ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GAËL-NICOLAS MEIGNIEZ

Bouts d'un groupe opérant sur la droite, I : théorie algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 2 (1990), p. 271-312
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_2_271_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 2 (1990), 271-312.

BOUTS D'UN GROUPE OPÉRANT SUR LA DROITE I : THÉORIE ALGÉBRIQUE

par Gaël MEIGNIÉZ

Introduction.

La droite réelle ne peut être équipée que de trois géométries : euclidienne, affine et projective. Plus précisément, d'après un résultat d'E. Cartan, il n'y a (à conjugaison près) que trois groupes de Lie connexes et transitifs de difféomorphismes de la droite :

- le groupe $\mathbb{R}$ des translations ;
- le groupe $GA(1,\mathbb{R})$ des bijections affines préservant l'orientation ;
- le revêtement universel $\tilde{SL}(2,\mathbb{R})$ de $PSL(2,\mathbb{R})$ opérant sur la droite considérée comme revêtement universel de la droite projective réelle.

Ce travail concerne les morphismes d'un groupe Π (discret, le plus souvent de type fini), dans l'un de ces trois groupes. A un tel morphisme H, nous associons un *nombre de bouts fins* et un *nombre de bouts grossiers* du groupe Π *dans la direction* du morphisme H. Puis nous calculons ces nombres de bouts dans divers cas, guidés par une forte analogie avec la théorie classique des bouts des groupes, initiée par H. Hopf et H. Freudenthal.

Nous avons deux sources de motivation. La première est d'ordre algébrique. Dans [BNS], R. Bieri, W. D. Neumann et R. Strebel introduisent et étudient une propriété d'un morphisme H d'un groupe Π de type fini, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sans entrer dans les détails, disons que cette propriété est que le noyau de H est de type fini, en un sens généralisé. Nous verrons que cette propriété est équivalente à ce que Π n'ait qu'un bout dans la direction H. Ainsi, par cette définition nouvelle, la propriété de Bieri, Neumann et Strebel se trouve liée à la théorie

Mots-clés : Bout - Groupe - Beiri-Newmann-Strebel.
Classification A.M.S. : 20 F 32.

des bouts des groupes, et généralisée de façon naturelle dans deux directions : d'une part le groupe Π peut ne pas être de type fini, d'autre part le morphisme H peut être à valeurs dans $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$.

Notre seconde motivation est topologique : soient un CW-complexe K et un morphisme H de son groupe fondamental Π dans $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. Donc Π opère à la fois sur le revêtement universel $\tilde{K}$ et, via H, sur la droite réelle $\mathbb{R}$. On peut montrer qu'il existe toujours une application continue équivariante D de $\tilde{K}$ dans $\mathbb{R}$. Nous aimerions lire dans Π et H certaines propriétés homotopiques de l'application D. Nos nombres de bouts réalisent le début de ce programme : sous quelques hypothèses normalisatrices, *la condition que* Π *n'ait qu'un bout fin* (*resp. grossier*) *dans la direction* H *est suffisante* (*resp. nécessaire*) *à la connexité des ensembles* $D^{-1}[x,+\infty[$.

Ce fait sera démontré et exploité dans un prochain article : [M], dans le cadre différentiable : K est une variété différentielle et D est une application différentiable à singularités de Morse. Les hypersurfaces de niveau $D^{-1}(x)$ ont alors pour image dans K un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension 1 (éventuellement singulier) dont la structure transverse est modelée sur l'une des trois géométries de la droite. Un tel feuilletage est qualifié de *transversalement homogène*. Je voudrais citer dès ici deux résultats reliant la topologie de $\mathscr{F}$ aux nombres de bouts de Π dans la direction H. Ils font intervenir le morphisme $-H$ opposé à H, défini par : $(-H)(\gamma)(x) = -H(\gamma)(-x)$. J'omets quelques hypothèses normalisatrices.

1. Si Π n'a qu'un bout fin dans la direction H ainsi que dans la direction $-H$, alors l'espace des feuilles de $\mathscr{F}$ est homéomorphe au quotient de la droite réelle par le groupe $H(\Pi)$.

2. Supposons que K est une variété différentielle compacte de dimension 3 et que $\mathscr{F}$ est non singulier. Alors la condition que Π n'ait qu'un bout fin (resp. grossier) dans la direction H ainsi que dans la direction $-H$ est suffisante (resp. nécessaire) au fait que D soit une *fibration*.

Rappelons quelques éléments de la théorie classique des bouts des groupes : elle associe à un groupe Π un « espace de bouts » qui ne peut avoir que 0, 1, 2 ou une infinité d'éléments. Les groupes qui ont zéro bouts sont les groupes finis et ceux qui ont deux bouts sont les extensions finies de $\mathbb{Z}$. Les groupes qui ont une infinité de bouts ont été caractérisés par J. Stallings : si pour simplifier on se limite aux

groupes sans torsion, ce sont les sommes libres non triviales (la tradition veut que l'on dise « produit libre »... hélas).

On dispose maintenant d'une définition purement algébrique de ces bouts. Soit $\mathscr{P}(\Pi)$ le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel des parties de Π et soit $\mathscr{F}(\Pi)$ le sous-espace des parties finies. Le groupe Π opère à droite sur l'espace quotient $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{F}(\Pi)$. Le nombre de bouts de Π est la dimension (sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) du sous-espace des éléments fixes.

Voici maintenant l'essentiel du contenu du présent article.

Soient Π un groupe et $H\colon \Pi \to G$ un morphisme à valeurs dans $G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. Pour définir nos deux nombres de bouts, observons tout d'abord que H peut être considéré comme une action de Π sur $\mathbb{R}$ (par translations, applications affines ou applications projectives) ; nous noterons $\gamma \cdot x$ le point $H(x)$, où γ est un élément de Π et x un point de $\mathbb{R}$. Étant donnée une partie A de Π, nous dirons que A est *majorée faiblement* s'il existe un réel x tel que $A \cdot x = \{\gamma \cdot x / \gamma \in A\}$ est majorée comme partie de $\mathbb{R}$. Nous dirons que A est *majorée fortement* si $A \cdot x$ est majorée pour tout réel x. En remplaçant, dans la définition des bouts rappelée plus haut, le mot « finie » par le mot « majorée faiblement » (resp. « majorée fortement »), nous définissons le nombre de *bouts fins* (resp. *grossiers*) de Π *dans la direction* H.

Remarquons tout de suite que dans les cas $G = \mathbb{R}$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, il n'y a pas de différence entre « majorée faiblement » et « majorée fortement » (voir les remarques qui suivent notre définition 1.1). La distinction entre bouts fins et bouts grossiers n'est donc justifiée que dans le cas $G = GA(1,\mathbb{R})$. Signalons par ailleurs que le nombre de bouts dans la direction H ne dépend pas seulement de l'image $H(\Pi)$ contenue dans G. Nous ne pouvons en aucun cas supposer H injective.

Les bases de cette théorie des bouts dans la direction d'un morphisme sont développées au paragraphe 1. Nous verrons que le groupe Π a 0 bout fin dans la direction H si, et seulement si, il existe un point x de $\mathbb{R}$ fixe par tous les éléments de Π. On dit alors que la représentation H *dégénère*. Nous restreindrons notre attention aux morphismes non dégénérés. En effet, le stabilisateur d'un point sous l'action de $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ (resp. $GA(1,\mathbb{R})$) (resp. $\mathbb{R}$) est isomorphe à $GA(1,\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{R}$) (resp. trivial). Un morphisme dégénéré de Π dans $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ (resp. $GA(1,\mathbb{R})$) peut donc être considéré comme un morphisme (en général non dégénéré) à valeurs dans $GA(1,\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{R}$).

Les principaux résultats démontrés dans le premier paragraphe sont les suivants :

THÉORÈME 1.4. — *Soient* Π *un groupe ;* G *l'un des trois groupes* $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$; *et* $H : \Pi \to G$ *un morphisme non dégénéré. Alors* Π *a* 1 *ou une infinité de bouts fins (resp. grossiers) dans la direction* H.

THÉORÈME 1.5. — *Sous les mêmes hypothèses, le nombre de bouts fins est supérieur ou égal au nombre de bouts grossiers.*

Les trois autres paragraphes sont presque indépendants.

Dans la pratique, on peut évaluer le nombre de bouts en examinant le graphe de Cayley. C'est l'objet du paragraphe 2. Rappelons que si Π est un groupe de type fini et si $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ est un système de générateurs, on construit un graphe $\mathcal{G}$, dit *de Cayley ;* ses sommets sont les éléments de Π et une arête relie tout sommet γ à $\gamma\gamma_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Si x et y sont deux réels, notons $\mathcal{G}_H(x,y)$ le sous-graphe (maximal) de $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les éléments γ de Π qui vérifient $\gamma \cdot x \geqslant y$.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* Π *un groupe de type fini,* G *l'un des trois groupes* $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, et $H : \Pi \to G$ *un morphisme non dégénéré. Soit* $\mathcal{G}$ *le graphe de Cayley associé à un système fini de générateurs.*

Alors le nombre de composantes connexes de $\mathcal{G}_H(x,y)$ *ne dépend pas de* y. *Il y a trois cas :*

1. $\mathcal{G}_H(x,y)$ *est connexe pour tout* x *; alors* Π *n'a qu'un seul bout fin et un seul bout grossier dans la direction* H.

2. $\mathcal{G}_H(x,y)$ *a une infinité de composantes connexes pour tout* x *; alors* Π *a une infinité de bouts fins dans la direction* H.

3. *Il existe un réel critique* x_{crit} *tel que* $\mathcal{G}_H(x,y)$ *est connexe pour tout* $x > x_{\text{crit}}$ *et a une infinité de composantes connexes pour* $x < x_{\text{crit}}$ *; alors* Π *a un seul bout grossier, mais une infinité de bouts fins, dans la direction* H.

Nous verrons de nombreux exemples des deux premiers cas. Quant au troisième, nous exhiberons dans [M] une 3-variété compacte munie de deux feuilletages transversalement homogènes correspondant à un même morphisme du groupe fondamental dans $GA(1,\mathbb{R})$. Pour l'un de ces feuilletages, les ensembles $D^{-1}[x, +\infty[$ sont connexes, mais pas pour l'autre. Il en résulte que le groupe fondamental n'a qu'un bout grossier, mais a une infinité de bouts fins, dans la direction du morphisme.

Dans le paragraphe 3, nous examinons certains cas particuliers et obtenons des conditions suffisant à n'avoir qu'un bout :

THÉORÈME 3.10. — *Soient* Π *un groupe et* $H : \Pi \to G$ *une représentation non dégénérée à valeurs dans* $G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ *ou* $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. *Sous chacune des hypothèses suivantes,* Π *n'a qu'un bout fin (et donc aussi qu'un bout grossier) dans la direction* H.

1. Π *est nilpotent.*

2. Π *est produit direct de deux sous-groupes. La restriction de* H *à chacun de ces sous-groupes est non dégénérée.*

3. *La restriction de* H *au centre de* Π, *est non dégénérée.*

4. $G = \mathbb{R}$ ou $GA(1,\mathbb{R})$, *et le noyau de* H *est de type fini.*

Puis nous verrons des généralisations diverses de ces cas. Enfin, en nous servant d'un résultat de [BNS], nous établissons le lien avec la propriété de Bieri-Neumann-Strebel :

THÉORÈME 3.19. — *Pour un morphisme non nul* $H : \Pi \to \mathbb{R}$, *où* Π *est de type fini, il est équivalent de dire que* Π *n'a qu'un bout dans la direction* H *ou que* Π *et* H *vérifient la propriété de Bieri-Neumann-Strebel.*

Dans le paragraphe 4, nous examinons d'autres cas particuliers et obtenons des conditions suffisant à avoir une infinité de bouts :

THÉORÈME. — *Soient* Π_1 *et* Π_2 *deux groupes non triviaux et* $H_1 : \Pi_1 \to G$ *et* $H_2 : \Pi_2 \to G$ *deux représentations à valeurs dans* $G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ *ou* $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. *On suppose* $H_1(\Pi_1)$ *et* $H_2(\Pi_2)$ *sans point fixe commun, de sorte que la représentation naturelle de la somme libre :* $H : \Pi_1 * \Pi_2 \to G$, *est non dégénérée.*

Alors $\Pi_1 * \Pi_2$ *a une infinité de bouts grossiers (et donc aussi une infinité de bouts fins) dans la direction* H.

Nous démontrerons une généralisation de ce théorème, l'étendant à certaines sommes amalgamées et à certaines *HNN*-extensions.

Ceci pose évidemment la question de l'existence d'un résultat analogue au théorème de J. Stallings cité plus haut.

Je remercie G. Levitt, qui a dirigé ma thèse, dont l'essentiel de cet article est extrait. Je remercie également E. Ghys de l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail et F. Laudenbach de l'intérêt qu'il lui a accordé.

1. Bouts fins, bouts grossiers.

Dans tout ce paragraphe, Π désigne un groupe ; G désigne l'un des trois groupes : $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$; et H un morphisme de $\Pi \to G$. La notation $\gamma \cdot x$ désigne le point $H(\gamma)(x)$, où γ est un élément de Π et x un point de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.1. — *Soit A une partie quelconque de Π. On dit que A est* majorée faiblement (*resp.* fortement) *s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que* (*resp. si pour tout $x \in \mathbb{R}$*) *l'ensemble $A \cdot x$ est majoré* (*comme partie de $\mathbb{R}$*).

Pour nous familiariser avec cette notion, commençons par quelques remarques élémentaires.

i) Si $A \cdot x$ est majoré, alors il en est de même de $A \cdot x'$, quel que soit x' inférieur ou égal à x. En particulier, A est majoré fortement si et seulement si $A \cdot x$ est majoré pour des x arbitrairement grands.

ii) Une partie finie de Π, une réunion finie de parties majorées faiblement (resp. fortement), une sous-partie d'une partie majorée faiblement (resp. fortement), sont majorées faiblement (resp. fortement).

iii) Étant donnés une partie A de Π majorée faiblement (resp. fortement) et $\gamma \in \Pi$, les translatés à gauche et à droite de A par γ :

$$\gamma A = \{\gamma\alpha / \alpha \in A\}, \qquad A\gamma = \{\alpha\gamma / \alpha \in A\}$$

sont majorés faiblement (resp. fortement).

Nous allons maintenant examiner cas par cas ce qu'est concrètement une partie majorée.

a) $G = \mathbb{R}$. Les points suivants sont équivalents :

- A est majorée fortement
- A est majorée faiblement
- $H(A)$ est majorée, comme partie de $\mathbb{R}$.

b) $G = GA(1,\mathbb{R})$. Identifions $GA(1,\mathbb{R})$ au demi-plan des (a,b), où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, opérant par $(a,b) \cdot x = ax + b$. Une partie A est faiblement majorée si $H(A)$ est située sous une demi-droite $b = xa + y$. A est fortement majorée si $H(A)$ est située sous le graphe d'une fonction $b = f(a)$ concave, dont la dérivée $f'(a)$ tend vers $-\infty$ quand a tend vers $+\infty$.

c) $G = \tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. Rappelons que $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ est le groupe des relevés à $\mathbb{R}$ des transformations projectives directes de $P^1(\mathbb{R})$.. Puisqu'un tel relevé est défini à translation entière près, et qu'il commute à toute translation entière, on a une extension centrale :

$$1 \to \mathbb{Z} \to \tilde{S}L(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R}) \to 1 .$$

Chaque élément γ de $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ possède un *nombre de translation*, défini par :

$$\text{trans}\,(\gamma) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma^n(x) - x}{n}$$

(le résultat ne dépend pas du point x). Rappelons brièvement que c'est un invariant de conjugaison, nul si et seulement si γ a des points fixes ; que si γ est une translation, on retrouve son amplitude ; et que ce n'est pas un homomorphisme. Enfin, quel que soit x, on a :

$$\text{trans}(\gamma) - 1 < \gamma(x) - x < \text{trans}\,(\gamma) + 1.$$

En conséquence, les points suivants sont équivalents :

- A est majorée fortement
- A est majorée faiblement
- La fonction trans est majorée (au sens usuel) sur $H(A)$.

Signalons la propriété suivante, que le lecteur vérifiera aisément. Soit Σ un sous-groupe de Π. Il est majoré faiblement si et seulement si il a un point fixe sur $\mathbb{R}$. Il est majoré fortement si et seulement si, il a des points fixes arbitrairement grands.

Donc : dans le cas $G = \mathbb{R}$, le sous-groupe Σ est majoré si et seulement si il est contenu dans le noyau de H. Dans le cas $G = GA(1,\mathbb{R})$, le sous-groupe Σ est majoré faiblement si et seulement si $H(\Sigma)$ est un groupe d'homothéties de même centre ; il est majoré fortement si et seulement si il est contenu dans le noyau de H.

Avant d'expliciter la définition des bouts, revenons un instant sur la notion de dégénérescence d'une représentation.

PROPOSITION 1.2. — *Soit $H : \Pi \to G$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Tout élément de $H(\Pi)$ a un point fixe dans $\mathbb{R}$.*

ii) *Il existe un point fixe commun à tous les éléments de $H(\Pi)$.*

DÉFINITION. — *On dit dans ce cas que H* dégénère.

Démonstration. — Le cas où $G = \mathbb{R}$ est évident.

Lorsque $G = GA(1,\mathbb{R})$, la démonstration résulte de l'observation suivante. Le commutateur de deux homothéties de centres différents est une translation non triviale.

Supposons maintenant que $G = \tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. Considérons l'orbite de 0 sous l'action de Π. Si cette orbite est majorée, sa borne supérieure est un point fixe commun à tous les éléments de Π. Si, par contre, cette orbite n'est pas majorée, on peut trouver un élément γ de Π tel que $\gamma \cdot 0 > 1$. Ceci entraîne que, pour tout n entier, $\gamma \cdot n > n + 1$ et donc γ n'a pas de point fixe.

Définissons maintenant les bouts.

Considérons : l'ensemble $\mathscr{P}(\Pi)$ des parties de Π, le sous-ensemble $\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ des parties majorées faiblement, et le sous-ensemble $\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$ des parties majorées fortement. L'ensemble $\mathscr{P}(\Pi)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ quand on prend pour addition la différence symétrique Δ. Le groupe Π opère à droite sur $\mathscr{P}(\Pi)$, par automorphismes. Les sous-ensembles $\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ et $\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$ sont des sous-espaces stables.

Considérons les quotients : $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ et $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$. Ce sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, munis d'une action de Π à droite. Soit $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ le sous-espace de $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ formé des vecteurs fixes sous cette action de Π à droite. Soit $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$ le sous-espace de $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$ formé des vecteurs fixes sous l'action de Π à droite.

DÉFINITION 1.3. — Le *nombre de bouts fins de* Π *dans la direction* H, *noté* $\mathrm{bf}_H(\Pi)$, *est la dimension* (sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) de $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$. Le *nombre de bouts grossiers, noté* $\mathrm{bg}_H(\Pi)$, *est la dimension de* $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$.

Dans la pratique, le vocabulaire suivant nous sera utile.

A et B sont *congrus* faiblement (resp. fortement) si $A\Delta B$ est majoré faiblement (resp. fortement).

A est *de bord majoré* faiblement (resp. fortement) si A est congru faiblement (resp. fortement) à $A\gamma$, quel que soit $\gamma \in \Pi$. En d'autres termes, $A\Delta A\gamma$ doit être majoré faiblement (resp. fortement), quel que soit $\gamma \in \Pi$. Cette dénomination sera éclairée au prochain paragraphe (définition 2.4).

A est *comajoré* faiblement (resp. fortement) si son complémentaire A^* est majoré faiblement (resp. fortement).

Remarquons qu'une partie majorée ou comajorée faiblement (resp. fortement) est toujours de bord majoré faiblement (resp. fortement).

Le groupe Π a zéro bout fin (resp. grossier) si et seulement si il opère sur $\mathbb{R}$ avec un point fixe (resp. avec des points fixes arbitrairement grands). Dans le cas contraire, Π a un bout fin (resp. grossier) si et seulement si toute partie de bord majoré faiblement (resp. fortement) est majorée ou comajorée faiblement (resp. fortement).

THÉORÈME 1.4 (de l'échelle). — *Avec les notations précédentes, et si* $H : \Pi \to G$ *est non dégénéré, alors :*

i) $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$ ou ∞

ii) $\mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$ ou ∞.

(On ne fera aucune différence entre les cardinaux infinis.)

Démonstration. — Supposons que $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$) est fini. Nous devons montrer qu'il contient exactement deux éléments, ou encore que toute partie A de Π de bord majoré faiblement (resp. fortement) est majorée ou comajorée faiblement (resp. fortement).

Soit τ un élément de Π opérant sans point fixe sur $\mathbb{R}$ (voir la proposition 1.2). Nous pouvons supposer que, pour tout réel t, on a $\tau \cdot t > t$. Observons que Π opère *à gauche* par automorphismes sur $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$), qui est supposé fini comme ensemble. Par conséquent, quitte à remplacer τ par une de ses puissances, nous pouvons supposer que τA est congru à A. En d'autres termes, il existe un réel x tel que (resp. pour tout réel x) l'ensemble $(A \Delta \tau^{-1} A) \cdot x$ est majoré par un certain y.

Nous affirmons que y majore $A \cdot x$ ou $A^* \cdot x$ (où A^* désigne toujours le complémentaire de A). Les points i) et ii) en résulteront car A ou A^* sera majoré faiblement (resp. fortement).

Supposons donc, par l'absurde, qu'il existe $\alpha \in A$ et $\beta \in A^*$ tels que $\alpha \cdot x > y$ et $\beta \cdot x > y$. Construisons l'échelle symbolisée dans la figure 1.

La translation *à droite* par $\delta = \alpha^{-1}\beta$ envoie le montant de gauche sur celui de droite, i.e. $(\tau^n \alpha) \cdot \delta = \tau^n \beta$.

L'élément $\tau\alpha$ appartient à A. En effet, sinon, on aurait $\alpha \in A \Delta \tau^{-1} A$, ce qui est impossible car $\alpha \cdot x > y$ et y est un majorant de $(A \Delta \tau^{-1} A) \cdot x$.

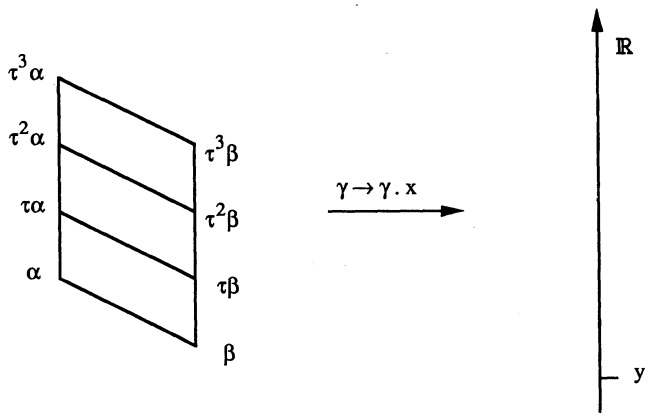

Figure 1.

Par récurrence, tout le montant gauche, i.e. l'ensemble $\{\tau^n\alpha/n \geqslant 0\}$, est contenu dans A. De manière analogue, on montre que le montant droit $\{\tau^n\beta/n \geqslant 0\}$ est contenu dans A^*.

Par conséquent, $\tau^n\alpha$ appartient à A mais $\tau^n\beta = (\tau^n\alpha)\cdot x\delta$ n'appartient pas à A, c'est-à-dire que, pour tout n, $\tau^n\alpha$ appartient à $A\Delta A\delta^{-1}$. Prenant alors en compte le fait que A est de bord majoré, on déduit que le montant gauche $\{\tau^n\alpha/n \geqslant 0\}$ est majoré faiblement.

La contradiction cherchée résulte alors de l'observation élémentaire suivante. Puisque, pour tout t, on a $\tau\cdot t > t$, la suite $\tau^n\alpha\cdot t$ tend vers $+\infty$ avec n. □

THÉORÈME 1.5. — *Si* $H : \Pi \to G$ *est non dégénéré, alors* $\mathrm{bg}_H(\Pi) \leqslant \mathrm{bf}_H(\Pi)$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il s'agit de montrer que si Π n'a qu'un bout fin dans la direction H, alors il n'a qu'un bout grossier dans cette même direction. On suppose donc que $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Soit A une partie de bord majoré fortement. Nous savons que A est majorée ou comajorée faiblement. Supposant, par exemple, que A est majorée faiblement, nous nous proposons de montrer que A est en fait majorée fortement.

Soit τ un élément de Π comme dans la démonstration précédente, i.e. tel que $\tau\cdot t > t$ pour tout réel t. Par hypothèse, pour tout x, il existe y tel que $(A\Delta A\tau^{-1})\cdot x$ est majoré par y. Nous allons montrer que $A\cdot x$ est en fait majoré par ce même y.

Dans le cas contraire, choisissons $\alpha \in A$ tel que $\alpha \cdot x > y$. Nous affirmons que $\alpha\tau$ appartient à A, car sinon α appartiendrait à $A \Delta A \tau^{-1}$ et $\alpha \cdot x$ serait inférieur à y. Par récurrence, on montre que $\{\alpha\tau^n / n \geqslant 0\}$ est contenu dans A.

La contradiction cherchée résulte de la confrontation des deux propriétés suivantes :

a) A est majorée faiblement.

b) $\{\alpha\tau^n\}$ n'est pas majoré faiblement car $\alpha\tau^n \cdot t$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, quel que soit t. □

Exemples. — 1. Soit Π le produit semi-direct de $\mathbb{Z}^2$ par le groupe additif de son anneau :

$$\Pi = \{(P, X^p Y^q)/p, q \in \mathbb{Z} \,;\, P \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]\}.$$

Le produit est défini par :

$$(P, X^p Y^q)(Q, X^r Y^s) = (P + Q X^p Y^q, X^{p+r} Y^{q+s}).$$

Montrons que quel que soit le morphisme $H : \Pi \to \mathbb{R}$ non nul, on a $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = \infty$.

En effet, il existe deux constantes réelles x, y telles que :

$$H(P, X^p Y^q) = xp + yq.$$

Définissons $v_H : \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] \to]-\infty, +\infty]$ par :

$$v_H(\Sigma a_{p,q} X^p Y^q) = \inf\,(xp + yq / a_{p,q} \neq 0).$$

C'est une *valuation* au sens où :

$$v_H(PQ) = v_H(P) + v_H(Q) \qquad \text{et} \qquad v_H(P+Q) \geqslant \min\,(v_H(P), v_H(Q)).$$

Considérons :

$$A = \{(P, X^p Y^q)/v_H(P) \geqslant 0\}.$$

Il est évident que A n'est ni majoré ni comajoré. Je dis qu'il est de bord majoré.

En effet, soient $\gamma \in \Pi$ et $\alpha \in A \Delta A \gamma$. En d'autres termes, un et un seul des deux éléments α et $\alpha\gamma^{-1}$ appartient à A. Écrivons $\alpha = (P, X^p Y^q)$ et $\gamma^{-1} = (Q, X^r Y^s)$: on a :

$$[v_H(P) \geqslant 0 \text{ et } v_H(P + Q X^p Y^q) < 0] \quad \text{ou} \quad [v_H(P) < 0 \text{ et } v_H(P + Q X^p Y^q) \geqslant 0].$$

Ceci implique que $v_H(Q X^p Y^q) < 0$, c'est-à-dire : $xp + yq < -v_H(Q)$. En résumé, nous avons prouvé que $H(A \Delta A \gamma)$ est majoré par $-v_H(Q)$.

2. Soit Π_G le groupe des homéomorphismes directs de $\mathbb{R}$ qui coïncident avec un élément de G sur un voisinage de $-\infty$. Il y a donc un morphisme canonique $H: \Pi_G \to G$. Nous affirmons que Π_G a une infinité de bouts fins dans cette direction.

Pour le voir, notons pour tout $\gamma \in \Pi_G$:

$$x_\gamma = \inf \{x \in \mathbb{R}/\gamma(x) \neq H(\gamma)(x)\}$$
$$y_\gamma = \gamma(x_\gamma) = H(\gamma)(x_\gamma) = x_{\gamma^{-1}}.$$

(Pour éviter les confusions nous abandonnons la notation $\gamma \cdot x$.) On vérifie aisément la formule de « cocycle » :

$$y_{\alpha\beta} \geqslant \inf \{y_\alpha, H(\alpha)(y_\beta)\}.$$

Considérons :

$$A = \{\alpha \in \Pi_G/y_\alpha \geqslant 0\}.$$

Il est évident que A n'est ni majoré ni comajoré dans la direction H. Je dis qu'il est de bord majoré faiblement. En effet la formule de cocycle montre que si un et un seul des deux éléments α et $\alpha\gamma^{-1}$ appartient à A, alors $H(\alpha)(x_\gamma) < 0$. Donc $H(A \Delta A\gamma)(x_\gamma)$ est majoré par 0.

Seuls les *nombres* de bouts nous intéresseront par la suite. Cependant pour éclairer la définition 1.3, nous allons expliquer brièvement comment il est possible de définir les bouts eux-mêmes.

On remarque que $\mathscr{P}(\Pi)$ est en fait une *algèbre* sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ quand on prend pour multiplication l'intersection. Les actions de Π à gauche et à droite sont par automorphismes d'algèbre. De plus, $\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$) est un idéal de cette algèbre, de sorte que $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$) a une structure naturelle d'algèbre booléenne, c'est-à-dire dans laquelle tout élément est égal à son carré. D'après le théorème de représentation de M. H. Stone, le spectre de cette algèbre est compact et totalement discontinu, et l'algèbre est canoniquement isomorphe à l'algèbre booléenne des parties ouvertes et fermées de son spectre.

Ceci justifie d'appeler algèbre des bouts fins (resp. grossiers) de Π dans la direction H, le spectre de $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$).

Généralisations.

1. Soit G le groupe de toutes les isométries de $\mathbb{R}$ (y compris les symétries), ou le groupe de toutes les homothéties-translations (y compris les homothéties de rapport négatif), ou le groupe des relevés à la droite de toutes les transformations projectives du cercle (directe ou indirectes).

Remplaçons partout dans la définition 1.1 le mot « majoré » par le mot « borné ». L'ensemble de notre travail passe à ce contexte « non orientable ». Les nombres de bouts peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, ∞.

2. L'essentiel de ce papier reste vrai si l'on prend pour G le groupe des homéomorphismes directs de $\mathbb{R}$. Le point délicat est que la proposition 1.2 devient fausse. Il faut alors définir la dégénérescence par le point i) de cette proposition.

Question. — La proposition 1.2 reste-t-elle vraie si l'on prend pour G le groupe des difféomorphismes analytiques directs de $\mathbb{R}$? Dans ce cas, ce serait là le cadre naturel de notre travail.

2. Bouts et graphe de Cayley.

Dans tout ce paragraphe, Π désigne un groupe *de type fini* ; G désigne l'un des trois groupes : $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$; et H désigne un morphisme non dégénéré de Π dans G.

Fixons une partie génératrice finie $F = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de Π, stable par inversion. Notons $\mathscr{G}$ le *graphe de Cayley à droite* de Π rapporté à F. En d'autres termes, les sommets de $\mathscr{G}$ sont des éléments de Π ; et deux d'entre eux, α et β, sont liés par une arête quand $\alpha^{-1}\beta$ appartient à F.

Rappelons que l'ensemble des bouts de Π est l'ensemble des bouts du graphe $\mathscr{G}$, c'est-à-dire la limite projective de l'ensemble des composantes connexes de $\mathscr{G}$-$\mathscr{K}$, quand le compact $\mathscr{K}$ contenu dans $\mathscr{G}$ croît indéfiniment. Nous allons établir un résultat analogue pour les bouts fins et grossiers de Π dans la direction H. Pour simplifier nous nous restreignons aux nombres de bouts.

Notation. — Quels que soient les réels x et y, notons $\mathscr{G}_H(x,y)$ le sous-graphe (maximal) de $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les éléments γ de Π qui vérifient $\gamma \cdot x \geqslant y$.

THÉORÈME 2.1. — *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes :*

A) *le nombre de composantes connexes du graphe $\mathscr{G}_H(x,y)$ ne dépend pas de y.*

B) *Il y a trois cas :*

1. *Ou bien pour tout x, le graphe $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe ; alors*

$$\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1 .$$

2. *Ou bien pour tout x, le graphe $\mathscr{G}_H(x,y)$ a une infinité de composantes connexes ; alors*

$$\mathrm{bf}_H(\Pi) = \infty .$$

3. *Ou bien il existe un réel critique x_{crit} tel que $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe pour tout x supérieur à x_{crit}, mais a une infinité de composantes connexes pour tout x inférieur à x_{crit} ; alors*

$$\mathrm{bf}_H(\Pi) = \infty \qquad \text{mais} \qquad \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1 .$$

Remarque. — Noter que le troisième cas n'est possible que quand $G = GA(1,\mathbb{R})$. Nous en verrons un exemple dans [M].

Question. — $\mathrm{bg}_H(\Pi)$ est-il ou non toujours infini dans le deuxième cas ?

Exemples. — Avant de démontrer ce théorème, donnons des exemples des cas 1 et 2. Dans chaque cas, Π est engendré par deux éléments α et β ; on a $G = \mathbb{R}$; enfin $H : \Pi \to G$ est défini par $H(\alpha) = 1$ et $H(\beta) = 0$. La figure 2 représente le graphe $\mathscr{G}$ de Π rapporté à $F = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$.

Exemple i) Prenons :

$$\Pi = \mathbb{Z}^2 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle .$$

On constate immédiatement que $\mathscr{G}_H(0,0)$ est connexe. D'après notre théorème, Π n'a qu'un bout dans la direction H.

Exemple ii) Prenons :

$$\Pi = \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle .$$

On constate immédiatement que les sommets 1 et $\alpha^{-1}\beta\alpha$ appartiennent à deux composantes différentes de $\mathscr{G}_H(0,0)$. D'après notre théorème, Π a une infinité de bouts dans la direction H.

Exemple iii) Prenons :

$$\Pi = \mathbb{Z}^*_{2\mathbb{Z}} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^2 \rangle .$$

On voit deux composantes distinctes de $\mathscr{G}_H(0,0)$ sur la figure 2 : l'une contient

$$\ldots, \quad \beta^{-2}, \quad \beta^{-1}, \quad 1, \quad \beta, \quad \beta^2, \ldots$$

et l'autre

$$\ldots, \quad \alpha^{-1}\beta^{-3}\alpha, \quad \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha, \quad \alpha^{-1}\beta\alpha, \quad \alpha^{-1}\beta^{3}\alpha, \quad \ldots$$

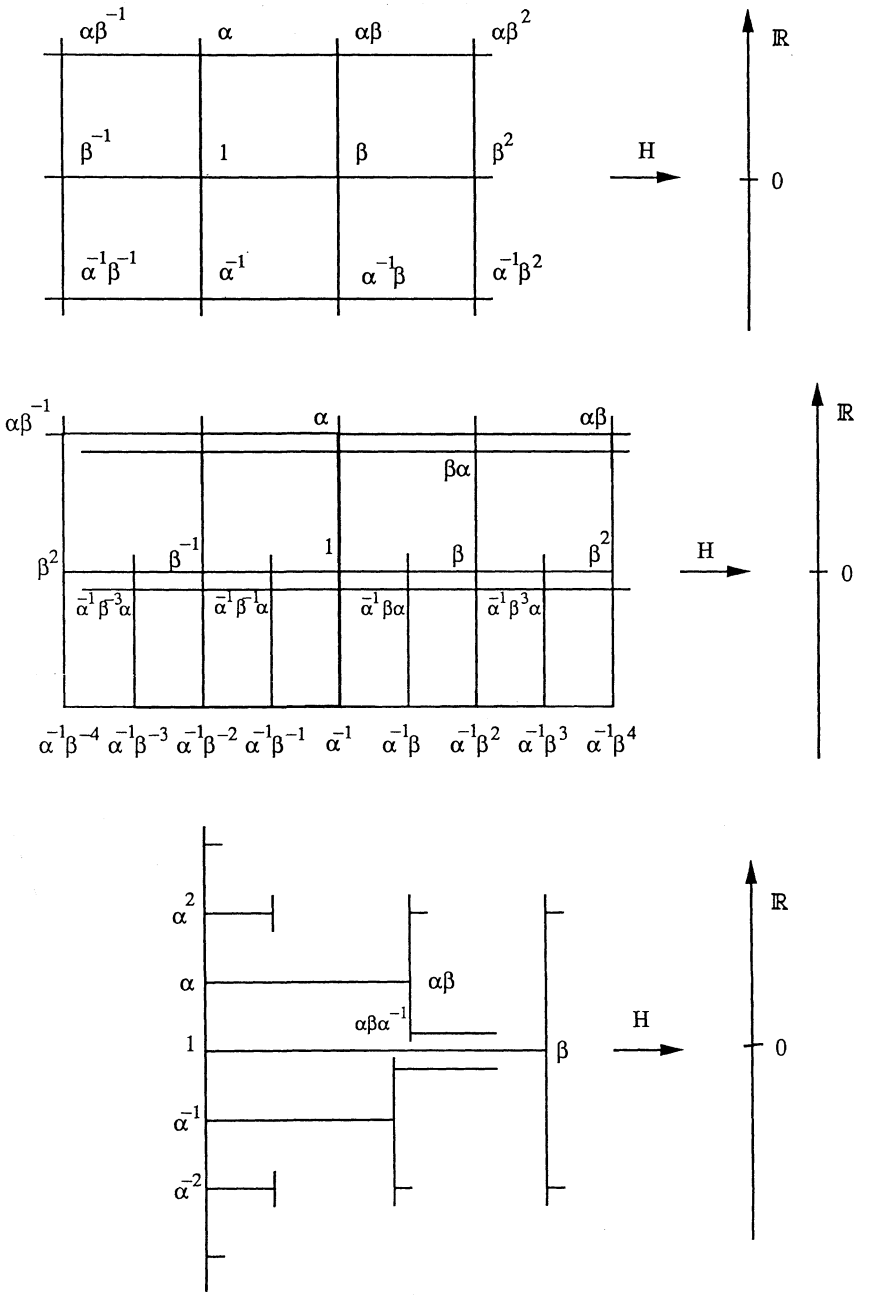
αβ⁻¹
α
αβ
αβ²
β⁻¹
1
β
β²
α⁻¹β⁻¹
α⁻¹
α⁻¹β
α⁻¹β²
H
ℝ
0
αβ⁻¹
α
αβ
βα
β²
β⁻¹
1
β
β²
α⁻¹β⁻³α
α⁻¹β⁻¹α
α⁻¹βα
α⁻¹β³α
α⁻¹β⁻⁴ α⁻¹β⁻³ α⁻¹β⁻² α⁻¹β⁻¹ α⁻¹ α⁻¹β α⁻¹β² α⁻¹β³ α⁻¹β⁴
H
ℝ
0
α²
α
αβ
αβα⁻¹
1
β
α⁻¹
α⁻²
H
ℝ
0

Figure 2.

D'après notre théorème, Π a une infinité de bouts dans la direction H. L'intérêt de cet exemple réside dans les deux remarques suivantes :

a) Π est en même temps de présentation finie, et résoluble, et même métabélien : on a la suite exacte :

$$1 \to \mathbb{Z}[1/2] \to \Pi \to \mathbb{Z} \to 1.$$

b) Considérons le morphisme $-H : \Pi \to \mathbb{R}$, opposé à H. Au bord près, $\mathscr{G}_{-H}(0,0)$ est le complémentaire de $\mathscr{G}_H(0,0)$. On constate qu'il est connexe. D'après notre théorème, Π n'a qu'un bout dans la direction $-H$.

Passons maintenant à la preuve du théorème. Nous allons découper celui-ci en trois propositions : 2.3, 2.6 et 2.7. Le lemme suivant sera fondamental.

LEMME 2.2. — *Soient deux réels x et y, et une composante connexe de $\mathscr{G}_H(x,y)$. Nous affirmons que l'ensemble de ses sommets n'est pas faiblement majoré. En d'autres termes, cette composante rencontre $\mathscr{G}_H(x',y')$, quels que soient les réels x' et y'.*

Démonstration du lemme. — Fixons un élément τ de Π opérant sans point fixe sur $\mathbb{R}$ (voir la proposition 1.2). Nous pouvons supposer que, pour tout réel t, on a $\tau \cdot t > t$. Alors quel que soit t, la suite $\tau^n \cdot t$ croît et tend vers $+\infty$ avec n.

Regardons d'abord τ comme un sommet de $\mathscr{G}$. Choisissons un chemin C_0 menant de l'identité à τ dans $\mathscr{G}$. Puis faisons opérer τ sur $\mathscr{G}$ par translations à gauche, et posons $C_n = \tau^n(C_0)$: c'est un chemin menant de τ^n à τ^{n+1} dans $\mathscr{G}$. Soit C le chemin infini $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots$

Fixons deux réels quelconques x, y, ainsi qu'un sommet γ quelconque de $\mathscr{G}_H(x,y)$.

La fonction $\alpha \mapsto \alpha \cdot x$ considérée sur l'ensemble fini des sommets de C_0, atteint son minimum en un sommet $\alpha_{\min}$. Le minimum de $\alpha \cdot x$ sur l'ensemble des sommets de C_n est $\tau^n \alpha_{\min} \cdot x$. Comme $\tau^n \cdot t \geqslant t$ pour tout t réel, $\alpha_{\min} \cdot x$ est aussi le minimum de $\alpha \cdot x$ sur l'ensemble des sommets de C.

Considérons le chemin infini $\gamma \alpha_{\min}{}^{-1}(C)$. Il est évident qu'il est contenu dans $\mathscr{G}_H(x,y)$. Il est donc contenu dans la composante connexe de $\mathscr{G}_H(x,y)$ qui contient γ. En particulier, cette composante contient, pour tout entier n, le sommet $\gamma \alpha_{\min}{}^{-1} \tau^n$. Comme $\tau^n \cdot t$ tend vers $+\infty$ pour tout t réel, cette composante n'est pas faiblement majorée. $\square$

Commençons la démonstration du théorème 2.1 en examinant le nombre de composantes connexes de $\mathscr{G}_H(x,y)$.

PROPOSITION 2.3. — *Le nombre de composantes $\mathscr{G}_H(x,y)$ ne dépend pas de y. Il y a trois cas :*

1) *$\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe, quel que soit x.*

2) *$\mathscr{G}_H(x,y)$ a une infinité de composantes, quel que soit x.*

3) *Il existe un réel x_{crit} tel que $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe pour $x > x_{\text{crit}}$ et a une infinité de composantes pour $x < x_{\text{crit}}$.*

Démonstration. — i) Notons $N(x,y)$ le nombre de composantes de $\mathscr{G}_H(x,y)$, et montrons qu'il ne dépend pas de y.

Remarquons que Π opère sur $\mathscr{G}$ par translations *à gauche*, qui sont des automorphismes du graphe $\mathscr{G}$. Cette opération est transitive sur les sommets. De plus :

$$\gamma \cdot \mathscr{G}_H(x,y) = \mathscr{G}_H(x,\gamma \cdot y)$$

donc

$$N(x,y) = N(x,\gamma \cdot y).$$

Quand $y \leqslant y'$, il existe un élément γ de Π tel que $\gamma \cdot y \geqslant y'$; on a alors :

$$\mathscr{G}_H(x,y) \supset \mathscr{G}_H(x,y') \supset \mathscr{G}_H(x,\gamma \cdot y)$$

donc d'après le lemme 2.2 :

$$N(x,y) \leqslant N(x,y') \leqslant N(x,\gamma \cdot y).$$

Donc $N(x,y') = N(x,y)$. Conclusion : $N(x,y)$ ne dépend que de x.

ii) Montrons maintenant que $N(x,y)$ décroît quand x croît. Quand $x \leqslant x'$, on a :

$$\mathscr{G}_H(x,y) \subset \mathscr{G}_H(x',y)$$

donc grâce au lemme 2.2 :

$$N(x,y) \geqslant N(x',y).$$

iii) Montrons enfin que $N(x,y)$ ne prend que les valeurs 1 et ∞. Fixons un réel x, et supposons que $N(x,y) > 1$. Soit un chemin joignant dans $\mathscr{G}$ deux composantes distinctes de $\mathscr{G}_H(x,0)$. Pour y réel assez

proche de $-\infty$, ce chemin est contenu dans $\mathscr{G}_H(x,y)$. Donc l'application naturelle :

$$\pi_0(\mathscr{G}_H(x,0)) \to \pi_0(\mathscr{G}_H(x,y))$$

n'est pas injective. D'après le lemme 2.2, elle est surjective. Mais d'après le point i), les ensembles sont équipotents. Ils sont donc infinis : $N(x,y) = \infty$. □

Nous allons maintenant regarder les parties de Π comme ensembles de sommets de $\mathscr{G}$, et préciser ce que signifie géométriquement qu'une telle partie est de bord majoré faiblement ou fortement.

DÉFINITION 2.4. — *Soit A une partie de Π. On appelle* bord *de A l'ensemble*

$$\delta A = (A \Delta A\gamma_1) \cup \ldots \cup (A \Delta A\gamma_n).$$

Noter que δA dépend du choix de la partie génératrice $F = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Géométriquement, δA est l'ensemble des sommets de $\mathscr{G}$ qui sont dans A mais qui sont liés par une arête à un sommet hors de A ; et des sommets hors de A qui sont liés par une arête à un sommet dans A.

LEMME 2.5. — *Les points sont équivalents :*

- *A est de bord majoré faiblement (resp. fortement) (au sens du paragraphe* 1).
- *δA est majoré faiblement (resp. fortement).*

Démonstration. — Le premier point signifie que la classe de A dans $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{P}(\Pi)/\mathscr{M}\mathscr{G}_H(\Pi)$) (voir le paragraphe 1) est fixée par l'action à droite de tout élément γ de Π. Il revient évidemment au même de dire que la classe de A est fixée par chacun des générateurs : $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. En d'autres termes, les ensembles $A\Delta A\gamma_1, \ldots, A\Delta A\gamma_n$ doivent être majorés faiblement (resp. fortement). Enfin, ceci revient à dire que leur réunion δA, est majorée faiblement (resp. fortement). □

Nous pouvons maintenant lire $\mathrm{bf}_H(\Pi)$ dans les propriétés de connexité des $\mathscr{G}_H(x,y)$:

PROPOSITION 2.6. — i) *Si $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe quels que soient x et y, alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

ii) *Si au contraire $\mathscr{G}_H(x,y)$ a une infinité de composantes connexes pour un x et un y, alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \infty$.

Démonstration. — Point i). Supposons que quels que soient les réels x et y, $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe.

Soit A une partie de Π de bord majoré faiblement. Il nous faut montrer que A est majorée ou comajorée faiblement. D'après le lemme 2.5, son bord δA est majoré faiblement. En d'autres termes, il existe deux réels x et y tels que δA est disjoint de l'ensemble des sommets de $\mathscr{G}_H(x,y)$:

$$\Pi(x,y) = \{\gamma \in \Pi / \gamma \cdot x \geqslant y\}.$$

Considérons l'intersection A' de A avec $\Pi(x,y)$. C'est donc l'ensemble des sommets d'une réunion de composantes connexes de $\mathscr{G}_H(x,y)$. Puisque $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe, l'ensemble A' égale $\varnothing$ ou $\Pi(x,y)$. Or A' est congru à A faiblement. Donc dans le premier cas, A est majoré faiblement, et dans le second cas, A est comajoré faiblement.

Point ii). Inversement, fixons deux réels x et y, ainsi qu'une famille de composantes connexes de $\mathscr{G}_H(x,y)$. Soit A l'ensemble de leurs sommets. Le bord de A est contenu dans celui de $\Pi(x,y)$ (voir le point i)), donc majoré faiblement. Plus précisément, l'ensemble :

$$\delta A \cdot \inf \{x, \gamma_1^{-1} \cdot x, \ldots, \gamma_n^{-1} \cdot x\}$$

est majoré par y.

On a ainsi construit une application :

$$\mathscr{P}(\pi_0(\mathscr{G}_H(x,y))) \to \mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi).$$

C'est un morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — espaces vectoriels. Un élément du noyau est une famille de composantes connexes de $\mathscr{G}_H(x,y)$ dont l'ensemble des sommets est majoré. D'après le lemme 2.2, une telle famille est vide. Ce morphisme est donc injectif, donc si $\pi_0(\mathscr{G}_H(x,y))$ est infini, alors $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ est infini. □

Passons à $\mathrm{bg}_H(\Pi)$.

PROPOSITION 2.7. — *S'il existe un réel x_0 tel que $\mathscr{G}_H(x,y)$ soit connexe pour tout $x > x_0$, alors* $\mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Soit x_0 un réel tel que $\mathscr{G}_H(x,y)$ est connexe pour tout $x > x_0$. Soit A une partie de Π, de bord majoré fortement.

D'après le lemme 2.5, quel que soit le réel x, il existe un réel y_x tel que δA est disjoint de $\Pi(x,y_x) = \{\alpha \in \Pi / \alpha \cdot x \geqslant y_x\}$ (l'ensemble des

sommets de $\mathcal{G}_H(x,y)$). Par conséquent, $A_x = A \cap \Pi(x,y_x)$ est l'ensemble des sommets d'une famille de composantes connexes de $\mathcal{G}_H(x,y_x)$. Par hypothèse, pour $x > x_0$, on a $A_x = \emptyset$ ou $\Pi(x,y_x)$.

Distinguons deux cas :

Ou bien $A_x = \emptyset$ quel que soit $x > x_0$. Alors $A \cdot x$ est majoré pour des x arbitrairement grands, donc A est majoré fortement.

Ou bien $A_x = \Pi(x,y_x)$ pour un $x > x_0$. Quel que soit $x' > x_0$, l'ensemble $\Pi(x',y'_x)$ rencontre $\Pi(x,y_x)$ (lemme 2.2), donc rencontre A. Donc $A_{x'}$ est non vide, donc $A_{x'} = \Pi(x',y'_x)$. Finalement on voit que quel que soit $x > x_0$, on a $A_x = \Pi(x,y_x)$, et donc A est comajoré fortement. □

Le théorème 2.1 est simplement la juxtaposition des propositions 2.3, 2.6 et 2.7 ; il est donc démontré.

3. Théorie des sous-groupes neutres, et applications.

Ce paragraphe est divisé en trois. Le sous-paragraphe A est consacré au développement d'outils techniques. Ceux-ci seront appliqués dans les deux autres sous-paragraphes :

- dans le sous-paragraphe B, à la production de conditions sous lesquelles on peut affirmer que bf = 1.
- dans le sous-paragraphe C, à élucider le lien de bf = 1 avec la propriété de Bieri-Neumann-Strebel.

Dans tout ce paragraphe on se place dans la situation suivante : on se donne un groupe Π (qui peut ne pas être de type fini), ainsi qu'un morphisme non dégénéré $H : \Pi \to G$, où G est l'un des trois groupes : $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$.

Rappelons qu'un sous-groupe de Π est majoré si et seulement si il opère sur $\mathbb{R}$ avec un point fixe, ou en d'autres termes si la restriction de H à ce sous-groupe dégénère.

A) *Théorie des sous-groupes neutres.*

Nous allons dans ce paragraphe définir la notion de *sous-groupe neutre* puis en établir les principales propriétés.

DÉFINITION 3.1. — *On dit qu'un sous-groupe* Σ *de* Π *est H-neutre si tout partie de* Π *de bord majoré faiblement est congrue faiblement à une partie* Σ*-saturée à droite.*

Ainsi, le sous-groupe trivial est toujours H-neutre. Tout sous-groupe d'un sous-groupe H-neutre est H-neutre. Le groupe Π entier est H-neutre si et seulement si $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

En remplaçant, dans la définition 3.1, le mot « faiblement » par le mot « fortement », on obtient une notion de neutralité qui a des propriétés semblables mais dont nous ne parlons pas parce que nous ne l'utiliserons pas.

Nous emploierons beaucoup la remarque presque tautologique suivante.

LEMME 3.2. — *Soient* Σ *uns sous-groupe de* Π *et* A *une partie de* Π. *Si* A *n'est congrue faiblement à aucune partie* Σ*-saturée à droite, alors quels que soient les réels* x, y, *il existe deux éléments* $\alpha \in A$ *et* $\beta \in A^*$ *(le complémentaire de* A *dans* Π), *tels que* $\alpha \cdot x > y$ *et* $\beta \cdot x > y$ *et* $\alpha^{-1}\beta \in \Sigma$.

Démonstration. — Considérons $S = \{\alpha\sigma / \alpha \in A \text{ et } \alpha \cdot x > y \text{ et } \sigma \in \Sigma\}$.

Il est évident que S est Σ-saturé à droite. Donc par hypothèse $(A\,\Delta S)\cdot x$ n'est pas majoré par y. Or $A\,\Delta S = (A^* \cap S) \cup (A \cap S^*)$. De plus $(A \cap S^*)\cdot x$ *est* majoré par y car chaque $\alpha \in A$ tel que $\alpha \cdot x > y$ s'écrit $\alpha = \alpha 1$ (où 1 désigne l'élément neutre de Π) et donc appartient à S. Donc $(A^* \cap S)\cdot x$ *n'est pas* majoré par y. En d'autres termes, il existe un élément β de $A^* \cap S$ tel que $\beta \cdot x > y$, ce qu'il fallait démontrer. □

Nos propositions 3.3 à 3.7 nous permettront, dans des situations variées, d'exhiber de nombreux sous-groupes neutres. Certaines concernent des sous-groupes du noyau, d'autres au contraire des sous-groupes non majorés.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* $\Sigma \subset \Pi$ *un sous-groupe* de type fini. *On suppose que* $H(\Sigma)$ *a des points fixes arbitrairement petits (par exemple, que* Σ *est contenu dans le noyau de* H). *Alors* Σ *est H-neutre.*

En particulier, un sous-groupe fini de Π est toujours H-neutre.

Démonstration. — Soit A une partie de Π de bord majoré faiblement. Il nous faut montrer que A est congrue faiblement à une partie saturée par Σ à droite.

Choisissons une partie génératrice finie de Σ, stable par inversion : $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Il existe deux réels x et y tels que $(A\,\Delta A\sigma_1)\cdot x$ et $(A\,\Delta A\sigma_2)\cdot x$ et ... et $(A\,\Delta A\sigma_n)\cdot x$ soient majorés par y. On peut supposer que x est un point fixe de $H(\Sigma)$.

Procédons par l'absurde. D'après le lemme 3.2, si A n'était congrue faiblement à aucune partie Σ-saturée, il existerait $\alpha \in A$ et $\beta \in A^*$ tels que $\alpha \cdot x > y$ et $\beta \cdot x > y$ et $\alpha^{-1}\beta \in \Sigma$. Notons $\sigma = \alpha^{-1}\beta$ et décomposons-le en produit des générateurs : $\sigma = \sigma_{i1}\,\sigma_{i2} \ldots \sigma_{ip}$. Posons :

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 1 \text{ (l'élément neutre de } \Pi) \\
\tau_1 &= \sigma_{i1} \\
\tau_2 &= \sigma_{i1}\,\sigma_{i2} \\
&\ldots \\
\tau_p &= \sigma_{i1}\,\sigma_{i2} \ldots \sigma_{ip}.
\end{aligned}$$

On a :

$$A\,\Delta A\sigma^{-1} = (A\,\Delta A\sigma_{i1}^{-1})\tau_0^{-1}\,\Delta(A\,\Delta A\sigma_{i2}^{-1})\tau_1^{-1}\,\Delta \ldots \Delta(A\,\Delta A\sigma_{ip}^{-1})\tau_{p-1}^{-1}$$

or chacun de ces p ensembles, appliqué à x, est majoré par y. Donc $(A\,\Delta A\sigma^{-1})\cdot x$ est majoré par y, ce qui est impossible puisque $\alpha \in A\,\Delta A\sigma^{-1}$, et que $\alpha \cdot x > y$. □

PROPOSITION 3.4. — *Soit $\Sigma \subset \Pi$ un sous-groupe qui a exactement un bout fin dans la direction $H|_\Sigma$ (donc en particulier il n'est pas majoré). Alors Σ est H-neutre.*

Contre-exemple. — La réciproque est fausse : un sous-groupe non majoré Σ peut être H-neutre mais avoir une infinité de bouts dans la direction $\mathrm{H}|_\Sigma$.

Par exemple soient Σ un groupe libre non abélien, Π le produit direct $\Sigma \times \mathbb{Z}$, et $H : \Pi \to \mathbb{R}$ un morphisme qui n'est nul sur aucun des deux facteurs. D'après le théorème 3.10, cas 2, le groupe Π n'a qu'un bout dans la direction H. *A fortiori* tout sous-groupe de Π est H-neutre ! Mais d'après le théorème 4.1, le groupe Σ a une infinité de bouts dans la direction $H|_\Sigma$.

Démonstration. — Nous allons montrer la contraposée : supposons que Σ n'est ni majoré, ni H-neutre, et démontrons que Σ a une infinité de bouts fins dans la direction $H|_\Sigma$.

Fixons un élément τ de Σ tel que $\tau \cdot t > t$, quel que soit le réel t ; ainsi qu'une partie A de Π, de bord majoré faiblement, qui n'est congrue à aucune partie Σ-saturée à droite. Fixons enfin deux réels x, y tels que y majore $(A \,\Delta A\tau^{-1}) \cdot x$. Il existe donc (lemme 3.2) deux éléments $\alpha \in A$ et $\beta \in A^*$ tels que $\alpha \cdot x > y$ et $\beta \cdot x > y$ et $\alpha^{-1}\beta \in \Sigma$.

Posons :

$$Z = \{\zeta \in \Sigma / y \text{ majore } (A \,\Delta A\zeta^{-1}) \cdot x\}.$$

Nous allons montrer que Z, considéré comme partie de Σ, est de bord majoré faiblement, mais n'est ni majoré ni comajoré faiblement. Ceci montrera bien que Σ a une infinité de bouts fins.

Prouvons d'abord que Z n'est pas majoré faiblement. Comme 1 (l'élément neutre de Π) appartient à Z, il suffit de prouver que $\zeta \in Z$ implique $\tau\zeta \in Z$. Pour cela, remarquons que :

$$A \,\Delta A(\tau\zeta)^{-1} = (A \,\Delta A\zeta^{-1})\tau^{-1}\Delta(A \,\Delta A\tau^{-1}).$$

Si $\zeta \in Z$, i.e. si y majore $(A \,\Delta A\zeta^{-1}) \cdot x$, alors, comme $\tau^{-1} \cdot x \leqslant x$, le réel y majore aussi $(A \,\Delta A\zeta^{-1}) \cdot (\tau^{-1} \cdot x)$. Comme de plus y majore $(A \,\Delta A\tau^{-1}) \cdot x$, il majorera leur réunion, qui contient $(A \,\Delta A(\tau\zeta)^{-1}) \cdot x$, et l'on aura $\tau\zeta \in Z$.

Prouvons maintenant que $Z^* = \Sigma - Z$ n'est pas majoré faiblement. Comme $\alpha^{-1}\beta$ et $\beta^{-1}\alpha$ appartiennent à Z^*, et que l'un d'eux au moins envoie x au-dessus de lui-même, il suffit de prouver que $\zeta \in Z^*$ et $\zeta \cdot x \geqslant x$ impliquent $\zeta\tau \in Z^*$. Cela se montre comme ci-dessus, en remarquant que :

$$A \,\Delta A(\tau\zeta)^{-1} = (A \,\Delta A\tau^{-1})\zeta^{-1}\Delta(A \,\Delta A\zeta^{-1}).$$

Prouvons enfin que Z est de bord majoré faiblement. Fixons $\sigma \in \Sigma$. Il faut prouver que $Z \,\Delta Z\sigma$ est majoré faiblement. Fixons un réel x_σ tel que $(A \,\Delta A\sigma)\%x_\sigma$ est majoré.

Soit ζ un élément quelconque de $Z \,\Delta Z\sigma$. En d'autres termes, un et un seul des éléments ζ et $\zeta\sigma^{-1}$ appartient à Z. Or :

$$(A \,\Delta A\sigma)\zeta^{-1} = (A\Delta A\zeta^{-1})\Delta(A\Delta A(\zeta\sigma^{-1})^{-1}).$$

Donc $(A\Delta A\sigma)\zeta^{-1} \cdot x$ n'est pas majoré par y. Ceci implique que $\zeta^{-1} \cdot x > x_\sigma$, c'est-à-dire que $\zeta \cdot x_\sigma < x$. En résumé $(Z \,\Delta Z\sigma) \cdot x_\sigma$ est majoré par x. $\square$

PROPOSITION 3.5 (transfert). — *Soit* Σ *un sous-groupe de* Π. *On suppose qu'il existe un sous-groupe* Φ *de* Π *non majoré, tel que le sous-groupe* $[\Sigma,\Phi]$ (*engendré par les commutateurs d'un élément de* Σ *avec un élément de* Φ), *est H-neutre. Alors* Σ *est lui aussi H-neutre.*

COROLLAIRE. — *Si* Π *est commutatif, alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$. (*En effet*, $[\Pi,\Pi]=1$.)

Démonstration de la proposition. — Cette démonstration repose sur le « principe de l'échelle » que nous avons déjà rencontré dans la preuve du théorème 1.4.

Soit A une partie de Π, de bord majoré faiblement. Il nous faut montrer que A est congrue faiblement à une partie saturée par Σ (à droite).

Puisque Φ est non majoré, il contient un élément ϕ tel que $\phi\cdot t > t$ quel que soit le réel t (voir la proposition 1.2). Fixons deux réels x et y tels que $(A\Delta A\phi^{-1})\cdot x$ soit majoré par y.

Procédons par l'absurde. Si A n'était congrue faiblement à aucune partie saturée par Σ, il existerait (lemme 3.2) deux éléments : $\alpha\in A$ et $\beta\in A^*$ tels que $\alpha\cdot x > y$ et $\beta\cdot x > y$ et $\alpha^{-1}\beta\in\Sigma$. Notons $\sigma = \alpha^{-1}\beta$.

On a $\alpha\phi\in A$, car sinon α appartiendrait à $A\Delta A\phi^{-1}$, ce qui est contradictoire avec $\alpha\cdot x > y$ et le fait que y majore $(A\Delta A\phi^{-1})\cdot x$. Par récurrence sur n, on montre de la même façon que $\alpha\phi^n\in A$, quel que soit $n\in\mathbb{N}$. On montre de même que $\beta\phi^n\in A^*$, quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

Considérons l'échelle représentée sur la figure 3. Nous venons de montrer que son montant gauche est dans A, et son montant droit dans A^*. Dans la preuve du théorème 1.2, nous étions dans une situation semblable et la contradiction venait de ce que la translation à droite par σ envoyait le montant de gauche sur le montant de droite. Ici ce n'est pas le cas, mais le défaut $(\alpha\phi^n\sigma)^{-1}(\beta\phi^n) = \sigma^{-1}\phi^{-n}\sigma\phi^n$ appartient au sous-groupe $[\Sigma,\Phi]$, qui est neutre. Nous allons exploiter cela.

Par hypothèse il existe une partie S de Π, saturée par $[\Sigma,\Phi]$ à droite, et telle que $A\Delta S$ est majoré faiblement. Par ailleurs, $A\Delta A\sigma^{-1}$ est aussi majoré faiblement. Choisissons deux réels x', y' tels que y' majore à la fois $(A\,\Delta S)\cdot x'$ et $(A\,\Delta A\sigma^{-1})\cdot x'$. Fixons aussi un entier N assez grand pour que $\alpha\phi^N\cdot x'$ et $\beta\phi^N.x'$ soient plus grands que y'.

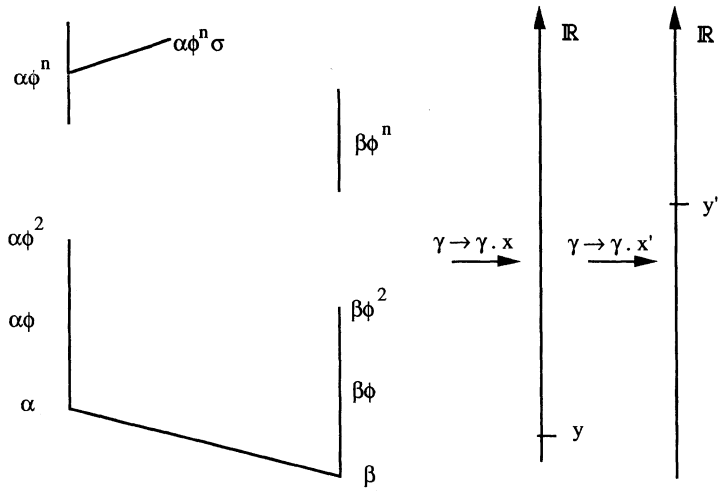

Figure 3.

On a $\alpha\phi^N\sigma \in A$, car sinon $\alpha\phi^N$ appartiendrait à $A\,\Delta A\sigma^{-1}$, ce qui est contradictoire avec $\alpha\phi^N \cdot x' > y'$ et avec le fait que y' majore $(A\Delta A\sigma^{-1})\cdot x'$.

Je dis qu'on peut supposer que $\sigma \cdot x' \geqslant x'$. En effet dans le cas contraire c'est $\sigma^{-1}\cdot x'$ qui est plus grand que x' ; on échange alors A avec A^*, donc α avec β et σ avec σ^{-1} et S avec S^*. Il n'y a pas à modifier x, y, x', y'.

Considérons $\alpha' = \alpha\phi^N\sigma$. Je dis qu'il appartient à S. En effet, sinon α' appartiendrait à $A\Delta S$, et l'on sait que $(A\Delta S)\cdot x'$ est majoré par y'. Comme d'un autre côté on a $\sigma\cdot x' \geqslant x'$, on a $\alpha'\cdot x' > y'$, ce qui est contradictoire.

Considérons d'autre part $\beta' = \beta^N$. Je dis qu'il appartient à S^*. En effet, sinon β' appartiendrait à $A\Delta S$, ce qui est incompatible avec $\beta'\cdot x' > y'$ et le fait que y' majore $(A\Delta S)\cdot x'$.

En résumé, α' appartient à S et β' à S^*. Mais $\alpha'^{-1}\beta' = \sigma^{-1}\phi^{-N}\sigma\phi^N$ appartient à $[\Sigma,\Phi]$. Comme S est saturé par $[\Sigma,\Phi]$ à droite, on est devant la contradiction attendue. □

PROPOSITION 3.6. — *Chaque sous-groupe H-neutre non majoré est contenu dans un unique sous-groupe H-neutre non majoré maximal.*

Démonstration. — i) Noter d'abord que pour chaque sous-groupe Σ non majoré et H-neutre, et chaque partie A de Π, de bord majoré

faiblement, il existe une *unique* partie $S(\Sigma, A)$ de Π qui est saturée par Σ et congrue faiblement à A. En effet s'il y en a deux, leur différence symétrique est saturée par Σ, donc une réunion de translatés de Σ. Comme cette différence est majorée faiblement, elle doit être vide.

Donc si Σ, Σ' sont deux sous-groupes H-neutres non majorés et si $\Sigma \supset \Sigma'$, alors $S(\Sigma, A) = S(\Sigma', A)$.

ii) Montrons maintenant que l'ensemble des sous-groupes de Π non majorés H-neutres, est *inductif*. Soit une famille $(\Sigma_i)_i$ de tels sous-groupes, totalement ordonnée. Notons Σ leur réunion. D'après le raisonnement ci-dessus, pour A fixée les $S(\Sigma_i, A)$ sont tous égaux. Il s'agit donc d'une partie de Π congrue faiblement à A et saturée par tous les Σ_i, donc par Σ. Nous avons bien montré que Σ est H-neutre.

Donc d'après le théorème de Zorn, chaque sous-groupe H-neutre non majoré est contenu dans un sous-groupe H-neutre non majoré maximal.

iii) L'unicité résulte de l'observation suivante : si deux sous-groupes Σ, Σ' sont H-neutres et si leur intersection n'est pas majorée, alors leur produit $\Sigma\Sigma'$ est H-neutre. Démontrons cette observation. D'après le i), pour A fixée $S(\Sigma, A) = S(\Sigma \cap \Sigma', A) = S(\Sigma', A)$. Il s'agit donc d'une partie de Π congrue faiblement à A et saturée par Σ et Σ', donc par $\Sigma\Sigma'$.

Remarque. — Chaque sous-groupe H-neutre non majoré maximal est son propre normalisateur, la propriété de transfert le montre immédiatement.

PROPOSITION 3.7. — *Soit Σ un sous-groupe de Π, H-neutre et contenu dans le noyau de H. Soient aussi $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des éléments de Π en nombre fini, tels que $\xi_i \cdot x \geqslant x$ quel que soit le réel x.*

Considérons le sous-groupe T de Π engendré par Σ et les conjugaisons par les ξ_i. En d'autres termes, T est le plus petit sous-groupe de Π qui contienne Σ et tel que les n sous-groupes conjugués $\xi_i T \xi_i^{-1}$ soient contenus dans T.

Nous affirmons que T est lui aussi H-neutre.

Démonstration. — Soit A une partie de Π, de bord majoré faiblement. Il nous faut montrer que A est congrue faiblement à une partie saturée par T. Puisque Σ est H-neutre, nous pouvons supposer que A est saturée par Σ.

Fixons deux réels x et y tels que y majore tous les $(A\Delta A\xi_i)\cdot x$, et donc aussi tous les $(A\Delta A\xi_i^{-1})\cdot x$. Procédons par l'absurde. Si A n'était congrue faiblement à aucune partie saturée par T, il existerait (lemme 3.2) deux éléments : $\alpha \in A$ et $\beta \in A^*$ tels que $\alpha\cdot x > y$ et $\beta\cdot x > y$ et $\tau = \alpha^{-1}\beta \in T$. Puisque $\tau \in T$, il se décompose en produit de facteurs de la forme :

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_p}\sigma\xi_{i_p}^{-1}\ldots\xi_{i_2}\xi_{i_1}^{-1}{}^{-1}$$

où $\sigma \in \Sigma$ *et* $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$. On a ainsi une décomposition du type :

$$\tau = \omega_1\omega_2\ldots\omega_k\ldots\omega_N$$

où chaque ω_k est de la forme ξ_i ou ξ_i^{-1} ou appartient à Σ. Comme $\xi_i\cdot x \geqslant x$ quel que soit le réel x et comme Σ est contenu dans le noyau de H, chacun des produits partiels :

$$\omega_1, \quad \omega_1\omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_1\omega_2\ldots\omega_k, \quad \ldots, \quad \omega_1\omega_2\ldots\omega_N$$

envoie x au-dessus de lui-même, donc chacun des produits :

$$\alpha\omega_1, \quad \alpha\omega_1\omega_2, \quad \ldots, \quad \alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_k, \quad \ldots, \quad \alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_N = \beta$$

envoie x au-dessus de y. Donc, par récurrence sur k, $\alpha\omega_1\omega_2\ldots\omega_k$ appartient à A. Pour $k = N$, c'est la contradiction attendue puisque β n'appartient pas à A. □

Voici maintenant deux applications de la notion de sous-groupe neutre.

PROPOSITION 3.8. — *On suppose que* Π *possède un sous-groupe à la fois H-neutre, normal, et non majoré. Alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 3.5 (avec $\Sigma = \Pi$). Toutefois la preuve est beaucoup plus simple : soit Σ le sous-groupe à la fois H-neutre, normal et non majoré. Soit A une partie de Π, de bord majoré faiblement. Comme Σ est neutre, A est congrue faiblement à une partie S, saturée par Σ *à droite*. Montrons que $S = \Pi$ ou $\varnothing$.

Soit γ un élément quelconque de Π. Comme Σ est normal, S est saturé par Σ *à gauche*. Donc $S\Delta S\gamma$ est aussi saturé par Σ à gauche. Par conséquent si $S\Delta S\gamma$ était non vide, il contiendrait un translaté de Σ, ce qui est impossible puisque $S\Delta S\gamma$ est majoré faiblement mais que Σ ne l'est pas. Donc $S\Delta S\gamma$ est vide. Comme γ est quelconque, S est saturé par Π à droite, donc plein ou vide. □

Enfin, le nombre de bouts fins d'un groupe n'est pas modifié par quotient par un sous-groupe normal, neutre et majoré :

PROPOSITION 3.9. — *Soient* Π *un groupe ;* G *l'un des trois groupes :* $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$; H *un morphisme non dégénéré de* Π *dans* G *; et* Σ *un sous-groupe de* Π, *normal et majoré dans la direction* H.

Soit H': $\Pi/\Sigma \to G$ *un morphisme non dégénéré, lié à* H *par la propriété suivante : quel que soit l'élément* α' *de* Π/Σ, *il possède un antécédent* α *dans* Π *tel que* $H(\alpha) = H'(\alpha')$. (*Par exemple :* $H = H' \circ p$, *où* p *désigne la projection de* Π *sur* Π/Σ. *Ou encore :* $H' = H \circ s$, *où* s *est une section de* p).

Sous ces conditions :

i) $\mathrm{bf}_H(\Pi) \geqslant \mathrm{bf}_{H'}(\Pi/\Sigma)$ et $\mathrm{bg}_H(\Pi) \geqslant \mathrm{bg}_{H'}(\Pi/\Sigma)$

ii) *si de plus* Σ *est* H*-neutre, alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bf}_{H'}(\Pi/\Sigma)$.

Démonstration. — Preuve du point i). Par hypothèse, $H(\Sigma)$ a un point fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ l'orbite de x par $H(\Pi)$. Comme Σ est normal, tout élément de Ω est un point fixe de $H(\Sigma)$. Comme H est non dégénéré, Ω a des points arbitrairement grands et arbitrairement petits.

Considérons l'application $p^* : \mathscr{P}(\Pi/\Sigma) \to \mathscr{P}(\Pi)$. Par hypothèse, les morphismes H et $H' \circ p$ induisent la même action de Π sur Ω. On en déduit aisément qu'une partie A de Π/Σ est majorée faiblement (resp. fortement) dans la direction H', si et seulement si p^*A est majorée faiblement (resp. fortement) dans la direction H. Conclusion : p^* induit une injection de $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi/\Sigma)$ dans $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ (resp. de $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi/\Sigma)$ dans $\mathscr{B}\mathscr{G}_H(\Pi)$), d'où le point i).

Preuve du point ii). Si de plus Σ est H-neutre, la définition 3.1 signifie exactement que cette injection de $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi/\Sigma)$ dans $\mathscr{B}\mathscr{F}_H(\Pi)$ est surjective. □

B) *Conditions qui suffisent à n'avoir qu'un bout.*

Nous allons voir de nombreuses situations dans lesquelles on peut affirmer que $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$. Les plus frappantes sont rassemblées dans le :

THÉORÈME 3.10. — *Soient un groupe* Π (*qui peut ne pas être de type fini*), *et un morphisme non dégénéré* $H : \Pi \to G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ *ou* $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. *Dans chacun des cas suivants,* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$ (*et donc ainsi* $\mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$).

1. Π *est nilpotent.*
2. Π *est produit direct de deux sous-groupes non majorés.*
3. *Le centre de* Π *n'est pas majoré.*
4. $G = \mathbb{R}$ *ou* $GA(1,\mathbb{R})$; *et le noyau de* H *est de type fini.*

Exemples. — i) Soit Π un sous-groupe de $\mathbb{R}$ ou de $GA(1,\mathbb{R})$, et soit H l'inclusion. Si elle est non dégénérée, c'est-à-dire si Π n'est ni le groupe trivial ni un groupe d'homothéties de même centre, alors on est dans le cas 4, et donc $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

ii) Soit Π un sous-groupe de $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, et soit H l'inclusion. On suppose que Π contient une translation entière non nulle. On est dans le cas 3, donc $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Contre-exemples. — *a*) L'exemple 1 du paragraphe 1 et l'exemple iii) du paragraphe 2, nous montrent des groupes résolubles (et même métabéliens) munis d'un morphisme dans $\mathbb{R}$, dans la direction duquel ils ont une infinité de bouts.

b) Dans l'exemple ii) ci-dessus, l'hypothèse que Π contient une translation entière non nulle est essentielle. En fait, nous verrons au prochain paragraphe (exemple *b*) que les sous-groupes libres non abéliens de $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ (qui sont nombreux) ont une infinité de bouts dans la direction de l'inclusion.

Démonstration du théorème 3.10.

Point 1 : Supposons Π nilpotent, i.e. que la suite centrale descendante, définie par $\Pi_0 = \Pi$ et $\Pi_{n+1} = [\Pi,\Pi_n]$, atteint le groupe trivial. Soit N le plus petit entier tel que Π_{N+1} soit trivial. Pour montrer que $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$, procédons par récurrence sur N.

Dans le cas $N = 0$, le groupe Π est commutatif, i.e. $[\Pi,\Pi] = 1$. D'après la propriété de transfert (proposition 3.5), Π est H-neutre, i.e. $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Soit maintenant $N \geqslant 1$ quelconque. Distinguons trois cas.

a) Le sous-groupe Π_N est contenu dans le noyau de H. (C'est toujours le cas par exemple quand $G = \mathbb{R}$ ou $GA(1,\mathbb{R})$). Alors H passe au quotient en un morphisme $H' : \Pi/\Pi_N \to G$. Comme $[\Pi_N,\Pi] = 1$, la propriété de transfert implique que Π_N est H-neutre. On peut donc appliquer la proposition 3.9, point ii) : $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bf}_{H'}(\Pi/\Pi_N)$. Mais par hypothèse de récurrence, $\mathrm{bf}_{H'}(\Pi/\Pi_N) = 1$. Donc $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Dans le cas où $G = \tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, on peut se trouver aussi dans l'un des deux cas suivants :

b) Le sous-groupe Π_N n'est pas majoré. Nous n'avons pas besoin d'employer l'hypothèse de récurrence : comme $[\Pi_N, \Pi] = 1$, la propriété de transfert implique que Π_N est H-neutre. La proposition 3.8 dit alors de $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

c) Le sous-groupe Π_N est majoré, mais sans être contenu dans le noyau de H. Nous allons construire un morphisme $H' : \Pi \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, tel que $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bf}_{H'}(\Pi)$.

Construisons H'. Par hypothèse Π_N a un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme Π_N est normal, l'orbite Ω de x_0 par Π est constituée de points fixes de Π_N.

Par ailleurs $H(\Pi_N)$ est un ensemble de difféomorphismes *analytiques* de $\mathbb{R}$, donc Ω est discrète. Donc il existe entre Ω et $\mathbb{Z}$ une bijection qui respecte l'ordre. Nous obtenons donc un morphisme H' de Π dans le groupe des bijections croissantes de $\mathbb{Z}$. Ce groupe est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc nous avons construit un morphisme $H' : \Pi \to \mathbb{Z}$. Enfin, il est clair qu'une partie A de Π est majorée faiblement dans la direction H', si et seulement si elle l'est dans la direction H. Conclusion : $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bf}_{H'}(\Pi)$.

Par construction H' s'annule sur Π_N. On s'est ainsi ramené au cas *a*), ce qui achève la récurrence.

Point 2 : Écrivons $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$. En particulier $[\Pi_1, \Pi_2] = 1$, de sorte que la propriété de transfert indique que Π_1 (par exemple) est H-neutre. On lui applique alors la proposition 3.8, qui conclut.

Point 3 : Soit Z le centre de Π. Donc $[\Pi, Z] = 1$. La propriété de transfert implique que Π est H-neutre, c'est-à-dire que $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Point 4 : Supposons d'abord que $G = \mathbb{R}$, et que $\mathrm{Ker}(H)$ est de type fini. D'après la proposition 3.8, il est H-neutre. Comme $[\Pi, \Pi]$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(H)$, il est aussi H-neutre. La propriété de transfert conclut.

Supposons maintenant que $G = GA(1,\mathbb{R})$, et que $\mathrm{Ker}(H)$ est de type fini. D'après la proposition 3.3, il est H-neutre ; donc son sous-groupe $\Pi'' = [\Pi', \Pi']$ est lui aussi H-neutre. Dans le cas où $H(G)$ serait contenu dans le groupe $\mathbb{R}$ des translations, on serait dans le cas précédent. Nous pouvons donc supposer que $H(\Pi)$ contient une

homothétie non triviale. Comme H n'est pas dégénéré, sa restriction à $\Pi' = [\Pi,\Pi]$ n'est pas dégénérée. Comme $[\Pi',\Pi']$ est H-neutre, la propriété de transfert implique que Π' est H-neutre. La proposition 3.8 s'applique à Π' et conclut. □

Voici maintenant quelques autres résultats liés au théorème 3.10. Notons $\Pi' = [\Pi,\Pi]$ le groupe dérivé de Π ; et notons $\Pi'' = [\Pi',\Pi']$.

Rappelons qu'un groupe est dit *polycyclique* quand il est obtenu à partir du groupe trivial par extensions cycliques successives. Par exemple, tout groupe nilpotent et de type fini, est polycyclique.

PROPOSITION 3.11. — *Sous les hypothèses du début de ce paragraphe, si* Π *est polycylique, alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Considérons la suite des groupes dérivés, définie par $\Pi_0 = \Pi$ et $\Pi_{N+1} = [\Pi_N, \Pi_N]$. Cette suite atteint le sous-groupe trivial. Cependant le N intéressant n'est pas le premier pour lequel Π_{N+1} est trivial, c'est le premier pour lequel Π_{N+1} est majoré. Donc Π_{N+1} a un point fixe sur $\mathbb{R}$. En fait, comme il est normal dans Π, et que H est non dégénéré, Π_{N+1} a des points fixes arbitrairement petits. Jusqu'ici nous n'avons employé que le fait que Π est résoluble. Comme Π est *polycyclique*, Π_{N+1} est de type fini, donc, d'après la proposition 3.3, il est H-neutre. Comme $[\Pi_N, \Pi_N] = \Pi_{N+1}$, la propriété de transfert indique que Π_N est H-neutre. La proposition 3.8 s'applique à Π_N et conclut. □

Dans les cas $G = \mathbb{R}$ et $G = GA(1,\mathbb{R})$, on peut généraliser ainsi le cas 3 du théorème 3.10 :

PROPOSITION 3.12. — *Soient* Π *un groupe, et* $H : \Pi \to \mathbb{R}$ *un morphisme. Si le centralisateur de* Π' *dans* Π *n'est pas majoré dans la direction* H, *alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Notons Z le centralisateur, supposé non majoré, de Π'. Comme $[\Pi',Z] = 1$, la propriété de transfert indique que Π' est H-neutre. Comme $[\Pi,\Pi] = \Pi'$, une nouvelle application de la propriété de transfert conclut. □

PROPOSITION 3.13. — *Soient* Π *un groupe, et* $H : \Pi \to GA(1,\mathbb{R})$ *un morphisme. On suppose que* $H(\Pi)$ *n'est pas contenu dans le sous-groupe* $\mathbb{R}$ *des translations. Si le centralisateur de* Π'' *dans* Π *n'est pas majoré dans la direction* H, *alors* $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Notons Z le centralisateur, supposé non majoré, de Π''. Comme $[\Pi'',Z] = 1$, la propriété de transfert implique que Π'' est H-neutre. Par hypothèse Π' n'est pas majoré, de sorte qu'une nouvelle application de la propriété de transfert à $[\Pi',\Pi'] = \Pi''$, nous assure que Π' est H-neutre. On conclut en appliquant la proposition 3.8 à Π'.

On peut généraliser comme suit le point 4 du théorème 3.10.

PROPOSITION 3.14. — *Soient Π un groupe, et $H : \Pi \to \mathbb{R}$ un morphisme non trivial.*

S'il existe un sous-groupe de type fini compris entre Π' et le noyau de H, alors $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Ce sous-groupe est H-neutre (proposition 3.3), donc son sous-groupe Π' est H-neutre. La propriété de transfert, appliquée à $[\Pi,\Pi] = \Pi'$, conclut. □

PROPOSITION 3.15. — *Soient Π un groupe, et $H : \Pi \to GA(1,\mathbb{R})$ un morphisme. On suppose que $H(\Pi)$ n'est pas contenu dans le sous-groupe $\mathbb{R}$ des translations.*

S'il existe un sous-groupe de type fini compris entre Π'' et le noyau de H, alors $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — Ce sous-groupe est H-neutre (proposition 3.3), donc Π'' est H-neutre. Par hypothèse Π' n'est pas majoré. La propriété de transfert, appliquée à $[\Pi',\Pi'] = \Pi''$, conclut que Π' est H-neutre. On peut donc lui appliquer la proposition 3.8. □

Enfin, la proposition suivante complète le point 2° du théorème 3.10 :

PROPOSITION 3.16. — On suppose que Π est produit direct de deux sous-groupes Π_1 et Π_2 ; et que Π_1 est majoré. Alors $\mathrm{bf}_H(\Pi) = \mathrm{bf}_{H|\Pi_2}(\Pi_2)$.

Démonstration. — Le sous-groupe Π_2 ne peut être majoré, car H serait dégénérée. La propriété de transfert implique donc que Π_1 est H-neutre. La proposition 3.9 conclut. □

Voici un curieux corollaire de la proposition 3.6, concernant les groupes qui ne sont pas de type fini.

PROPOSITION 3.17. — Soient un groupe Π, et un morphisme non dégénéré $H: \Pi \to G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. On suppose que tout sous-groupe Σ non majoré et de type fini, n'a qu'un bout fin dans la direction $H|_\Sigma$. Alors Π n'a qu'un bout fin dans la direction H.

Remarque. — La réciproque est évidemment fausse : un groupe avec un seul bout peut avoir un sous-groupe de type fini avec une infinité de bouts, comme dans le contre-exemple vu ci-dessus après la proposition 3.4.

Démonstration de la proposition 3.17. — Considérons les sous-groupes de type fini non majorés. Ils engendrent Π. D'après la proposition 3.4, chacun d'eux est H-neutre. Comme le produit de deux d'entre eux est un d'entre eux, la proposition 3.6 indique qu'ils sont tous contenus dans le même sous-groupe H-neutre non majoré maximal. Celui-ci coïncide donc avec Π. □

Notre dernière proposition affirme qu'un groupe n'aura qu'un bout dans la direction d'un morphisme à valeurs dans $GA(1,\mathbb{R})$, pourvu que son groupe dérivé n'ait qu'un bout dans la direction du morphisme associé, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Noter que le groupe dérivé d'un groupe de type fini n'est en général pas de type fini, et ceci justifie donc l'étude des bouts des groupes qui ne sont pas de type fini.

PROPOSITION 3.18. — Soient un groupe Π, et un morphisme non dégénéré $H: \Pi \to GA(1, \mathbb{R})$. On suppose que $H(\Pi)$ n'est pas contenu dans le sous-groupe $\mathbb{R}$ des translations. Donc Π' est muni d'un morphisme $H|_{\Pi'}: \Pi' \to \mathbb{R}$ non dégénéré.

Si $\mathrm{bf}_{H|\Pi'}(\Pi') = 1$, alors $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.4, le sous-groupe Π' est H-neutre. La proposition 3.8 conclut. □

Question. — La réciproque est-elle vraie ?

C) *Lien avec la propriété de Bieri, Neumann et Strebel.*

Considérons un groupe Π *de type fini* muni d'un morphisme $H: \Pi \to \mathbb{R}$ non dégénéré, c'est-à-dire non nul.

La propriété définie et étudiée par Bieri, Neumann et Strebel dans [BNS] est la suivante : on demande qu'il existe des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ du groupe dérivé Π', et des éléments $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de Π d'image par H

positive ou nulle, tels que Π' soit engendré par les γ_i et la conjugaison par les ξ_i. En d'autres termes, Π' est le plus petit des sous-groupes T de Π qui contiennent les γ_i et les conjugués $\xi_i T \xi_i^{-1}$.

THÉORÈME 3.19. — *Soient un groupe* Π *de type fini, et un morphisme* $H : \Pi \to \mathbb{R}$ *non nul. On a* $b_H(\Pi) = 1$ *si, et seulement si,* Π *et* H *vérifient la propriété de Bieri-Neumann-Strebel.*

Nos propriétés $\mathrm{bf}_H(\Pi) = 1$, $\mathrm{bg}_H(\Pi) = 1$ apparaissent donc comme des généralisations de la propriété de Bieri-Neumann-Strebel dans deux directions : le groupe Π n'est pas nécessairement de type fini, et H peut être à valeurs dans $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{SL}(2,\mathbb{R})$.

Dans le cadre des morphismes d'un groupe de type fini à valeurs dans $\mathbb{R}$, signalons deux interprétations de la propriété de Bieri-Neumann-Strebel fortement liées à la nôtre : l'interprétation homologique de J.-C. Sikorav (voir [Si]) et l'interprétation en termes de « *HNN*-valuations » de K. S. Brown (voir [Br]).

Démonstration du théorème. — Le sens « si » résulte immédiatement de nos propositions 3.3 et 3.7. Le sens « seulement si » résulte de notre théorème 2.1 et de la proposition 3.4 de [BNS], point ii), qui dans le cas $N = G'$ peut être paraphrasée ainsi : « Π et H vérifient la propriété de Bieri-Neumann-Strebel si et seulement si Π' est contenu dans une seule composante connexe de $\mathscr{G}_H(0,0)$ ». □

Contre-exemple. — Ne supposons plus Π de type fini. La propriété de Bieri-Neumann-Strebel garde un sens dans ce cadre. Le théorème 3.19 est-il encore vrai ? Non, comme le montre l'exemple suivant (que m'a indiqué G. Levitt) :

Soient Σ un groupe parfait qui n'est pas de type fini, $\Pi = \Sigma \times \mathbb{Z}$, et H la projection de Π sur $\mathbb{Z}$. La propriété de Bieri-Neumann-Strebel n'est pas vérifiée, mais $b_H(\Pi) = 1$ (proposition 3.16).

Problèmes.

1. Dans le cadre des groupes *de type fini* munis de morphismes à valeurs dans $GA(1,\mathbb{R})$, existe-t-il une propriété ressemblant à celle de Bieri-Neumann-Strebel, et qui soit équivalente à n'avoir qu'un bout fin ? qu'un bout grossier ?

2. Dans la définition donnée plus haut de la propriété de Bieri-Neumann-Strebel, on peut remplacer les mots « d'image par H positive

ou nulle » par les mots « d'image par H strictement positive ». En conséquence, le groupe de type fini Π étant fixé, l'ensemble des morphismes (non nuls) qui vérifient la propriété de Bieri-Neumann-Strebel est un *ouvert* dans $\mathrm{Hom}(\Pi, \mathbb{R})$.

Établir si l'ensemble des morphismes (non dégénérés) dans la direction desquels Π n'a qu'un bout fin (resp. grossier) est un ouvert dans $\mathrm{Hom}(\Pi, GA(1,\mathbb{R}))$. Même question dans $\mathrm{Hom}(\Pi, \tilde{S}L(2,\mathbb{R}))$.

4. Sommes amalgamées et *HNN*-extensions.

Dans la théorie classique des bouts des groupes, un groupe libre non abélien a une infinité de bouts. Ceci se généralise à certaines *sommes amalgamées*, et certaines *HNN-extensions*. Dans ce chapitre, nous allons établir des propriétés analogues pour les bouts d'un groupe dans une direction.

Rappelons qu'étant donnés un groupe Π, un morphisme $H : \Pi \to G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, et un sous-groupe Σ de Π :

Σ est majoré faiblement si et seulement si il opère sur $\mathbb{R}$ avec un point fixe, ou en d'autres termes si la restriction de H à Σ dégénère.

Σ est majoré fortement si et seulement si il opère sur $\mathbb{R}$ avec des points fixes arbitrairement grands. Si $G = \mathbb{R}$ ou $GA(1,\mathbb{R})$, ceci signifie que Σ est contenu dans le noyau de H.

A) *Sommes amalgamées.*

Il s'agit d'une construction qui généralise la somme libre des groupes. Rappelons-en la définition.

Étant donnés trois groupes Σ, Θ_1 et Θ_2, et deux morphismes injectifs $i_1 : \Sigma \to \Theta_1$ et $i_2 : \Sigma \to \Theta_2$, la *somme amalgamée* de Θ_1 et Θ_2 *au-dessus* de Σ est un triplet (Π, j_1, j_2), où Π est un groupe et $j_1 : \Theta_1 \to \Pi$ et $j_2 : \Theta_2 \to \Pi$ sont deux morphismes tels que $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$. Pour tout autre triplet (Φ, h_1, h_2) possédant cette propriété, il existe un unique morphisme $h : \Pi \to \Phi$, tel que $h_1 = h \circ j_1$ et $h_2 = h \circ j_2$. On note :

$$\Pi = \Theta_1 *_\Sigma \Theta_2 .$$

Quand l'un au moins des morphismes i_1, i_2 est surjectif, Π s'identifie à Θ_1 ou à Θ_2 : nous dirons que la somme est *triviale*.

Dans la théorie classique des bouts des groupes, on montre que sous l'hypothèse que Σ est fini, toute somme amalgamée $\Theta_1 *_\Sigma \Theta_2$ au-dessus de Σ, non triviale, a une infinité de bouts (sauf un cas d'exception : si $i_1(\Sigma)$ est d'indice 2 dans Θ_1 et $i_2(\Sigma)$ d'indice 2 dans Θ_2, alors $\Theta_1 *_\Sigma \Theta_2$ n'a que deux bouts). Nous allons établir une propriété analogue pour les bouts d'une somme amalgamée dans la direction d'un morphisme.

THÉORÈME 4.1. — *Soit une somme amalgamée non triviale :*

$$\Pi = \Theta_1 *_\Sigma \Theta_2 .$$

Soit un morphisme non dégénéré $H : \Pi \to G = \mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. *On suppose que* $j_1 \circ i_1(\Sigma) = j_2 \circ i_2(\Sigma)$ *est majoré faiblement* (*resp. fortement*). *Alors* Π *a une infinité de bouts fins* (*resp. grossiers*) *dans la direction* H.

En particulier pour $\Sigma = 1$, nous obtenons le théorème cité dans l'introduction : une somme libre de deux groupes non triviaux a une infinité de bouts grossiers (et donc aussi une infinité de bouts fins) dans la direction de tout morphisme non dégénéré à valeurs dans $\mathbb{R}$, $GA(1,\mathbb{R})$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$.

Exemples.

a) L'exemple ii) du paragraphe 2.

b) Le groupe $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$ contient de nombreux sous-groupes libres non abéliens. D'après notre théorème, chacun d'eux a une infinité de bouts (dans la direction de l'inclusion).

Démonstration du théorème. — On peut regarder Σ, Θ_1 et Θ_2 comme trois sous-groupes de Π ; et i_1, i_2, j_1, j_2 comme les inclusions. (Voir par exemple [Se]).

Choisissons une transversale à droite Z_1 pour Σ dans Θ_1 (en d'autres termes, Θ_1 est la réunion disjointe des $\zeta\Sigma$, quand ζ parcourt Z_1). On fera en sorte que l'élément neutre 1 appartienne à Z_1. De même, choisissons une transversale à droite Z_2 pour Σ dans Θ_2, contenant 1. Alors tout élément α de Π s'écrit de façon unique (voir par exemple [Se]) sous la forme :

$$\alpha = \zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_n\sigma$$

où $n \geqslant 0$, où $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont alternativement éléments de $Z_1 - \{1\}$ et $Z_2 - \{1\}$, et où $\sigma \in \Sigma$.

En particulier, Θ_1 et Θ_2 engendrent Π, donc $H(\Theta_1)$ et $H(\Theta_2)$ n'ont pas de point fixe en commun, donc Σ est d'indice infini dans l'un au moins des groupes Θ_1, Θ_2. Nous supposons par exemple que Σ est d'indice infini dans Θ_2. Considérons l'ensemble :

$$A = \{\alpha \in \Pi / n \geqslant 1 \text{ et } \zeta_1 \in Z_1\}.$$

Nous allons démontrer que A est de bord majoré faiblement (resp. fortement), mais n'est pas majoré faiblement (resp. fortement). Ceci conclura, car il en sera de même des ζA, quand $\zeta \in Z_2 - \{1\}$. Comme ceux-ci sont de toute évidence deux à deux disjoints, leurs classes dans $\mathscr{BF}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{BG}_H(\Pi)$) seront deux à deux distinctes, et $\mathscr{BF}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{BG}_H(\Pi)$) sera infini.

Prouvons que A est de bord majoré faiblement (resp. fortement), ou en d'autres termes que $A \,\Delta A\gamma$ est majoré faiblement (resp. fortement) quel que soit $\gamma \in \Pi$. On peut se restreindre à $\gamma \in \Theta_1 \cup \Theta_2$, puisque c'est une partie génératrice de Π. Pour $\gamma \in \Theta_2$, on a $A \,\Delta A\gamma = \varnothing$; et pour $\gamma \in \Theta_1 - \Sigma$, on a $A \,\Delta A\gamma = \Sigma \cup \Sigma\gamma$, qui est majoré faiblement (resp. fortement) puisque Σ l'est par hypothèse.

Montrons enfin que A n'est pas majoré faiblement (et donc pas non plus majoré fortement). Procédons par l'absurde, en supposant qu'il existe un point x tel que $y = \sup(A \cdot \mathrm{x})$ est fini.

On a $\sigma A = A$ quel que soit $\sigma \in \Sigma$, donc y est un point fixe de Σ. Mais comme H est non dégénéré, y ne peut être point fixe à la fois de Θ_1 et Θ_2. Il existe donc deux éléments $\theta_1 \in \Theta_1$ et $\theta_2 \in \Theta_2$, tels que :

$$\theta_1 \cdot y \geqslant y \qquad \text{et} \qquad \theta_2 \cdot y \geqslant y$$

et que l'une au moins de ces inégalités soit stricte. Comme notre somme amalgamée est non triviale, nous pouvons de plus prendre θ_1 et θ_2 hors de Σ. On a donc :

$$\theta_1 = \zeta_1\sigma_1 \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \zeta_2\sigma_2$$

avec $\zeta_1 \in Z_1 - \{1\}$ et $\zeta_2 \in Z_2 - \{1\}$ et σ_1, $\sigma_2 \in \Sigma$. On a donc :

$$\zeta_1 \cdot y \geqslant y \qquad \text{et} \qquad \zeta_2 \cdot y \geqslant y$$

et l'une au moins de ces inégalités est stricte. Donc $\zeta_1\zeta_2 \cdot y > y$. Mais par ailleurs, $\zeta_1\zeta_2 A$ est évidemment contenu dans A. Ceci est contradictoire puisque y est la borne supérieure de $A \cdot \mathrm{x}$. $\square$

B) *HNN-extensions.*

Il s'agit d'une construction apparentée à la somme amalgamée. Rappelons-en la définition. Étant donnés deux groupes Σ, Θ et deux morphismes injectifs $i_1 : \Sigma \to \Theta$ et $i_2 : \Sigma \to \Theta$, la *HNN-extension* de Θ *au-dessus* de Σ est un triplet (Π, j, π), où Π est un groupe, π est un élément de Π et $j : \Theta \to \Pi$ est un morphisme, avec la propriété suivante : π conjugue $j \circ i_1$ et $j \circ i_2$, c'est-à-dire : quel que soit $\sigma \in \Sigma$, on a :

$$j(i_2(\sigma)) = \pi j(i_1(\sigma))\pi^{-1}.$$

Pour tout autre triplet (Φ, h, ϕ) possédant cette propriété, il existe un unique morphisme $k : \Pi \to \Phi$, tel que $\phi = k(\pi)$ et $h = k \circ j$. On note :

$$\Pi = \Theta *_\Sigma.$$

On dit l'extension *descendante* quand i_1 est surjectif, *ascendante* quand i_2 est surjectif, *triviale* quand i_1 et i_2 sont tous deux surjectifs.

En théorie classique des bouts, on montre que sous l'hypothèse que Σ est fini, toute *HNN*-extension non triviale au-dessus de Σ a une infinité de bouts. Nous allons établir une propriété analogue pour les bouts des *HNN*-extensions dans la direction d'un morphisme.

THÉORÈME 4.2. — *Soit une HNN-extension non triviale :*

$$\Pi = \Theta *_\Sigma.$$

Soit un morphisme non dégénéré $H : \Pi \to G = \mathbb{R}$, $GA(1, \mathbb{R})$ *ou* $\tilde{S}L(2, \mathbb{R})$. *On suppose que* $j \circ i_1(\Sigma)$ (*ou, ce qui revient au même,* $j \circ i_2(\Sigma)$) *est majoré faiblement* (*resp. fortement*). *Alors* Π *a une infinité de bouts fins* (*resp. grossiers*) *dans la direction* H, *sauf peut-être dans les cas exceptionnels suivants :*

1. *L'extension est descendante ; et* $\pi \cdot z < z$ *quel que soit* z *réel.*

2. *L'extension est ascendante, et* $\pi \cdot z > z$ *quel que soit* z *réel.*

Exemple. — L'exemple iii) du paragraphe 2.

Remarque. — Dans ces deux cas exceptionnels (qui se déduisent l'un de l'autre par échange de i_1 et i_2), on ne peut pas préciser *a priori* le nombre de bouts du groupe Π dans la direction H.

Par exemple, si Θ est de type fini, alors on montre aisément, en employant les propositions 3.3, 3.5 et 3.7, qu'il n'y a qu'un bout fin et qu'un bout grossier.

Au contraire, considérons à nouveau l'exemple 1 du paragraphe 1, où Π est le produit semi-direct de $\mathbb{Z}^2$ par le groupe additif de son anneau : $\mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Définissons H par $H(P, H^p Y^q) = p$. Le groupe Π s'identifie à la *HNN*-extension de Θ par Σ, où :

$$\Theta = \{P \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]/v_H(P) \geqslant 0\}$$
$$\Sigma = \{P \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]/v_H(P) \geqslant 1\}$$
$$i_1(P) = P, \qquad i_2(P) = X^{-1}P.$$

L'élément $(0, X)$ s'identifie à π. On est donc dans le deuxième cas exceptionnel. Nous avons vu au paragraphe 1 que Π a une infinité de bouts fins (=grossiers) dans la direction H.

Démonstration du théorème 4.2. — On peut regarder $i_1(\Sigma)$, $i_2(\Sigma)$ et Θ comme trois sous-groupes de Π ; et j comme l'inclusion de Θ dans Π (voir par exemple [C]).

Choisissons une transversale à droite Z_1 pour $i_1(\Sigma)$ dans Θ, contenant l'élément neutre 1, et une transversale à droite Z_2 pour $i_2(\Sigma)$ dans Θ, contenant 1. Tout élément α de Π s'écrit alors de façon unique (voir par exemple [C]) :

$$\alpha = \zeta_1 \pi^{n1} \zeta_2 \pi^{n2} \ldots \zeta_k \pi^{nk} \theta$$

où $k \geqslant 0$ et $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in Z_1 \cup Z_2$ et $n_1, \ldots, n_k \in \{+1, -1\}$ et $\theta \in \Theta$, avec les règles suivantes :

i) si $n_i = +1$ alors $\zeta_i \in Z_2$

ii) si $n_i = -1$ alors $\zeta_i \in Z_1$

iii) si n_i et n_{i+1} sont opposés alors $\zeta_i \neq 1$.

Par hypothèse, l'extension n'est pas à la fois ascendante et descendante ; supposons par exemple qu'elle n'est pas ascendante, i.e. que Z_2 n'est pas réduit à $\{1\}$. Considérons l'ensemble :

$$A = \{\alpha \in \Pi / k \geqslant 1 \text{ et } n_1 = +1 \text{ et } \zeta_1 = 1\}.$$

Comme dans la démonstration précédente, nous allons établir que A est de bord majoré faiblement (resp. fortement) mais que (si l'on n'est pas dans le premier cas exceptionnel) A n'est pas majoré faiblement (resp. fortement). Or A possède une infinité de translatés à gauche deux à deux disjoints : les $\pi^n \zeta A$, où n décrit $\mathbb{Z}$ et où ζ est un élément fixe de $Z_2 - \{1\}$. Donc les classes de ces translatés sont des éléments deux à deux distincts de $\mathscr{BF}_H(\Pi)$ (resp. $\mathscr{BG}_H(\Pi)$), et Π a une infinité de bouts fins (resp. grossiers) dans la direction H.

Montrons que A est de bord majoré faiblement (resp. fortement), i.e. que $A \Delta A\gamma$ est majoré faiblement (resp. fortement), quel que soit $\gamma \in \Pi$. On peut se restreindre à $\gamma \in \Theta \cup \{\pi\}$, puisque c'est une partie génératrice de Π. Or $A \Delta A\theta$ est vide, quel que soit $\theta \in \Theta$; et on voit aisément que $A \Delta A\pi = i_2(\Sigma)\pi$. En conséquence $A \Delta A\pi$ est majoré faiblement (resp. fortement) puisque $i_2(\Sigma)$ l'est.

Montrons maintenant que si l'on n'est pas dans le premier cas exceptionnel, alors A n'est pas majoré faiblement (donc à plus forte raison n'est pas majoré fortement). Procédons par l'absurde : supposons qu'il existe un réel x tel que $y = \sup(A \cdot x)$ est fini, et montrons que l'extension est descendante et que $\pi \cdot z < z$ pour tout z.

Quel que soit $\theta \in \Theta$, considérons $\gamma = \pi\theta$: on a évidemment $\gamma A \subset A$, et il en résulte que $\gamma \cdot y \leqslant y$. En prenant $\theta = 1$, on trouve que $y \leqslant \pi^{-1} \cdot y$. On voit aussi que Θ a un point fixe au moins dans l'intervalle $[y, \pi^{-1} \cdot y]$. Soit t un tel point fixe.

Montrons d'abord que l'extension est descendante, i.e. que Z_1 est réduit à $\{1\}$. En effet, dans le cas contraire il existerait un $\zeta \in Z_1 - \{1\}$ tel que $\zeta \cdot (\pi^{-2} \cdot y) \geqslant \pi^{-2} \cdot y$. Prenons aussi un $\zeta' \in Z_2 - \{1\}$ tel que $\zeta' \cdot y \geqslant y$. Considérons $\gamma = \pi\zeta\pi^{-2}\zeta'$: on a évidemment $\gamma A \subset A$, donc $\gamma \cdot y \leqslant y$. Réunissons toutes nos inégalités :

$$y \geqslant \pi\zeta\pi^{-2}\zeta' \cdot y \geqslant \pi\zeta\pi^{-2} \cdot y \geqslant \pi\pi^{-2} \cdot y = \pi^{-1} \cdot y \geqslant y.$$

D'où $\pi^{-1} \cdot y = y$. Donc y serait un point fixe de π, et donc $y = t$ serait un point fixe commun à Θ et π, et H serait dégénéré, contrairement à l'hypothèse.

Montrons maintenant que $\pi \cdot z < z$ pour tout z. Comme l'extension est descendante, on a les inclusions de sous-groupes :

$$\Theta \subset \pi^{-1}\Theta\pi \subset \pi^{-2}\Theta\pi^2 \subset \ldots$$

donc les points fixes sur $\mathbb{R}$ vérifient les inclusions inverses :

$$\mathrm{Fix}\ (\Theta) \supset \mathrm{Fix}\ (\pi^{-1}\Theta\pi) \supset \mathrm{Fix}\ (\pi^{-2}\Theta\pi^2) \supset \ldots$$

en d'autres termes :

$$\mathrm{Fix}\ (\Theta) \supset \pi^{-1} \cdot \mathrm{Fix}\ (\Theta) \supset \pi^{-2} \cdot \mathrm{Fix}\ (\Theta) \supset \ldots$$

En particulier, la suite $(\pi^{-n} \cdot t)$ est contenue dans $\mathrm{Fix}\ (\Theta)$. Comme $y \leqslant t \leqslant \pi^{-1} \cdot y$, elle est croissante. Elle ne saurait converger, car sa limite serait un point fixe commun à π et à Θ. Elle tend donc vers $+\infty$.

Retenons que Θ possède des points fixes arbitrairement grands, et que $\pi \cdot z < z$ dans un voisinage de $+\infty$. Nous pouvons préciser la situation cas par cas :

i) Quand $G = \mathbb{R}$ ou $GA(1,\mathbb{R})$: le sous-groupe Θ est contenu dans le noyau de H, et $H(\pi)$ est une translation strictement négative.

ii) Quand $G = \tilde{S}L(2,\mathbb{R})$: le sous-groupe Θ a pour points fixes soit tous les réels, soit une classe de réels modulo 1, soit deux classes de réels modulo 1. Le nombre de translation de $H(\pi)$ est strictement négatif. □

C) *Vers un théorème de structure pour les groupes à une infinité de bouts dans la direction d'un morphisme ?*

Rappelons le théorème de structure pour les groupes à une infinité de bouts, de J. Stallings : si un groupe de type fini a une infinité de bouts (au sens classique), alors il est isomorphe à une somme amalgamée non triviale de deux groupes au-dessus d'un groupe *fini*, ou à une *HNN*-extension non triviale d'un groupe au-dessus d'un groupe *fini*.

Problème. — Peut-on toujours représenter un groupe de type fini, qui a une infinité de bouts fins (resp. grossiers) dans la direction d'un morphisme, comme une somme amalgamée ou une *HNN*-extension, non triviale, au-dessus d'un sous-groupe majoré faiblement (resp. fortement) ?

(Dans le cas additif, on peut consulter [B].)

La réponse est positive quand l'action sur $\mathbb{R}$ a une orbite discrète, donc par exemple quand le morphisme est à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

THÉORÈME 4.3. — *Soient un groupe Π de type fini et un morphisme $H : \Pi \to G = \mathbb{R}$ ou $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$. On suppose que $H(\Pi)$ a une orbite discrète et que Π a une infinité de bouts fins (=grossiers) dans la direction H. Alors Π est une HNN-extension non triviale au-dessus d'un sous-groupe majoré.*

Démonstration. — Soient x_0 un réel quelconque et y_0 un réel d'orbite discrète. Comme dans le paragraphe 2, choisissons pour Π une partie génératrice finie, stable par inversion, et considérons le graphe de Cayley $\mathscr{G}$ de Π, à droite, relativement à cette partie.

Soit $\mathscr{A}$ le graphe défini comme suit :

i) Ses sommets sont toutes les composantes connexes de tous les $\mathscr{G}_H(x_0, y)$, quand y parcourt l'orbite de y_0.

ii) Les sommets A, composante connexe de $\mathscr{G}_H(x_0, y_1)$, et B, composante connexe de $\mathscr{G}_H(x_0, y_2)$, sont liés par une arête dans $\mathscr{A}$ si et seulement si A contient B et y_2 est le successeur de y_1 dans l'orbite de y_0.

Le graphe $\mathscr{A}$ est un arbre.

Par ailleurs, rappelons que Π opère sur $\mathscr{G}$ par translations *à gauche*, qui sont des automorphismes du graphe $\mathscr{G}$. Cette opération est transitive sur les sommets. De plus :

$$\gamma \cdot \mathscr{G}_H(x_0, y) = \mathscr{G}_H(x_0, \gamma \cdot y).$$

On en déduit une action de Π sur $\mathscr{A}$ à gauche, transitive sur les sommets et sur les arêtes. D'après le théorème de H. Bass et J. P. Serre (voir [Se]), le groupe Π est une *HNN*-extension du sous-groupe stabilisateur d'un sommet au-dessus du sous-groupe stabilisateur d'une arête qui en émane. Cette extension ne peut être triviale que si $\mathscr{A}$ est linéaire, ce qui est interdit par l'hypothèse $b(\Pi) = \infty$ et le théorème 2.1. □

BIBLIOGRAPHIE

[BNS] R. Bieri, W. D. Neumann, R. Strebel, A geometric invariant of discrete groups, Invent. Math., 90 (1987), 451-477.

[Br] K. S. Brown, Trees, valuations, and the Bieri-Neumann-Strebel invariant, Invent. Math., 90 (1987), 479-504.

[C] D. E. Cohen, Groups of cohomological dimension 1, L.N.M. 245, Springer (1972).

[M] G. Meigniez, Bouts des groupes opérant sur la droite, II : application à la topologie des feuilletages. Preprint.

[Se] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque, 46.

[Si] J.-C. Sikorav, Homologie de Novikov attachée à une classe de cohomologie réelle de degré 1, In Thèse, Orsay (1987).

Manuscrit reçu le 30 novembre 1989.

Gaël Meigniez,
École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07.