedge (Y) = 0$ ist, wobei der Durchschnitt über alle Y genommen wird, zu denen es ein $\zeta^{(X,Y)} \in \bar{\zeta}$ gibt. Den Bereich aller dieser Paare nennen wir $\mathfrak{B}_X$. Man kann aus dem Bereich $\mathfrak{B}_X$ die Struktur $\mathfrak{B}$ durch folgendes Verfahren wiedergewinnen:

Sei $X = |\bar{\zeta}|$ fest vorgegeben. Wir setzen $(\bar{\zeta}, x_1) \leqslant (\bar{\zeta}, x_2)$, wenn $x_1 \leqslant x_2$ ist und bilden in dieser teilweise geordneten Menge Koideale. Jedem $Z = Ux$ entspricht ein gewißes offenes Koideal (d.h. der Durchschnitt aller Koideale mit diesem Träger Z) und das ist ein Element in $\mathfrak{B}$.

Da jedes Paar $(\bar{\zeta}, x)$ bereits ein festes Element $\zeta \in \mathfrak{B}$ definiert (es war $\bar{\zeta}$ Ideal, von solchen ζ und zu vorgegebenem Träger gibt es höchstens ein Element in einem Ideal) ist auch ein offenes Koideal von solchen Paaren ein Element ζ. Umgekehrt gibt es zu einem ζ i.A. viele $(\bar{\zeta}, x)$, die das feste ζ bestimmen: Ist $\bar{\zeta}_1$ so beschaffen, daß es ein $\bar{\eta} \leqslant \bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1$ mit $(\bar{\eta}, x)$, $(\bar{\zeta}_1, x) \in \mathfrak{B}_X$ und $|\bar{\zeta}| = |\bar{\zeta}_1| = |\bar{\eta}|$, gibt so bestimmt $(\bar{\zeta}_1, x)$ dasselbe $\zeta \in \mathfrak{B}$. Trotzdem wollen wir ein ζ stets der Einfachheit halber als $\zeta = (\bar{\zeta}, x)$ bezeichnen (1). Wenn insbesondere in dem Verband |T| noch eine Möglichkeit besteht, Differenzen zu bilden, so kann man obigen Prozeß auch sehr viel einfacher so erklären:

Man findet zu vorgegebenem Paar $(\bar{\zeta}, x) \in \mathfrak{B}_X$ ein Element ζ mit $|\zeta| = (X, X - x)$ und ein durch ein offenes Koideal gegebenes Element hat den Träger $\zeta = (X, X - Z)$, dabei liegt ζ in $\bar{\zeta}$ und ist durch beide Eigenschaften $\zeta \in \bar{\zeta}$ und $|\zeta| = (X, X - Z)$ eindeutig bestimmt. Würden wir nicht von Z, sondern von X — Z ausgehen, so müßten wir anstatt von Koidealen von Idealen sprechen. Hierbei interessiert uns dieser abstrakte Prozeß, der uns aus $\mathfrak{B}_X$ das alte $\mathfrak{B}$ zurükliefert:

Diese Behauptung ist für unsere Dualitätstheorie, die wir jetzt beginnen wollen, von fundamentaler Wichtigkeit, wir brauchen nämlich, um $\tilde{\mathfrak{B}}$ zu definieren, nur zu erklären, was wir unter $\bar{\tilde{\mathfrak{B}}}_X$ verstehen und dann durch obigen Prozeß in $\bar{\tilde{\mathfrak{B}}}_X$ Ideale zu bilden, um zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ zu kommen. Wie man bei vorgelegtem $\mathfrak{B}$ zu einem $\bar{\mathfrak{B}}$ kommt, haben wir für eine zulässige Struktur bereits gezeigt. Wenn wir also nachweisen, dass $\tilde{\mathfrak{B}}$ zulässig

(1) Wir werden auf diesen Punkt sofort zurükhommen.

ist (bezgl. $\tilde{T}$), steht der Anwendung dieses Prozeßes nichts mehr im Wege.

Oben haben wir aus $\overline{\mathfrak{V}}_X$ die Struktur $\mathfrak{V}$ gewonnen und wir haben dabei bemerkt, daß wir im Grunde nur eine Faktorstruktur benötigten, die wir jetzt mit $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ bezeichnen und genau definieren wollen:

Seien

$$(\overline{\zeta}_1, x_1), \quad (\overline{\zeta}_2, x_2) \in \overline{\mathfrak{V}}_X.$$

Wir nennen diese beiden Paare äquivalent, wenn es ein $\overline{\eta} \leqslant \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ gibt, sodaß

$$(\overline{\eta}\, x_1) \in \overline{\mathfrak{V}}_X,$$
$$x_1 = x_2$$

ist. Diese, durch die Klassenbildung erklärte Abbildung nennen wir $\tau : \overline{\mathfrak{V}}_X \to 0\overline{\mathfrak{V}}_X$.

Da man aus $0\overline{\mathfrak{V}}_X \mathfrak{V}$ und aus $\mathfrak{V}$ wiederum $\overline{\mathfrak{V}}_X$ durch Ideal bzw. Koidealbildung zurückgewinnen kann, kann man auch aus $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ $\overline{\mathfrak{V}}_X$ zurückgewinnen.

(2.4). Ist uns $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ bekannt, so kennen wir die gesammte Struktur $\mathfrak{V}$. Das gleiche, das wir eben von $\overline{\mathfrak{V}}_X$ gesagt haben, gilt schon für $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ und wir definieren darum $0_X\overline{\overline{\mathfrak{V}}}$:

Definition 2.3. — *Ist* $\mathfrak{V}$ *eine bezüglich* T *zulässige Struktur und* T *dualisierbar, so verstehen wir unter* $0\overline{\overline{\mathfrak{V}}}_X$ *die Gesammtheit aller Paare* $(\mathfrak{w}_0, X)$, *die den folgenden Bedingungen genügen:*

(1) $$\mathfrak{w}_0 \in W\,(N_A^{-1}\overline{\mathfrak{V}})$$

(2) $$|\mathfrak{w}_0| \in W(T), \quad \textit{offen rel zu einem } |\overline{\zeta}|$$

(3) *Es gibt ein* $\mathfrak{w} \in W(\overline{\mathfrak{V}})$, $N_A^{-1}\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0$ *und ein* $\overline{\zeta} \in \overline{\mathfrak{V}}$ *mit* $|\overline{\zeta}| = X, \overline{\zeta} > \mathfrak{w}$, *sodaß*

$$(\overline{\zeta}, |\mathfrak{w}_0|_A) \in \overline{\mathfrak{V}}_X.$$

In $0\overline{\overline{\mathfrak{V}}}_X$ gibt es eine natürliche Anordnung:

$$(\mathfrak{w}_0, X) \leqslant (\mathfrak{v}_0, Y)$$

wenn

$$\mathfrak{w}_0 \leqslant \mathfrak{v}_0 \;(\text{d.h. } (\mathfrak{w}_0) \supset (\mathfrak{v}_0))$$

und

$$X \geqslant Y$$

ist.

Nebenbei bemerkt haben wir natürlich auch eine Anordnung in $\overline{\mathfrak{V}}_X$ und dementsprechend eine durch τ induzierte Anordnung in $0\overline{\mathfrak{V}}_X$. Unser nächstes Ziel ist es, einen Antiisomorphismus φ von $O\overline{\mathfrak{V}}_X$ auf $O\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ zu finden, also eine eineindeutige, die Anordnung umkehrende Abbildung.

Dazu geben wir zumächst eine Abbildung

$$\sigma : \overline{\mathfrak{V}}_X \to 0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$$

an.

Ist $(\bar{\zeta}, x) \in \overline{\mathfrak{V}}_X$, so wird durch $\bar{\zeta}$ und x eindeutig ein $\mathfrak{w}_0 \in W(N_A^{-1}\overline{\mathfrak{V}})$ mit

$$|\mathfrak{w}_0|_A = x$$

bestimmt. Die Existenz dieses $\mathfrak{w}_0$ folgt sofort aus $(z\,2)$.

Nun ist also $(\mathfrak{w}_0, |\bar{\zeta}|) \in 0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ und wir setzen

$$\sigma(\bar{\zeta}, x) = (\mathfrak{w}_0, |\bar{\zeta}|).$$

Es kehrt σ die Anordnung um und ist ausserdem epimorph. Zwei Elemente aus $\overline{\mathfrak{V}}_X$, die zur gleichen Klasse in $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ gehören, werden in das gleiche Element unter σ abgebildet, sodaß man

$$\varphi = \sigma\tau^{-1}$$

definieren kann. Da τ ein Epimorphismus war, ist φ auf ganz $0\overline{\mathfrak{V}}_X$ definiert und da σ ein Epimorphismus war, ist φ auch einer. Nun gilt aber auch, dass zwei Elemente aus $\overline{\mathfrak{V}}_X$, die das gleiche $(\mathfrak{w}_0, X)$ als Bild unter σ haben, zur gleichen Klasse gehören, sodaß auch

$$\varphi^{-1} = \tau\sigma^{-1}$$

definiert und offenbar zu φ invers ist.

Wir haben also bewiesen:

(2.5) Es gibt einen Antiisomorphismus

$$\varphi : 0\overline{\mathfrak{V}}_X \to 0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X.$$

Der entscheidende Schritt in unserer Dualitätskonstruktion besteht nun darin, nachzuweisen, daß das aus $0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ eindeutig bestimmte $\tilde{\mathfrak{V}}$ bzgl. $\tilde{T}$ zulässig ist. Dazu müßen wir aber erst einmal die Struktur $\tilde{\mathfrak{V}}$ aus $0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ herleiten. Wie wir in (2.4) gesehen haben, gewinnt man aus einem einmal gegebenen

$0\overline{\tilde{\mathfrak{B}}}_X$ die Struktur $\tilde{\mathfrak{B}}$, indem man offene Koideale bei fester Klasse $\{\bar{\zeta}\}$, also $\mathfrak{w}_0$ bildet. In der dualen Struktur $\tilde{T}$ heißt das aber, daß man Ideale in der Menge aller Paare $(\mathfrak{w}_0, |\bar{\zeta}|) \in 0\overline{\tilde{\mathfrak{B}}}_X$ bei festem $\mathfrak{w}_0$ zu bilden hat, und zwar offene Ideale. Ein Element von $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist somit ein Paar $(\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}\}|)$, wobei $\{\bar{\zeta}\} = \mathrm{I}$ ein offenes Ideal ist (d.h. das Ideal, welches aus allen $|\bar{\zeta}| \geqslant |\mathrm{I}|_A$ besteht $(\zeta, |\mathfrak{w}_0|_A) \in \mathfrak{B}_X$. Ist $|\mathrm{I}|_A \in |\mathrm{T}'|$, so hat jedes $\mathrm{X} \in |\mathrm{I}|$ einen $|\mathrm{I}|_A$ enthaltenden offenen Kern. Als Träger hat man dabei wieder die Menge aller Paare $(x, y) x \in |\tilde{\mathrm{T}}'| = |\mathrm{W}(\mathrm{N}_A^{-1}\,\mathrm{T})|_A = |\mathrm{W}(\overline{\mathfrak{B}})|_A x \leqslant y$ in $|\mathrm{T}|$ zu setzen. Hätten wir in $|\tilde{\mathrm{T}}|$ eine Differenzbildung, so müßten wir anstelle von $(\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}\}|)$ besser $(\mathfrak{w}_0, |\mathfrak{w}_0|_A - |\{\zeta\}|_A)$ setzen. Ist $(\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}_1\}|) \leqslant (\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}_2\}|)$, so gilt für die Träger in A $|\mathfrak{w}_0|_A \geqslant |\mathfrak{w}_0|_A$, $|\{\bar{\zeta}_1\}| \subseteq |\{\bar{\zeta}_2\}|$, d.h. $|\{\bar{\zeta}_1\}|_A \geqslant |\{\bar{\zeta}_2\}|_A$.

Ist $(\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}\}|)$ und $(x, \mathrm{Z}) \geqslant (\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}\}|)$ gegeben, (also: $x \leqslant |\mathfrak{w}_0|_A$ in A und $\mathrm{Z} \geqslant |\{\bar{\zeta}\}|_A$ in A), so gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $(\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}_1\}|) \geqslant (\mathfrak{w}_0, |\{\bar{\zeta}\}|)$: Man beschränkt zunächst das Ideal $\{\bar{\zeta}\}$ auf alle $\bar{\zeta}_1$, mit $|\bar{\zeta}_1| \geqslant \mathrm{Z}$ und nimmt jetzt die in allen hinreichend kleinen $\bar{\zeta}_1$ liegende offene Wurzel $\mathfrak{w}_0 \in \mathrm{W}\, \mathrm{N}_A^{-1}\, \overline{\mathfrak{B}})$ mit $|\mathfrak{w}_0|_A = x$.

Damit ist $(z\, 1)$ aus Definition 2.2 gezeigt.

Definition 2.2 $(z\, 2)$ folgt aber sofort daraus, daß

$$|\mathrm{W}\,(\tilde{\mathrm{T}})|_A = |\mathrm{T}'| = |\overline{\mathfrak{B}}|$$

ist.

Damit ist gezeigt:

(2.6) Es ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ zulässig bezüglich $\tilde{\mathrm{T}}$.

Jetzt, wo wir $\tilde{\mathfrak{B}}$ kennen, können wir natürlich auch $\overline{\tilde{\mathfrak{B}}}$ ausrechnen. Die Elemente von $\overline{\tilde{\mathfrak{B}}}$ bekommt man durch Idealbildung in $\tilde{\mathfrak{B}}$ bei festgehaltenem einen Partner in dem Träger. In unserem Falle haben wir (in der Terminologie von $\mathfrak{B}$) maximale Koideale von Paaren $(\mathfrak{w}_0, |\mathrm{I}|)_A$ zu bilden, wobei $|\mathfrak{w}_0|_A$ festbleibt. Da durch $\mathfrak{w}_0$ auf $|\mathrm{I}|_A = \mathrm{X}$ ein $\zeta \in \mathfrak{w}$ definiert wird, kann man also feststellen, daß ein $\bar{\bar{\zeta}}$ ein maximales Ideal von Elementen $\zeta \in \mathfrak{B}$ ist, wobei jedes $\dot{\zeta}$ durch ein Paar $(\bar{\zeta}, x)$ definiert wird, mit für alle $\zeta \in \bar{\zeta}$ festem x.

Wir können jetzt beweisen:

Satz 2.1. — *Ist* $\mathfrak{V}$ *eine Struktur, die bezüglich einer dualisierbaren Tangentialstruktur* T *zulässig ist, so wird durch Definition* 2.3 *eine bezüglich* $\tilde{\mathrm{T}}$ *zulässige duale Struktur* $\tilde{\mathfrak{V}}$ *eindeutig so definiert, daß*

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{V}}} = \mathfrak{V}$$

ist.

Beweis. — Die Zulässigkeit von $\tilde{\mathfrak{V}}$ ist der Inhalt von (2.6). Die Formel $\tilde{\tilde{\mathfrak{V}}} = \mathfrak{V}$ folgt aus (2.5), da

$$0\overline{\mathfrak{V}}_X \xrightarrow{\varphi} 0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X \xrightarrow{\tilde{\varphi}} 0\overline{\tilde{\tilde{\mathfrak{V}}}}_X$$

ein Isomorphismus ist (zweimaliges Anwenden eines Antiisomorphismus liefert einen Isomorphismus) und aus (2.4), welches ein eindeutiges Verfahren zur Gewinnung von $\tilde{\mathfrak{V}}$ aus $\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ und damit aus $0\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}_X$ liefert.

(2.7) Ist eine zulässige Struktur $\mathfrak{V}$ so beschaffen, daß es zu jedem $\Phi = (X, Y)$ nur ein $\zeta^\Phi \in \mathfrak{V}$ gibt, so kann man sich auf Paare (X, O) beschränken und man erhält auf diese Weise eine Struktur $\mathfrak{V}_1$, die zu T′ isomorph ist. Es ist dann $\overline{\mathfrak{V}}_1$ eine Tangentialstruktur und $\overline{\mathfrak{V}}_1 = \mathrm{T}$ und

$$\tilde{\mathfrak{V}}_1 = \tilde{\mathrm{T}}.$$

Das meinen wir, wenn wir sagen : Es fällt unsere Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{V}}$ mit der Dualitätskonstruktion aus [4] für dualisierbare Tangentialstrukturen zusammen, soweit das möglich ist.

Sei $\mathfrak{V}$ eine Homologiestruktur, dann können wir uns noch für diejeniegen ζ^Φ interessieren, mit $\partial\zeta^\Phi \neq 0$. Wir können diese Elemente auch durch innere Eigenschaften charakterisieren :

(2.8) Sei $\zeta^\Phi = (\overline{\zeta}, X)$ (eigentlich sollte man $\tau(\overline{\zeta}, X)$ setzen, wobei τ auf ganz $\{(\overline{\zeta}, X)\} \supset \overline{\mathfrak{V}}_X$ fortgesetzt ist), ein Element in der oben angegebenen Beschreibung durch ein offenes Ideal aus Elementen von $\overline{\mathfrak{V}}_X$, dann ist

$$\partial\zeta^\Phi \neq 0$$

dann und nur dann, wenn es kein $\overline{\zeta}_1 \leqslant \overline{\zeta}$, $\zeta_1 \in \overline{\zeta}_1$ mit

$$|\overline{\zeta}_1| \wedge X = 0$$
$$\partial\zeta_1 = \partial\zeta$$

gibt.

Beweis. — Gibt es ein solches $\bar{\zeta}_1$, dann berandet offenbar $\mathfrak{d}\zeta^\Phi$ auf $|\bar{\zeta}_1|$. Gibt es hingegen kein solches $\bar{\zeta}_1$, so berandet $\mathfrak{d}\zeta^\Phi$ nicht auf einem Z mit

$$\mathrm{Z} \leqslant |\mathfrak{d}\zeta^\Phi|.$$
$$\mathrm{Z} \wedge \mathrm{X} = 0.$$

Wir nennen $\{|\zeta^\Phi|\ \mathfrak{d}\zeta^\Phi \neq 0\} = \mathfrak{V}_+$.

Sei $(\mathfrak{w}, \mathrm{X}) = \tilde{\zeta} \in \tilde{\mathfrak{V}}$. Wir definieren

$\tilde{\mathfrak{V}}_+ = \{|(\mathfrak{w}_0, \mathrm{X})|\ \tau(\bar{\zeta}, \mathrm{X}) \in \mathfrak{V}_+$ für alle hinreichend kleinen $\bar{\zeta} \in \mathfrak{w}_0\}$.

Nun definieren wir, was wir unter $\check{\mathfrak{V}}_0$ verstehen wollen:

Es ist

$$\check{\mathfrak{V}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{V}}$$

und besteht aus allen den Elementen $(\mathfrak{w}, \mathrm{X}) \in \tilde{\mathfrak{V}}$, die in $\tilde{\mathfrak{V}}_+$ liegen und für die zusätzlich gilt:

Es gibt kein $\bar{\zeta}$, $|\bar{\zeta}| \leqslant \mathrm{X}$, $\bar{\zeta} < \bar{\zeta}_1$ für alle $\bar{\zeta}_1 \in \mathfrak{w}, |\bar{\zeta}| \leqslant |\bar{\zeta}|_1$. Wir wollen am Beispiel $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$ (in der Dimension $q = n - r - 1$) und $\mathrm{T} = \mathrm{D}_q$ diese Definition erläutern:

Da X für unser $\check{\zeta} = (\mathfrak{w}, \mathrm{X})$ selbst nicht Träger eines $\bar{\zeta} \in \mathfrak{w}$ ist, andererseits aber ein Ideal $|\{\bar{\zeta}\}|$ offen sein sollte, wenn es Anlaß zu einem Element $\tilde{\eta} = (\mathfrak{w}, |\{\bar{\zeta}\}|)$ gibt, muß jedes $\bar{\zeta} \in \mathfrak{w}$ einen offenen Träger haben. Ferner wissen wir, daß $\check{\zeta} \in \tilde{\mathfrak{V}}_+$ ist, also muß für alle hinreichend kleinen Elemente $\bar{\zeta} \in \mathfrak{w}$, $(\bar{\zeta}, \mathrm{X}) \in \mathfrak{V}_+$ sein. Das heißt also, daß in einer offenen Umgebung $\mathrm{U} \supset \mathrm{X}$ für hinreichend kleines U eine Klasse $\zeta \in \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U} - \mathrm{X})$ definiert ist, die $\neq 0$ ist, die aber in U (d. h. $i_{\mathrm{U}}^{\mathrm{U}-\mathrm{X}}\zeta$) gleich Null ist. Nehmen wir insbesondere für $|\mathfrak{w}|_{\mathrm{A}} = x$ einen Punkt und für $\mathrm{U} = \mathrm{K}^n$ eine hinreichend kleine Vollkugel, so haben wir gefunden:

Es gibt um den Punkt x eine Vollkugel K^n, sodaß

$$\mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{K}^n - \mathrm{X}) \neq \{0\}$$

ist.

Nach dem bekannten Rechtfertigungssatz von K. Sitnikoff, auf den wir noch zusprechen kommen, besagt das aber, daß

$$\dim \mathrm{X} \geqslant r$$

ist. Es gilt auch die Umkehrung: Wenn dim $X \geqslant r$ ist, dann gibt es stets eine Vollkugel K^n mit obiger Eigenschaft.

Mann kann also eine Folge $\{K_i^n\}$ von solchen Vollkugeln finden, $K_i^n \subset K_{i-1}^n$ sodaß $\cap K_i^n$ ein Punkt ist, der allerdings nicht notwendigerweise zu X gehört, sondern nur zu $\overline{X}$, der abgeschlossenen Hülle von X. Wir können also feststellen:

Zu jedem $X \in D_r'$ gibt es einen Punkt x, sodaß $X' = X \cup x$ zu einem $\check{\zeta} = (\mathfrak{w}, X') \in \check{\mathfrak{V}}_0$ gehört.

Von diesem Beispeil wollen wir uns lenken lassen, wenn wir die Tangentialstruktur $\check{\mathfrak{V}}$ definieren:

Die Elemente von $|W(\check{\mathfrak{V}})|_A$ sind solche $X \in |T|$, zu denen es ein x und ein $X' = X \cup x$ gibt, sodaß ein $\check{\zeta} = (\mathfrak{w}, X')$ existiert und alle die größer als solche X sind. Als Wurzelbereich $|W(\check{\mathfrak{V}})|_A$ bekommt dieser Bereich allerdings die zu A duale Anordnung. Zur besseren Unterscheidung nennen wir den Bereich der erzeugenden, eben erklärten Elemente $|W(\check{\mathfrak{V}}_0)|_A$.

Sei $X \in |W(\check{\mathfrak{V}}_0)|_A$ gegeben und eine Menge $\mathfrak{W}$ von

$$\mathfrak{w} \in W(N_A^{-1}\mathfrak{V}),$$

sodaß

$$\check{\zeta} = (\mathfrak{w}, X \vee |\mathfrak{w}|_A) \in \check{\mathfrak{V}}_0 \tag{1}$$

$$\mathfrak{W} \text{ ein Koideal} \tag{2}$$

$$|\mathfrak{w}|_A \in |W(\mathfrak{V})|_A - |W(\check{\mathfrak{V}})|_A \text{ ist,} \tag{3}$$

und sodaß $\mathfrak{W}$ maximalen Träger mit diesen beiden Eigenschaften hat, so nennen wir $\mathfrak{W} = \check{\nu}$ eine Wurzel von $\check{\mathfrak{V}}$ mit dem Träger X.

Zu dieser Definition bemerken wir folgendes:

(1) Aus der Koidealbedingung für $\mathfrak{W}$ folgt insbesondere, dass $\mathfrak{w}_1 \wedge \mathfrak{w}_2 \in \mathfrak{W}$ ist, für zwei beliebige $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in \mathfrak{W}$. Das aber besagt, daß die $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ miteinander verträglich sind, da $\mathfrak{w}_1 \cap \mathfrak{w}_2 \in \mathfrak{W}$ erst recht $\mathfrak{w}_1 \cap \mathfrak{w}_2 \in W(N_A^{-1}\mathfrak{V})$ einschließt.

(2) Die Träger $|\mathfrak{w}|_A$, $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$ sind nicht notwendigerweise aus X, also ist $|\mathfrak{w}|_A$ der Träger des Koideals in A nicht X. Es unterscheidet sich also $X = |\check{\nu}|_A$ (wie wir es soeben definiert haben) von $|\mathfrak{W}|_A$.

Um jetzt die Konstruktion von $\check{\mathfrak{B}}$ zu vervollständigen, müssen wir noch die Elemente angeben. Wir beschränken uns darauf, die Elementeträger als

$$|\check{\mathfrak{B}}'| = |W(T)|_A - |W(\check{\mathfrak{B}})|_A$$

festzusetzen.

Fordern wir noch, daß $\check{\mathfrak{B}}$ normalisiert sein soll, so haben wir durch diese Festsetzungen eine Tangentialstruktur $\check{\mathfrak{B}}$ definiert. Die Elemente sind jetzt offene Ideale I von Wurzeln aus $W(\check{\mathfrak{B}})$ (d.h. jedes $|\mathfrak{w}|_A$ ist offen rel. zu einem $|\check{\mathfrak{v}}|_A$, $\check{\mathfrak{v}}$, $\check{\mathfrak{w}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$.

(2.9) Es ist $\check{\mathfrak{B}}$ eine Tangentialstruktur.

Beweis. — Wir prüfen die einzelnen Axiome nach:

(α 1) Ist $\check{\mathfrak{v}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$ (wir nehmen, wie schon in [4] besprochen wurde, die Wurzeln als Atome, ohne Anordnung), so nehmen wir ein offenes Ideal I von Wurzeln $\check{\mathfrak{w}} \geqslant \check{\mathfrak{v}}$ und erhalten ein Element von $\check{\mathfrak{B}}$, wenn $|I|_A \in |\check{\mathfrak{B}}'|$ ist. Ist $\check{a} \in \check{\mathfrak{B}}'$, so gibt es definitionsgemäß ein $\check{\mathfrak{v}} < \check{a}$ $\check{\mathfrak{v}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$.

(α 2) wird trivialerweise erfüllt (da für diese Zwecke $W(\check{\mathfrak{B}}) = N(\check{\mathfrak{B}})$ nicht angeordnet ist.

(β 1) Ist $\check{a} \leqslant \check{b}_1$, $\check{b}_2$, $|\check{b}_1| = |\check{b}_2|$, so gibt es ein $\check{\mathfrak{v}} \leqslant \check{a}$, $\check{\mathfrak{v}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$. Da die $\check{b}_i$ offene Ideale sind, ist $\check{b}_1 = \check{b}_2$.

(β 2) Ist $\check{a} \in \check{\mathfrak{B}}$, $X \geqslant |\check{a}|$, so betrachten wir wieder ein $\check{\mathfrak{v}} < \check{a}$ und das von X bestimmte offene Ideal, welches ein $\check{b} \geqslant \check{a}$, $|\check{b}| = X$ liefert.

Im 5. Abschnitt werden wir uns mit einer Struktur $[\check{\mathfrak{B}}]$ zu befassen haben, die man als « vereinfachtes » oder $\check{\mathfrak{B}}$, « einfach gemacht » bezeichnen könnte.

Wir behalten nämlich den Normbereich von $\check{\mathfrak{B}}$ bei und fassen nur einfach alle Elemente von $\check{\mathfrak{B}}'$ zu einem Element zusammen, die den gleichen Träger haben. Damit bekommen wir einen wohlbestimmten Bereich $[\check{\mathfrak{B}}]'$ mit Norm heraus. Da $[\check{\mathfrak{B}}]'$ und $|W([\check{\mathfrak{B}}])|_A = |W(\check{\mathfrak{B}})|_A$ bereits vorliegt, kann man daraus eine normalisierte Tangentialstruktur machen, die wir eben $[\check{\mathfrak{B}}]$ nennen. Durch diese Bestimmungsstücke ist $[\check{\mathfrak{B}}]$ sogar eindeutig bestimmt.

Wenn wir an unser soeben gebrachtes Beispiel: $\mathfrak{P} = \mathfrak{V}$, $D_q = T$ zurückdenken, dann kann man den Sitnikoffschen Satz folgendermassen formulieren (s.4. Abschnitt):

$$[\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}] = \tilde{D}_r.$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{V}_m$ für eine in allen Dimensionen erklärte Homologiestruktur $\mathfrak{V}$ gerade $\mathfrak{V}$, genommen, in der m-ten Dimension.

3. Konstruktion der allgemeinen Grassmannmannigfaltigkeit. — Zur Konstruktion der charakteristischen Klassen benötigt man die Grassmannmannigfaltigkeit $G_{n,r}$. Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X, die differenzierbar in den R^n eingebettet ist. bildet man bekanntlich die charakteristischen Klassen nach L. S. Pontrjagin [7] in folgender Weise:

Es gibt die Tangentialabbildung

$$f\colon X \to G_{n,r}$$

die eine stetige Abbildung ist und so erklärt wird, daß man jedem Punkte $x \in X$ erst seine Tangentialebene E^r_x und dieser ihre Parallelebene durch den Nullpunkt zuordnet, die ein Element von $G_{n,r}$ ist. Nun bildet man $H^*(G_{n,r})$, $H^*(X)$, die Kohomologieringe von $G_{n,r}$ und X für einen gewissen (nicht näher bezeichneten) Koeffizientenbereich und

$$f^*\colon H^*(G_{n,r}) \to H^*(X).$$

Als charakteristische Klassen bezeichnet man die Teilmenge $K^*(X) = f^*H^*(G_{n,r}) \subset H^*(X)$.

Die Tatsache, daß $K^*(X)$ nicht von der Einbettung $X \subset R^n$ abhängt, interessiert uns in diesem Zusammenhang hier nicht.

Wir wissen jetzt, daß $P^p_r = M_r$ ist und es entsteht die Aufgabe, für ein beliebiges P^p, also für die projektive Fortsetzung einer beliebigen Tangentialstruktur Gebilde zu definieren, die im Falle $P = P_r$ der Grassmannmannigfaltigkeit entsprechen. Insbesondere werden wir uns für den Fall $P = \tilde{P}_r$ interessieren, da wir wegen $(\tilde{P}_r)^p = \tilde{P}^i_r = \tilde{D}_r$ etwas über D_r erfahren wollen.

Es empfiehlt sich für unsere Zwecke, die Grassmannmannigfaltigkeit in M_r etwas zu verändern:

Wir wollen nicht nur alle Ebenen E^r durch den Nullpunkt sondern alle Ebenen E^r des R^n als Elemente eines topologischen Raumes $\overline{G}_{n,r}$ betrachten. Die Topologie in $\overline{G}_{n,r}$ wird in naheliegender Weise eingeführt:

Zwei « Punkte » E_1^r, $E_2^r \in \overline{G}_{n,r}$ sind benachbart, wenn die Ebenen im R^n es sind. Man hat für eine differenzierbar in den R^n eingebettete Mannigfaltigkeit X wieder eine Abbildung $\overline{f}: X \to \overline{G}_{n,r}$, die jetzt einfach darin besteht, daß man dem Punkt $x \in X$ seine Tangentialebene E_x^r zuordnet.

Da X stetig differenzierbar ist, ist $\overline{f}$ stetig. Wieder gibt es ein

$$\overline{f}^* : H^*(\overline{G}_{n,r}) \to H^*(X)$$

und wir nennen $\overline{K}^*(X) = \overline{f}^*(H^*(G_{n,r}))$.

(3.1) Es ist $\overline{K}^*(X) = K^*(X)$.

Beweis. — Indem wir jedem $E^r \in G_{n,r}$ die parallele und durch den Nullpunkt gehende Ebene $g(E^r)$ zuordnen, bekommen wir eine stetige Abbildung

$$g : \overline{G}_{n,r} \to G_{n,r}$$

Es gibt eine Schar von Abbildungen $g_t : \overline{G}_{n,r} \to \overline{G}_{n,r}$

$$\begin{aligned} g_0 &= g \\ g_1 &= \text{Identität} \\ g_t|G_{n,r} &= \text{Identität } (0 \leqslant t \leqslant 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir nehmen um den Koordinatenursprung $x_0 \in R^n$ eine Vollkugel $W(x_0, \tau)$ vom Radius $\tau > 0$ und erklären g_t folgendermaßen: Ist $E^r \in \overline{G}_{n,r}$ so beschaffen, daß $W(x_0, \tau) \cap E^r \neq \emptyset$ ist, so setzen wir $g_\tau E^r = E^r$. Ist $E^r \cap W = \emptyset$, so nehmen wir die Ebene E_0^r, die zu E^r parallel ist und durch den Nullpunkt geht und die Ebene E_τ^r, die an $W(x_0, \tau)$ tangiert, zu E^r und E_0^r parallel ist und die zwischen E_0^r und E^r liegt. Wir setzen $g_\tau E^r = E_\tau^r$. Wir setzen $g_0 = g$ und $g_\infty = $ Identität. Den Parameter t führen wir durch $\tau = \dfrac{t}{1-t}$ oder $t = \dfrac{\tau}{1+\tau}$ ein. Offenbar gilt dann (1) und da g zu $g_1 =$ Identität homotop ist, gilt auch $\overline{f}^* = f^*$ und $\overline{K}^* = K^*$.

Man kann dieser Kohomologiebetrachtung natürlich auch eine Homologiebetrachtung an die Seite stellen und die charakteristischen Homologieklassen definieren:

$$K_*(X) = f_* H_*(X)$$

wobei

$$f_* : H_*(X) \to H_*(G_{n,r})$$

ist und entsprechend

$$\overline{K}_*(X) = \overline{f}_* H_*(X).$$

Mit dieser verallgemeinerten Grassmannmannigfaltigkeit $\overline{G}$ wollen wir im Folgenden operieren und dieses $\overline{G}$ ist es auch, was wir jetzt verallgemeinern wollen.

Da P^p projektive Fortsetzung von P ist, gibt es zu jedem hinreichend kleinen $w \in W(P^p)$ ein $w_1 \in W(P)$ und einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : K(w) \to K(w_1).$$

sodaß φ ein Isomorphismus von $K(w) \cap K(w_1)$ ist. (s. [4]).

Wir haben für den Fall $P = P_r$ eine spezielle derartige Abbildung für jede Wurzel mit Punktträger definiert. Diese Abbildung hat noch die folgenden weiteren Eigenschaften, die wir aufzählen wollen:

(1) Es ist φ die Identität auf $K(w) \cap K(w_1)$,

(2) Ist $a \in K(w) \cap K(w_1)$, so gibt es zu jedem $b_1 \in K(w) \cap K(w_1)$ ein $b \leqslant b_1$, $b \in K(w) \cap K(w_1)$ und einen Isomorphismus $f: \hat{a} \to \hat{b}$, der mit φ vertauschbar ist.

Als Atome in P_r wollen wir jetzt nur solche nehmen, die offen rel. zu zu einem offenen Simplex σ^r sind, wie schon in der Einleitung angedeutet.

Wir wollen die beiden Bedingungen (1) und (2) erläutern: Mit Hilfe von (1) erreichen wir, daß im Falle von $P_r = P$ die Norm von den Wurzeln w erhalten bleibt: $|w|_A = |\varphi w|_A$. Diese Eigenschaft war bei den von uns in [4] konstruierten Abbildungen erfüllt.

Die Bedingung (2) soll folgende Homogenität im Großen sichern:

Wir hatten φ so konstruiert, daß eine Mannigfaltigkeit V^r mit Tangentialebene E^r_x im Punkte x auf E^r projeziert wird. Man kann nun feststellen, daß für jedes dortige φ im

Kleinen (d.h. für hinreichend kleines V^r) die Abbildung so aussehen muß, aber im Großen kann sie eine ganz andere Gestalt haben. Der Grund dafür, daß im Kleinen jedes Element von $\mathfrak{w}$ auf die Tangentialebene abbildet, ist darin zu suchen, daß alle hinreichend kleinen Elemente von $\mathfrak{w}_1$ in einem festen Simplex σ^r liegen müßen. Die Eigenschaft (2) garantiert uns nun, daß sich die Abbildung φ auch im Großen so verhält: Nehmen wir irgend ein oben beschriebenes V^r, so gibt es eine offene Umgebung U (im R^n) von V^r, die auch φV^r enthält. Man kann nun aber, wie wir eben bemerkten, ein U_1 finden, welches zu U in dem in (2) beschriebenen Sinne isomorph ist und es soll φ auf U_1 so abbilden, wie wir es haben wollen. Ist E^r_x die Tangentialebene an V^r, so ist $E^r_x \cap U_1 = f(E^r_x \cap U)$. Darum wird auch ganz V^r, ebenso wie fV^r auf E^r abgebildet, wobei f der besagte Isomorphismus ist.

Wenn wir also an φ die Forderungen (1) und (2) stellen, dann stellen wir damit gerade die Abbildungen aus [4] (5. Abschnitt) heraus, die wir dort konstruiert haben. Wenn wir von einer projektiven Fortsetzung in diesem Abschnitt sprechen, dann wollen wir immer von den auftretenden Epimorphismen φ verlangen, daß sie zusätzlich noch (1) und (2) erfüllen. Solche Epimorphismen nennen wir « zulässig ».

Sei P eine Tangentialstruktur, die dualisierbar, d.h. sicherlich einfach ist. Wir definieren die abgeleitete Struktur A(P):

Definition 3.1.

I. *Es ist*

$$|W(A(P))|_A = W(P).$$

II. *Die Struktur* A(P) *ist normalisiert und einfach.*

III. *Eine Menge* $m \subset W(P)$ *heißt offen*[4] *in* A(P), *wenn mit* $\mathfrak{w} \in m$, $\mathfrak{w} < a$, $\mathfrak{w}_1 < a \in P'$ *für jedes hinreichend kleine* $a \in P'$ *auch* $\mathfrak{w}_1 \in m$ *ist.*

IV. *Sei* $a \in P'$ *und* f *eine Zuordnung, die jedem* $x \in |W(\hat{a})|_A$ *ein* $f(x) = \mathfrak{w}$ *zuordnet, sodaß* $f(|W(\hat{b})|_A)$ *offen rel.* $f(|W(\hat{a})|_A)$ *ist, dann und nur dann, wenn b rel. a offen ist. Sodann wird* $f(|W(a)|_A)$ *ein* $|\bar{a}_\alpha|$, *für ein* $a_\alpha \in A(P)'$ *und wegen* II *ist dadurch eindeutig ein* $a_\alpha \in A(P)'$ *bestimmt.*

[4] In [4] 1. Abschnitt haben wir in |N(P)| eine Topologie eingeführt und dabei waren die offenen Mengen gerade gewisse erzeugende Elemente der offenen Ideale.

V. *Es wird* $A(P)'$ *von den unter* IV. *definierten* a_α *erzeugt.*
Durch diese fünf Forderungen ist $A(P)$ definiert.
(3.2) Es ist P' in $A(P)'$ isomorph eingebettet.

Beweis. — Sei $a \in P'$, so ist das a_α mit $|\bar{a}_\alpha| = \{w | w < a\}$ in $A(P)'$. Ist $a_1 \leqslant a_2$, so gilt die entsprechende Relation auch für die eingebetteten a_{α_1}, a_{α_2}.

Ist P eine dualisierbare Tangentialstruktur und E eine Einteilung der Atomträger $|W(P)|_A$ in Teilmengen e, sodaß die folgenden Bedingungen gelten:

(E 1) Ist $e_1 \subset e_2$, so gibt es zu jedem $x_2 \in e_2$ ein $x_1 \in e_1$, $x_2 \leqslant x_1$.
(E 2) Sind x_1, $x_2 \in e \in E$, so ist $x_1 \vee x_2 \in e$.
(E 3) Ist $x \in e$ und $x_1 \leqslant x$, so ist $x_1 \in e$.

Die letzten beiden Bedingen besagen offenbar, daß e ein Koideal ist.

Definition 3.2. — *Aus einer solchen Einteilung* E *kann man nun eine einfache Tangentialstruktur* $E(P)$ *bilden.*

Es ist:

I. $$|W(E(P))|_A = \{e | e \in E\}.$$

II. $E_1 \subset E$ ist in $|E(P)'|$, wenn es zu jedem $e \in E_1$, ein $x_1 = f(e) \in e$ gibt, sodaß $\{f(e) | e \in E_1\} = |\bar{a}|$ für ein $a \in P'$ ist.

III. Es ist $E(P)$ normalisiert und einfach.

In $|E(P)| = |E(P')| \cup |W(E(P))|_A$ ist in natürlicher Weise eine Verbandsstruktur definiert. Durch die Bedingungen I. — III. wird uns also eine Tangentialstruktur in eindeutiger Weise festgelegt.

Wäre (was wir i.A. nicht fordern) E sogar eine Einteilung, für welche noch gilt:

(E 4) Zu jedem $x \in |W(P)|_A$ gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes e, welches x enthält,

so könnte man einen Epimorphismus von P auf $E(P)$ finden, der einfach jedem $x \in |W(P)|_A$ sein e zuordnet, welches in (E 4) definiert wird. Da P dualisierbar ist, kann man diesen Epimorphismus auf $|P|$ und damit auf P fortsetzen.

Sei P eine dualisierbare Tangentialstruktur, so bilden wir P^p und $A(P^p)$. Zu dieser abgeleiteten Struktur wollen wir eine ganz besondere Einteilung E_f angeben, die mit dem Fortsetzungsprozeß zusammenhängt. Wir bilden Paare (w, φ), wobei $w \in W(P^p)$ und φ ein zulässiger (s.oben) dualisierbarer Epimorphismus

$$\varphi : K(w_0) \to K(v_0)$$

für ein geeignetes $v \in W(P)$ ist, wobei w_0 bezw. v_0 die zu w bezw. v gehörenden Wurzeln aus $N_A^{-1}P^p$ bezw. $N_A^{-1}P$ sind.

Wir setzen $(w_1, \varphi_1) \leqslant (w_2, \varphi_2)$ wenn $w_1 \leqslant w_2$ und φ_1 Fortsetzung von φ_2 ist (d.h. es ist $(w_1) \supseteq (w_2)$). Man kann von einer solchen Fortsetzung sprechen, da φ_2 auf $K(w_2) \subset K(w_1)$ erklärt war.

In dieser teilweise geordneten Menge bilden wir maximale Koideale k. Die gesuchte Einteilung sieht nun folgendermaßen aus:

Ist $w \in W(P^p)$, so betrachten wir alle w_1 mit $(w_1) \supset (w)$ und ordnen jedem w_1 ein Koideal k_1, $w_1 \in k_1$ derart zu, daß aus $w_1 \leqslant w_2$ folgt $k_1 \supseteq k_2$. Nun bildet man die Vereinigung aller dieser k und hat ein $e \in E_f$, $w \in e$.

Man überzeugt sich sofort, daß man auf diese Weise eine Einteilung E findet, die (E 1) — (E 3) genügt: Eigenschaft (E 2), (E 3) ist trivial und (E 1) folgt aus der soeben durchgeführten Konstruktion.

Definition 3.3. — *Sei P eine dualisierbare Tangentialstruktur, so ordnen wir P die Tangentialstruktur*

$$G(P) = E_f A(P^p)$$

zu und nennen G(P) *die Grassmannstruktur zu* P.

Ist $P = P_r$, so kann man in $\overline{G}_{n,r}$ beliebige topologische Bilder von r-Simplexen betrachten und die Tangentialstruktur $G^1_{n,r}$ nennen, die von diesen Elementen erzeugt worden ist.

Satz 3.1. — *Es ist*

$$G^1_{n,r} = G(P_r).$$

Beweis. — Wir sehen uns die Mengen k an und stellen fest, daß die Einteilung in diese k eine Klasseneinteilung ist: Zwei Atome z_1, $z_2 \in N(P^p)$ gehören zum gleichen k, wenn das durch z_1, z_2 eindeutig bestimmte (wegen der oben gestellten Zusatzforderung) φ_1, φ_2 in dieselbe Tangentialebene abbildet, d.h. wenn z_1 und z_2 die gleiche Tangentialebene haben. Nur dann stimmen nämlich φ_1 und φ_2 auf $(z_1) \cap (z_2)$ überein. Dieser Schluß ist offenbar auch umkehrbar: Wenn z_1 und z_2 die gleiche Tangentialebene aufspannen, ist $z_1, z_2 \in k$. Es wird also durch k eindeutig eine Ebene E^r bestimmt. Da zwei r-dimensionale Ebenen dann und nur dann gemeinsame Atome enthalten, wenn sie gleich sind, sehen wir, daß hier in der Tat eine Klasseneinteilung vorliegt.

Nach Definition 3.3 sind nun aber die k die Punkte von $G(P_r)$ (in diesem Falle darf man von Punkten sprechen). Also stimmen die minimalen Atomträger (Punkte) von $G^1_{n,r}$ und $G(P_r)$ überein. Der Rest des Beweises von Satz 3.1 folgt nun leicht aus Definition 3.1. Die dort erklärten offenen Mengen stimmen offenbar gerade mit den offenen Mengen von $G^1_{n,r}$ überein. Sei σ^r ein Simplex von P^p und E^r_x eine Schar von Ebenen im R^n, sodaß es eine eineindeutige Zuordnung die überdies stetig ist, $x \in \sigma^r \to E^r_x$ gibt. Die Struktur $G^1_{n,r}$ und die Struktur $G(P)$ werden beide von solchen Simplexen erzeugt.

Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Wir kommen jetzt zu den Homologiestrukturen und damit zu den charakteristischen Klassen. Dabei sollen natürlich die klassischen charakteristischen Klassen als Spezialfall herauskommen. Wir lassen uns also von den Verhältnissen der klassischen Differentialgeometrie leiten. Gegeben sei eine Tangentialstruktur P, die wir für spätere Zwecke als dualisierbar voraussetzen wollen. Unter $\mathfrak{B}$ verstehen wir eine Homologiestruktur auf einer Tangentialstruktur T, die größer als P^p (die projektive Fortsetzung von P) ist, aber den gleichen Normbereich wie diese hat:

$$P^p \subset T \tag{2}$$

$$|P^p| = |T|. \tag{3}$$

Ist $P = P_r$, so wollen wir auf P^p_r auch charakteristische Klassen einer Dimension $q < r$ erklären können und unsere Homologiestruktur $\mathfrak{P}$, die simpliziale Homologie, muß bereits auf P^p_q erklärt sein. Da $P^{p'}_q \supset P^{p'}_r$ ist, und da beide den Verband aller Teilmengen des R^n zum Normbereich haben, sind (2) und (3) erfüllt.

Für unsere Zwecke genügt es nun aber, sich auf solche Ideale in $\overline{\mathfrak{B}}$ zu beschränken, deren Elemente alle bereits in $P^{p'}$, liegen. Ist also $\mathfrak{w} \in W(\mathfrak{W})$ irgend eine Wurzel, so nehmen wir eine Zerlegung von $\mathfrak{w}$ in lauter $\mathfrak{w}_p$ vor, die die beiden Eigenschaften haben:

(1) Jedes $\bar{\zeta} \in \mathfrak{w}_p$ hat einen Träger $|\bar{\zeta}| \in |P^{p'}|$,

(2) Es gibt zu einem $\mathfrak{w}_p$ kein $I \supset \mathfrak{w}_p$ in $\mathfrak{w}$, mit der Eigenschaft (1), ohne daß $I = \mathfrak{w}_p$ ist.

Die Menge aller dieser $\mathfrak{w}_p$ nennen wir $W_p(\mathfrak{W})$.

In der klassischen Differentialgeometrie definiert man zu jedem ζ welches auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit V erklärt ist (d.h. dessen Träger $|\zeta| = (V, X)$ für ein geeignetes $X \leqslant V$ ist) eine charakteristische Klasse, also nach dem zu Beginn dieses Abschnittes Gesagten, eine Menge von anderen Elementen ζ_1 auf (V, X), die alle durch die Tangentialabbildung

$$f: (V, X) \to (\overline{G}_{n,r}, fX)$$

in dasselbe Element abgebildet werden:

$$f_* \zeta_1 = f_* \zeta_1'.$$

Besonders sind dabei immer die absoluten charakteristischen Klassen von Interesse. Bei unseren allgemeinen, für Tangentialstrukturen gültigen Überlegungen sollen die « klassischen » charakteristischen Klassen als Spezialfall herauskommen. Dabei wird aber i.A. nicht mehr jedem ζ genau eine charakteristische Klasse zugeordnet werden, sondern es wird viele charakteristische Klassen zu ein und demselben ζ geben. Mit anderen Worten: Die oben beschriebene Einteilung der ζ in die charakteristischen Klassen wird i.A. keine Klasseneinteilung mehr sein. Der Grund ist in folgendem Umstand zu suchen: Bei der Bildung von $G(P) = E_f A(P^p)$ war E_f keine Einteilung in Äquivalenzklassen mehr, wie wir es im speziellen Falle von $P = P_r$ gefunden hatten. Die Tangentialabbildung liefert also keine eindeutige Zuordnung mehr. In Definition 3.1 haben wir eine besondere Art der Einbettung eines $a \in P'$ in G(P) kennen gelernt. Zur Erläuterung sagen wir noch einmal, um was es sich dabei handelt, wenn $P = P_r^p$ ist. Hier nehmen wir zu jedem Atom $z \in N(a)$ eine Ebene, die durch den Punkt z hindurch geht, aber nicht notwendigerweise an a tangiert. Diese Ebenenschar soll stetig sein, d.h. es soll eine Folge $\{E_i\}$ von solchen Ebenen gegen ein E konvergieren, wenn dasselbe für die Punkte x_i gilt.

Wenn wir im Folgenden von einem kanonischen Einbettungsisomorphismus sprechen, dann meinen wir eine solche, in Definition 3.1 beschriebene Abbildung. So wie im klassischen Fall brauchen wir auch hier eine Homologiestruktur in G(P). War $P = P_r$, so weiß man, daß $G(P_r)$ eine Mannigfaltigkeit ist, man also mit der simplizialen Struktur auskommt. Aber im Falle einer beliebigen Mannigfaltigkeit ist das anders. Hier gehen wir von einer Homologiestruktur $\mathfrak{V}_1$ auf G(P) aus, die folgende Eigenschaft hat:

Ist a_α ein eingebettetes Element aus G(P), so ist $\mathfrak{V}_1$ auf a_α isomorph zu (dem auf P vorgegebenen) $\mathfrak{V}$.

Umgekehrt soll es zu jedem $\mathfrak{w} \in W(\mathfrak{V}_1)$ ein $\bar{\bar{\zeta}}_1 \in \mathfrak{w}$ geben, sodaß $\bar{\bar{\zeta}}_1$ eingebettet ist. Da man in einer Homologiestruktur, die exakt ist, nur die kleinen Elemente (d.h. die auf den kleinen Trägern erklärten) zu kennen braucht [2], ist durch diese beiden Voraussetzungen schon $\mathfrak{V}_1$ durch $\mathfrak{V}$ bestimmt.

Da wir für $P_r = P$ der Einfachheit halber nur die absoluten Klassen ausrechnen, machen wir allgemein noch die folgende Verabredung: Es werden nur zu solchen Elementen ζ_m (den minimalen Elementen) charakteristische Klassen erklärt, die nicht aus $0\mathfrak{V}_X$ sind. Was das im Falle von $\mathfrak{S}$ ist, ist klar. Für $\tilde{\mathfrak{S}}$ heißt das aber, daß $\zeta_m \in \hat{\mathfrak{S}}_0$ ist, wenn noch $\zeta_m \neq 0$ vorausgesetzt wird. Jetzt können wir charakteristische Klassen erklären, indem wir den klassischen Prozeß soweit es geht nach zuahmen versuchen.

Sei ein Paar (a, Y) gegeben, $a \in P^p$, $Y \in |P^p|$ $|a| \geqslant X$, so betrachten wir Elemente a_α aus $G(P)'$ mit der Eigenschaft, daß in $[\bar{a}_\alpha]$ zu jedem $w < a$ ein k vorkommt, $w \in k$. Als Y_α bezeichnen wir die Vereinigung einer Menge von Repräsentanten k_y, wobei es zu jedem $w < a$, $|w|_A \leqslant Y$ ein k_y, $w \in k_y \in Y_\alpha$ gibt.

Definition 3.4. — *Sei $\eta \in \mathfrak{V}_1$ eine Klasse mit $|\eta| = (a_\alpha, Y_\alpha)$, sodaß $\eta > \mathfrak{w}$ (d.h. es gibt ein $\bar{\eta}$, $\bar{\eta} > \mathfrak{w}$, $\eta \in \bar{\eta}$) für jedes einbettbare $\mathfrak{w} \in \zeta_m$ für festes $\bar{\zeta}_m$ ist. Ein maximales (bezgl. des Trägers) offenes Koideal von solchen η bezeichnen wir als eine charakteristische Klasse von ζ_m.*

Als charakteristische Klasse zu einem $\zeta \in \mathfrak{V}$ bezeichnen wir irgend eine charakteristische Klasse für ein beliebiges $\zeta_m < \zeta$.

Diese reichlich komplizierte Definition liefert in zwei Fällen etwas Anschauliches und Einfaches:

Wenn $P = P_r$ oder $P = \tilde{P}_r$ ist.

(3.3) Ist $P = P_r$ und betrachten wir nur absolute Elemente ζ, deren Träger $|\zeta|$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so gibt es zu ζ nur genau eine charakteristische Klasse, nämlich gerade $f_*\zeta$, wobei f die Tangentialebbildung ist.

Beweis. — Es ist ζ selbst minimales Element im obigen Sinne. Da es zu jedem Atom $z \in (P_r^p)$ nur ein k, $z \in k$ gibt und da $|\zeta| = a$ differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, ist jedes a_α einfach ein Element von G(P), $a_\alpha \geqslant f\, a$. Ein η, mit $a_\alpha = |\eta|$ ist das Bild der Klasse ζ unter der Tangentialabbildung $f: |a| \to |a_\alpha|$. Als Homologiestruktur $\mathfrak{B}_1$ nehmen wir in G(P) natürlich wieder die simpliziale und die einbettbaren Elemente sind jetzt z.B. gerade die Simplexe in (der Mannigfaltigkeit) G(P). $\mathfrak{B}_1$ ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt, da man ja bekanntlich nur die Simplexe und deren Homologiegruppen $H_*(\sigma^r, \mathrm{Rd}\, \sigma^r)$ zu kennen braucht, um für eine exakte Homologiestruktur ganz $\mathfrak{B}_1$ ausrechnen zu können. Die Koidealbildung wird aber hier trivial, da man einfach das größte Element in der Menge aller dieser η, nämlich $f_*\zeta$, $f\colon |\bar{a}| \to \overline{G}_{n,\,r}$ (als das maximale Element von G(P)) zu nehmen hat. Dieses Koideal hat den größten möglichen Träger (nämlich $G_{n,\,r}$) und ist offen.

Damit ist (3.3) bewiesen. Es besagt, daß unser allgemeiner Begriff der charakteristischen Klassen für den klassischen Fall mit dem dort definierten zusammenfällt.

Im zweiten interessanten Falle, dem von $P = \tilde{P}_r$, gibt es zu einem festen $\tilde{\zeta}$ sehr viele charakteristische Klassen, aber die Klassen $\neq 0$ lassen sich in besonders einfacher Form charakterisieren, die auf die Struktur $\check{\mathfrak{S}}_0$ führt.

Sei P eine dualisierbare Tangentialstruktur, so wollen wir die dualen charakteristischen Klassen, d.h. die von $\tilde{P}$ ausrechnen. Dabei beschränken wir uns aber auf das Beispiel $P = \tilde{P}_r$.

Während wir für die Grassmannmannigfaltigkeit von P_r fanden, daß die Einteilung in charakteristische Koideale k eine Klasseneinteilung war, ist es hier gerade umgekehrt: Zu je zwei Wurzeln $\tilde{w}_1\,\tilde{w}_2$ gibt es immer zwei Elemente $e_i \in E_f (i = 1,2)$, sodaß $e_1 \neq e_2$ und $\tilde{w}_i \in e_i$ ist. Die Abbildungen φ_1, φ_2

$$\varphi_i : W(\tilde{w}_{1\,0}) \to W(\tilde{\rho}_0)$$

lassen sich so finden, daß $\varphi_1 \neq \varphi_2$ auf dem gemeinsamen Durchschnitt ist. Wir wissen aus [4], daß man als $|\tilde{\rho}|_A$ immer einen r-dimensionalen Würfel nehmen kann, sofern $|\tilde{w}_1|_A$ hinreichend klein ist. Das Element $|\tilde{w}_1|_A$ ist an und für sich aus $|P_r^{i'}|$, aber da $P_r^{i'}$ einfach ist, ist durch diesen Träger bereits eindeutig ein Element $a \in P_r^{i'}$, bestimmt. Das Gleiche gilt für $|\tilde{\rho}|_A$.

Aus diesen Überlegungen folgern wir: Mit jedem Element $a \in P_r^{i'}$, welches in $G(\tilde{P}_r)$ eingebettet ist, liegt auch jedes größere in $G(\tilde{P}_r)$.

Wir gehen dazu über, die dualen charakteristischen Klassen, d.h. die von $\tilde{P}_r$ zu erklären.

Die zulässige Struktur, deren wir uns hier bedienen, ist $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Sei $\tilde{\zeta}_m$ ein Element, welches nicht aus $0\,\overline{\tilde{\mathfrak{B}}}_X$ stammt. Da wir uns nur für die charakteristischen Klassen $\neq 0$ interressieren wollen, nehmen wir einfach nach dem weiter oben Ausgeführten ein Element aus $\check{\mathfrak{S}}_0$. Es ist also $\tilde{\zeta}_m = (\mathfrak{w}_0, X)$, $X \in |W(\check{\mathfrak{S}})|_A$. Nach dem, was wir eben über $G(\tilde{P}_r)$ gesagt haben, kann man ζ_m isomorph in $G(\tilde{P}_r)$ und zwar auf mannigfache Weise einbetten. Seien $\tilde{\zeta}_m^1$ und $\tilde{\zeta}_m^2$ zwei solche Einbettungen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir hier von unserem $\tilde{\zeta}_m$ voraussetzen, daß $|\mathfrak{w}_0|_A$ ein Punkt, also in der dualen Struktur ein maximales Element ist. Da jedes Element einbettbar (d.h. durch einen Isomorphismus aus Def. 3.1 isomorph einbettbar) ist, kann man auch dieses $\tilde{\zeta}_m$ einbetten. Wäre $\tilde{\zeta}_m$ nicht so beschaffen, daß $|\mathfrak{w}_0|_A$ ein Punkt ist, so gäbe es aber in dem Koideal $\tilde{\zeta}_{mK}$ sicher ein $\tilde{\zeta}_1$, welches durch isomorphe Einbettung eines solchen Elementes entstanden ist.

(3.4) Seien $\tilde{\zeta}_1 = (\mathfrak{w}_1, X_1)\ \tilde{\zeta}_2 = (\mathfrak{w}_2, X_2)$ zwei beliebige minimale Elemente in $\tilde{\mathfrak{S}}$ (mit Punktträger $|\mathfrak{w}_1|_A$, $|\mathfrak{w}_2|_A$). Wir betten sie in $G(P_r)$ ein und nennen die so entstandenen Elemente aus $\tilde{\mathfrak{S}}_1$, $\tilde{\zeta}_1^e$, $\tilde{\zeta}_2^e$. Wir fragen uns, wann es ein $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$

gibt, $\tilde{\eta} \geqslant \tilde{\zeta}_1^e, \tilde{\zeta}_2^e$ und behaupten, daß es dann auch ein eingebettetes $\tilde{\eta}_1^e \geqslant \tilde{\zeta}_1^e, \tilde{\zeta}_2^e$ geben muß.

Unter unseren Voraussetzungen besagt das sogar, daß $\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta}_2$ ist, wie wir noch beweisen werden.

Mit anderen Worten: Das Element $\tilde{\eta} \in \tilde{\mathfrak{S}}_1$ braucht nicht durch eine isomorphe Einbettung zu entstehen. Unsere Behauptung lautet aber, daß es immer schon ein $\tilde{\eta}_1$ in $\tilde{\mathfrak{S}}$ gibt, welche sich sich isomorph einbetten läßt, daß $\tilde{\eta}_1^e \geqslant \tilde{\zeta}_1^e, \tilde{\zeta}_2^e$ ist.

Der Beweis dieser Tatsache folgt aus der Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{S}}_1$. Da $\tilde{\zeta}_1^e$ und $\tilde{\zeta}_2^e$ in $G(\tilde{P}_r)$ homolog sind (d.h. nichts anderes, als daß es ein oben bezeichnettes $\tilde{\eta}$ gibt), kann man eine Kette $\tilde{\sigma}_j^e (j = 1, \ldots N)$ von eingebetteten Elementen finden, und eine Menge von $\tilde{\eta}_j^e$, sodaß auch $\tilde{\eta}_j^e$ eingebettet und

$$\begin{gathered} \tilde{\eta}_j^e \geqslant \tilde{\sigma}_j^e, \qquad \tilde{\sigma}_{j+1}^e \\ \tilde{\zeta}_1^e = \tilde{\sigma}_1^e \\ \tilde{\zeta}_2^e = \tilde{\sigma}_N^e \end{gathered}$$

ist. Man kann diese verschiedenen $\tilde{\eta}_j^e$ zwar in $G(\tilde{P}_r)$ zu einem $\tilde{\eta}$ zusammen setzen, (was das alte $\tilde{\eta}$ sei kann, es aber natürlich nicht sein muß), aber man kann es nicht in P für bel. P und $\mathfrak{B}$, da die Einbettungen alle verschieden sein können.

Im Falle von $P = \tilde{P}_r$, $\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{S}}$, wo wir nur annehmen können, daß $|\mathfrak{w}_0|_A = |\mathfrak{w}_1|$ ist, heißt das, daß bereits $\zeta_1 = \zeta_2$ sein muß, weil es außer dem trivialen Element $E_{\mathfrak{B}}$ für $\zeta_1 \neq \zeta_2$ kein größeres mehr geben kann.

Damit ist (3.4) bewiesen.

Durch (3.4) ist aber der wesentliche Schritt zur Errechnung der dualen charakteristischen Klassen getan.

Sei ζ_m ein minimales Element $\neq 0$, so haben wir gesehen, daß wir zu der Kodealbildung, die für die Gewinnung einer charakteristischen Klasse notwendig ist, in $\tilde{\mathfrak{S}}$ bleiben können. Dort aber gibt es zu jedem solchen Koideal immer ein maximales Element, nämlich ein $\tilde{\eta}_m$ mit $\tilde{\eta}_m = (\mathfrak{w}, X)$ wo $|\mathfrak{w}|_A$ ein Punkt ist. Die charakteristischen Klassen von P_r stehen also in eineindeutiger Korrespondenz mit den Elementen

$$\tilde{\eta}_m \in \hat{\mathfrak{S}}_0,$$

die auf einen Punkt erklärt sind (d.h., wo $|\mathfrak{w}|_A$ ein Punkt ist).

SATZ 3.2. — *Ist* $P = \tilde{P}_r$, *so besteht die Menge aller charakteristischen Klassen* $\neq 0$ *für die zur Sitnikoffschen Struktur duale Struktur* $\tilde{\mathfrak{S}}$ *aus den* $\tilde{\eta} \in \check{\mathfrak{S}}_0$, *die einen Punkt als Träger haben.*

Die Bedeutung dieses Satzes liegt in der folgenden Tatsache :

Die Struktur $\check{\mathfrak{S}}_0$ tritt, wie wir sogleich im nächsten Abshnitt sehen werden, bei der abstrakten Formulierung des Sitnikoffschen Rechtfertigungssatzes auf.

Ist X ein r-dimensionaler Raum, so gibt es eine Vollkugel $K_0^n \subset R^n$, sodaß

$$H_{n-r-1}(K_0^n - X) \neq \{0\}$$

ist.

Die Wurzeln dieser Klassen $\zeta \neq 0$ sind also in D_r die dualen charakteristischen Klassen. Damit haben wir also duale Gegenstücke zu den klassischen charakteristischen Klassen auch anschaulich interpretiert.

Während bekanntlich die Tatsache, daß eine klassische charakteristische Klasse $\neq 0$ ist etwas über ein Vektorfeld mit Singularitäten, die sich nicht beseitigen lassen, aussagt, besagt eine nicht verschwindende charakteristische Klasse für $P = \tilde{P}_r$, daß in einer Umgebung K_0^n von dem Träger dieser Klasse der Sitnikoffsche Satz gilt.

4. Der Satz von Sitnikoff. — In [9] hat K. Sitnikoff den folgenden Satz über die Charakterisierung der Dimension eines topologischen Raumes $X \subset R^n$ durch Homologieeigenschaften der Restmenge bewiesen:

SATZ VON SITNIKOFF. — *Sei* $X \subset R^n$, *dim* $X < n$, *so ist dim* $X \geqslant r$ *dann und nur dann, wenn es eine Vollkugel* $K_0^n \subset R^n$ *gibt, sodaß*

$$H_{n-r-1}(K_0^n - X) \neq \{0\}$$

ist. Die hierbei benutzte Homologietheorie ist die Sitnikoffsche und der Koeffizientenbereich ist der der ganzen Zahlen.

Wir wollen uns hier nicht mit der außerordentlich interessanten Geschichte dieses Satzes befassen, sondern nur bemerken, daß es etwa 25 Jahre von dem Tage an dauerte, an dem der gleiche Satz für kompakte Teilräume des R^n gefunden worden war, bis obiger Satz von Sitnikoff bewiesen wurde. Die Definition der Sitnikoffschen Homologiestruktur findet sich neben den Originalarbeiten von Sitnikoff auch in [2] und [3]. Hier geben wir eine etwas vereinfachte Definition an:

Sei $\{\zeta_p^{*i}\} = I$ ein Ideal von absoluten Homologieelementen in der simplizialen Homologiestruktur, mit poyedralen Trägern X_i. Dieses Ideal I soll noch die folgenden Eigenschaften haben:

(1) In jeder polyedralen Umgebung $U(|I|_A)$ soll es ein $\zeta^U \in I$ geben,

(2) Zu jedem ζ^X gibt es ein ξ^{Φ_i} mit $\partial\xi^{\Phi_i} = \zeta^{X_i}$, sodaß aus $\zeta^{X_i} \leqslant \zeta^{X_{i'}}$ in I die gleiche Relation für die ξ^{Φ_i} folgt.

(3) Es soll I maximal mit den Eigenschaften (1) und (2) sein.

Wir nennen ein solches Ideal ein absolutes Atom von Sitnikoff. Man kann genau so relative Atome definieren und einen Randoperator ∂. Ferner kann man Summe und Differenz von Atomen erklären und schließlich Sitnikoffsche Klassen $\zeta^X_{\mathfrak{S}}$ (absolute wie relative) auf folgende Weise:

Sei X ein beliebiger topologischer Raum, wir betrachten Sitnikoffsche Atome $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$, deren Träger $|\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}|$ (d.s. die Idealträger $|I|_A$) in X liegen. Es soll $\mathfrak{z}_{1\mathfrak{S}} \sim \mathfrak{z}_{2\mathfrak{S}}$ in X sein, wenn es ein relatives Atom $\mathfrak{x}_{\mathfrak{S}}$ mit $\partial\mathfrak{x}_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{z}_{1\mathfrak{S}} - \mathfrak{z}_{2\mathfrak{S}}$ gibt. Auf diese Weise bekommt man Klassen und diese Klassen sind die Elemente $\zeta^X_{\mathfrak{S}}$. Im relativen Fall geht man entsprechend vor und man erkennt (genauer findet man die ganze Theorie in [2] dargestellt) daß die so entstandene Homologietheorie exakt ist.

Nun zurück zu dem Satz von Sitnikoff: Sei X so beschaffen, daß X nirgends dicht ist (d.h., es soll keine offene Teilmenge $U \subset R^n$ geben, sodaß $U \cap X$ in U dicht liegt, also $\overline{U \cap X} = U$ ist.).

Wir betrachten jetzt $K_0^n - X$ und eine der im Satz erwähnten Klassen $\zeta_{\mathfrak{S}}^{K_0^n - X} \neq 0$. Nach dem Satz wird sie erzeugt durch ein Sitnikoffsches Atom $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$. Wegen unserer Voraussetzung über X ist aber auch ein polyedrales Atom $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}}$ (d.i. ein Zyklus aus lauter geradlinigen Simplexen in $K_0^n - X$ vorhanden), sodaß $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}} < \zeta^{K_0 - X}$ ist. Das beweist man so: Wir können eine polyedrale Umgebung $V = V(K_0^n - X)$ finden, sodaß eine Klasse $\zeta_{\mathfrak{S}}^{K_0^n - V} \neq 0$ mit $\zeta_{\mathfrak{S}}^{K_0^n - V} \leqslant \zeta_{\mathfrak{S}}^{K_0^n - X}$ existiert. Dieses $\zeta_{\mathfrak{S}}^{K_0^n - V}$ ist nun aber ein $\zeta_{\mathfrak{P}}^{K_0^n - V}$, also gibt es ein solches $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}}$. Nun können wir aber von der Homologiestruktur $\mathfrak{P}$ auf beliebigen topologischen

Räumen X in folgendem Sinne sprechen: Es soll ein $\zeta^{X}_{\mathfrak{P}}$ eine Klasse von zueinander homologen (i. polyedralen Sinne) polyedralen Atomen $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}}$ mit Träger in X sein. Anders ausgedrückt: Es ist $\zeta^{X}_{\mathfrak{P}}$ die unendliche Vereinigung aller $\zeta^{X_i}_{\mathfrak{P}}$, wobei die $\{\zeta^{X_i}_{\mathfrak{P}}\}$ ein maximales Koideal von polyedralen Klassen sind, mit polyedralem X_i. Ist $X \subset R^n$, so sollen nur geradlinige X_i zugelassen sein. Dabei sollen die Atome $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}} < \zeta^{X_i}_{\mathfrak{P}}$ polyedral sein. In diesem Sinne sprachen wir auch von der lokalen Korrespondenz

$$f: \mathfrak{S} \to \mathfrak{P}$$

die jedem $\zeta^{X}_{\mathfrak{S}}$ die Klasse $\zeta^{X}_{\mathfrak{P}}$ zuordnet, die von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}} < \zeta^{X}_{\mathfrak{S}}$ erzeugt wird, falls es eine solche gibt, oder das Atom $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$.

(s. 1. Abschnitt, Bew. zu Satz 1.).

Für ein $X \subset R^n$, welches nirgends dicht liegt, kann man nun also den Sitnikoffschen Satz so aussprechen, daß er schon für die gewöhnliche polyedrale Homologiestruktur gilt, wobei « Beranden » allerdings « Sitnikoffsches Beranden » heißt. Wegen obiger Überlegung über gilt das auch schon, wenn man nur weiß, daß es in $\zeta^{K_0^n - X}_{\mathfrak{S}}$ ein $\mathfrak{z}_{\mathfrak{P}} < \zeta^{K_0^n - X}_{\mathfrak{S}}$ gibt, denn dann ist schon ein $\zeta^{K_0^n - X}_{\mathfrak{P}} \neq 0$ vorhanden. Das nun ist in einem abgeschwächten Sinne immer zu erreichen:

(4.1) Sei $X \subset R^n$ dim $X \geqslant r$. Zu jedem K_0^n mit

$$H_{n-r-1}(K_0^n - X) \neq \{0\}$$

(i. Sitnikoffschen Sinne) gibt es eine offene Menge $U \subset K_0^n$, ein $\zeta_{\mathfrak{P}} \in H_{n-r-1}(U - X)$,
sodaß

$$\zeta_{\mathfrak{P}} \neq 0$$

und

$$i^{U-X}_{*U}\, \zeta_{\mathfrak{P}} = 0$$

ist.

Beweis. — Sei $\eta \in H_{n-r-1}(K_0^n - X) \neq \{0\}$ die besagte Klasse in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}} < \eta$. Sei U eine offene Umgebung von $|\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}|$, dann wird durch $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$ eine Klasse η_u auf $(K_0^n - (X - U))$ erzeugt. Wir führen unseren Beweis indirekt und nehmen an, daß es kein $\eta_u \neq 0$ für beliebig kleines U gibt. Dabei soll natürlich $\eta_u \in \mathfrak{P}$ sein. Die von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$ auf U erzeugte Klasse nennen wir $\zeta_{\mathfrak{U}}$. Unsere Annahme besagt, daß

$$i^{u}_{*K_0^u - (X-u)}\zeta_u = 0$$

ist und, da $\mathfrak{P}$ exakt ist, gibt es eine Folge $\{\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}}\}$ von Ketten, deren Rand in U liegt und dort zu $z_{\mathfrak{S}}$ (im Sinne von $\mathfrak{S}$) homolog ist, sodaß

$$|\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}}| \cap \mathrm{X} = \emptyset$$

ist. Dabei nähert sich $\partial\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}}$ mit wachsendem i immer mehr $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$. Die zu $\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}}$ gehörende Umgebung nennen wir $\mathrm{U} = \mathrm{U}_i$. Es ist also

$$\bigcap \mathrm{U}_i = |\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}|.$$

Wäre nun $\partial\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}} \sim \partial\mathfrak{x}^{i+1}_{\mathfrak{P}}$ in $\mathrm{U}_i - \mathrm{X}$ für alle i und wäre $\eta^i_{\mathfrak{S}}$ die, diese Homologie herstellende Kette,

$$\partial\mathfrak{y}^i_{\mathfrak{S}} = \partial\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}} - \partial\mathfrak{x}^{i+1}_{\mathfrak{P}}$$
$$|\mathfrak{y}^i_{\mathfrak{S}}| = (\mathrm{H}_i, \mathrm{F}_i)$$
$$\mathrm{H}_i \subset \mathrm{U}_i - \mathrm{X}$$

dann könnten wir in einem sogleich zu besprechendem Sinne die Limeskette $l_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{x}^1_{\mathfrak{P}} + \Sigma\mathfrak{y}^i_{\mathfrak{P}}$ bilden. Es ist

$$|l| \cap \mathrm{X} \subset |\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}|$$

also

$$|l| \cap \mathrm{X} = \emptyset.$$

Die Folge der Ketten $\mathfrak{x}^1_k = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathfrak{y}^i_{\mathfrak{S}} + k^{\mathrm{N}}$ konvergiert gegen die Limeskette, wobei k^n diejenige in U_n gelegene Kette ist, die eine Homologie zwischen $\partial\mathfrak{x}^{\mathrm{N}}_{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$ herstellt.

Wir bemerken noch, daß die Ketten $\mathfrak{y}^i_{\mathfrak{S}}$, bzw. k^{N} im Gegensatz zu $\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}}$ ohne weiteres Ketten (oder man könnte auch im Hinblick auf spätere Verallgemeinerung sagen: Klassen) aus $\mathfrak{S}$ sind. Ist obige Voraussetzung nicht erfüllt, gibt es also einen Index i, sodaß

$$\partial\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}} - \partial\mathfrak{x}^{i+1}_{\mathfrak{P}} \not\sim 0 \qquad \text{in} \qquad \mathrm{U}_i - \mathrm{X}$$

ist, so sind wir fertig, denn wir haben in $\partial\mathfrak{x}^i_{\mathfrak{P}} - \partial\mathfrak{x}^{i+1}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{z}'_{\mathfrak{P}}$ und $\mathrm{U} = \mathrm{U}_i$ das gefunden, was wir suchten.

Im anderen Fall aber erfüllt die Limeskette $l_{\mathfrak{S}}$ die Bedingung

$$\partial l_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{S}}$$

und

$$|l_{\mathfrak{S}}| \cap \mathrm{X} = 0,$$

im Gegensatz zu unserer Annahme, daß $\mathfrak{z}_{\mathfrak{S}} \not\sim 0$ in $\mathrm{K}^n_0 - \mathrm{X}$

war. Wir wollen noch auf die Bildung dieser Limeskette eingehen und diesen Prozeß erläutern: Sei $\mathfrak{x}_i$ eine Folge von relativen Ketten mit

$$\partial \mathfrak{x}_i = \mathfrak{z}$$

die alle in einem offenen U liegen und in (U, $|\mathfrak{z}|$) Klassen ζ_i erzeugen. Es sei eine polyedrale Umgebung V_n von $|\mathfrak{x}|$ vorgegeben und auch von U können wir voraussetzen, daß es polyedral ist. Die Folge V_n soll sich auf $|\mathfrak{x}|$ zusammenziehen.

In (U, $\overline{V}_n$) sind nun fast alle ζ_i schwach homolog. Das soll folgendes besagen: Es gibt ein $\zeta \in H_*(U, V_n)$, eine Teilfolge $\{i_k\}$ der Folge $\{i\}$ und ganze Zahlen $\alpha_{i_k} = \alpha_k$, sodaß

$$\zeta_{i_k} = \alpha_k \zeta$$

ist. Hier haben wir nur eine bekannte Eigenschaft der Homologiegruppen von Polyedern ausgenutzt.

Nun ist aber

$$\partial \zeta_i = \partial \zeta_j \qquad \text{in} \qquad u_i (i \geqslant j)$$

für alle i, j und also

$$\alpha_k \zeta_{i_k} = \alpha_j \partial \zeta_{ij}.$$

Wenn wir nun annehmen, (was wir in unserem Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit können), daß (von einem genügend großen i an)

$$\partial \zeta_i \neq 0$$

ist, so ergibt sich

$$\alpha_k = \alpha_j$$

und also

$$\zeta_{i_k} = \zeta_{i_j} = \eta_n.$$

Wir haben also eine absteigende Folge $\{\eta_n\}$ von polyedralen Elementen gefunden, zu denen es nach Definition der Homologietheorie $\mathfrak{S}$ ein Atom $\mathfrak{x} < \eta_n$ für alle n gibt $\partial \mathfrak{x} = \mathfrak{z}$. Wir können ein $\mathfrak{x}$ mit einem solchen Träger (X, $|\mathfrak{z}|$) finden, bei dem in jeder Umgebung von X fast alle $|\zeta_{i_k}|$ liegen (d.h., es ist X in der Limesmenge von der Folge $\{X_i\}$($|\mathfrak{x}_{i_k}| = (X_{i_k}, |\mathfrak{z}|)$ enthalten).

Dieses $\mathfrak{x}$ ist es, was wir in obigem Spezialfall als Limeskette ensprechen.

Damit ist der Beweis von (4.1) beendet.

Wir sind daran interessiert, die Behauptung (4.1) auch für allgemeine Homologiestrukturen auf Tangentialstrukturen (also für solche, die Definition 2.1 genügen), aussprechen zu können. Offenbar bedarf es da aber noch einiger Einschränkungen. Es muß $\mathfrak{B}$ (die infrage stehende Homologiestruktur) mindestens atomar sein. Das alleine genügt nicht, wir müßen noch fordern:

(*) Zu jedem Paar $\Phi = (X, Y)$ gibt es in jedem offenen Paar $\Phi_0 = (X_0, Y_0)$ $\Phi_0 \geqslant \Phi$ ein Paar $\Phi \leqslant \Psi \leqslant \Phi_0$, sodaß folgendes gilt:

Alle bis auf endlich viele Paare ζ^{Ψ} sind schwach homolog, d.h. es gibt zu fast allen ζ_1^{Ψ}, ζ_2^{Ψ} Elemente α, β des Koeffizientenbereiches, sodaß

$$\alpha\zeta_1^{\Psi} = \beta\zeta_2^{\Psi}$$

mit $$\alpha, \beta \neq 0.$$

Wird (*) von einem atomaren $\mathfrak{B}$ erfüllt, so nennen wir es « voll atomar ».

Für vollatomare Homologiestrukturen kann man offenbar den obigen Grenzprozeß nachmachen, denn der Träger des Limesatomes $|\zeta_{\mathfrak{B}}^1| \cup \bigcup |\mathfrak{y}_{\mathfrak{B}^p}^i|$ ist auch hier vorhanden und unser Grenzprozeß liefert uns darauf eine Klasse ζ. Wir formulieren:

(4.2) Ist $\check{\mathfrak{w}} \in W(\check{\mathfrak{B}}^p)$, so gibt es immer ein $\check{\mathfrak{v}} \geqslant \check{\mathfrak{w}}$, $\check{\mathfrak{v}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$. Ist $\check{\mathfrak{w}} \in W(\check{\mathfrak{B}}^p)$, so gibt es zu $|\check{\mathfrak{w}}|_A = X$ ein offenes $U \supset X$ und eine Klasse ζ, $\partial\zeta \neq 0$ in (U, X), $\zeta = 0$ in U.

Die Behauptung spricht von einem $\check{\mathfrak{v}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$, $\check{\mathfrak{v}} \geqslant \check{\mathfrak{w}}$, also von einem $|\check{\mathfrak{v}}|_A = Y \leqslant X$, einem ζ_1, U_1, $\bar{\zeta}_1 \in \overline{\mathfrak{B}}$, $\zeta_1 \in \bar{\zeta}_1$, sodaß $\zeta_1 \neq 0$ in $U_1 - Y$, aber $\zeta_1 = 0$ in U_1 und $\zeta_1 \in \bar{\zeta}$ für ein $\bar{\zeta} \in \overline{\mathfrak{B}}$, $\bar{\zeta}_1 \leqslant \bar{\zeta}$ ist. Das aber wird im Laufe des Beweises von (4.1) für voll atomare Strukturen gerade gezeigt.

Etwas weiter unten werden wir die Struktur $\mathfrak{B} = \check{\mathfrak{B}}^p \cap \check{\mathfrak{B}}$ einführen. Die Behauptung (4.2) sagt aus, daß wenn $\check{\mathfrak{w}} \in W(\check{\mathfrak{B}}^p)$ ist, es auch in $\mathfrak{B}$ liegt (da es ein $\check{\mathfrak{v}} \geqslant \check{\mathfrak{w}}$, $\check{\mathfrak{v}} \in \mathfrak{w}(\check{\mathfrak{B}})$ gibt und damit $\check{\mathfrak{w}} \in W(\check{\mathfrak{B}})$ ist.

Bis jetzt haben wir uns nur mit der einen Hälfte des Sitnikoffschen Satzes befaßt. Das hat den Grund, daß man historisch schon lange weiß, daß der zweite Teil:

« Ist $$H_{n-r-1}(K_0^n - X) \neq \{0\}$$

für eine $K_0^n \subset R^n$, so ist $\dim X \geqslant r$. »

Bereits für die Vietorissche Homologiestruktur ohne Beschränkung des Koeffizientenbereiches richtig ist (5). Die großen Schwierigkeiten treten also beim ersten Teil des Satzes auf, wo der Koeffizientenbereich und die Homologietheorie von besonderer Art sein müßen.

Historisch ist es so gewesen, daß man den Satz zuerst für kompakte Teilmengen des R^n beweisen konnte (P. S. Alexandroff [1] 1932). Die Formulierung gelang mit Hilfe der Vietorisschen Homologiestruktur. Bald erkannte man, daß für nicht mehr kompakte X die Vietorissche Homologiestruktur versagt. (K. Sitnikoff [9]). Die Frage war, nun eine geeignete Struktur zu finden, die den Satz auch für beliebige Teilmengen des R^n liefert. Da man in der « Nachbarschaft » der Vietorisschen Struktur suchte, brauchte man zur endgültigen Formulierung etwa 25 Jahre. Die Sitnikoffsche Homologiestruktur steht aber der polyedralen viel näher als die Vietorissche, insofern als sie exakt ist. Das Versagen der Vietorisschen Theorie für Zwecke der Dimensionstheorie steht mit der Exaktheit, die bei ihr nicht mehr erfüllt ist, in engstem Zusammenhang, wie wir heute wissen. Dieser Zusammenhang wird sogleich noch klarer werden, wenn wir den Sitnikoffschen Satz im Zusammenhang mit der Dualitätstheorie für Homologiestrukturen entwickeln werden, was jetzt geschehen soll.

Wie wir wissen, ist die Struktur D_r die injektive Fortsetzung von P_r. Wir erinnern noch einmal daran, was das heißt:

Es gibt einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : W(a) \rightarrow W(a_1)$$

wobei $a_1 \in P_r'$ ein geeignetes Element ist. Wir wissen, daß z.B. $a_1 = E^r$ ein r-dimensionaler Würfel als solches a_1 in Frage kommt. Auch an die Eigenschaft der Dualisierbarkeit haben wir schon ersten im Abschnitt erinnert:

(1) Zu jedem $w_1 \in OW\,(a_1)$ gibt es einen Monomorphismus $f : w_1 \rightarrow OW\,(a_1)$, sodaß

$$\varphi . f = \text{Identität.}$$

(2) Zu jedem $v \in OW\,(a)$ gibt es ein $w \geqslant v$ und einen Monomorphismus f der in (1) geschilderten Art, sodaß

$$w \in f\hat{w}_1 \qquad \text{ist.}$$

(5) F. W. Bauer, *Math. Ann. Bd.* 131 S 393-410 (1956).

Im ersten Abschnitt haben wir schon gesehen, daß

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{P}^p$$

ist. Die projektive Fortsetzung war das duale zur injektiven auf Grund unserer Formeln (0.2 *a*, *b*).

Jetzt wollen wir die Dualitätsbeziehung für Homologiestrukturen mit der Fortsetzungstheorie vergleichen und dabei zu einem Beweis des Sitnikoffschen Satzes kommen.

Wir behaupten:

Satz 4.1. — *Ist $\mathfrak{V}$ eine voll atomare Homologiestruktur, dann kann man die Tangentialstruktur $\check{\mathfrak{V}}$ bilden und es gilt*

$$(\check{\mathfrak{V}}^p \cap \check{\mathfrak{V}})^p = \check{\mathfrak{V}}^p.$$

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir noch einige Bemerkungen über diesen Satz und seine Voraussetzungen machen.

Der Kürze wegen nannten wir $\check{\mathfrak{V}}^p \cap \check{\mathfrak{V}} = \breve{\mathfrak{V}}$ und wir können unserer Satz auch so formulieren:

$$(\breve{\mathfrak{V}})^p = \breve{\mathfrak{V}}^p,$$

da
$$\breve{\mathfrak{V}}^p = (\check{\mathfrak{V}}^{p^p} \cap \check{\mathfrak{V}}^p) = \check{\mathfrak{V}}^p$$
ist.

Unter $(\breve{\mathfrak{V}})^p$ verstehen wir die projektive Fortsetzung von $\mathfrak{V}$ im Sinne der Theorie der Tangentialstrukturen. Im ersten Abschnitt haben wir $\mathfrak{V}^p$ definiert, wobei wir $\mathfrak{V}$ zu einer Tangentialstruktur dadurch machten, daß wir Atome einführten, denen in $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{S}$ die Zyklen entsprachen.

Bei der Fortsetzungstheorie von Tangentialstrukturen war es so, daß durch den Dualisierungsprozeß die projektive und die injektive Fortsetzung miteinander vertauscht wurden. Die Konstruktion von $\breve{\mathfrak{V}}$ ist aber kein eigentlicher Dualisierungsprozeß für Tangentialstrukturen und vor allem unterscheiden sich die projektive Fortzetzung von $\breve{\mathfrak{V}}$ und die von $\mathfrak{V}^p$ fundamental dadurch, daß ganz andere Atomträger herangezogen werden.

Beweis von Satz 4.1. — Ist $\check{\nu} \in W((\breve{\mathfrak{V}})^p)$, so weisen wir im ersten Schritt nach, daß $\check{\nu} \in W(\check{\mathfrak{V}}^p)$ ist.

Für hinreichend großes $\check{\nu} \in W((\check{\mathfrak{V}}^p))$ gibt es definitionsgemäß ein $\check{w} \in W(\mathfrak{V})$ und einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\check{\varphi}: K(\check{v}) \to K(\check{w}).$$

Nach Voraussetzung dürfen wir annehmen, daß

$$\check{w} \in W(\check{\mathfrak{V}}) \cap W(\check{\mathfrak{V}}^p)$$

ist.

Die Tatsache der Dualisierbarkeit von $\check{\varphi}$ besagt das Folgende:

1. Zu jedem $\check{b} \in K(\check{w}) \cap \check{\mathfrak{V}}$ (in [4] auch OK $(\check{w})$ genannt], gibt es ein $\check{a} \in OK(\check{v})$ sowie einen Monomorphismus f

$$f: \hat{\check{b}} \to \hat{\check{a}}$$

sodaß

$$\varphi . f = \text{Identität}$$

ist.

2. Zu jedem hinreichend großen $\check{a} \in OK(\check{v})$ gibt es ein $\check{b} \in OK(\check{w})$, sodaß es einen unter 1 geschilderten Monomorphismus f mit

$$\check{a} \in f \hat{\check{b}}$$

gibt.

Das sind die beiden Voraussetzungen, die wir benutzen dürfen, um nachzuweisen, daß

$$\check{v} \in W(\check{\mathfrak{V}}^p)$$

ist.

Zu jedem $\check{a} \in OK(\check{v})$ finden wir monomorph eingebettet eine große Zahl von $\check{b} \in OK(\check{w})$. Sei $\check{u} \in W((\check{\mathfrak{V}})^p)$ irgend eine Wurzel in $\check{a}$, dann gibt es nach Definition von $\check{\mathfrak{V}}^p$ zu jedem $\check{b} \in OK(\check{w})$ mit der eben gennanten Eigenschaft ein $\zeta_b = (\bar{\zeta}, |\check{u}|_A) \in \mathfrak{V}$, $|\check{u}_1|_A \leqslant |\check{u}|_A$ (in $|T|$). Da diese ζ_b durch dualisierbare Abbildungen f eines und desselben φ entstanden sind, sind sie alle miteinander verträglich, d.h., es gibt einen gemeinsamen Durchschnitt (und damit auch immer eine gemeinsame Vereinigung), wenn die Träger einen solchen Durchschnitt haben. Dem $\check{u}$ können wir nun durch die Menge aller dieser ζ_b ein $\zeta \in \mathfrak{V}^p$ in folgender Weise zuordnen:

Bei festem $\bar{\zeta}(\zeta_b = (\bar{\zeta}_1|\check{u}_1|_A))$ und variablem $|\check{u}_1|_A$ bilden wir den Durschschnitt aller ζ_b, die wir auf diese Weise bekommen und erhalten dadurch eine Klasse $\eta_1 \in \mathfrak{V}^p$. Nun bilden wir die Vereinigung aller dieser Klassen für einen Träger, der sich aus der Vereinigung aller dieser $|\bar{\zeta}|$ und aus $|\check{w}|_{A}$ bestimmt. Die so gefundene Klasse hat die Eigenschaft, daß sie einen offenen Träger hat. Wenn jedes $\zeta_b \in \mathfrak{V}_+$ war, dann kann es auch für hinreichend kleines η kein $\bar{\xi} < \bar{\eta}$ geben, mit $|\xi| \wedge |\check{u}|_{A} = 0$, $\partial\xi = \partial\eta$, weil dieses ξ schon bei einem der ζ_b und damit bei $\check{w}$ aufgetreten wäre.

Offenbar genügt es, die Nichtexistenz der ξ für die Zusammensetzung von zwei verschiedenen η_1, η_2 zu beweisen. Der Beweis für beliebig viele ist dann eine direkte Verallgemeinerung. Wenn es zu $|\check{u}_1|_{A}$, $|u_2|_{A}$ in jeder beliebig kleinen Umgebung von $|\check{u}_1|_{A} \vee |\check{u}_2|_{A} = |\check{u}_3|_{A}$ (Vereinigungsbildung im Verband A) ein solches $\bar{\xi}$, ξ mit

$$\partial\xi = \partial\eta$$
$$|\bar{\xi}| \vee |\check{u}_3|_{A} = 0$$

gibt, dann können wir offenbar einen Träger $x \in |W(T)_{A}|$ so finden, daß

$$x \leqslant |\bar{\xi}|$$

für alle ξ und daß es in jeder offenen Umgebung von x ein $|\check{a}|_{A} \leqslant |\hat{u}_1|_{A}$ oder $|\check{a}|_{A} \leqslant |\check{u}_2|_{A}$ gibt. Wenn man x hinreichend klein wählt, kann man voraussetzen, daß es in jeder beliebig kleinen Umgebung von $|\check{u}_1|_{A}$ oder $|\check{u}_2|_{A}$ liegt. In dem wir in $\bar{\xi}$ die offene Wurzel $\mathfrak{w}_x$ mit dem Träger x nehmen, haben wir auch für $\bar{\eta}_1$ (oder $\bar{\eta}_2$) bereits ein solches $\bar{\xi}_1$, (bzw. $\bar{\xi}_2$), $\bar{\xi}_i \in \mathfrak{w}_x (i = 1$ oder $2)$ mit $|\bar{\xi}_i| \wedge |\check{u}_i|_{A} = 0$, $\partial\bar{\xi}_i = \partial\eta_i$. Das aber widerspricht der Nichtexistenz eines solchen $\bar{\xi}_1$ für u_1 (d.h. für $\zeta_b = (\bar{\zeta}, |\check{u}_1|_{A})$ oder entsprechend für ξ_2.

Damit ist der Beweis, daß

$$\check{\varphi} \in W(\check{\mathfrak{V}}^p)$$

ist, beendet.

Zum Beweis der zweiten Hälfte unseres Satzes nehmen wir an, es sei uns ein $\check{\varphi} \in W(\check{\mathfrak{V}}^p)$ gegeben. Wir behaupten, daß dann auch $\check{\varphi} \in W((\check{\mathfrak{V}})^p)$ ist.

In diesem Falle haben wir also ein $\check{w}_1 \in W(\check{\mathfrak{V}})$ und einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\check{\phi} : K(\check{w}) \to K(\check{w}_1)$$

anzugeben.

Zum Beweis dieser Tatsache verwenden wir (4.2). Es gibt zu $\check{v}$ ein $\check{w}$, $\check{w} \geqslant \check{v}$, sodaß

$$\check{w} \in W(\mathfrak{B})$$

ist. Damit ist aber auch $\check{v}$ selbst aus $W(\check{\mathfrak{B}})$ (da $\check{\mathfrak{B}}$ eine Tangentialstruktur und $|\check{v}|_A \leqslant |\check{w}|_A$ war). Wir können also für $\check{\varphi}$ die Identität und für $\check{w}_1 = \check{v}$ setzen.

Die Identität ist dualisierbar, denn zu jedem $\check{a}_1 \in OK(w_1)$ findet man jetzt trivialerweise das entsprechende $\check{a} \in OK(\check{v})$ und den dualisierenden Monomorphismus. Ebenso ist der zweite Teil trivial.

Es sollte noch folgendes bemerkt werden:

Es ist $\check{v}$ auch aus $W(\check{\mathfrak{B}}^p)$, also zusammen aus $W(\check{\mathfrak{B}}) \cap W(\check{\mathfrak{B}}^p)$.

Das Element $\check{w} \geqslant \check{v}$, was wir nach (4.2) fanden, ist i.A. nicht geeignet um einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\check{\varphi} : K(\check{v}) \to K(\check{w})$$

zu konstruieren, so daß wir in der Tat auf $\check{v} \leqslant \check{w}$ selbst zurückgehen mußten.

Damit ist der Beweis von Satz 4.1. beendet.

Die Hauptbeweislast des zweiten Teiles lag auf (4.2).

Wir wollen noch einmal kurz die Beweisidee an dem Beispiel $P = P_r$ erläutern:

Im ersten Teil war uns ein X gegeben und ein dualisierbarer Epimorphismus auf ein Y, zu dem es eine Folge $\{K_i^n\}$ von Vollkugeln und eine Folge $\{\zeta_i\}$ von Klassen

$$\zeta_i \in H_{n-r-1}(K_i^n - Y),$$
$$\zeta_i \in \mathfrak{P}$$

gab, sodaß
$$\zeta_i \neq 0$$

ist. Zu jedem Atomträger $y \in Y$ (der bei dieser Abbildung auftrat), gab es eine solche Folge mit $\bigcap \overline{K}_i^n = y$. Die Dualisierbarkeit von $\check{\varphi}$ lieferte uns eine Menge von $\eta \in \mathfrak{P}^p$, die miteinander verträglich waren und die ein ζ für X bestimmten.

Im zweiten Teil gehörte das vorliegende X nach Voraussetzung zu $\check{\mathfrak{P}}^p$. Nun gab es nach (4.2) ein $X_1 \subset X$, $X_1 \in |\check{\mathfrak{P}}|$, also, da mit jedem Wurzelträger jedes (im Sinne von $|P_r|$) größere ein Wurzelträger war, gehörte X zu $|\check{\mathfrak{P}}^p \cap \check{\mathfrak{P}}|$. Damit war aber dann alles gezeigt.

Am Ende des 2. Abschnittes haben wir zu $\check{\mathfrak{W}}$ die einfache Struktur $[\check{\mathfrak{W}}]$ gebildet. Man kann den Sitnikoffschen Satz jetzt folgendermaßen aussprechen:

$$\tilde{\mathrm{D}}_r = [\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}]. \tag{1}$$

Es kommt nur darauf an, ob ein Element von D'_r Träger einer Wurzel in $\check{\mathfrak{S}}$ (oder eines Elementes in $\check{\check{\mathfrak{S}}}$) ist oder nicht. Nun kann man zunächst zeigen:

(4.3) Der Fortsetzungsprozeß $\check{\mathfrak{W}} \to (\check{\mathfrak{W}})^p$ ist mit der natürlichen Abbildung $f\colon\ \check{\mathfrak{W}} \to [\check{\mathfrak{W}}]$ vertauschbar.

Beweis. — Bei der Konstruktion von $(\check{\mathfrak{W}})^p$ hatten wir jeden einfachen Zweig besonders fortgesetzt und erst dann die algebraische Struktur wieder zusammengeführt, sodaß also

$$[\check{\mathfrak{W}}]^p = [\check{\mathfrak{W}}^p] \tag{2}$$

ist.

Der Beweis des Sitnikoffschen Satzes geht nun über die folgende Formelkette vor sich:

Wir gehen von dem entsprechenden Satz für P_r aus:

$$\tilde{\mathrm{D}}_r \supset [\check{\mathfrak{P}}_{n-r-1}] \supset \tilde{\mathrm{P}}_r. \tag{3}$$

Dieser Satz besagt, daß $[\widetilde{\check{\mathfrak{P}}_{n-r-1}}]$ die r-dimensionalen Polyeder enthält und daß jeder topologische Raum X, zu dem es ein U und eine polyedrale Klasse ξ in $\mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U} - \mathrm{X})$ gibt, die im Sitnikoffschen Sinne nicht Null ist, selbst in D_r liegt ($\zeta = 0$ in U). Genauer könnte man anstelle der ersten Hälfte dieser Ungleichung

$$[\check{\mathfrak{P}}^p_{n-r-1}] \supset \tilde{\mathrm{D}}_r$$

schreiben.

Diesen Satz sehen wir als bewiesen an und bauen auf ihm den allgemeinen Satz auf. Der Weg zu (1) zukommen ist aber der der Fortsetzung.

Bezeichnen wir für einen Augenblick die Fortsetzung bei festem Koeffizientenbereich G mit $[\check{\mathfrak{P}}]^p_{\mathrm{G}}$, so gilt sicher (da allgemein $(\mathrm{P}^i)^i = \mathrm{P}^i$, $(\mathrm{P}^p)^p = \mathrm{P}^p$ ist):

$$[\check{\mathfrak{P}}_{n-r-1}]^p_{\mathrm{G}} \subset \tilde{\mathrm{P}}^p_r \tag{4a}$$

und

$$(4b) \qquad [\check{\mathfrak{P}}_{n-r-1}]^p = \tilde{\mathrm{P}}^p_r.$$

Wir verwenden Formel (0.2 b) und Satz 4.1 sowie (4.3) und erhalten:

$$(5) \qquad \begin{aligned}[(\check{\mathfrak{P}})^p_{n-r-1}] &= \tilde{\mathrm{P}}^i_r,\\ [\check{\mathfrak{P}}^p_{n-r-1}] &= \tilde{\mathrm{P}}^i_r.\end{aligned}$$

Wegen Satz 4.1 und Satz 1.1 gilt:

$$(6) \qquad [\check{\mathfrak{P}}^p_{n-r-1}]_{\mathrm{G}} = [\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}]_{\mathrm{G}}$$

Wir behaupten nun noch:
(4.4) Es ist

$$[\check{\mathfrak{P}}_{n-r-1}]^p = [\mathfrak{P}_{n-r-1}]^p_{\mathrm{I}}$$

wobei I die additive Gruppe der ganzen Zahlen ist.

Beweis. — Sei $\mathrm{X} \subset \mathrm{R}^n$, dim $\mathrm{X} = r$ und $\zeta \neq 0$ ein Element in $\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1,\,\mathrm{G}}$, welche einen Träger (U, U — X) hat, für eine R^n offene Vollkugel U. Wir verwenden die bekannte Formel für universelle Koeffizienten eines Kettenkomplexes (in unserem Falle des Sitnikoffschen Kettenkomplexes von (U — X)):

$$\mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{G}) = \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{I}) \otimes \mathrm{G} + \mathrm{H}_{n-r-2}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{I}) * \mathrm{G}.$$

Hier ist $*$ das Torsions und $\otimes$ das Tensorprodukt (s. [5]). Ist $\zeta \in \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{G})$, $\zeta \neq 0$, dann gibt es entweder ein $\zeta_1 \in \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{I}) \otimes \mathrm{G}$, welches von Null verschieden ist oder ein $\zeta_2 \in \mathrm{H}_{n-r-2}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{I}) * \mathrm{G}$, $\zeta_2 \neq 0$. Wegen (4 a) für $\mathrm{G} = \mathrm{I}$ steht das letztere aber im Widerspruch gegen dim $\mathrm{X} \leqslant r$ und somit ist ein $\zeta_1 \in \mathrm{H}_{n-r-1}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \mathrm{I})$, $\zeta_1 \neq 0$ vorhanden. Es ist deshalb

$$[\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}]_{\mathrm{I}} \supset [\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}]_{\mathrm{G}}$$

also

$$[\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}] = [\check{\mathfrak{S}}_{n-r-1}]_{\mathrm{I}}$$

und genauso für $\mathfrak{P}$ anstelle von $\mathfrak{S}$.

Nun ist wegen (4.4) und wegen Formel (0.3), (5) und (6)

$$(1) \qquad [\check{\mathfrak{S}}_{-r-1}] = \tilde{\mathrm{D}}_r.$$

Das aber ist der Sitnikoffsche Satz.

Unser Weg den Sitnikoffschen Satz zu beweisen bestand darin, ihn von der Beziehung (3) ausgehend fortzusetzen und fortlaufend umzuformen. Wir haben also im Prinzip, genauso wie beim Sitnikoffschen Dualitätssatz in [2] auch hier den Hindernissatz mit Hilfe der Fortsetzungstheorie bewiesen.

5. Der de Rhamsche Satz. — Aus unserer Dualitätstheorie für Homologiestrukturen lässt sich eine Form des de Rhamschen Satzes für Tangentialstrukturen herleiten. Gewöhnlich formuliert man den de Rhamschen Satz in Kohomologieform, wir wollen aber hier eine Homologieform vorziehen. Beim de Rhamschen Satz ist von großer Bedeutung der Begriff eines Vektorfeldes, mit dessen Definition wir beginnen wollen:

Definition 5.1.

(α) *Ein Vektorfeld* T *ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem* $x \in |\mathrm{W(P)}|_{\mathrm{A}}$ *einer Tangentialstruktur* P *ein* $\mathfrak{w} \in \mathrm{W}(\mathrm{P})$ *zuordnet, sodaß*

(V 1) *ein* $a_{\mathrm{X}} \in \mathrm{P}'$ *existiert, sodaß* $\mathfrak{w}|a_x$ *offen rel.* a_x *ist (s. Einleitung),*

(V 2) $|\mathrm{T}(x)|_{\mathrm{A}} = x$ ist,

(V 3) *aus* $\mathrm{T}(x) < a_1$, $\mathrm{T}(y) < a_2$ *und* $|a_1| = |a_2|$, $a_i \in \mathrm{P}'$ *folgt* $a_1 = a_2$.

(β) *Ist* $a \in \mathrm{P}'$, *so heißt* T *ein Vektorfeld auf* a, *wenn es im Sinne von* (α) *ein Vektorfeld auf* $\hat{a}$ *ist.*

(γ) *Ist* $\mathfrak{V}$ *eine Homologiestruktur auf* P, *dann nennen wir* T *ein* $\mathfrak{V}$*-Vektorfeld auf* P, *wenn* $\mathrm{T}(x) = \mathfrak{w} \in \mathrm{W}(\overline{\mathfrak{V}})$ *ist und wenn sinngemäß anstelle von* (V 1) — (V 3) *folgendes gilt:*

($\mathfrak{V}$ 1) *Zu jedem* $x \in |\mathrm{W(P)}|_{\mathrm{A}}$ *gibt es ein* $a_x \in \mathrm{P}'$, *sodaß* $|\mathfrak{w}||a_{\mathrm{X}}$ *offen rel.* a_{X} *ist.*

($\mathfrak{V}$ 2) *Es ist* $|\mathrm{T}(x)|_{\mathrm{A}} = x$.

($\mathfrak{V}$ 3) *Aus* $\mathrm{T}(x) < \zeta_1$, $\mathrm{T}(y) < \zeta_2$, $|\zeta_1| = |\zeta_2|$ *folgt* $\zeta_1 = \zeta_2$.

Ganz entsprechend zu (β) kann man von einem $\mathfrak{V}$-Vektorfeld auf einem $a \in \mathrm{P}'$ sprechen.

Wir haben von unserer Tangentialstruktur in der obigen Definition 5.1 nicht vorausgesetzt, daß sie normalisiert oder daß sie einfach ist. Die klassischen Vektorfelder sind auf der Tangentialstruktur M_r definiert, wobei aber der Atombereich nicht im gewöhnlichen Sinne genommen wird, sondern als

Atome von M_r werden die Atome von P_r betrachtet. Es soll $z < a$ sein, $z \in N(P_r)$, $a \in M_r'$ wenn z in einer Tangentialebene zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $a_1 \leqslant a$ derartig erzeugt, daß es in $p(a_1)$ erzeugt, wobei p die Parallelprojektion auf die Tangentialebene ist. Diese Tangentialstruktur ist natürlich nicht normalisiert. Es gibt in ihr offenbar weniger Atome als in M_r, da die ursprünglichen Atome zu Klassen zusammengefasst worden sind. Für einfaches P ist (V 3) überflüssig, da ohnehin schon aus $|a_1| = |a_2|$, $a_i \in P'$ folgt, daß $a_1 = a_2$ ist.

(5.1) Sei $a \in P'$, T ein $\mathfrak{V}$-Vektorfeld auf a, so gibt es ein $\bar{\zeta} \in \overline{\mathfrak{V}}$, $|\bar{\zeta}| = a$, sodaß stets

$$\mathrm{T}(x) < \bar{\zeta} \tag{1}$$

für alle $x \in |\mathrm{W}(a)|_{\mathrm{A}}$ ist.

Beweis. — Man suche dasjenige $\bar{\zeta}$, $|\bar{\zeta}| = a$, welches von einem festen $\mathrm{T}(x)$, $x \in |\bar{a}|$ erzeugt wird und wende ($\mathfrak{V}$ 3) an.

(5.2) Zu jedem $\bar{\zeta} \in \overline{\mathfrak{V}}$, $|\bar{\zeta}| = a$ gibt es stets ein $\mathfrak{V}$-Vektorfeld T auf a, sodaß (1) für alle $x \in |\mathrm{W}(a)|_{\mathrm{A}}$ gilt.

Beweis. — Durch $\bar{\zeta}$ und ein $x \in |\bar{a}|$ wird eine geeignete offene Wurzel $\mathfrak{w}_0$, $\mathfrak{w}_0 < \bar{\zeta}$, $|\mathfrak{w}_0|_{\mathrm{A}} = x$ definiert, für die das Verlangte gilt: Wir haben nur $\mathrm{T}(x) = \mathfrak{w}_0$ zu setzen. Dieses $\mathfrak{w}_0$ finden wir durch einen Grenzprozeß: Wir nehmen eine « Überdeckung » $\mathrm{U} = \{\bar{\zeta}_i\}$ von Elementen die kleiner sind als $\bar{\zeta}$, d.h. eine Menge von $\bar{\zeta}_i \leqslant \bar{\zeta}$, sodaß jedes $x \leqslant |\bar{\zeta}|$ in einem $\bar{\zeta}_i$ ist und sodaß alle $\bar{\zeta}_i$ verträglich miteinander sind. Wir brauchen nun nur ein maximales Ideal von solchen Überdeckungen zu nehmen ($\mathrm{U} > \mathrm{V}$, wenn V Verfeinerung von U ist) und erhalten für jedes $x \in |\mathrm{W}(\mathrm{T})|_{\mathrm{A}}$ ein $\mathfrak{w}_0$, welches von solchen Überdeckungselementen erzeugt wird.

(5.3) Die $\mathfrak{V}$-Vektorfelder auf allen $a \in P'$ liefern uns also eine Homologiestruktur, die wir $\mathfrak{V}_{\mathrm{T}}$ nennen. Mit (5.1) und (5.2) haben wir bewiesen, daß

$$\mathfrak{V}_{\mathrm{T}} = \mathfrak{V} \quad \text{ist.}$$

Beweis. — Wir gehen aus von einem $a \in P'$ und nennen zwei $\mathfrak{V}$-Vektorfelder T_1, T_2 auf a äquivalent, wenn für die $\bar{\zeta}_1$, $\bar{\zeta}_2$, die den T_1, T_2 nach (5.1) entsprechen, gilt

$$\bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}_2.$$

Wegen (5.1) bekommt man dadurch einen Monomorphismus in $\overline{\mathfrak{V}}$ und wegen (5.2) einen Epi- also einen Isomorphismus. Nach den Konstruktionen des zweiten Abschnittes wissen wir, wie man ein $\mathfrak{V}$ aus einem $\overline{\mathfrak{V}}$ gewinnt, also können wir uns $\mathfrak{V}_{\mathrm{T}}$ konstruieren.

Wir gehen jetzt dazu über, den Begriff des $\mathfrak{V}$-Vektorfeldes zu dualisieren. Dazu muß man natürlich voraussetzen, daß P dualisierbar ist.

Sei $a \in \mathrm{P}'$, so ist ein duales $\mathfrak{V}$-Vektorfeld $\tilde{\mathrm{T}}$ eine Vorschrift, die jedem $\tilde{x} \in |\mathrm{W}(\tilde{\hat{a}})|_{\mathrm{A}}$ ein $\tilde{\mathfrak{w}} \in \mathrm{W}(\overline{\tilde{\mathfrak{V}}})$ so zuordnet, daß gilt:

($\tilde{\mathfrak{V}}$ 1) Zu jedem $\tilde{x} \in |\mathrm{W}(\tilde{\hat{a}})|_{\mathrm{A}}$ gibt es ein $\tilde{a}_{\tilde{\mathrm{X}}} \in \tilde{\hat{a}}'$, sodaß $|\tilde{\mathfrak{w}}|\,|\tilde{a}_{\tilde{\mathrm{X}}}$ offen rel. $\tilde{a}_{\tilde{\mathrm{X}}}$ ist.

($\tilde{\mathfrak{V}}$ 2) Es ist $|\tilde{\mathrm{T}}(\tilde{x})|_{\mathrm{A}} = \tilde{x}$.

($\tilde{\mathfrak{V}}$ 3) Aus $\tilde{\mathrm{T}}(\tilde{x}) < \bar{\bar{\zeta}}_1$, $\mathrm{T}(\tilde{y}) < \bar{\bar{\zeta}}_2$, $|\bar{\bar{\zeta}}_1| = |\bar{\bar{\zeta}}_2|$ folgt $\bar{\bar{\zeta}}_1 = \bar{\bar{\zeta}}_2$.

Es wird sich sogleich zeigen, daß sich Vektorfelder und duale Vektorfelder in einigen wesentlichen Punkten unterscheiden, was auch garnicht verwunderlich ist, da die Dualisierung nicht ganz konsequent durchgeführt wurde: Beide, die $\mathfrak{V}$-Vektorfelder und die dualen $\mathfrak{V}$-Vektorfelder sind auf einem $a \in \mathrm{P}'$ erklärt. Ist $\tilde{\mathrm{T}}$ ein duales $\mathfrak{V}$-Vektorfeld auf einem $a \in \mathrm{P}'$, so wird jedem $b \in a'$ ein $\tilde{\mathrm{T}}(b) = \tilde{\mathfrak{w}} \in \mathrm{W}(\overline{\tilde{\mathfrak{V}}})$ zugeordnet. Bevor wir genauer in das Studium der dualen $\mathfrak{V}$-Vektorfelder einsteigen, haben wir uns also noch einmal zu vergegenwärtigen, was ein $\tilde{\mathfrak{w}} \in \mathrm{W}(\overline{\tilde{\mathfrak{V}}})$ eigentlich in der Terminologie von $\mathfrak{V}$ ist. Erinnern wir uns zunächst an die Bedeutung von $\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}$: Die Elemente waren, wie wir im zweiten Abschnitt erkannten, maximale Ideale von Elementen $\zeta \in \mathfrak{V}$ wobei $\zeta = \tau(\bar{\zeta}, x)$ und $x = |\bar{\zeta}|$ war. Eine Wurzel im Bereich $\overline{\tilde{\mathfrak{V}}}$ ist also nach der Dualitätstheorie für die Struktur P aus [4] ein Koideal von solchen Elementen mit Träger $|\tilde{\mathfrak{w}}|_{\mathrm{A}} \in |\mathrm{T}'|$. Sind ζ_1, $\zeta_2 \in \bar{\zeta}$ bezw. $\bar{\bar{\zeta}}_2 \in \tilde{\mathfrak{w}}$, so sind ζ_1, ζ_2 in dem Sinne auf $\mathrm{X} = |\tilde{\mathfrak{w}}|_{\mathrm{A}}$ mit einander vertäglich, daß es ein $\zeta \leqslant \zeta_1, \zeta_2$ gibt,

$$|\zeta| = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$
$$|\zeta_i| = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}_i).$$

Es kann also vorkommen, daß alle $\bar{\bar{\zeta}} \in \mathfrak{w}$ ein kleinstes Element auf X definieren, aber wie der Fall eines offenen

Simplexes lehrt, muß es nicht so sein (weil der Rand fehlt). Es wird aber sicherlich durch $\tilde{\mathfrak{w}}$ auf X ein « uneigentliches » $\zeta_{\lim}$ definiert, d.h. eine Klasse $|\zeta|$, $|\zeta| = (\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$ mit

$$\mathrm{X}_1 \geqslant \mathrm{X},$$

wobei es aber in jeder Umgebung V von Y_1 (in $|\mathrm{P}|$) ein ζ_1, $(\mathrm{X}, \mathrm{V} \wedge \mathrm{X}) = |\zeta_1|\, \zeta_1 \leqslant i_{*(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}^{(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)} \zeta$ gibt, welches eindeutig bestimmt ist. Man denke im simplizialen Falle an die unendlichen Ketten auf einer unendlichen Triangulation.

Ist nun $\tilde{\mathrm{T}}$ ein duales $\mathfrak{B}$-Vektorfeld, dann können wir insbesondere $\tilde{\mathrm{T}}(a) = \tilde{\mathfrak{w}}$ betrachten und das dadurch bestimmte im obigen Sinne uneigentliche Element $\zeta_{\lim}$ dem $\tilde{\mathrm{T}}$ zuordnen. Ist $b \in \hat{a}'$, so ist das entsprechende uneigentliche $\eta_{\lim}$, welches b zugeordnet ist, kleiner als $\zeta_{\lim}$, d.h., es ist zu jedem $\zeta \in \bar{\bar{\zeta}} \in \mathfrak{w}_b = \tilde{\mathrm{T}}(b)$ ein $\eta \in \bar{\tilde{\eta}} \in \mathfrak{w}_a = \tilde{\mathrm{T}}(a)$ vorhanden. Das ist so wegen ($\tilde{\mathfrak{B}}$ 3).

(5.4) Ist $\tilde{\mathrm{T}}$ ein duales $\mathfrak{B}$-Vektorfeld auf P, dann wird $\tilde{\mathrm{T}}$ durch obigen Prozeß eindeutig ein uneigentliches $\zeta_{\lim}$ auf einem $a \in \mathrm{P}'$ zugeordnet. Wir nennen $\zeta_{\lim} = \tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{B}}(a)$.

(5.5) Ist $b_1 \leqslant b_2$, so ist

$$\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{B}}(b_1) \geqslant \tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{B}}(b_2).$$

Leider können wir im Falle eines dualen Vektorfeldes nicht mehr nachweisen, daß es zu jedem uneigentlichen $\zeta_{\lim}$ ein duales $\mathfrak{B}$-Vektorfeld $\tilde{\mathrm{T}}$ mit

$$\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{B}}\,(a) = \zeta_{\lim}$$

für geeignetes a gibt. Wir wollen darum in dualen $\mathfrak{B}$-Vektorfeldern auch Singularitäten, d.s. Stellen, an denen es nicht definiert ist, zulassen.

Allgemein verstehen wir unter einem « Vektorfeld mit Singularitäten » T ein solches, das nur mit Sicherheit an allen offenen (im Sinne von $|\check{\mathrm{P}}|$) Wurzelträgern erklärt ist. Eine Stelle, an der T nicht erklärbar ist (d.h., auf die es nicht fortgesetzt werden kann) nennen wir eine Singularität. Im Falle eines dualen $\mathfrak{B}$-Vektorfeldes $\tilde{\mathrm{T}}$ sind das gerade die in P' offenen Elemente (bzw. die rel. zu dem $a \in \mathrm{P}'$ offenen Elemente), auf denen $\tilde{\mathrm{T}}$ unbedingt erklärt ist. Im Falle von $\mathrm{P} = \mathrm{P}_r$ muß jedes Vektorfeld auf den Punkten und auf solchen Wurzelträgern, die endliche Vereinigungen von Punkten sind, erklärt sein.

Wir behaupten:

(5.6) Ist ζ_{lim} auf einem $a \in \mathrm{P}'$ vorgegeben, so gibt es immer ein duales $\mathfrak{V}$-Vektorfeld mit Singularitäten auf a, sodaß

$$\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{V}}(a) = \zeta_{\mathrm{lim}} \qquad \text{ist.}$$

Beweis. — Das ζ_{lim} definiert uns ein offenes $\tilde{\mathfrak{w}} \in \mathrm{W}(\tilde{\tilde{\mathfrak{V}}})$, indem wir nur alle (im Sinne von $|\mathrm{P}|$) offenen Wurzelträger $x \in |\bar{a}|$ nehmen und jedem ein $\bar{\bar{\zeta}}$ derart zuordnen, daß $\{\bar{\bar{\zeta}}\}$ gerade eine offene und ζ_{lim} definierende Wurzel ist. Ist $b \leqslant \hat{a}'$ und offen, so ordnen wir b gerade alle die $\bar{\bar{\zeta}} \in \tilde{\mathfrak{w}}$ mit $|\bar{\bar{\zeta}}| \in |\bar{b}|$ zu. Auf diese Weise erhalten wir ein duales $\mathfrak{V}$-Vektorfeld, mit $\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{V}}(a) = \zeta_{\mathrm{lim}}$. Es ist ($\tilde{\mathfrak{V}}$1) erfüllt, da $|\tilde{\mathfrak{w}}|$ offen rel. a war, ($\tilde{\mathfrak{V}}$2) ist trivial und ($\tilde{\mathfrak{V}}$3) haben wir dadurch erhalten, daß wir $\tilde{\mathrm{T}}$ nur auf den offenen b erklärten.

Wir sind also in der Lage, auf P durch die dualen $\mathfrak{V}$-Vektorfelder mit Singularitäten eine Homologiestruktur $\mathfrak{V}^{\mathrm{T}}$ zu erklären, indem wir (5.4) und (5.6) verwenden. Es ist wieder:

$$(5.7) \qquad \mathfrak{V}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{V}.$$

Die uneigentlichen Elemente definieren, wie man sich leicht überlegt, ganz $\mathfrak{V}$.

Wir wollen jetzt alle diese Überlegungen an Beispielen belegen, und beginnen mit den dualen Vektorfeldern:

(5.8) Sei σ^r ein Simplex der Dimension r. Jedes duale $\mathfrak{V}$-Vektorfeld $\tilde{\mathrm{T}}$ auf σ^r mit Singularitäten ist ein Vektorfeld ohne Singularitäten, da ein $b \in \sigma^r$, $(\mathrm{P} = \mathrm{P}_r)$ ohnehin einen nicht leeren offenen Kern enthält. Ist $\tilde{\mathrm{T}}$ ein gegebenes Vektorfeld, so gibt es nach (5.4) ein ζ_{lim}, welches aber jetzt schon ein eigentliches ζ, $|\zeta| = (\sigma^r, \mathrm{Rd}\,\sigma^r)$ ist.

Ist andererseits auf σ^r ein $\zeta \in \mathrm{H}_r(\sigma^r, \mathrm{Rd}\,\sigma^r)$ vorgegeben, so kann man nach der in (5.6) gegebenen Vorschrift ein $\tilde{\mathrm{T}}$ mit $\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{V}}(\sigma^r) = \zeta$ konstruieren.

Wir fassen zusammen:

(5.9) Zu jedem $\zeta \in \mathrm{H}_r(\sigma^r, \mathrm{Rd}\,\sigma^r)$ gibt es ein $\tilde{\mathrm{T}}$ mit $\tilde{\mathrm{T}}_{\mathfrak{V}}(\sigma^r) = \zeta$ und da jedes $\tilde{\mathrm{T}}$ ein solches ζ definiert, wird die Homologiestruktur $\mathfrak{P}^{\mathrm{T}}$ durch die Ketten auf einer Triangulation definiert, bei denen anstelle von orientierten Simplexen mit Koeffizienten $\alpha\sigma^r$ duale $\mathfrak{P}$-Vektorfelder stehen.

Beweis. — Ein $\zeta \in H_r(\sigma^r, \text{Rd } \sigma^r)$ ist nach bekannten Sätzen nichts anderes, wie ein Paar $\alpha\sigma_0^r$, wobei σ_0^r eine feste Orientierung von σ^r und α ein Element des Koeffizientenbereiches ist.

Sei V eine differenzierbare p-dimensionale Mannigfaltigkeit, die differenzierbar in den R^n eingebettet ist. Unter einem klassischen Vektorfeld $\mathfrak{x}$ verstehen wir eine Zuordnung, die jedem Punkte $x \in V$ einen r-Vektor $\mathfrak{x}(x)$ so zuordnet, daß diese Zuordnung stetig ist. Ist $\lim x_i = x$, so konvergieren die $\mathfrak{x}(x_i)$ gegen $\mathfrak{x}(x)$. Unter einem r-Vektor verstehen wir r-Vektoren $\nu_1, \ldots \nu_r$ in der Tangentialebene E_x^p am Punkte x, die alle x als Anfangspunkt haben, sodaß das r-Tupel orientiert ist, d.h. es wird

$$(\nu_{i_1}, \ldots \nu_{i_r}) \approx (\nu_1, \ldots, \nu_r).$$

gesetzt, wenn

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i, & \ldots, r \\ i_1, & \ldots, i_r \end{pmatrix} = 1$$

ist. Einem solchen r-Vektor entspricht das von den Vektoren aufgespannte Simplex σ^r. Ein klassisches Vektorfeld ordnet also jedem $x \in V$ ein orientiertes Simplex σ^r mit einem Koeffizienten a_x, nämlich dem Produkt der Längen der Vektoren ν_i zu. Im Grunde ist das also ein $\zeta \in H_r\ (\sigma^r, \text{Rd } \sigma^r)$ und wir wollen versuchen, ob wir nicht aus $\mathfrak{x}$ ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld machen können. (Nach unserer Konstruktion wird es sich um ein $\mathfrak{S}$-Vektorfeld handeln, da ein Grenzprozess benutzt wird, was aber gleichgültig ist, da $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ auf V isomorph sind.)

Bekanntlich ist jedes stetige Vektorfeld intergierbar, d.h. man kann zu jedem $x \in V$ ein $W^k \subset V$ finden, sodaß

(i 1) $x \in W^r$,

(i 2) für alle $y \in W^r$ ist $\mathfrak{x}(y)$ in der Tangentialebene von W^r enthalten.

Nehmen wir also ein solches $a \subset V$, welches ein differenzierbares r-Simplex und integrierende Mannigfaltikeit von $\mathfrak{x}$ ist. Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ vor und nehmen auf a ein endliches ε-Netz von Punkten. Jedem $x \in N_\varepsilon$ ordnen wir ein Simplex in E_x^p zu, welches zu $\mathfrak{x}(x)$ gehört und gerade den Koeffizienten von $\mathfrak{x}(x)$ hat. Die auf diese Weise geschaffene Kette C_ε soll so beschaffen sein, daß man durch Abänderung ihrer Koeffizienten und Hinzunahme von Simplexen zu einer Kette C'_ε kommt, deren Rand nur noch auf den Simplexen σ_x^r ungleich Null ist, die in einer ε-Umgebung von Rd a liegen. Diese Koeffizientenabänderung kann wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{x}$ so durchgeführt werden, daß $C_\varepsilon — C'_\varepsilon$ mit ε gegen Null (d.h. daß die Koeffizienten dieser Kette gegen Null gehen) geht. Sei nun U eine hinreichend kleine (etwa eine 2ε -) Umgebung von a im R^n. Es erzeugt C'_ε ein $\zeta_\varepsilon \in H_r$ (U, D), wobei D eine 2ε-Umgebung von Rd a ist. Ist ε genügend klein, so bekommt man dadurch ein $\eta_\varepsilon \in H_r(a,\ \mathrm{Rd}\, a)$, also einen Koeffizienten α_ε, sodaß $\alpha_\varepsilon a_0$ (a_0 = feste Orientierung von a) $= \eta_\varepsilon$ ist. Für $\varepsilon \to 0$ geht nun α_ε gegen ein festes reelles α und die approxiemierte Klasse ist $\alpha a_0 \in H_r(a,\ \mathrm{Rd}\, a)$. Hier haben wir natürlich in H_r (a, Rd, R) (R = reelle Zahlen) die Topologie ausgenutzt, die es von R her mitbekommt.

Ist nun a irgend eine offene Teilmenge von V, so können wir mit dem gleichen Approximationsverfahren, welches wir eben erläutert haben, nachweisen, daß es ein $\overline{\zeta}$, $|\overline{\zeta}| = a$ gibt, welches von Homologieklassen von solchen ε approximiert wird. Wir betrachten für festes $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ zwei ε-Ketten an verschiedenen, hinreichend benachbarten Punkten: C_ε^x, C_ε^y und können eine η-Kette in einer 2η-Umgebung von a. finden, die eine Homologie zwischen $C_\varepsilon^{x'}$ und $C_\varepsilon^{y'}$ herstellt Durch die gleichen Überlegungen wie oben können wir diese Homologie auf a « herunterziehen », indem wir mit ε und η gegen Null gehen. Man findet auf a also ein $\overline{\zeta}$ sowie ein $\zeta \in \overline{\zeta}$, mit $|\zeta| = (a,\ \mathrm{B})$, wobei $\mathrm{B} \subset \mathrm{Rd}\, a$ ist.

Auf diese Weise erhält man ein $\mathfrak{P}$-(oder besser, da ein Approximationsprozeß dahinter steht: $\mathfrak{S}$-) Vektorfeld T_r, welches dem klassischen Vektorfeld entspricht. Die Bedingung ($\mathfrak{B}1$) ist durch $a_x = \sigma_x^p = \mathfrak{x}(x)$ erfüllt (M_r wird mit den Atomen von P_r genommen, darum ist $a_x \not\subset V$). ($\mathfrak{B}2$) ist trivial und ($\mathfrak{B}3$) haben wir oben nachgewiesen.

(5.10) Jedes klassische Vektorfeld bestimmt eindeutig ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld T_r auf V.

Ist T ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld auf V^r, welches so beschaffen ist, daß es zu jedem x ein solches a_x (nach $\mathfrak{B}1$) geben soll, sodaß eine Projektion auf die Tangentialebene E_x^p ein r-Simplex σ_x^r mit Ecke x ist. Zwar hat nicht jedes $\mathfrak{P}$-Vektorfeld diese Eigenschaft, aber wir können jedes $\mathfrak{P}$-Vektorfeld T alse ndliche Summe $T = T_1 + \cdots + T_k$ von Vektorfeldern mit dieser Eigenschaft darstellen. Damit ist folgendes gemeint:

Ist $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2 \in \mathfrak{B}$, so können wir $\bar{\zeta}_1 \pm \bar{\zeta}_2$ als das Ideal erklären, welches von $S = \{\zeta_1 \pm \zeta_2 | \zeta_i \in \bar{\zeta}_i\}$ aufgespannt wird, d.h. es ist $\bar{\zeta}_1 \pm \bar{\zeta}_2 = \{\zeta | \zeta \geqslant \zeta_1, \ \zeta_1 \in S\}$. (Bei der Definition von $\zeta_1 \pm \zeta_2$ sollten wir an und für sich erst noch die Inklusionsabbildungen $i|^{\zeta_i}_{\zeta_1}|_{\vee|\zeta_2|}$ dazwischen schalten, damit diese Summe überhaupt erklärt werden kann.) Im Falle von $\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ ist ein $\bar{\zeta}$ nichts anderes, als ein ζ, $|\zeta| = \Phi = (X, Y)$ mit minimalem Y, d.h. es gibt kein $\zeta_1 < \zeta$, $|\zeta_1| = (X, Y_1) Y_1 < Y$. Deshalb hat hier $\bar{\zeta}_1 \pm \bar{\zeta}_2$ ohnehin schon einen Sinn. Sind a_{x_1}, a_{x_2} Simplexe mit Rändern b_{x_1}, b_{x_2}, so kann man für die offenen Wurzeln $T(x_1)$, $T(x_2)$ die Summe bzw. Differenz $T(x_1) \pm T(x_2)$ einfach dadurch erklären, daß man die Koeffizienten k_1, k_2 von a_{x_1} bzw. a_{x_2} nimmt, die die Simplexe durch T in der oben schon öfter erwähnten Weise erhalten ($T(x_1)$ erzeugt auf a_{x_i} ein $\bar{\zeta}$ und ein auf (a_{x_i}, b_{x_i}) also ist $\zeta = k_i a_{x_i}$) und diese so entstehenden Ketten addiert.

In diesem Sinne gilt:

(5.11) Jedes $\mathfrak{P}$-Vektorfeld ist Summe von solchen $\mathfrak{P}$-Vektorfeldern bei denen $a_x = \sigma^r$ ist.

Nehmen wir wieder ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld T mit $a_x = \sigma^r$ für alle $x \in V$, so muß T sogar integrierbar sein: Ist a'_x die Projektion von a_x auf V, so gibt es ein Element $\bar{\zeta}$ und ein $\zeta \in \bar{\zeta}$ mit $|\zeta| = (a_x, \mathrm{Rd}\, a'_x)$, wenn wir voraussetzen, daß für dasjenige $\bar{\eta}$, welches auf ganz V erklärt wird (s. (5.1)) ein $\eta \in \bar{\eta}$ existiert mit $|\partial\eta| \subset \mathrm{Rd}\, V$. Wir behaupten, daß a'_x integrierendes Element von T ist. Sei $y \in a'_x$ innerer Punkt und $T(y) \not< \bar{\zeta}$, so muß es ein a'_y geben, welches mit a'_x den Punkt y aber sonst keine ganze Umgebung von y gemeinsam hat. Da y für das durch T auf a'_y bestimmte $\bar{\xi}$ Randpunkt ist (d.h. für jedes $\xi \in \bar{\xi}$ ist $y \in |\partial\xi|$) y aber kein Randpunkt von a'_x ist, widerspricht das ($\mathfrak{B}$ 3), denn man kann auf ganz $a'_x \cup a'_y$ kein $\bar{\eta}$ finden, welches die dort verlangten Eigenschaften hat.

(5.12) Ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld T mit $a_x = \sigma^r$, welches noch die

Eigenschaft hat, daß das durch T auf V i. Sinne von (5.1) beschriebene $\bar{\eta}$ ein $\eta \in \bar{\eta}$ mit $|\partial\eta| \subset \mathrm{Rd}\ \mathrm{V}$ besitzt, ist integrierbar.

(5.13) Sei $\{x_i\}$ eine Folge von Punkten, die auf V gegen ein $x \in \mathrm{V}$ konvergieren. Wir behaupten unter den gleichen Voraussetzungen über T wie in (5.12) Folgendes von T: Die Koeffizienten α_i, die T auf a_x definiert, konvergieren gegen α (den Koeffizienten von a_x).

Beweis. — Wir nehmen eine Teilfolge $\{x_{i_k}\}$ mit der Eigenschaft, daß die Folge $\{a_{x_i}\}$ gegen ein b mit der Ecke x konvergiert. Wenn wir ($\mathfrak{B}$ 3) und unser Approximationsverfahren auf $\mathrm{S} = \overline{\bigcup a_{x_{i_k}}}$ (der Querstrich bedeutet die abgeschlossene Hülle) anwenden, sehen wir, daß $\lim \alpha_{i_k}$ existieren muß. Ist b nicht wenigstens in einer Umgebung von x mit a_x identisch, dann tritt die gleiche Situation ein, wie im Beweis von (5.12) es tritt a_x mit S an einer Stelle zusammen, wo der eine (nämlich a_x) einen Randpunkt aber S keinen Randpunkt hat. Aus diesem Grunde muß sogar ein $\lim \alpha_i = \alpha$ sein.

Wir haben sogar etwas mehr bewiesen, als (5.13), nämlich:

(5.14) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in (5.13) und damit auch (5.12) konvergiert die Folge $\{a_{x_i}\}$ gegen ein b, welches in einer hinreichend kleinen Umgebung von x mit a_x übereinstimmt. Wir formulieren den Begriff der « schwachen Stetigkeit ».

DEFINITION 5.2. — *Ein (nicht notwendigerweise stetiges) klassisches Vektorfeld heißt schwach stetig, wenn für jede Folge* $\{x_i\}$, *die gegen ein* x *konvergiert* (x_i, $x \in \mathrm{V}$) *stets für die Koeffizienten* α_i *von* a_{x_i} *gilt*

$$\lim \alpha_i = \alpha$$

und wenn es eine solche Umgebung U *von* x *im* R^n *gibt, sodaß* $a_{x_i} \cap \mathrm{U}$ *gegen* $a_x \cap \mathrm{U}$ *konvergiert (d.h. Limesmenge der Mengenfolge* $\{a_{x_i} \cap \mathrm{U}\}$ *ist).*

Wir können unser Approximationsverfahren aus dem Beweis von (5.10) auch für schwach stetige Vektorfelder benutzen und haben.

(5.10) Jedes klassische, schwach stetige Vektorfeld $\mathfrak{x}$ auf V bestimmt eindeutig ein $\mathfrak{P}$-Vektorfeld $\mathrm{T}_{\mathfrak{x}}$.

(5.15) Jedes $\mathfrak{P}$-Vektorfeld mit $a_x = \sigma^r$ ist schwach stetig.

Wenn wir den Begriff des klassischen Vektorfeldes ausdehnen, können wir nach (5.11) erklären:

(5.16) Jedes $\mathfrak{P}$-Vektorfeld ist ein schwach stetiges klassisches Vektorfeld und umgekehrt.

Mit Hilfe von (5.16), (5.3), (5.7) und (5.9) können wir jetzt unsere Verallgemeinerunge des de Rhamschen Satzes formulieren.

Satz 5.1. — *Sei* P *eine beliebige dualisierbare Tangentialstruktur und* $\mathfrak{B}$ *eine auf ihr erklärte Homologiestruktur, so kann man die Strukturen* $\mathfrak{B}_T$ *und* $\mathfrak{B}^T$ *definieren, die durch die* $\mathfrak{B}$*-bzw. durch die dualen* $\mathfrak{B}$*-Vektorfelder erklärt wird und es ist*

$$\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}.$$

Gegenüber dem klassischen de Rhamschen Satz machen wir hier keine Voraussetzungen über den Koeffizientenbereich von $\mathfrak{B}$.

Ferner haben wir bewiesen:

Satz 5.2. — *Ist* V^p *eine p-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist die durch Ketten einer Triangulation erklärte Homologiegruppe* $H_r^K(V^p, R)$ *mit reellen Koeffizienten, isomorph zu der Homologiegruppe* $H_r^V(V^p)$, *die durch schwach stetige, klassische Vektorfelder definiert wird.*

Der Beweis folgt aus Satz 5.1 sowie aus (5.16).

Wenn man die allgemeinere Form eines Vektorfeldes mit beliebigem Koeffizientenbereich auf V^p heranzieht, dann gilt der Satz 5.2 natürlich auch dafür und ohne den Zusatz «mit reelem Koeffizientenbereich» und ohne das Wort «klassisch» und « schwach stetig ».

Die Sätze geben den Kern der ursprünglichen de Rhamschen Gedankengänge, auf Tangentialstrukturen verallgemeinert, wieder.

LITERATUR

[1] P. S. Alexandroff, Dimensionstheorie; *Math. Ann. Bd.*, 106 (1932).

[2] F. W. Bauer, Fortsetzungen von Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.*, 135, S. 93-114 (1958).

[3] F. W. Bauer, Spezielle Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.*, 136, S. 348-364 (1958).

[4] F. W. Bauer, Tangentialstrukturen, *Annales de l'Institut Fourier*, Tom IX, S. 111-146 (1959).

[5] M. F. Bockstein, Der Satz über universelle Koeffizientenbereiche für Homologiegruppen von Komplexen ohne Torsion, *Isw. Akadem. Nauk SSSR* (Ser. Mat.) 23, S. 529-564 (1959).

[6] K. Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry, *Math. Soc. Japan* (1956).

[7] L. S. Pontrjagin, Charakteristische Zyklen in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, *Mat. Sbornik*, 21, S. 233-284 (1947).

[8] K. Sitnikoff, Kombinatorische Topologie nicht abgeschlossener Mengen I, *Mat. Sbornik*, 34 (76), S. 3-54 (1054).

[9] K. Sitnikoff, Kombinatorische Topologie nicht abgeschlossener Mengen II, *Mat. Sbornik*, 37 (79), S. 385-434 (1955).

[10] H. Whitney, Geometric Integration Theory, *Princeton Univ. Press* (1957).