ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL-ANDRÉ MEYER

Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 125-230
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12, (1962), 125-230.

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES ET ADDITIVES DE MARKOV

par Paul-André MEYER (PARIS).

INTRODUCTION

Le travail qui suit comporte deux parties presque indépendantes. La première, qui traite des fonctionnelles multiplicatives de Markov, est rédigée de façon à constituer un exposé à peu près autonome. Nous pensons cependant que le lecteur en verra davantage l'intérêt s'il parcourt les paragraphes du mémoire fondamental de Hunt « Markoff processes and potentials » qui sont consacrés aux temps terminaux et à la théorie relative du potentiel. La seconde partie, qui traite des fonctionnelles additives, fait si souvent appel à la théorie de Hunt qu'il nous a semblé impossible de la rédiger sans nous référer constamment à celle-ci. Nous avons essayé de donner des références aussi précises que possible, afin d'éviter au lecteur de se perdre dans les 170 pages compactes du mémoire de Hunt.

Notre première partie était esquissée lorsque nous avons eu connaissance des résultats de Dynkin et de son école sur les fonctionnelles multiplicatives. La lecture du livre de Dynkin « fondements de la théorie des processus de Markov » nous a été précieuse pour la mise en forme des résultats que nous avions obtenus, et nous a guidés pour la seconde partie de notre travail. En ce qui concerne les fonctionnelles multiplicatives, nous adoptons un point de vue un peu différent de celui de Dynkin; l'élément intéressant étant, à notre avis, plutôt le semi-groupe de Markov que le processus de Markov.

Cela conduit à une présentation de la théorie que nous pensons être plus simple que celle de Dynkin [1].

Il n'est sans doute pas inutile que nous rappelions ici quelle est l'origine de la théorie « probabiliste » du potentiel, dont nous utilisons ici les méthodes. La première utilisation de la parenté des théories du mouvement brownien et de l'équation de Laplace remonte probablement à Kakutani (1944); mais c'est surtout à Doob (1954) que l'on doit d'avoir reconnu que cette parenté n'était pas une simple curiosité, et que son exploitation systématique permettait d'obtenir des résultats nouveaux sur les fonctions harmoniques et surharmoniques. Il est plus surprenant, et très intéressant, que ces méthodes se soient étendues d'elles-mêmes à la théorie de l'équation de la chaleur (Doob, 1955), qui, lorsqu'on l'aborde par des méthodes purement analytiques, se présente sous un aspect assez différent de celle de l'équation de Laplace. A la suite de ces résultats de Doob, Hunt (1957) a entrepris, et réalisé de manière admirable, la tâche énorme de reconstruire l'ensemble de la théorie du potentiel à partir de celle des processus de Markov. Hunt est parvenu à développer, non seulement une axiomatique « forte » [« hypothèse (F) »], dans laquelle entrent par exemple les potentiels newtonien, de la chaleur, de M. Riesz, mais aussi une axiomatique « faible [« hypothèse (A) »], qui s'applique à la plupart des noyaux continus qui satisfont au principe complet du maximum. Dans cette dernière théorie, on ignore ce que signifie l'expression « la fonction surharmonique f est le potentiel de la mesure μ ». Le principal objet de notre travail était de montrer que les fonctionnelles additives de Markov peuvent jouer, dans cette théorie, le rôle que jouent les mesures dans la théorie classique.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici toute notre reconnaissance envers MM. Henri Cartan, J. Deny, J. L. Doob, et Michel Loève, sans l'aide et l'enseignement de qui nous n'aurions pu parvenir à aucun des résultats que nous présentons ici. Nous remercions vivement aussi Messieurs R. Fortet et Laurent Schwartz, qui ont accepté de faire partie du jury auquel cette thèse a été soumise.

[1] Nous avons appris, par une lettre de M. Dynkin, que deux élèves de celui-ci, A. D. Ventzel et M. G. Shur, ont obtenus des résultats très proches des nôtres, qui ont été présentés au Congrès de Calcul des Probabilités de Vilna, en Septembre 1960.

PREMIÈRE PARTIE

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES DE MARKOV

1. — Terminologie et notations.

1. Soit E un espace localement compact : nous noterons $\mathcal{B}(E)$ (resp. $\mathcal{B}'(E)$) la tribu des ensembles boréliens de E (resp. des ensembles universellement mesurables de E); $\mathcal{G}(E)$ (resp. $\mathcal{G}'(E)$) les espaces vectoriels des fonctions réelles, bornées, $\mathcal{B}(E)$-mesurables (resp. $\mathcal{B}'(E)$-mesurables). $\mathcal{C}_0(E)$ sera l'espace des fonctions réelles continues sur E, qui tendent vers 0 à l'infini; tous ces espaces sont des espaces de Banach, lorsqu'on les munit de la norme de la convergence uniforme.

L'espace des états des processus sera un espace topologique X, à base dénombrable, localement compact, pour lequel nous écrirons simplement $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$..., au lieu de $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}'(X)$...

L'objet de notre étude est un semi-groupe de Markov $P = \{P_t\}_{t \in R_+}$ sur $\mathcal{C}_0$, fortement continu sur $\mathcal{C}_0$ [1]. Si $f \in \mathcal{C}_0$, la valeur au point $x \in X$ de la fonction $P_t f$ est notée $P_t(x, f)$, ou $P_t f^x$; pour chaque x, c'est une mesure de Radon que nous désignerons par la notation (un peu abusive) $P_t(x, dy)$. Cela permet de prolonger le semi-groupe aux espaces $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ de manière évidente [2]. Nous supposerons pour l'instant (jusqu'au n° 5 de ce paragraphe) que toutes ces mesures sont de masse totale 1. Si μ est une mesure, f une fonction, soit $\langle \mu, f \rangle$ la valeur de μ sur f, et μP_t la mesure définie par la relation :

(1) Autrement dit : les P_t sont des opérateurs positifs sur $\mathcal{C}_0$, de norme $\leqslant 1$; l'opérateur P_0 est l'identité; $\forall t, t'$ on a $P_{t+t'} = P_t P_{t'}$; enfin, si $f \in \mathcal{C}_0$, $P_t f \to f$ uniformément sur X lorsque $t \to 0$.

(2) Si $f \in \mathcal{G}'$, $P_t f$ est la fonction $x \to \int_X P_t(x, dy) f(y)$: il est facile de voir que cette fonction appartient à $\mathcal{G}'$ (à $\mathcal{G}$ si $f \in \mathcal{G}$).

$\forall f$, $\langle \mu P_t, f \rangle = \langle \mu, P_t f \rangle$; μP_t est la transformée de μ par l'opérateur transposé de P_t, et la mesure que nous avons notée $P_t(x, dy)$ n'est autre que la mesure $\varepsilon_x P_t$.

2. On peut associer à un tel semi-groupe plusieurs notions qui constituent le germe d'une théorie du potentiel. Soit λ un nombre positif; on appelle λ-potentiel du semi-groupe $\{P_t\}$ (potentiel tout court si $\lambda = 0$) le noyau positif :

$$U^\lambda(x, dy) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t(x, dy)\, dt.$$

L'intégrale a un sens, car l'application $t \to P_t(x, dy)$ est vaguement continue pour chaque x. Si $\lambda > 0$, c'est un opérateur borné sur $\mathcal{G}$ ou sur $\mathcal{G}'$, de norme $1/\lambda$. Si $\lambda = 0$, nous ne le ferons opérer que sur des fonctions positives; il peut être alors identiquement infini sur $\mathcal{C}_0$ (dans le cas du mouvement brownien plan par exemple). On dit qu'une fonction f définie sur X est λ-excessive si elle est positive, mesurable pour toute mesure de Radon, telle que $e^{-\lambda t} P_t f \leqslant f$ pour tout t, et que $\lim_{t \to 0} P_t f = f$. Une fonction qui ne vérifie que les trois premières conditions est dite λ-surmédiane; si f est une telle fonction, la fonction $g = \lim_{t \to 0} P_t f$ est une fonction λ-excessive, majorée par f, que l'on appelle la régularisée de f. Si $\lambda = 0$, on dit simplement : excessive, surmédiane.

Une fonction positive, un ensemble, sont dits « de potentiel nul » si, pour un $\lambda > 0$, la valeur de l'opérateur U^λ sur cette fonction ou cet ensemble est 0. Les expressions « sauf sur un ensemble de potentiel nul » et « presque partout » seront considérées comme synonymes.

Le λ-potentiel d'une fonction positive est une fonction λ-excessive. La limite d'une suite croissante de fonctions λ-excessives (λ-surmédianes) est λ-excessive (λ-surmédiane). Nous emploierons souvent le théorème suivant lequel, si $\lambda > 0$, et si f est une fonction λ-excessive finie, il existe une suite de fonctions bornées dont les λ-potentiels tendent en croissant vers f (1). Signalons aussi que si f et g sont deux fonctions λ-excessives, inf (f, g) l'est aussi (2).

(1) Hunt, [1], p. 66.
(2) Hunt, [1], p. 68.

3. On peut associer au semi-groupe $\{P_t\}$, de manière naturelle, une fonction de transition de Markov sur $\mathcal{B}'$, définie par la relation $P_t(x, A) = \int_A P_t(x, dy)$ (1). La connaissance de cette fonction de transition permet inversement de reconstruire le semi-groupe $\{P_t\}$.

Soit Ω^* la partie de l'espace produit X^{R_+} formée par les trajectoires (c'est-à-dire les applications de R_+ dans X) qui sont continues à droite et pourvues d'une limite à gauche en tout point. Soient $\{X_t\}_{t\in R_+}$ les restrictions à Ω^* des applications coordonnées, F_s° la plus petite tribu sur Ω^* pour laquelle les applications $X_t(t \leqslant s)$ sont mesurables, et F° la tribu engendrée par la réunion des F_s°, $s \in R_+$. Il est classique (voir par exemple Blumenthal [I], Loève [I], Dynkin [I]) que, pour toute loi de probabilité ν sur X, on peut construire une mesure P^ν sur (Ω^*, F°) telle que le processus $\{X_t\}$, sur l'espace de probabilité ainsi obtenu, soit markovien relativement à la famille des tribus F_t°, admette $P_t(x, A)$ comme fonction de transition, et ν comme répartition initiale (2). Nous noterons P^x la mesure P^{ε_x}. Nous emploierons de même les symboles E^ν, E^x pour désigner des espérances mathématiques.

Construisons maintenant les tribus définitives : soit F^* (resp. F_s^*) la famille des parties de Ω^* qui, quelle que soit la mesure initiale ν, diffèrent d'un ensemble de F° (resp. F_s°) par un ensemble négligeable pour la mesure P^ν. Le processus $\{X_t\}$ est markovien par rapport aux tribus F_t^*. De plus, si l'on pose $F_{s_+}^* = \bigcap_{t>0} F_{s+t}^*$, on a $F_{s_+}^* = F_s^*$ (3).

(1) Rappelons la définition d'une fonction de transition de Markov : c'est une application $(t, x, A) \to P_t(x, A)$ de $R_+ \times X \times \mathcal{B}'$ dans R_+, telle que : *a*) pour chaque (t, x) $A \to P_t(x, A)$ soit une loi de probabilité sur $\mathcal{B}'$. *b*) Pour chaque (t, A) la fonction $x \to P_t(x, A)$ soit $\mathcal{B}'$-mesurable. *c*) Pour chaque (x, A, t, t') on ait la relation de Chapman-Kolmogorov : $P_{t+t'}(x, A) = \int_X P_t(x, dy) P_{t'}(y, A)$.

(2) Rappelons la signification de cette phrase : elle équivaut aux deux relations : *a*) $\forall A \in \mathcal{B}'$, $P^\nu[X_0 \in A] = \nu(A)$, *b*) $\forall s, t \in R_+$; $\forall A \in \mathcal{B}$ on a

$$P^\nu[X_{s+t} \in A \mid F_s^\circ] = P_t(X_s(\omega), A) \qquad P^\nu - p.s.$$

Comme le premier membre est indépendant de ν, nous ne mentionnerons plus la mesure initiale dans une telle formule.

(3) Voir le Séminaire [II], pp. 5-05.

Il est classique aussi que, si A est un ensemble F^*-mesurable, la fonction $x \to P^x(A)$ est $\mathscr{B}'$-mesurable sur X, et que l'on a pour toute loi initiale ν la relation

$$P^\nu(A) = \int_X P^x(A)\, d\nu(x)\ (^1).$$

Cette formule nous servira comme définition de $P^\nu(A)$, dans le cas où ν est une mesure positive de masse quelconque, finie ou non.

Nous reprendrons une notation de Dynkin, et désignerons par la notation θ_t, pour $t \geqslant 0$, l'« opérateur de translation » sur Ω^*, qui associe à la trajectoire ω la trajectoire $\theta_t\omega$ définie par la relation : $\forall s$, $X_s(\theta_t\omega) = X_{t+s}(\omega)$. Il est facile de voir que l'application θ_t est mesurable. Nous utiliserons souvent la relation suivante : soit $\varphi(\omega)$ une fonction positive bornée. F^*-mesurable sur Ω^*, et $\Phi(x)$ la fonction $x \to E^x[\varphi]$. Alors :

$$(1)\qquad E[\varphi \circ \theta_t | F_t^*] = \Phi \circ X_t(\omega) \quad \text{p.s. (pour toute mesure initiale)}$$

et en particulier, en prenant des espérances mathématiques :

$$(2)\qquad P_t\Phi^x = E^x[\varphi \circ \theta_t]\ (^2).$$

4. L'espace Ω^* est d'un emploi commode, mais il nous arrivera d'avoir besoin d'espaces « plus riches ». Aussi appellerons-nous « bon espace » un système formé :

a) D'un ensemble Ω muni d'une tribu F, et d'une application π de Ω sur Ω^*, mesurable lorsque Ω^* est muni de F°, Ω de F.

b) D'une famille de sous-tribus F_s de F, qui croissent avec s, telles que $\bigcap_{t>0} F_{s+t} = F_s$, et que $X_s \circ \pi$ soit F_s-mesurable pour tout s.

c) D'une application qui associe à toute mesure de Radon positive ν sur X une mesure P^ν sur (Ω, F), de telle sorte que :

1) Pour toute partie A de F, la fonction $x \to P^x(A)$ soit $\mathscr{B}'$-mesurable sur X, et $P^\nu(A)$ l'intégrale de cette fonction par rapport à ν.

2) (Ω, F) étant muni de la mesure P^ν, la fonction aléatoire $\{X_t \circ \pi\}$ soit de Markov par rapport aux tribus F_t, admette

(1) Voir Hunt [I], pp.51-52.
(2) Dynkin [I], p. 46.

$P_t(x, A)$ comme fonction de transition, et ν comme mesure initiale. (En un sens un peu élargi si ν n'est pas de masse 1.)

Bien entendu, Ω^* lui même est un « bon espace ». Nous ferons de nombreux abus de langage, dont le premier sera de parler des « applications X_t sur Ω » au lieu de les noter $X_t \circ \pi$. De même, nous suprimerons souvent les astérisques dans les chapitres où cela n'introduira pas d'ambiguïté.

5. Soit maintenant un point $\partial \notin X$. Nous l'identifierons au point à l'infini de X si X n'est pas compact, et si X est compact il sera considéré comme isolé. Supposons que le semi-groupe $\{P_t\}$ satisfasse aux conditions envisagées au n° 1, mais que l'on ait $P_t 1 \leqslant 1$, au lieu de $P_t 1 = 1$ (cas « sous-markovien »). Soit $\hat{X}$ l'espace $X \cup \{\partial\}$, et soit f une fonction continue sur l'espace compact $\hat{X}$: la fonction $f - f(\partial)$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$, à une identification évidente près. Posons

$$\hat{P}_t(\partial, f) = f(\partial)$$

et

$$\hat{P}_t(x, f) = P_t(x, f - f(\partial)) + f(\partial) \quad (x \in X)$$

Il est très facile de voir que les $\hat{P}_t$ constituent un semi-groupe fortement continu sur l'espace $\mathcal{C}(\hat{X})$, qui opère comme $\{P_t\}$ sur les fonctions nulles au point ∂, et qui est markovien : toutes les constructions qui viennent d'être décrites peuvent donc être faites sur $\{\hat{P}_t\}$. Il nous sera seulement nécessaire de modifier un peu la définition de l'ensemble Ω^*, les trajectoires ω étant maintenant supposées pourvues de limites à droite et à gauche, et telles que, si $S(\omega)$ désigne la borne inférieure des instants t pour lesquels la valeur $X_t(\omega)$ ou la limite à gauche $X_{t\_}(\omega)$ est égale à ∂, l'on ait pour tout $s \geqslant S(\omega)$ l'égalité $X_s(\omega) = \partial$. La variable aléatoire $S(\omega)$ est alors appelée la *durée de vie* de ω (1).

Nous allons faire maintenant une convention fondamentale, qui nous permettra de ne pas distinguer P_t et $\hat{P}_t$, X et $\hat{X}$, le cas sous-markovien et le cas markovien, dans la plupart des démonstrations : *toute fonction écrite sous la forme habituelle* — $f(x)$ par exemple — *sera identifiée à une fonction sur* $\hat{X}$ *nulle*

(1) La possibilité d'un tel choix résulte de Hunt [I], bas de la page 54. Voir aussi le Séminaire [II], pp. 5-15.

au point ∂. Ainsi, la notation 1 en particulier désignera la fonction égale à 1 sur X, à 0 en ∂ (Une fonction égale à $a \neq 0$ au point ∂ sera écrite sous la forme $f(x) + a\chi_\partial$). De même, toutes les mesures initiales seront supposées concentrées sur X.

Il résulte immédiatement de la continuité à droite des trajectoires que, si Ω est un « bon espace », l'application $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable, $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ étant muni de la tribu produit naturelle. Si $H(\omega)$ est une fonction mesurable positive sur Ω, l'application $\omega \to X_{H(\omega)}(\omega)$ est donc une variable aléatoire, que nous noterons $X_H(\omega)$ ou X_H. *Si* $H(\omega) = \infty$, *nous poserons* $X_H(\omega) = \partial$.

6. On appelle *temps d'arrêt* relatif aux tribus F_t, sur un « bon espace » Ω, une variable aléatoire positive $T(\omega)$, finie ou non, telle que pour tout nombre positif a l'événement $\{T < a\}$ appartienne à F_a. Un événement A de F est dit *antérieur au temps* T si, pour tout a positif, l'événement $A \cap \{T < a\}$ appartient à F_a. Les événements antérieurs à T forment une tribu F_T. Si T est un temps d'arrêt, nous noterons P_T (resp. P_T^λ) l'opérateur sur $\mathcal{G}'$ qui transforme une fonction f en la fonction $x \to E^x[f \circ X_T]$ (resp. $E^x[e^{-\lambda T} f \circ X_T]$).

Le semi-groupe $\{P_t\}$ vérifie deux théorèmes fondamentaux, auxquels nous nous référerons dans la suite sous les noms de :

Propriété de Markov forte [1] : Soit T un temps d'arrêt, H une variable aléatoire $\geqslant T$, mesurable sur la tribu F_T des événements antérieurs à T : on a, p.s. pour toute mesure initiale ν, f désignant une fonction de $\mathcal{G}'$:

$$E^\nu[f \circ X_H | F_T] = P_{H(\omega)-T(\omega)}(X_T(\omega), f).$$

(Le second membre ayant la valeur 0 par convention si $H(\omega) = \infty$).

Dans la plupart des cas, $H(\omega)$ sera de la forme $T + t$, où t est constant. Signalons que les relations (1) et (2) de la fin du n° 3 sont encore valables lorsque le temps constant t est remplacé par un temps d'arrêt quelconque T, la translation θ_T étant définie de la manière naturelle.

Théorème de Blumenthal [2]. — *Soit une suite* T_n *de temps d'arrêt, presque sûrement croissante, et* T *sa limite. On a*

[1] Blumenthal [I], Dynkin [I], chap. v. La définition ci-dessus est celle de Dynkin.
[2] Blumenthal [I], Dynkin [I], p. 183.

p.s. $\lim_n X_{T_n}(\omega) = X_T(\omega)$ *sur l'ensemble des* ω *pour lesquels* $T(\omega) < \infty$.

Parmi les applications de ces théorèmes, nous ne retiendrons ici qu'un résultat : appelons ensemble presque borélien (resp. presque analytique) de X, une partie de A telle qu'il existe, pour toute mesure ν, deux ensembles boréliens A′ et A″ (resp. analytiques) tels que $A' \subset A \subset A''$, et que l'ensemble :

$$\{\omega : \exists t \geqslant 0 \quad \text{tel que} \quad X_t(\omega) \in A'' - A'\}$$

soit P^ν-négligeable. Un ensemble presque analytique est en particulier universellement mesurable. Hunt a montré (1) que si A est un ensemble presque analytique, la fonction $T_A(\omega)$ égale à la borne inférieure de l'ensemble des $t > 0$ pour lesquels $X_t(\omega) \in A$, est un temps d'arrêt. Nous l'appellerons le *temps d'entrée* dans A, et nous désignerons en général les opérateurs $P^\lambda_{T_A}$ par la notation plus simple P^λ_A. A étant toujours supposé presque analytique, un point x est dit régulier pour A si $P^x[T_A = 0] = 1$ (2). Si x est irrégulier pour A,

$$P^x[T_A = 0] = 0.$$

Les ensembles presque-boréliens B qui contiennent un point x, et sont tels que x ne soit pas régulier pour $X - B$, constituent une base du filtre des voisinages de x pour une topologie que l'on appelle la *topologie fine* (3) sur X.

Hunt a montré (4) que toute fonction λ-excessive f est mesurable sur la tribu des ensembles presque-boréliens, et que l'application $t \to f \circ X_t(\omega)$ est, p.s. pour toute mesure initiale, continue à droite et pourvue de limite à gauche en tout point t. On en déduit en particulier que f est finement continue.

Il est très rare que les raisonnements fassent intervenir directement l'hypothèse initiale d'invariance de $\mathcal{C}_0(X)$, et de forte continuité. Aussi dirons-nous qu'un semi-groupe $\{P_t\}$ satisfait à la condition (A) de Hunt (5) si ce semi-groupe laisse $\mathcal{G}$

(1) Hunt [1], pp. 53-57.

(2) On emploie couramment l'expression « A est effilé en x », synonyme de « x est irrégulier pour A ».

(3) Voir Dynkin [II].

(4) Voir Hunt [I], p. 67.

(5) Voir Hunt [1], p. 50; nous permettons ici aux semi-groupes d'être sous-markoviens.

invariant [1], et si l'on peut réaliser pour toute mesure de Radon ν un processus $\{X_t\}$ dont l'ensemble des trajectoires est Ω^*, la fonction de transition $P_t(x, A)$, la mesure initiale ν, satisfaisant à la propriété de Markov forte et au théorème de Blumenthal. *La notation* $\{P_t\}$ *désignera désormais un tel semi-groupe, et tous les théorèmes qui suivent sont démontrés, sauf mention spéciale, sous ces hypothèses.*

2. — Fonctionnelles multiplicatives et semi-groupes.

C'est dans le livre de Blanc-Lapierre et Fortet [1] que la notion de fonctionnelle de Markov (additive) semble avoir fait sa première apparition. Mais la découverte de la relation entre les fonctionnelles multiplicatives d'un processus, et certains « sous-processus » de celui-ci (processus obtenus en réduisant la durée de vie des trajectoires du premier) est due sans conteste à Dynkin. Comme les processus que Dynkin considère ne sont en général pas homogènes dans le temps, il est amené à envisager des fonctionnelles à deux indices $M_{s,t}(\omega)$, définies pour $s \leqslant t$, satisfaisant à des conditions analogues à celles que nous donnons ci-dessous (la correspondance entre la définition de Dynkin et la nôtre est donnée par la relation $M_{s,t}(\omega) = M_{t-s}(\theta_s\omega)$). En supposant par exemple que pour tout s, on a $M_{s,s} = 1$ p.s. pour toute mesure initiale, Dynkin peut montrer que toute fonctionnelle à deux indices est équivalente à une fonctionnelle « parfaite » à deux indices [2], de sorte que dans ce cas la théorie est, de manière paradoxale, plus simple dans le cas non-homogène dans le temps que dans le cas homogène. Nous verrons plus loin que la difficulté légèrement plus grande de nos démonstrations est compensée, dans le théorème sur la propriété forte de Markov par exemple (th. 4.2.), par l'absence de toute restriction sur la fonctionnelle : cela provient de ce que nous avons à notre disposition les ressources de la théorie de Hunt.

(1) Cette condition est accessoire : elle sert seulement dans la démonstration de Hunt, du fait que tout fonction excessive est p.s. continue à droite sur les trajectoires du processus; propriété que posséderont tous les semi-groupes que nous rencontrerons dans la suite, sans que la condition ci-dessus soit satisfaite.

(2) Voir Dynkin [I], p. 72.

1. DÉFINITION 2.1. — *Soit* $\{Q_t\}_{t\in R_+}$ *une famille d'opérateurs linéaires positifs sur* $\mathcal{G}'$: *nous dirons qu'elle constitue un semi-groupe subordonné au semi-groupe* $\{P_t\}$ *si :*

1) $\forall s,\ t \geqslant 0,\ Q_{s+t} = Q_sQ_t$ (*nous n'exigeons pas* $Q_0 = I$).

2) $\forall f \in \mathcal{G}'_+,\ Q_tf \leqslant P_tf.$

3) *La fonction* $t \to Q_t1^x$ (« *masse totale* ») *est, pour tout* x, *continue à l'instant* $t = 0$.

Remarques. — *a*) Comme dans le cas du semi-groupe $\{P_t\}$ (cf. § 1, n° 3) on obtient, en se restreignant aux fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{B}'$, la notion de « fonction de transition $Q_t(x, A)$ subordonnée à $P_t(x, A)$ ». L'additivité complète en A est une conséquence de la condition (2) et l'on a pour chaque $f \in \mathcal{G}'$:

$$Q_t(x, f) = \int Q_t(x, dy)f(y).$$

b) Étudions l'opérateur Q_0 : la mesure $Q_0(x, dy)$ est majorée, d'après la condition (2), par la masse unité ε_x. En vertu de la relation $Q_0Q_0 = Q_0$, cette mesure ne peut être que ε_x ou 0 : dans le premier cas (resp. le second) nous dirons que x est un point *permanent* (resp. non-permanent) pour $\{Q_t\}$. L'ensemble des points permanents sera noté $\mathfrak{X}$. Comme cet ensemble est caractérisé par la relation $Q_0(x, 1) = 1$, il est universellement mesurable.

c) Comme la mesure $Q_0(x, dy)$ est égale à $\varepsilon_x.\chi_{\mathfrak{X}}$, on a $Q_0(x, X - \mathfrak{X}) = 0$ pour tout x. Il résulte alors de la relation $Q_t = Q_tQ_0$ que les mesures $Q_t(x, dy)$ sont concentrées sur $\mathfrak{X}$.

d) Soit f une fonction continue comprise entre 0 et 1 : en un point non permanent, $Q_t(x, f) \leqslant Q_t(x, 1) = 0$. En un point permanent, $P_t(x, f) - Q_t(x, f) \leqslant P_t(x, 1) - Q_t(x, 1)$ tend vers 0 avec t, puisque d'après (3) $Q_t(x, 1) \underset{t\to 0}{\to} 1$: comme

$$P_t(x, f) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x),$$

il en résulte en définitive que $Q_t(x, f) \underset{t\to 0}{\to} f(x)\chi_{\mathfrak{X}}(x) = Q_0(x, f)$. On en déduit aussi que, pour tout x, l'application $t \to Q_t(x, f)$ est continue à droite en tout point.

e) Si f est continue est bornée, l'intégrale $\int_0^\infty Q_t(x, f)e^{-\lambda t}\,dt$ a donc un sens pour $\lambda > 0$. Il est facile de voir qu'elle appartient, en tant que fonction de x, à $\mathcal{G}'$. Notons la $V^\lambda(x, f)$; comme elle est majorée par $U^\lambda(x, f)$, c'est une mesure en f pour chaque x : elle se prolonge donc à $\mathcal{G}'$. De tout ce qui vient d'être dit, il résulte que si f est continue, $\lambda V^\lambda(x, f) \underset{\lambda \to \infty}{\to} f(x)\chi_{\mathcal{X}}(x)$.

Exemple. — Le semi-groupe $\{Q_t\} = \{e^{-\lambda t}P_t\}$ est subordonné à $\{P_t\}$ $(\lambda > 0)$.

2. Définition 2.2. — *On appelle fonctionnelle multiplicative de Markov une famille* $\{M_t\}_{t \in \mathbf{R}_+}$ *de variables aléatoires sur l'espace* Ω^* *des trajectoires, satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) *L'ensemble des* $\omega \in \Omega^*$ *pour lesquels la fonction* $t \to M_t(\omega)$ *n'est pas continue à droite, comprise entre* 0 *et* 1, *décroissante, est négligeable pour toute mesure* P^ν.

2) *Pour tout* $t \geqslant 0$, M_t *est une fonction* F^*_t*-mesurable.*

3) *Pour tout couple* (u, v) *de nombres* $\geqslant 0$, *la relation :*

$$M_{u+v}(\omega) = M_u(\omega) . M_v(\theta_u\omega)$$

a lieu, sauf peut-être pour des ω *appartenant à un ensemble* $H_{u,v}$ *qui est négligeable pour toute mesure* P^ν.

On dit que deux fonctionnelles multiplicatives $\{M_t\}$ et $\{N_t\}$ sont équivalentes si, pour chaque t, l'ensemble

$$\{M_t \neq N_t\}$$

est négligeable pour toute mesure P^ν (¹).

Remarques. — Si $\{M_t\}$ est une fonctionnelle multiplicative, la famille des variables aléatoires $\{-\log M_t\}$ constitue une fonctionnelle additive de Markov : cette notion sera étudiée en détail dans la seconde partie de ce travail.

Si l'on remplace, dans la condition (3), l'hypothèse « $H_{u,v}$ est négligeable » par « $\bigcup_{u,v} H_{u,v}$ est négligeable pour toute mesure P^ν », on obtient la notion de fonctionnelle multiplicative « parfaite ». On ignore si toute fonctionnelle est équivalente à une fonctionnelle parfaite.

Exemples. — 1) Soit A une partie presque borélienne de X : on pose $M_t(\omega) = 0$ (resp. 1) si la trajectoire ω rencontre (resp.

(¹) En vertu de la continuité à droite, l'ensemble $\{\omega : \exists t : M_t(\omega) \neq N_t(\omega)\}$ est alors lui aussi négligeable.

ne rencontre pas) l'ensemble A dans tout intervalle $[0, t + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Cette fonctionnelle est parfaite.

2) Soit plus généralement $T(\omega)$ un temps d'arrêt tel que, pour chaque t, on ait p.s. pour toute mesure initiale

$$T(\theta_t\omega) = T(\omega) - t$$

sur l'ensemble où $T(\omega) > t$. Les fonctions $M_t(\omega)$ égales à 1 si $T(\omega) > t$, à 0 si $T(\omega) \leqslant t$, constituent une fonctionnelle multiplicative. Si T est par exemple le temps d'entrée dans un ensemble presque borélien A, la fonctionnelle obtenue est parfaite (cas un peu différent du premier).

3) Soit $h(x)$ une fonction positive, borélienne, et par exemple bornée : les fonctions $M_t(\omega) = \exp\left[-\int_0^t h \circ X_s(\omega)\, ds\right]$ constituent une fonctionnelle multiplicative parfaite, continue, qui est dite associée à la fonction h.

4) $M_t(\omega) = e^{-\lambda t}$ (c'est le cas précédent, avec $h = \lambda$).

3. Le théorème suivant a été démontré, bien avant nous, par Dynkin ([I], p. 102).

Théorème 2. 1. — *Soit $\{M_t\}$ une fonctionnelle multiplicative de Markov. Posons, si $x \in X$, $f \in \mathcal{G}'$:*

$$Q_t(x, f) = E^x[f \circ X_t . M_t].$$

Les Q_t constituent un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$, qui est dit associé à la fonctionnelle $\{M_t\}$. Pour qu'un point x soit permanent pour $\{Q_t\}$ (resp. non permanent) il faut et il suffit que $P^x[M_0 = 1] = 1$ (resp. $P^x[M_0 = 0] = 1$). Pour que deux fonctionnelles soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même semi-groupe associé.

Démonstration. — Établissons d'abord une relation : soit $h(\omega)$ une fonction positive, bornée, F^*-mesurable. Nous avons :

$$E^x[M_{t+s}(\omega) . f \circ X_{t+s}(\omega) . h(\omega)] = E^x[h(\omega) . M_t(\omega) . f \circ X_{t+s}(\omega) . M_s(\theta_t\omega)]$$

d'après la condition (3) de la définition des fonctionnelles. En prenant une espérance conditionnelle par rapport à F_t^*, en remarquant que $h(\omega) . M_t(\omega)$ est F_t^* mesurable :

$$= E^x[h(\omega) . M_t(\omega) . E[f \circ X_s(\theta_t\omega) . M_s(\theta_t\omega) | F_t^*]].$$

Appliquons l'identité (1) de la fin du § 1, n° 3, à la fonction $\varphi(\omega) = f \circ X_s(\omega) . M_s(\omega)$. Il vient :

$$= E^x[h(\omega) . M_t(\omega) . Q_s(X_t(\omega), f)].$$

Prenons $h = 1$: la propriété de semi-groupe en résulte immédiatement. L'inégalité $Q_t \leqslant P_t$ vient de ce que $M_t \leqslant 1$, et la continuité à droite de la masse totale de la continuité à droite de la fonctionnelle.

Remarquons maintenant (« loi de tout ou rien » — voir Blumenthal [1]) (¹) que la variable aléatoire M_0, étant F_0^*-mesurable, est P^x — p.s. constante, pour tout x : comme $M_0^2 = M_0$ p.s., cette constante ne peut être que 0 ou 1. La seconde phrase de l'énoncé en résulte immédiatement.

Deux fonctionnelles équivalentes ont même semi-groupe associé. Soient réciproquement deux fonctionnelles $\{M_t\}$ et $\{N_t\}$ possédant cette propriété, montrons qu'elles sont équivalentes : soit H l'espace vectoriel des fonctions $h(\omega)$, bornées, F_t^*-mesurables, telles que l'on ait, pour une mesure ν donnée, $E^\nu[M_t(\omega) . h(\omega)] = E^\nu[N_t(\omega) . h(\omega)]$. La limite de toute suite convergente uniformément bornée en module de fonctions de H appartient encore à H. D'autre part, un calcul simple montre que H contient toutes les fonctions de la forme :
$h_1 \circ X_{t_1}(\omega), \ldots, h_n \circ X_{t_n}(\omega)$ $(0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t; \quad h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{C}')$
H contient donc toutes les fonctions bornées F_t^*-mesurables. Comme M_t et N_t sont F_t^*-mesurables, elles sont égales P^ν-p.s. (²).

THÉORÈME 2. 2. — *Soit* $\{Q_t\}$ *un semi-groupe subordonné à* $\{P_t\}$: *il existe une fonctionnelle multiplicative de Markov* $\{M_t\}$, *telle que le semi-groupe associé à* $\{M_t\}$ *soit* $\{Q_t\}$.

Démonstration. — 1) Rappelons qu'il existe une version $q_t(x, y)$ de la densité de la mesure $Q_t(x, dy)$ par rapport à $P_t(x, dy)$, qui est une fonction $\mathcal{B}' \times \mathcal{B}'$-mesurable du couple (x, y) : elle peut s'obtenir de la manière suivante : rangeons les ouverts d'une base dénombrable de la topologie de X en une

(¹) Voir aussi le Séminaire [II], pp. 5-04.

(²) Plus généralement, le même raisonnement appliqué aux variables aléatoires $M_t . \chi_{\{t<S\}}$, $N_t . \chi_{\{t<S\}}$ (où S est la durée de vie), montre que si deux fonctionnelles multiplicatives ont des semi-groupes associés qui coïncident *sur* X, elles sont égales *jusqu'au temps* S. Il en résulte en particulier que deux fonctionnelles multiplicatives normalisées (voir leur définition à la fin du n° 3) qui induisent le même semi-groupe sur X sont identiques.

suite $\mathcal{O}_n$, et construisons par récurrence une suite de partitions $\mathfrak{X}_n$ de X, la première $\mathfrak{X}_0$ étant constituée par les ensembles X et $\emptyset$, $\mathfrak{X}_{n+1}$ étant la partition engendrée par les ensembles de $\mathfrak{X}_n$, et les ensembles $\mathcal{O}_n$ et $X - \mathcal{O}_n$. Posons alors

$$q_{n,t}(x, y) = Q_t(x, A_n(y))/P_t(x, A_n(y)),$$

où $A_n(y)$ est l'ensemble de $\mathfrak{X}_n$ qui contient y. Cette fonction est mesurable par rapport au couple (x, y), et on peut montrer (Cf. Doob [I], p. 343 et p. 630) que, pour chaque x l'application $y \rightarrow q_{n,t}(x, y)$ converge $P_t(x, dy)$-presque partout vers une version de la densité cherchée. Or l'ensemble de convergence de la suite $q_{n,t}(x, y)$ dans $X \times X$ est $\mathcal{B}' \times \mathcal{B}'$-mesurable : définissons $q_t(x, y)$ comme égal à $\lim_n q_{n,t}(x, y)$ sur cet ensemble, à 0 sur son complémentaire : $q_t(x, y)$ est mesurable par rapport au couple (x, y) et représente, pour chaque x, une version de la densité envisagée.

2) Rangeons maintenant les nombres rationnels de l'intervalle $[0, t[$ en une suite ayant 0 pour premier élément; soit $t_0, t_1, \ldots, t_n$ le système formé par les $n + 1$ premiers nombres de cette suite, rangés par ordre de grandeur croissante, et soit F^t_n la tribu de parties de Ω^* engendrée par $X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_t$ (1). Les F^t_n croissent avec n et leur réunion engendre, grâce à la continuité à droite des trajectoires, la tribu F°_t (Cf. § 1) et donc, après complétion, la tribu F^*_t.

3) Posons :

$$M^t_n(\omega) = q_{t_1}(X_0(\omega), X_{t_1}(\omega)) . q_{t_2-t_1}(X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega)) \ldots \\ q_{t-t_n}(X_{t_n}(\omega), X_t(\omega)).$$

Ces fonctions sont comprises entre 0 et 1, et constituent une martingale par rapport aux tribus F^t_n : il n'est pas difficile de le voir directement, mais nous allons ici de vérifier par un calcul. Supposons que le passage de M^t_n à M^t_{n+1} se fasse par l'addition d'un instant s entre les instants t_i et t_{i+1} Nous avons à vérifier que :

$$E[M^t_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_{t_i}, X_{t_{i+1}}, \ldots, X_{t_n}] = M^t_n \quad \text{p.s.}$$

Une application immédiate des règles de calcul sur les espérances mathématiques conditionnelles montre qu'il suffit

(1) Rappelons qu'on appelle ainsi la plus petite tribu sur Ω^* pour laquelle les variables aléatoires $X_0 \ldots X_t$ sont mesurables.

de vérifier que :

$$E[q_{s-t_i}(X_{t_i}, X_s) . q_{t_{i+1}-s}(X_s, X_{t_{i+1}}) \mid X_0, \ldots, X_{t_i}, X_{t_{i+1}}, \ldots, X_{t_t}] = q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}).$$

C'est un résultat connu, bien que rarement démontré, de la théorie des processus de Markov, que toute variable aléatoire mesurable sur la tribu engendrée par les variables aléatoires X_s, $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$, est conditionnellement indépendante des X_s d'indice $< t_i$ ou $> t_{i+1}$, X_{t_i} et $X_{t_{i+1}}$ étant données. Le premier membre se réduit donc à :

$$E[q_{s-t_i}(X_{t_i}, X_s) . q_{t_{i+1}-s}(X_s, X_{t_{i+1}}) | X_{t_i}, X_{t_{i+1}}].$$

On peut alors se ramener au cas où $t_i = 0$: posons $s - t_i = u$, $t_{i+1} - s = v$; il reste à vérifier que :

$$E[q_u(X_0, X_u) . q_v(X_u, X_{u+v}) | X_0, X_{u+v}] = q_{u+v}(X_0, X_{u+v}).$$

Or c'est une conséquence immédiate de la relation $Q_u Q_v = Q_{u+v}$.

4) Il résulte alors des théorèmes de Doob que les $M_n^t(\omega)$ convergent p.s. vers une variable aléatoire, comprise entre 0 et 1, F_t^*-mesurable, que nous noterons M_t°. Il est facile de voir que l'on a, pour toute fonction f de $\mathcal{G}'$, et tout x,

$$Q_t(x, f) = E^x[f \circ X_t . M_t^\circ]$$

cette relation ayant lieu lorsqu'on remplace M_t° par M_n^t, et passant à la limite en n.

Soit D un ensemble dénombrable quelconque de points de l'intervalle $[0, t]$, contenant les points rationnels de cet intervalle; construisons à partir d'un rangement quelconque en une suite des points de D une quantité N_t°, de la même manière que nous avons construit M_t°. Il est clair que

$$M_n^t = E[N_t^\circ | X_0, \ldots, X_{t_n}, X_t],$$

et donc en faisant tendre n vers ∞, que M_t° est l'espérance mathématique conditionnelle de N_t° par rapport à la tribu engendrée par X_t et les X_s, s rationnel. Mais cette tribu est, nous l'avons vu, F_t^*, et par conséquent on a p.s. $M_t^\circ = N_t^\circ$.

Appliquons ce résultat en prenant pour D l'ensemble formé : des rationnels de l'intervalle $[0, s[$, du point s, des points de l'intervalle $[s, s + t[$ qui sont, soit rationnels, soit de la forme $s + r$, r rationnel. Il apparaît alors sur l'expression explicite de M_n^{s+t} que l'on a p.s. $M_{s+t}^\circ(\omega) = M_s^\circ(\omega) . M_t^\circ(\theta_s \omega)$.

5) Nous allons maintenant régulariser la fonction M_t°, de manière à obtenir une fonctionnelle multiplicative de Markov.

La fonction M_t°, considérée seulement pour t rationnel, est p.s. décroissante, comprise entre 0 et 1. Pour un t quelconque, soit $M_t(\omega)$ la limite des $M_s^\circ(\omega)$, lorsque $s \to t$ par valeurs rationnelles $> t$. On a $M_t^\circ \geqslant M_t$ p.s., car on a p.s. $M_t^\circ \geqslant M_s^\circ$, si s est un rationnel plus grand que t. Pour montrer que l'on a en fait $M_t^\circ = M_t$ p.s., il suffit donc de montrer que leurs espérances mathématiques sont égales, et cela, si l'on veut, pour des mesures initiales ponctuelles seulement. Or l'espérance mathématique de M_t° est $Q_t(x, X)$, si la mesure initiale est ε_x, et l'égalité résulte de la continuité à droite de la masse totale $Q_t(x, X)$ qui fait partie de nos hypothèses.

Il est alors immédiat de vérifier que $\{M_t\}$ est une fonctionnelle multiplicative associée au semi-groupe $\{Q_t\}$.

Remarques. — On aura pu observer que la démonstration de cette réciproque n'a utilisé, parmi les hypothèses faites sur le semi-groupe $\{P_t\}$, que la continuité à droite des trajectoires. Il nous semble clair aussi que cette démonstration est valable, avec de très légères modifications, pour des processus non-homogènes dans le temps.

Plaçons-nous maintenant dans le cas sous-markovien : deux fonctionnelles dont les semi-groupes associés coïncident *sur X* ne sont plus nécessairement équivalentes. Aussi allons-nous associer à toute fonctionnelle une fonctionnelle « normalisée » particulièrement commode, qui aura le même semi-groupe associé sur l'espace X. Soit $S(\omega)$ la durée de vie. Remarquons que, si H est une variable aléatoire positive quelconque, s un instant, et $\{M_t\}$ une fonctionnelle multiplicative, on a p.s. $M_H(\omega) = M_s(\omega) . M_{H-s}(\theta_s\omega)$ sur l'ensemble où $s \leqslant H$, comme on le voit immédiatement en approchant H, du côté droit, par des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est contenu dans un ensemble dénombrable dense [1]. Soit alors $M_{S-}(\omega)$ la limite à gauche de la fonctionnelle à l'instant $S(\omega)$: posons :

— Si $X_0(\omega) = \partial$, $N_t(\omega) = 1$ pour tout t;
— Si $X_0(\omega) \in X$, $N_t(\omega) = M_t(\omega)$ pour tout $t < S(\omega)$;
$N_t(\omega) = M_{S-}(\omega)$ pour tout $t \geqslant S(\omega)$.

[1] Par exemple par les variables aléatoires H^n définies au début du n° suivant.

On vérifie aisément, à l'aide de la remarque qui précède, que $\{N_t\}$ est une fonctionnelle multiplicative : nous l'appellerons la fonctionnelle normalisée associée à $\{M_t\}$: cette notion nous sera précieuse surtout dans la seconde partie de ce travail.

4. Nous allons maintenant préparer la terminologie qui nous sera nécessaire pour les deux paragraphes suivants. Soit Ω un « bon espace », et π la projection sur Ω^*. « Remontons » sur Ω la fonctionnelle $\{M_t\}$ associée au semi-groupe $\{Q_t\}$ au moyen de l'application π, en posant (avec un abus de langage évident) $M_t(\omega) = M_t(\pi\omega)$. Soit d'autre part H une variable aléatoire positive quelconque sur Ω : nous poserons

$$H^n(\omega) = (k + 1)/2^n$$

(k entier) si $k/2^n \leqslant H(\omega) < (k + 1)/2^n$: lorsque $n \to \infty$, les H^n tendent vers H du côté droit, et si H est un temps d'arrêt les H^n en sont aussi. Nous poserons aussi $M_H(\omega) = M_{H(\omega)}(\omega)$, ou 0 si $H(\omega) = \infty$. Comme $M_H = \lim_n M_{H^n}$, il est facile de voir que si H est un temps d'arrêt, M_H est F_H-mesurable.

Définition 2. 3. — *Soit* T *un temps d'arrêt par rapport aux tribus* F_t. *Nous désignerons par* Q_T *l'opérateur sur* $\mathcal{G}'$ *défini par la relation:*

$$Q_T(x, f) = E^x[f \circ X_T(\omega) . M_T(\omega)].$$

Il est clair que si f est une fonction bornée et continue à droite sur les trajectoires du processus (par exemple si $f \in \mathcal{C}_0$) on a pour tout x la relation $Q_T(x, f) = \lim_n Q_{T_n}(x, f)$.

Considérons maintenant le produit $\Omega' = \Omega \times \mathbf{R}_+$, et désignons par p et z la première et la seconde coordonnée respectivement. Considérons les tribus sur Ω' : $F' = F \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ $G'_t = F_t \times \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$; $F'_t = F_t \times \{\emptyset, \mathbf{R}_+\}$. Soit Z une mesure sur $\mathbf{R}_+$, de densité e^{-z} par rapport à la mesure de Lebesgue, et soit P'^ν la mesure produit $P^\nu \otimes Z$ sur F' : l'espace Ω' muni de cette mesure, et des tribus F'_t ou G'_t, est un « bon espace ». Un temps d'arrêt par rapport aux F'_t est de la forme $T(p\omega')$, où T est un temps d'arrêt sur Ω par rapport aux F_t. Posons alors :

$$R(\omega') = \inf \{r : \ z(\omega') \leqslant -\log M_r(p\omega')\}$$

R est un temps d'arrêt par rapport aux G'_t. D'autre part, si

T est un temps d'arrêt par rapport aux F'_t, il est très facile de voir que l'on a :

$$Q_T(x, f) = \int_{\{T<R\}} f \circ X_T(\omega') \, dP'^x(\omega').$$

Nous dirons que R est le « temps terminal canonique adjoint à l'espace Ω ». On peut remarquer que si l'on pose : $Y_t(\omega') = X_t(\omega')$ si $t < R(\omega')$, $Y_t(\omega') = \partial$ si $t \geqslant R(\omega')$, le processus $\{Y_t\}$ est de Markov, et admet $Q_t(x, A)$ comme probabilité de transition; $R(\omega)$ apparaît alors comme sa « durée de vie ». Il convient cependant de ne pas confondre la notion de temps terminal, qui est une notion *relative*, faisant intervenir simultanément les semi-groupes $\{Q_t\}$ et $\{P_t\}$, et la notion de durée de vie telle qu'elle a été définie au paragraphe 1, qui ne fait intervenir qu'un seul semi-groupe, et qui est intrinsèque.

Il n'y a plus de difficulté à définir maintenant ce qu'est un temps terminal : supposons que sur un « bon espace » Ω soient définies *deux* familles de sous-tribus de F, par rapport auxquelles le processus $\{X_t\}$ est Markovien; appelons-les $\{F_t\}$ et $\{G_t\}$, et supposons que pour tout t on ait $F_t \subset G_t$. Un temps terminal R (par rapport aux F_t, associé au semi-groupe $\{Q_t\}$) est alors une variable aléatoire positive R, qui est un temps d'arrêt par rapport aux tribus G_t, et telle que pour tout temps d'arrêt T par rapport aux F_t, on ait :

$$Q_T(x, f) = \int_{\{T<R\}} f \circ X_T \, dP^x.$$

Nous venons de montrer que, la tribu F_t étant donnée, on peut toujours construire un temps terminal répondant à ces conditions, au prix d'une amplification de l'espace (remplacement de Ω par Ω').

3. — Semi-groupes exacts.

Dans tout ce paragraphe, $\{Q_t\}$ est un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$, associé à la fonctionnelle $\{M_t\}$, et R un temps terminal associé à ce semi-groupe et aux tribus F^*_t, construit comme à la fin du paragraphe précédent à l'aide d'une variable aléatoire exponentielle auxiliaire : de sorte que Ω est l'espace produit de Ω^* par une demi-droite, etc...

Le lemme suivant généralise un résultat de Hunt ([II], p. 319).

Lemme 3. 1. — *Soit* V^λ *le* λ*-potentiel du semi-groupe* $\{Q_t\}$ $(\lambda > 0)$. *On a la relation:*

$$U^\lambda = V^\lambda + P^\lambda_R U^\lambda.$$

Démonstration. — Soit $A \in \mathcal{B}'$: comme on a

$$Q_t(x, A) = P^x[t < R, X_t \in A],$$

on a :

$$P_t(x, A) = Q_t(x, A) + P^x[t = R, X_t \in A] + P^x[R < t, X_t \in A].$$

Multiplions par $e^{-\lambda t}$ et intégrons de 0 à ∞ : le premier membre donne U^λ, le premier terme du second membre V^λ, le second 0, car il n'est $\neq 0$ que pour une infinité dénombrable de valeurs de t. Enfin le dernier terme s'écrit, en utilisant le fait que R est un temps d'arrêt, et la propriété forte de Markov :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int_{\{R<t\}} P_{t-R}(X_R, A)\, dP^x = \int dP^x \int_R^\infty P_{t-R}(X_R, A) e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \int dP^x e^{-\lambda R} \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s(X_R, A)\, ds = P^\lambda_R U^\lambda(x, A).$$

Lemme 3. 2. — *Soit g une fonction de* $\mathcal{G}'_{+}$, *et f son potentiel* $U^\lambda g (\lambda > 0)$; *la fonction* $P^\lambda_R f$ *est* λ*-surmédiane, et elle coïncide avec sa régularisée* λ*-excessive aux points permanents pour le semi-groupe* $\{Q_t\}$.

Démonstration. — Utilisons le lemme précédent : il vient :

$$P^\lambda_R U^\lambda g^x = U^\lambda g^x - V^\lambda g^x = \int dP^x \int_0^\infty g \circ X_s . e^{-\lambda s}(1 - M_s)\, ds.$$

D'autre part : (d'après l'identité (2), du § 1 n° 3).

$$e^{-\lambda t} P_t U^\lambda g^x = \int dP^x \int_t^\infty g \circ X_u . e^{-\lambda u}\, du.$$
$$e^{-\lambda t} P_t V^\lambda g^x = \int dP^x \int_0^\infty g \circ X_{s+t} . e^{-\lambda(s+t)} M_s(\theta_t)\, ds$$
$$= \int dP^x \int_t^\infty g \circ X_u . e^{-\lambda u} M_{u-t}(\theta_t)\, du.$$

Et enfin :

$$e^{-\lambda t} P_t P^\lambda_R U^\lambda g^x = \int dP^x \int_0^\infty g \circ X_s . e^{-\lambda s}(1 - M^t_s)\, ds$$

où l'on a posé :

$$M_s^t(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad s < t \qquad M_s^t(\omega) = M_{s-t}(\theta_t\omega) \quad \text{si} \quad s \geqslant t.$$

Or il est clair que pour chaque t, on a pour chaque s

$$M_s(\omega) \leqslant M_s^t(\omega)$$

p.s. : si $s < t$ c'est évident, puisque $M_s^t(\omega) = 1$, et $M_s(\omega) \leqslant 1$; si $s \geqslant t$ et $M_t(\omega) = 0$, c'est évident aussi, et si $M_t(\omega) > 0$ on a $M_s^t(\omega) = M_{s-t}(\theta_t\omega) = M_s(\omega)/M_t(\omega)$. Cette inégalité a donc lieu sur le complémentaire d'un ensemble négligeable *indépendant de s*, puisque les deux membres sont des fonctions continues à droite en s. Il en résulte que $e^{-\lambda t}P_tP_R^\lambda U^\lambda g^x \leqslant P_R^\lambda U^\lambda g^x$, autrement dit, que la fonction du second membre est λ-surmédiane. On en déduit d'ailleurs que si f est une fonction λ-excessive (donc un sup. de λ-potentiels de fonctions de $\mathcal{G}'$) la fonction $P_R^\lambda f$ est λ-surmédiane.

Soit x un point permanent pour le semi-groupe $\{Q_t\}$. Posons $t_n = 1/n$: comme $\lim\limits_n M_{t_n}(\omega) = 1$ P^x — p.s., on a $\lim\limits_n M_s^{t_n}(\omega) = M_s(\omega)$ P^x — p.s., pour chaque s. On en déduit que la limite de $e^{-\lambda t_n}P_{t_n}P_R^\lambda U^\lambda g^x$ est $P^\lambda U^\lambda g^x$, ou encore que la régularisée λ-excessive de cette dernière fonction lui est égale au point x. La démonstration du lemme est achevée.

Supposons maintenant que le point x soit non-permanent : pour que la fonction $P_R^\lambda U^\lambda g$ y soit égale à sa régularisée, il faut et il suffit que $\lim\limits_n P_{t_n}V^\lambda g^x = 0$. Il en résulte que si cette condition est réalisée lorsque $g = 1$, elle l'est pour tout $g \in \mathcal{G}'$. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 3. 1. — *On dit que le semi-groupe* $\{Q_t\}$ *est* exact *s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :*

1) *Pour un* $\lambda > 0$, *pour toute fonction* $g \in \mathcal{G}'_+$, *la fonction* $P_R^\lambda U^\lambda g$ *est* λ*-excessive* (R, *temps terminal associé à* $\{Q_t\}$).

2) *Pour un* $\lambda > 0$, *et* $g \in \mathcal{G}'$, *la fonction* $V^\lambda g$ *est p.s. continue à droite sur les trajectoires du processus, quelle que soit la mesure initiale.*

3) *Pour un* $\lambda > 0$, *on a en tout point x non-permanent pour le semi-groupe* $\{Q_t\}$:

$$\lim_n P_{t_n}V^\lambda 1^x = 0 \qquad (t_n = 1/n).$$

Remarques. — On déduit immédiatement, de la condition (2) et de l'équation résolvante, que si les conditions ci-dessus ont lieu pour un $\lambda > 0$, elles ont lieu pour tout $\lambda > 0$.

Si l'on remarque que $P_t V^\lambda 1^x = E^x[V^\lambda(X_t, 1)]$, il apparaît que la troisième condition correspond, sous une forme très affaiblie, à l'annulation d'une fonction de Green aux points frontière.

Théorème 3. 3. — *Il est possible d'associer à tout semi-groupe* $\{Q_t\}$ *subordonné à* $\{P_t\}$ *un semi-groupe* exact $\{Q'_t\}$ *subordonné à* $\{P_t\}$, *de telle sorte que :*

a) *Pour tout* x, *tout* t, *toute* $f \in \mathcal{C}'_+$: $Q_t(x, f) \leqslant Q'_t(x, f)$;

b) *Pour tout* x *permanent pour* $\{Q_t\}$ *les mesures* $Q_t(x, dy)$ *et* $Q'_t(x, dy)$ *sont égales.*

Le semi-groupe construit dans la démonstration qui suit sera appelé *le* semi-groupe exact associé à $\{Q_t\}$.

Démonstration. — Conservons les notations des lemmes précédents, mais définissons comme à la fin du § 2 des variables aléatoires R_t sur Ω, construites comme R, à l'aide de la même variable aléatoire exponentielle, mais à partir de $M^t_s(\omega)$ au lieu de $M_s(\omega)$. Nous poserons encore $t_n = 1/n$.

Il résulte des résultats de la démonstration précédente que $M^{t_n}_s$ est p.s., une fonction décroissante de n. (Remarquer que, si $r_1 < r_2$, $M_{s-r_2}(\theta_{r_2}\omega) = M_{s-r_1-(r_2-r_1)}(\theta_{r_2-r_1}\theta_{r_1}\omega) \geqslant M_{s-r_1}(\theta_{r_1}\omega)$ [1]. On en déduit alors que R_{t_n} tend en décroissant, lorsque $n \to \infty$, vers une limite $R' \geqslant R$, et que l'on a $R' = R$ P^x — p.s., si x est un point permanent pour le semi-groupe. Posons alors :

$$Q'_t(x, f) = \int_{\{t < R'\}} f \circ X_t \, dP^x. \tag{3. 3. 1}$$

Le théorème sera prouvé si nous pouvons établir que

$$Q'_{s+t} = Q'_s Q'_t :$$

la continuité à droite de la masse totale est en effet apparente sur l'expression (3. 3. 1), l'inégalité $Q_t \leqslant Q'_t \leqslant P_t$ aussi, et le fait que $Q'_t(x, dy)$ et $Q_t(x, dy)$ soient égales pour des points x permanents pour $\{Q_t\}$ résulte de ce que $R' = R$ P^x — p.s. Enfin, le semi-groupe $\{Q'_t\}$ est exact, car R' est évidemment

[1] Voir la démonstration du théorème précédent.

un temps terminal associé à ce semi-groupe, et $P^{\lambda}_{R'}1$, par exemple, est par construction la régularisée de $P^{\lambda}_{R}1$, et donc est λ-excessive.

Pour chaque mesure initiale ν, soit N_ν l'ensemble dénombrable des t tels que $P^{\nu}[t = R'] > 0$. Nous écrirons N_x au lieu de N_{ε_x}.

Posons aussi, pour $t > 0$:

$$(3.3.2)\qquad \begin{aligned} Q''_t(x, f) &= \lim_n \int_{\{t < R_{t_n}\}} f \circ X_t(\omega)\, dP^x(\omega) \\ &= \lim_n \int M_{t-t_n}(\theta_{t_n}\omega) f \circ X_t(\omega)\, dP^x(\omega) \\ &= \lim_n P_{t_n} Q_{t-t_n}(x, f) \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de la dernière expression que l'on a, $\forall u > 0$, $\forall v \geqslant 0$, $\forall f$:

$$(3.3.3)\qquad Q''_{u+v}(x, f) = Q''_u(x, Q_v f).$$

Soit $W^{\lambda}f$ l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} Q'_t f\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q''_t f\, dt.$$

L'égalité entre les deux membres résultant de ce que, pour chaque x, les quantités intégrées sont égales pour $t \notin N_x$. L'application à W^{λ} sous sa première forme du raisonnement du lemme 3. 1 montre que l'on a $W^{\lambda}f = U^{\lambda}f - P^{\lambda}_{R'}U^{\lambda}f$, et comme $P^{\lambda}_{R'}U^{\lambda}f$ est λ-excessive si $f \geqslant 0$, on voit que la fonction $W^{\lambda}f$ est p.s., continue à droite sur les trajectoires du processus.

Soit A l'ensemble des y tels que $P^y[R \neq R'] > 0$: si une mesure μ sur X donne la mesure 0 à A, on a pour tout $u \geqslant 0$ et toute f $\langle \mu Q'_u, f \rangle = \langle \mu Q_u, f \rangle$. A, étant aussi l'ensemble des points où $P^{\lambda}_{R}1$ diffère de sa régularisée $P^{\lambda}_{R'}1$, est de potentiel nul [1] : l'ensemble H_μ des t tels que $\langle \mu P_t, A \rangle > 0$ est donc un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, si $v \notin H_\mu$, on a aussi $\langle \mu Q''_v, A \rangle = 0$, et par conséquent pour tout u, toute f, $\langle \mu Q''_v, Q_u f \rangle = \langle \mu Q''_{v+u}, f \rangle = \langle \mu Q''_v, Q'_u f \rangle$. Désignons par L_μ l'ensemble $H_\mu \cup N_\mu$. En considérant une mesure initiale ν (qui sera une ε_x en fait) et en changeant un peu les notations : si $u > 0$, $u \notin L_\nu$, on a $\forall v \geqslant 0$, $\forall f$:

$$\langle \nu Q''_{u+v}, f \rangle = \langle \nu Q'_u, Q'_v f \rangle$$

[1] Voir Hunt [II], p. 337, prop. 13.4.

et si de plus $v \notin N_\nu - u$:

$$(3.\ 3.\ 4) \qquad \langle \nu Q'_{u+v}, f \rangle = \langle \nu Q'_u, Q'_v f \rangle.$$

Appliquons cette relation à une f de la forme $\lambda W^\lambda g$, $g \in \mathcal{C}_0$. Un calcul facile que nous ne reproduisons pas permet de montrer que, si μ est une mesure, et $v \notin L_\mu$, on a

$$\langle \mu Q'_v, W^\lambda g \rangle = \langle \mu W^\lambda, Q_v g \rangle.$$

Soit un $u \geqslant 0$ quelconque, et une suite de u_n, qui tendent en décroissant vers u, qui sont > 0 et n'appartiennent pas à L_ν. Soit μ_n la mesure $\nu Q'_{u_n}$, μ la mesure $\nu Q'_u$, et soit L' la réunion des L_{μ_n} et de L_μ. Écrivons la relation (3. 3. 4) pour les u_n, en supposant que v n'appartienne ni à L', ni à l'un des $N_\nu - u_n$: le passage à la limite est possible, du fait que la fonction $W^\lambda Q_v g$ est p.s. continue à droite sur les trajectoires, et par conséquent, on a :

$$\langle \nu Q'_{u+v}, f \rangle = \langle \nu Q'_u, Q'_v f \rangle,$$

pour f de la forme $W^\lambda g$ et lorsque v n'appartient pas à un certain ensemble exceptionnel de mesure nulle (qui dépend de ν et de u). Recommençons alors avec des v_n qui n'appartiennent pas à cet ensemble, et qui tendent vers v en décroissant : le passage à la limite est immédiat ici, f étant continue à droite sur les trajectoires. En prenant pour ν une mesure ε_x quelconque, il vient : $\forall u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $g \in \mathcal{C}_0$ on a :

$$(3.\ 3.\ 5) \qquad Q'_{u+v}(\lambda W^\lambda g) = Q'_u Q'_v (\lambda W^\lambda g).$$

Faisons maintenant tendre λ vers ∞ : soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des points permanents pour le semi-groupe $\{Q_t\}$ et $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des x tels que $P^x[R' = 0] = 0$: c'est aussi celui des x tels que $P^x[R' > 0] = 1$, et celui des x tels que $W^\lambda 1^x > 0$. Il est donc presque-borélien, finement ouvert, et $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}'$. Il est clair que si $g \in \mathcal{C}_0$ $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda W^\lambda g = g\chi_{\mathfrak{X}'}$. Il en résulte que

$$Q'_{u+v}(g\chi_{\mathfrak{X}'}) = Q'_u Q'_v (g\chi_{\mathfrak{X}'}),$$

et le théorème sera démontré si nous prouvons que les mesures $Q'_t(x, dy)$ sont concentrées sur $\mathfrak{X}'$. Pour $t = 0$, c'est évident. Pour $t > 0$, on a :

$$Q'_t(x, X - \mathfrak{X}) \leqslant Q''_t(x, X - \mathfrak{X}) = \lim_{s \to 0} P_s(x, Q_{t-s}(X - \mathfrak{X})) = 0$$

Les mesures sont même concentrées sur $\mathfrak{X}$. La démonstration est donc achevée.

Exemple de temps terminal exact. — Si $R(\omega)$ est la borne inférieure des t pour lesquels $X_t(\omega)$ appartient à un ensemble A presque analytique, $R_s(\omega)$ est l'inf des $t \geqslant s$ tels que $X_t(\omega) \in A$, et $R'(\omega)$ est le temps d'entrée dans A (l'inf. des $t > 0$ tels que $X_t(\omega) \in A$). Il est clair que R et R′ ne diffèrent avec une probabilité positive que pour des mesures initiales qui chargent l'ensemble des points de A irréguliers pour A.

Signalons maintenant un théorème que nous ne plaçons ici que parce que sa démonstration, que nous ne donnerons pas, est voisine de celle du th. précédent.

Théorème 3. 4. — a) *Soit* R_n *une suite croissante de temps terminaux: sa limite* R *est un temps terminal.*

b) *Soit* R_n *une suite décroissante de temps terminaux associés à des semi-groupes exacts* $\{Q_t^n\}$: *sa limite est un temps terminal exact.*

(La première partie est très facile; la seconde se traite en construisant les Q_t' et Q_t'' comme dans le raisonnement précédent: les Q_t'' forment un semi-groupe (dont la masse totale n'est pas continue à droite) ce qui facilite la démonstration.)

Résumons enfin quelques-uns des résultats obtenus:

Théorème 3. 5. — *Soit* $\{Q_t\}$ *un semi-groupe exact subordonné à* $\{P_t\}$, $V^\lambda(\lambda > 0)$ *l'un de ses potentiels,* $\mathfrak{X}$ *l'ensemble de ses points permanents :*

a) $\mathfrak{X}$ *est un ensemble presque-borélien, finement ouvert* (1).

b) *Pour toute* f *positive bornée,* $V^\lambda f$ *est la différence de deux fonctions* λ*-excessives, et donc presque-borélienne et continue à droite sur presque toutes les trajectoires du processus.*

c) *Si* $g \in \mathcal{C}_0$, $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V^\lambda g = g\chi_{\mathfrak{X}}$.

(1) Si le semi-groupe n'est pas exact, comme la fonction $V^\lambda 1$ est semi-continue inférieurement pour la topologie fine, il est clair que l'ensemble $X - \mathfrak{X}$ est finement fermé, et que les mesures $Q_t(x, dy)$, $Q_t'(x, dy)$ ne peuvent différer que pour des points x qui appartiennent à $X - \mathfrak{X}$ et sont irréguliers pour $X - \mathfrak{X}$. ($\{Q_t'\}$ désigne le semi-groupe exact associé à $\{Q_t\}$).

4. — La propriété de Markov forte.

Les notations sont celles de la fin du paragraphe 2 : le lecteur est prié de s'y reporter pour tout ce qui touche à la définition d'un temps terminal, celle des variables aléatoires H^n associées à une variable aléatoire positive H, et celle des opérateurs Q_T, où T est un temps d'arrêt.

DÉFINITION 4. 1. — *Nous dirons qu'un semi-groupe* $\{Q_t\}$ *subordonné à* $\{P_t\}$ *possède la propriété de Markov forte (ou est fortement markovien) si : pour tout « bon espace »* Ω, *muni de tribus* F_t, *et tout temps terminal* R *associé au semi-groupe et relatif à ces tribus, on a la relation :*

$$(1) \quad \int_{U\cap\{T\leqslant H<R\}} f\circ X_H(\omega)\, dP^\nu(\omega) = \int_{U\cap\{T\leqslant H\}\cap\{T<R\}} Q_{H(\omega)-T(\omega)}(X_T(\omega),\ f)\, dP^\nu(\omega)$$

pour toute mesure initiale ν *et toute* $f\in\mathcal{G}'$; *où* T *est un temps d'arrêt par rapport aux* F_t, U *un événement antérieur à* T, H *une variable aléatoire positive* F_T*-mesurable quelconque; où enfin les quantités intégrées sont nulles par convention si* $H(\omega)=\infty$.

Remarques. — Désignons par $K(\omega)$ la variable aléatoire sup (T, H); soit $\{M_t\}$ la fonctionnelle associée au semi-groupe; la relation ci-dessus est équivalente à la suivante :

$$E[f\circ X_K(\omega).M_K(\omega)|F_T] = M_T(\omega).Q_{K-T}(X_T,\ f) \text{ p.s.}$$

en convenant que le second membre est nul si $K(\omega)=\infty$. Cette forme de la propriété forte ne fait plus intervenir les temps terminaux.

Supposons que nous ayons pu démontrer la relation (1) pour toute variable aléatoire H égale à une constante : il en résultera immédiatement qu'elle est vraie pour les variables aléatoires H^n, qui ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs (et qui sont F_T-mesurables). Si $f\in\mathcal{C}_0$, on peut passer à la limite dans les deux membres lorsque $n\to\infty$, et la relation sous sa forme générale en résulte. Nous nous bornerons donc au cas où H est une constante t dans les démonstrations. Du fait que, si $t<R(\omega)$, on a p.s.

$Q_0(X_t, f) = f \circ X_t$, le lecteur déduira aisément que l'on obtient alors une relation équivalente en remplaçant l'ensemble d'intégration au premier membre par $U \cap \{T < t < R\}$, et au second par $U \cap \{T < t\} \cap \{T < R\}$.

THÉORÈME 4. 1. — *Tout semi-groupe subordonné* exact $\{Q_t\}$ *est fortement markovien.*

Démonstration. — Raisonnons d'abord sur les temps d'arrêt T^n, en remarquant que U est antérieur à chaque T^n; posons $a_k = k/2^n$, il vient :

$$(4.\ 1.\ 1) \quad \int_{U \cap \{T^n < t < R\}} f \circ X_t \, dP^\nu = \sum_{a_k < t} \int_{U \cap \{T^n = a_k\} \cap \{t < R\}} f \circ X_t \, dP^\nu$$
$$= \sum_{a_k < t} \int_{U \cap \{T^n = a_k\} \cap \{a_k < R\}} Q_{t-a_k}(X_{a_k}, f) \, dP^\nu$$
$$= \int_{U \cap \{T^n < t\} \cap \{T^n < R\}} Q_{t-T^n}(X_{T^n}, f) \, dP^\nu$$

Prenons pour f un potentiel de la forme $\lambda V^\lambda g$, $g \in \mathcal{C}_0$, et faisons tendre n vers ∞ ; la première intégrale tend vers :

$$(4.\ 1.\ 2) \qquad \int_{U \cap \{T < t < R\}} f \circ X_t \, dP^\nu.$$

La dernière diffère très peu, lorsque n est assez grand, de :

$$(4.\ 1.\ 3) \qquad \int_{U \cap \{T < t\} \cap \{T < R\}} Q_{t-T^n}(X_{T^n}, f) \, dP^\nu.$$

Soient r et s deux nombres positifs; nous avons :

$$|e^{-\lambda s} Q_s(x, f) - e^{-\lambda r} Q_r(x, f)| = \left| \int_s^r e^{-\lambda u} Q_u(x, g) \, du \right| \leqslant |r - s| \, . \, \|g\|.$$

L'application $s \to Q_s f$, de l'intervalle $[0, t]$ dans $\mathcal{B}'$ muni de la norme de la convergence uniforme, est donc uniformément continue.

Il en résulte d'abord que l'intégrale (4. 1. 3) diffère très peu, pour n grand, de :

$$(4.\ 1.\ 4) \qquad \int_{U \cap \{T < t\} \cap \{T < R\}} Q_{t-T}(X_{T^n}, f) \, dP^\nu.$$

D'autre part, si s est rationnel, la fonction $Q_s f = \lambda V^\lambda Q_s g$ est, puisque le semi-groupe est exact, continue à droite sur les trajectoires du processus qui n'appartiennent pas à un certain ensemble H_s, négligeable pour toute mesure P^ν. Soit H l'ensemble négligeable réunion des H_s : si $\omega \notin H$, les applications $u \to Q_s f \circ X_u(\omega)$ sont continues à droite lorsque s est rationnel; soit un s quelconque, et soient des s_n rationnels qui tendent vers s : les $Q_{s_n} f$ tendent uniformément vers $Q_s f$, et la propriété est donc vraie pour tout s. Il en résulte que (4. 1. 3) tend vers :

$$(4.\ 1.\ 5) \qquad \int_{U \cap \{T<t\} \cap \{R<T\}} Q_{t-T}(X_T, f)\, dP^\nu.$$

lorsque $n \to \infty$: en rapprochant de (4. 1. 2), on voit que la relation de Markov est vraie pour toute f de la forme $\lambda V^\lambda g$, $g \in \mathcal{C}^0$: faisons tendre λ vers l'infini, f tend vers $g\chi_{\mathfrak{X}}$. Mais la relation est vraie pour $g.\chi_{X-\mathfrak{X}}$, le premier membre étant nul du fait que $P^\nu[t < R, X_t \in X - \mathfrak{X}] = 0$, et le second, du fait que $Q_s(y, X - \mathfrak{X})$ est nul pour tout s, y. Le théorème est donc prouvé pour $g \in \mathcal{C}_0$, donc pour tout g.

Théorème 4. 2. — *Tout semi-groupe $\{Q_t\}$ subordonné à $\{P_t\}$ est fortement markovien.*

Démonstration. — Soit $\{Q'_t\}$ le semi-groupe exact associé à $\{Q_t\}$ par le th. 3. 3 : il suffit évidemment d'établir la relation (1) de Markov pour des mesures initiales ponctuelles ε_x. Si x est un point non-permanent pour $\{Q_t\}$, les deux membres de la relation sont nuls. Si x est permanent, ils sont égaux respectivement aux deux membres de la relation de Markov écrite pour le semi-groupe $\{Q'_t\}$, et donc égaux entre eux d'après le th. 4. 1.

Corollaire 1. — *Pour tout temps d'arrêt* T, *toute constante t, on a la relation $Q_{T+t} = Q_T Q_t$ entre opérateurs sur $\mathcal{G}'$.*

Démonstration. — Prendre $H(\omega) = T(\omega) + t$.

Corollaire 2. — *Pour tout temps d'arrêt* T, *tout x, la mesure $Q_T(x, dy)$ est portée par $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. — La relation $Q_T = Q_T Q_0$.

2. Le théorème suivant est une traduction de la propriété forte de Markov en termes de fonctionnelles multiplicatives : il sera fondamental pour la seconde partie de ce travail.

THÉORÈME 4. 3. — *Soit* $\{M_t\}$ *une fonctionnelle multiplicative de Markov,* $\{Q_t\}$ *son semi-groupe associé,* T *un temps d'arrêt,* H *une variable aléatoire* $\geqslant$ T *quelconque : on a, p.s. pour toute mesure* P^ν, *la relation :*

$$M_H(\omega) = M_T(\omega) . M_{H-T}(\theta_T\omega)$$

(*où les deux membres ont la valeur* 0 *si* $H(\omega) = \infty$).

Démonstration. — Il suffit évidemment de raisonner dans le cas où $H(\omega)$ est de la forme $T(\omega) + t$: on passerait au cas général ensuite en remplaçant H par $T + (H - T)^n$, et en faisant tendre n vers l'infini, le passage à la limite étant immédiat grâce à la continuité à droite.

Pour montrer que $M_{T+t} = M_T . M_t \circ \theta_T$ p.s., remarquons d'abord que si nous désignons par $\{Y_s\}$ le processus

$$\{X_{T+s}\}_{s \in R_+},$$

les deux membres de cette formule ont même intégrale sur tout ensemble de la tribu engendrée par F_T et les variables aléatoires $Y_s (s \geqslant 0)$; il suffit en effet de le vérifier pour des ensembles de la forme :

$$U \cap \{Y_0 \in A_0\} \cap \cdots \cap \{Y_{s_n} \in A_n\}$$

où $U \in F_T$, et les A_i appartiennent à $\mathcal{B}'$. C'est alors une conséquence facile du théorème 4. 2. Notre égalité sera alors immédiate si nous prouvons que ses deux membres sont mesurables par rapport à cette tribu. C'est clair pour le second membre, car M_T est F_T-mesurable, et, M_t étant mesurable par rapport à la tribu engendrée par les $X_s (s \geqslant 0)$, $M_t(\theta_T)$ l'est par rapport à celle engendrée par les Y_s. D'autre part, nous avons $M_{T+t} = \lim\limits_n M_{T^n+t}$, et l'on a $M_{T^n+t} = M_{T^n} . M_t(\theta_{T^n})$ p.s., d'après le caractère multiplicatif de la fonctionnelle et le fait que T^n ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. Comme $\lim\limits_n M_{T^n} = M_T$, qui est F_T-mesurable, il nous suffit de démontrer que $M_t(\theta_{T^n})$ est mesurable sur la tribu engendrée par les Y_s et F_T. Or elle est mesurable sur la tribu engendrée par les variables $X_{T^n+s} (s \geqslant 0)$, et chacune de ces variables est elle même mesurable sur la tribu engendrée par les Y_s et F_T, comme on le voit en approchant T^n par les variables aléatoires $T + (T^n - T)^p$, qui sont mesurables sur F_T, et en faisant tendre p vers l'infini.

Signalons que si la fonctionnelle $\{M_t\}$ étant parfaite (voir la définition 2. 2), cette relation serait évidente, et on en déduirait une démonstration très simple de la propriété de Markov forte, qui est due à Dynkin [1].

5. — Résolvantes des semi-groupes subordonnés.

L'objet de ce paragraphe est la caractérisation des semi-groupes subordonnés à $\{P_t\}$ au moyen de propriétés qui ne fassent intervenir que leur résolvante. Il peut être omis sans inconvénient par le lecteur pressé, à l'exception de l'énoncé du th. 5. 1, qui servira dans la démonstration du th. 5. 10 de la seconde partie. Nous avons rejeté tous les énoncés à la fin du paragraphe.

DÉFINITION 5. 1. — *On appelle résolvante sur $\mathcal{G}'$ une famille $\{V^\lambda\}_{\lambda>0}$ d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{G}'$, satisfaisant aux conditions :*

1) $\|\lambda V^\lambda\| \leqslant 1$ *pour tout* λ;

2) $\forall\lambda$, $\forall\mu$, $V^\lambda - V^\mu = -(\lambda-\mu)V^\lambda V^\mu$. (« *Equation résolvante* .»)

Une résolvante $\{V^\lambda\}$ est dite *subordonnée* à la résolvante $\{U^\lambda\}$ du semi-groupe $\{P_t\}$ si elle vérifie la condition :

$$\forall f \in \mathcal{G}'_+,\ \forall\lambda,\ V^\lambda f \leqslant U^\lambda f.$$

Développons les conséquences des conditions (1) et (2) : nous dirons que la fonction $f \in \mathcal{G}'$ est λ-surmédiane par rapport à la résolvante $\tilde{V} = \{V^\lambda\}$ si elle est positive, et si l'on a pour tout μ l'inégalité $\mu V^{\lambda+\mu} f \leqslant f$. Si la limite du premier membre lorsque $\mu \to \infty$ est f, nous dirons que f est λ-excessive par rapport à $\tilde{V}$. Le lecteur vérifiera aisément que, si f est λ-surmédiane p.r., à $\tilde{V}$, la fonction $\mu V^{\lambda+\mu}$ croît avec μ, sa limite g lorsque $\mu \to \infty$ est une fonction λ-excessive par rapport à $\tilde{V}$, et $V^\mu f = V^\mu g$ pour tout μ. Si $\tilde{U}$ est la résolvante du semi-groupe $\{P_t\}$, la notion de fonction λ-surmédiane par rapport à $\tilde{U}$ est moins fine que celle de fonction λ-surmédiane, mais les

[1] Dynkin [I], th. 5.8′, p. 148. Dynkin a d'ailleurs prouvé la validité de la propriété forte sous des hypothèses plus larges : essentiellement, pour une classe de fonctionnelles exactes qui contient les fonctionnelles pour lesquelles tous les points de X sont permanents.

fonctions λ-excessives par rapport à $\tilde{U}$ sont identiques aux fonctions λ-excessives. Nous dirons qu'une fonction est surmédiane par rapport à $\tilde{V}$ si elle est λ-surmédiane par rapport à $\tilde{V}$ pour tout $\lambda > 0$.

D'après la condition (1), la fonction 1 est surmédiane p.r. à $\tilde{V}$: il en résulte que $\lambda V^{\lambda}1$ admet une limite $\leqslant 1$ lorsque $\lambda \to \infty$. Nous désignerons par $\mathfrak{L}$ l'ensemble des points où cette limite est 1.

L'équation résolvante montre, d'autre part, que tous les opérateurs V^{λ} ont même noyau et même image $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{C}'$: soit $\overline{\mathcal{H}}$ l'adhérence de $\mathcal{H}$ en norme — il résulte du théorème de Hille-Yosida qu'il existe un semi-groupe sur $\overline{\mathcal{H}}$, fortement continu, dont la résolvante est $\tilde{V}$ sur $\overline{\mathcal{H}}$: nous noterons Q_t les restrictions de ses opérateurs au sous-espace invariant $\mathcal{H}$; les opérateurs Q_t sont positifs, comme on peut le voir par exemple par la formule exponentielle de Hille suivante :

$$Q_t f = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}\, V^{\left(\frac{n}{t}\right)}\right]^n f.$$

Notre but est de chercher des conditions sous lesquelles on puisse étendre les opérateurs Q_t à $\mathcal{C}'$, de manière à obtenir un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$.

Montrons que, pour tout λ, et grâce à l'hypothèse de subordination, la fonction $U^{\lambda}f - V^{\lambda}f$ est λ-surmédiane par rapport à $\tilde{U}$ si f est positive; cela résulte de ce que :

$$\begin{aligned}(U^{\lambda}f - V^{\lambda}f) - \mu U^{\lambda+\mu}(U^{\lambda} - V^{\lambda})f \\ &\geqslant (U^{\lambda} - V^{\lambda})f - \mu U^{\lambda+\mu}U^{\lambda}f + \mu V^{\lambda+\mu}V^{\lambda}f \\ &= U^{\lambda+\mu}f - V^{\lambda+\mu}f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Et en un point x de $\mathfrak{L}$ le premier membre $\to 0$, lorsque $\mu \to \infty$, car

$$(I - \mu U^{\lambda+\mu})(U^{\lambda} - V^{\lambda})f \leqslant (I - \mu U^{\lambda+\mu})(U^{\lambda} - V^{\lambda})1$$

si $0 \leqslant f \leqslant 1$, et cette expression tend vers 0 en x [1].

Nous allons commencer par raisonner dans le cas où $\mathfrak{L} = X$. Nous ramènerons plus loin à celui-ci des cas plus généraux. Soit $\mathcal{E}^{\lambda}_{++}$ le cône des fonctions λ-excessives par rapport à $\tilde{V}$, qui sont continues à droite sur presque toutes les trajectoires

[1] Autrement dit : $U^{\lambda}f - V^{\lambda}f$ est égale, aux points de $\mathfrak{L}$, à sa régularisée λ-excessive.

du processus $\{X_t\}$; $\mathcal{E}^\lambda$ l'espace vectoriel des différences de deux fonctions de $\mathcal{E}^\lambda_{++}$: $\mathcal{H}$ y est contenu. Soit enfin $\mathcal{E}$ la réunion des $\mathcal{E}^\lambda$ et $\mathcal{E}^\lambda_+$ son cône positif.

a) Remarquons maintenant que, si $f \varepsilon \mathcal{H}_+$, la fonction $U^\lambda(x, f) - V^\lambda(x, f)$ est complètement monotone. D'après le théorème de S. Bernstein, elle est donc égale à la transformée de Laplace d'une mesure positive sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est la transformée de Laplace de la fonction $P_t(x, f) - Q_t(x, f)$, cette fonction doit être positive presque partout — donc partout puisqu'elle est continue à droite. Autrement dit, $Q_t f \leqslant P_t f$.

b) Il en résulte immédiatement que si des fonctions h_n de $\mathcal{H}$ tendent en croissant vers une fonction h, les $Q_t h_n$ ont une limite. Désignons-la par $Q_t h$, bien qu'il ne soit pas clair pour l'instant qu'elle est indépendante de la suite choisie. Cependant, si les h_n sont λ-excessives par rapport à $\tilde{V}$, h l'est aussi, la fonction de t $e^{-\lambda t} Q_t h$ est décroissante. En tant que limite croissante des $e^{-\lambda t} Q_t h_n$, fonctions continues de t, elle est semi-continue inférieurement : elle est donc continue à droite en t. $Q_t h$ est alors la seule fonction continue à droite dont la transformée de Laplace est $V^\mu h$, elle est donc indépendante de la suite h_n qui converge vers h.

c) Nous venons en fait de prolonger les Q_t à $\mathcal{E}^\lambda_{++}$: en effet, toute fonction f de ce cône est limite d'une suite croissante de fonctions de la forme $V^\lambda[\mu(f - \mu V^{\lambda+\mu} f)]$, qui sont des fonctions λ-excessives de $\mathcal{H}_+$. Les Q_t se prolongent alors par linéarité en un semi-groupe sur $\mathcal{E}^\lambda$, et donc sur $\mathcal{E}$, qui est la réunion de la famille croissante des $\mathcal{E}^\lambda$.

d) Le raisonnement de (*a*) montre alors à nouveau que, si $f \varepsilon \mathcal{E}_+$, $Q_t f \leqslant P_t f$ — cela, grâce à la continuité à droite de f sur les trajectoires du processus X_t.

e) Montrons que $\mathcal{E}$ est réticulé : il nous suffit de raisonner sur deux différences de fonctions λ-excessives p.r., à $\tilde{V}$ (pour λ assez grand) $a - b$, $c - d$; il est clair que si ces différences sont p.s. continues à droite sur les trajectoires du processus $\{X_t\}$, leur inf. point par point l'est aussi. D'autre part, cet inf. est égal à $\inf[a + d, c + b] - (b + d)$, qui est une différence de fonctions λ-excessives p.r. à $\tilde{V}$.

f) Par conséquent, pour chaque x, l'application $f \to Q_t(x, f)$ est une mesure de Daniell sur l'espace réticulé $\mathcal{E}$, ainsi d'ailleurs que $f \to P_t(x, f)$: effectuons le prolongement de toutes deux — nous atteignons tout l'espace $\mathcal{G}'$, du fait que, si $f \in \mathcal{C}_0$, $f = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V^\lambda f$. (Pour le voir, il suffit de prendre une fonction f comprise entre 0 et 1, et de remarquer que

$$f - \lambda V^\lambda f = (f - \lambda U^\lambda f) + (\lambda U^\lambda - \lambda V^\lambda) f,$$

dont le second terme est majoré par $\lambda(U^\lambda - V^\lambda)1$). Il est immédiat que le prolongement donne bien un semi-groupe, et la seule condition qui reste à vérifier est la continuité à droite de sa masse totale. Or on a $Q_t 1 \leqslant 1$, donc la fonction $Q_t 1$ est décroissante, et admet une limite lorsque $t \to 0$. Cette limite est forcément la même que celle de $\lambda V^\lambda 1$ lorsque $\lambda \to \infty$, c'est-à-dire 1.

Montrons maintenant comment on peut ramener au cas que nous venons d'étudier quelques autres cas; faisons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *Soit un λ_0 fixé, et p la fonction caractéristique de l'ensemble des points x tels que* $V^{\lambda_0}(x, 1) > 0$: *alors* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V^\lambda 1 = p$.

En outre, la fonction $V^{\lambda_0}1$ *est telle que :*

$$\lim_{t\to 0} P_t(x, V^{\lambda_0}1) = 0 \quad \textit{aux points } x \textit{ où} \quad V^{\lambda_0}1 = 0.$$

Autrement dit : si $x \notin \mathfrak{X}$, $V^{\lambda_0}1$ est nulle en x, et $p = \chi_{\mathfrak{X}}$. D'autre part, la fonction $U^{\lambda_0}1 - V^{\lambda_0}1$ est λ_0-excessive p.r. à $\tilde{V}$. On en déduira aisément les propriétés suivantes : pour tout λ, $V^\lambda(1 - p) = 0$, et donc pour toute f de $\mathcal{G}'$, $V^\lambda(f) = V^\lambda(p.f)$; pour toute fonction f de $\mathcal{G}'$, la fonction $V^\lambda f$ est continue à droite sur les trajectoires du processus $\{X_t\}$; l'ensemble $\mathfrak{X}$ est presque borélien et finement ouvert. Nous désignerons par T le temps d'entrée dans son complémentaire, par $\{R_t\}$ le semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$ associé au temps terminal T, et par $\tilde{W} = \{W^\lambda\}$ la résolvante de ce semi-groupe : si nous pouvons démontrer que $\{V^\lambda\}$ est une résolvante subordonnée à $\{W^\lambda\}$, il nous suffira d'appliquer la théorie précédente, en remplaçant X par $\mathfrak{X}$, et P_t par R_t : $\mathfrak{X}$ n'est pas localement compact en général, mais cela ne vient créer que des difficultés mineures.

Or on a :

$$W^\lambda - V^\lambda = U^\lambda - P_T^\lambda U^\lambda - V^\lambda.$$

Comme V^λ est nulle sur $X - \mathfrak{T}$, ensemble finement fermé, c'est aussi :

$$= U^\lambda - V^\lambda - P_T^\lambda(U^\lambda - V^\lambda) \geqslant 0,$$

puisque $(U^\lambda - V^\lambda)f$ est λ-excessive p.r., à $\tilde{U}$ si $f \geqslant 0$.

Le lecteur pourra remarquer que notre hypothèse est une condition nécessaire et suffisante (peu satisfaisante) pour l'existence d'un semi-groupe subordonné exact dont la résolvante soit $\tilde{V}$. Nous ne donnons ci-dessous qu'un énoncé partiel :

THÉORÈME 5. 1. — *Pour qu'une résolvante* $\tilde{V} = \{V^\lambda\}_{\lambda>0}$ *subordonnée à* $\tilde{U} = \{U^\lambda\}$, *soit la famille des potentiels d'un semi-groupe subordonné à* $\{P_t\}$, *pour lequel tous les points de l'espace sont permanents, il faut et il suffit que la limite de* $\lambda V^\lambda 1$, *lorsque* $\lambda \to \infty$, *soit égale à* 1(1).

(1) Note sur les épreuves : nous avons pu établir l'existence d'un semi groupe exact subordonné $\{Q_t\}$ dont la résolvante est $\{V^\lambda\}$ sous l'hypothèse suivante, plus naturelle que la précédente : pour tout λ, toute $f \in \mathcal{C}_+^{\prime}$, la fonction $U^\lambda f - V^\lambda f$ est λ-excessive (« résolvante exacte »).

DEUXIEME PARTIE

FONCTIONNELLES ADDITIVES ET POTENTIELS

1. — Une hypothèse supplémentaire.

1. Définition 1. 1. — *Soit* A *une partie de* X. *On dit que* A *est un ensemble semi-polaire, s'il existe une suite d'ensembles* B_n, *presque analytiques, et effilés en tout point de* X, *telle que que* $A \subset \bigcup_n B_n$. *On dit que* A *est un ensemble polaire, s'il existe un ensemble presque-analytique* B *tel que* $A \subset B$, *et que le temps d'entrée dans* B *soit p.s., infini pour toute mesure* P^ν *sur* Ω^*.

Remarques. — 1) Un ensemble polaire est semi-polaire. La réciproque est vraie dans le cas du processus du mouvement brownien, mais ne l'est pas en général. En théorie classique du potentiel, une propriété $\mathbf{P}(x)$ qui a lieu en tout point de X, sauf peut-être aux points d'un ensemble polaire, est dite avoir lieu quasi-partout (q.p.). Nous réserverons ici cette expression aux propriétés qui ont lieu hors d'un ensemble *semi-polaire.*

2) Hunt a montré (1) qu'un ensemble semi-polaire est rencontré suivant un ensemble dénombrable par presque toute trajectoire du processus. Il en résulte qu'un ensemble semi-polaire est un ensemble de potentiel nul, ou encore qu'une propriété qui a lieu q.p. a lieu p.p. (presque partout). Il est intéressant de savoir aussi que l'ensemble des points où une fonction excessive finie p.p. est égale à $+\infty$ est un ensemble polaire (2).

(1) Hunt [I], p. 56.
(2) Hunt [I], p. 70. Cf. aussi la démonstration du théorème 5.11 de ce travail.

3) L'intérêt qu'il y a à envisager des ensembles semi-polaires apparaît dans le résultat suivant, dû à Doob [1] : soit u_n une suite décroissante de fonctions excessives. Sa limite u est une fonction surmédiane (finie ou non) qui ne diffère de sa régularisée excessive qu'aux points d'un ensemble semi-polaire. C'est une généralisation du théorème de convergence classique de la théorie du potentiel.

2. Dans toute cette seconde partie, nous supposerons que le semi-groupe sous-markovien $\{P_t\}$ vérifie les hypothèses de la première partie (voir § 1, nº 5), et la condition supplémentaire suivante :

Hypothèse (L). — *Il existe une mesure de Radon positive* ζ *sur* X, *et un* $\lambda > 0$, *tels que la seule fonction* λ*-excessive et nulle* ζ*-presque-partout soit la fonction* 0. *On peut toujours supposer* ζ *bornée, ce que nous ferons.*

Cette hypothèse est vérifiée, par exemple, lorsque les fonctions λ-excessives sont semi-continues inférieurement : il suffit alors, en effet, de choisir une mesure ζ qui charge les points d'un ensemble dénombrable partout dense dans X. Dans le cas newtonien, il suffit même de choisir une masse unité ε_x quelconque. Il est surprenant de voir combien cette hypothèse, assez faible, permet de développer les résultats de Hunt [I], et de les rapprocher de ceux de Hunt [III].

Nous allons commencer par construire une mesure qui jouit d'une propriété plus forte que (L); soit ξ le potentiel ζU^λ. Si A est un ensemble ξ-négligeable, son potentiel $U^\lambda A$ est une fonction λ-excessive et ζ-négligeable, en vertu de l'identité $\langle \zeta, U^\lambda A\rangle = \langle \zeta U^\lambda, A\rangle = \langle \xi, A\rangle$: il est donc nul d'après (L). Comme il est clair qu'un ensemble de potentiel nul est ξ-négligeable, il en résulte que les ensembles ξ-négligeables et les ensembles de potentiel nul coïncident. *Nous désignerons par* ξ *dans la suite une mesure positive quelconque possédant cette propriété.* La mesure de Lebesgue, ou toute mesure qui lui est équivalente, la possède dans les cas classiques.

Nous signalerons, parmi les résultats qui suivent, ceux qui sont indépendants de l'hypothèse (L).

[1] Non publié à notre connaissance (Avril 1961). Voir le Séminaire [II].

Le théorème suivant tiendra lieu dans la suite du « lemme topologique » de Choquet ([1]). Il ne nous servira d'ailleurs pas de manière essentielle.

THÉORÈME 1. 1. — 1° *Soit* $\{u_i\}_{i\in I}$ *une famille filtrante croissante de fonctions* λ*-excessives* ($\lambda \geqslant 0$). *Si l'hypothèse* (L) *est vérifiée, il existe une partie dénombrable* J *de* I *telle que* $\sup_{i\in J} u_i = \sup_{i\in I} u_i$. *En particulier,* $\sup_{i\in I} u_i$ *est une fonction* λ*-excessive.*

2° *Soit* $\{u_i\}_{i\in I}$ *une famille quelconque de fonctions* λ*-excessives. Si l'hypothèse* (L) *est vérifiée, il existe une partie dénombrable* J *de* I *telle que la régularisée* λ*-excessive de* $\inf_{i\in J} u_i$ *minore* $\inf_{i\in I} u_i$. *En particulier, il en résulte que* $\inf_{i\in I} u_i$ *est égale quasi-partout à une fonction* λ*-excessive.*

Démonstration. — Comme, lorsque u et v sont des fonctions λ-excessives, $\inf(u, v)$ est aussi une fonction λ-excessive, il est bien clair, d'une part que l'on peut se ramener dans les deux cas à des fonctions u_i bornées par une constante (et donc ξ-intégrables, si ξ a été choisie bornée); d'autre part, que dans le cas 2°, on peut supposer la famille filtrante décroissante. Nous allons démontrer la première partie de l'énoncé seulement, et laisser la seconde au soin du lecteur.

A toute famille F de fonctions λ-excessives, filtrante croissante, associons la famille F° des enveloppes supérieures des sous-familles filtrantes croissantes et dénombrables de F. Il est clair que F° est encore une famille filtrante croissante de fonctions λ-excessives (car, si u_n et v_n sont deux familles filtrantes croissantes de fonctions de F ([2]), on peut construire par récurrence une suite w_n de fonctions de F, telle que les w_n croissent avec n, et que $\sup(u_n, v_n) \leqslant w_n$. Alors $\sup_n u_n$ et $\sup_n u_n$ sont majorés par $\sup_n w_n$, et F et F° ont même enveloppe supérieure. Construisons alors des familles F_α et des fonctions u_α en utilisant les règles suivantes de récurrence transfinie: 1) F_0 est la famille $\{u_i\}_{i\in I}$. 2) Si F_α est déjà défini, alors $F_{\alpha+1} = (F_\alpha)^\circ$. 3) Si β est un ordinal limite, et si les F_α, $\alpha < \beta$ sont définis, alors $F_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} F_\alpha$. D'autre part, u_0 est une fonction

([1]) Voir Brelot-Choquet [I].
([2]) L'application $n \to u_n$ n'est pas supposée croissante.

quelconque de F_0. Si u_α a déjà été défini, et appartient à F_α, alors $u_{\alpha+1} = u_\alpha$ si u_α est l'enveloppe supérieure de F_0; sinon, soit v_α une fonction de $F_{\alpha+1}$ qui majore strictement u_α en un point au moins, et w_α une majorante commune à u_α et v_α, appartenant à $F_{\alpha+1}$: nous prendrons $u_{\alpha+1} = w_\alpha$. Enfin, si β est un ordinal limite (dénombrable, bien entendu) et les u_α, $\alpha < \beta$ sont déjà définis, on prend $u_\beta = \sup\limits_{\alpha<\beta} u_\alpha$. Ces constructions peuvent être effectuées pour tous les ordinaux dénombrables. Or les u_α croissent avec α, leurs intégrales par rapport à la mesure ξ sont uniformément bornées, et $u_\alpha = u_{\alpha+1}$ si et seulement leurs intégrales sont égales, d'après la propriété fondamentale de ξ. Il en résulte qu'il existe un ordinal θ tel que $u_\theta = u_{\theta+1}$, et cela signifie que $u_\theta = \sup\limits_{i\in I} u_i$.

La seconde partie de l'énoncé se démontre de la même manière, en prenant la précaution de régulariser les enveloppes inférieures des familles dénombrables à chaque étape de la construction.

3. Nous appellerons ordre fort (par opposition à l'ordre « habituel » ou « faible ») sur l'ensemble des fonctions λ-excessives finies p.p., la relation d'ordre, notée $\ll$, définie par :

$$h \ll g \Longleftrightarrow g - h \quad \text{est une fonction } \lambda\text{-excessive.}$$

Sous l'hypothèse (L), on peut démontrer que l'ensemble des fonctions λ-excessives finies presque-partout (et aussi l'espace vectoriel des différences de telles fonctions) est réticulé, et même complètement réticulé, pour chacun de ces deux ordres. Nous allons seulement prouver ici le :

THÉORÈME 1. 2. — *Soient u et v deux fonctions excessives finies. Il existe une plus petite fonction excessive w qui majore u et v au sens fort. Si r est une fonction excessive telle que $u \ll r$, $v \ll r$, alors $w \ll r$. (Autrement dit, w est la borne supérieure forte de u et v.)*

Démonstration. — Supposons d'abord que l'opérateur potentiel U soit borné. On a alors la relation $(I + \lambda U)(I - \lambda U^\lambda)f = f$.

Soient h et k deux fonctions excessives qui majorent u et v au sens fort. On a alors $u \ll \inf[h, k]$ et $v \ll \inf[h, k]$, autrement dit, l'ensemble des majorantes fortes finies de u et v, qui est non vide puisqu'il contient $u + v$, est filtrant décroissant. D'après le théorème 1. 1, on voit immédiatement qu'il contient un plus petit élément w.

Soit alors r une majorante forte de u et v; $(I - \lambda U^\lambda)r$ est une majorante λ-forte des fonctions λ-excessives $(I - \lambda U^\lambda)u$, $(I - \lambda U^\lambda)v$. Soit k la plus petite majorante λ-forte de ces deux fonctions : on a l'inégalité $k \leqslant (I - \lambda U^\lambda)w$ d'après ce qui précède, et par conséquent $(I + \lambda U)k \leqslant w$. D'autre part, $u \ll (I + \lambda U)k$, $v \ll (I + \lambda U)k$; $(I + \lambda U)k$ est donc égal à w, et $(I - \lambda U^\lambda)w$ est bien la plus petite majorante λ-forte de $(I - \lambda U^\lambda)u$ et $(I - \lambda U^\lambda)v$. Si donc r est une majorante forte de u et v, on a pour tout λ la relation $(I - \lambda U^\lambda)(r - w) \geqslant 0$, et cela montre que la fonction $r - w$ est excessive.

Passons maintenant au cas général : le théorème est vrai pour les U^λ, $\lambda > 0$, pour lesquels la condition imposée au début de la démonstration est vérifiée. Pour chaque λ, u et v possèdent donc une plus petite majorante λ-forte w^λ. Lorsque $\lambda \to 0$, les w^λ tendent en croissant vers une limite w, majorée par $u + v$, et l'on vérifie très facilement que w est bien la borne supérieure forte de u et v.

4. Soit E un ensemble presque analytique, T_E le temps d'entrée dans E, P_E l'opérateur associé à ce temps d'entrée (première partie, § 1, n° 6), et Φ_E^λ la fonction $P_E^\lambda 1$. C'est une fonction λ-excessive, et un point x est régulier pour E si et seulement si $\Phi_E^\lambda(x) = 1$ $(\lambda > 0)$. L'adhérence fine $\overline{E}$ de E est donc un ensemble presque analytique, et les opérateurs P_E^λ et $P_{\overline{E}}^\lambda$ sont identiques. Comme Φ_E^λ est l'enveloppe supérieure des Φ_K^λ (K compact contenu dans E) et l'enveloppe inférieure régularisée des Φ_G^λ (G voisinage ouvert de E) [1], il résulte du théorème 1. 1 que E peut être encadré entre un K_σ, A, et un G_δ, B, tels que $\Phi_A^\lambda = \Phi_B^\lambda$. En particulier, tout ensemble polaire (semi-polaire) est contenu dans un ensemble borélien polaire (semi-polaire).

Parmi les nombreux résultats que l'on peut déduire du théorème 1. 1, qui concernent la topologie fine, nous aurons à utiliser au § 6 la propriété suivante. Soit E un ensemble presque analytique, tel que les fonctions $(P_E^\lambda)^n 1$ tendent vers 0

[1] Le lecteur est prié de se reporter à Hunt [I], et au Séminaire [II].

presque partout lorsque $n \to \infty$; E est alors semi-polaire. On peut supposer E finement fermé d'après ce qui précède, et il est clair que E ne peut contenir aucun ensemble F finement parfait. Le théorème sera démontré si nous prouvons que tout ensemble E presque analytique et finement fermé est réunion d'un ensemble finement parfait et d'un ensemble semi-polaire. Construisons alors par récurrence transfinie les fonctions u_i et les ensembles E_i suivants. $E_0 = E$, et $u_1 = \Phi^\lambda_E$; si u_i a été construite, $E_i = \{x : u_i(x) = 1\}$, et $u_{i+1} = \Phi^\lambda_{E_i}$ (E_{i+1} est donc le « dérivé fin » de E_i); si j est un ordinal limite, et si les u_i, $i < j$, ont été construits, u_j est l'enveloppe inférieure régularisée des u_i, $i < j$. D'après le théorème 1. 1, il existe un ordinal α tel que u_α soit égal à $u_{\alpha+1}$: le lecteur vérifiera aisément que l'ensemble E_α est finement parfait, et que l'ensemble $E - E_\alpha$, réunion dénombrable d'ensembles de la forme $E_i - E_{i+1}$ dont chacun est semi-polaire, est lui-même semi-polaire.

2. — Classification des fonctions excessives.

1. Dans tout ce paragraphe, $S(\omega)$ désignera la durée de vie de la trajectoire ω du processus $\{X_t\}$, c'est-à-dire le temps d'entrée de cette trajectoire dans l'ensemble $\{\partial\}$. Rappelons que toutes les fonctions excessives sont nulles par convention au point ∂, de sorte que $f \circ X_S(\omega) = 0$. Soit T un temps d'arrêt; la notation $f \circ X_{T-}(\omega)$ désignera la limite à gauche de l'application $t \to f \circ X_t(\omega)$ à l'instant $T(\omega)$ — limite qui est peut-être distincte de la valeur $f \circ [X_{T-}(\omega)]$ de f au point $X_{T-}(\omega)$, limite à gauche de la trajectoire ω à l'instant $T(\omega)$.

Nous dirons qu'un temps d'arrêt T est *accessible* s'il existe, pour toute mesure initiale ν, une suite croissante de temps d'arrêt T_n qui tendent P^ν — p.s., vers T *par valeurs strictement inférieures à* T. Par exemple, tout temps d'arrêt constant est accessible, et le temps d'arrêt défini comme le premier instant t pour lequel $d[X_{t-}(\omega), X_t(\omega)] > \varepsilon$ (« instant du premier saut de la trajectoire, d'amplitude $> \varepsilon$ ») est inaccessible, comme on le voit en utilisant le théorème de Blumenthal. Le lecteur pourra se persuader du rôle fondamental que joue la notion d'accessibilité, en lisant par exemple le paragraphe 6 de Hunt [I].

Si T et T' sont deux temps d'arrêt accessibles, il est clair que sup[T, T'] et inf[T, T'] sont aussi des temps d'arrêt accessibles. Si f est une fonction excessive, et T un temps d'arrêt accessible, on a, pour tout x, l'inégalité $E^x[f \circ X_{T-}] \leqslant f(x)$: cette inégalité peut n'être pas vraie pour un temps d'arrêt quelconque. Il est facile de voir aussi que la limite d'une suite croissante de temps d'arrêt accessibles est accessible.

Le lemme suivant jouera dans la suite un rôle important :

Lemme 2. 1 (1). — *Soit g une fonction excessive, et* $T(\omega)$ *le premier instant t pour lequel : 1° la trajectoire associée à ω est continue*; 2° $|g \circ X_t(\omega) - g \circ X_{t-}(\omega)| > \varepsilon$. *Le temps d'arrêt* T *est accessible.*

Démonstration. — Il est clair d'abord que T est bien défini, car l'ensemble des points t pour lesquels la condition (2) est réalisée est discret sur presque toute trajectoire ω, et il existe donc, parmi ses éléments, un premier instant pour lequel la condition (1) est vérifiée.

Partageons X en une suite d'ensembles

$$A_k = \{x : k\varepsilon/8 \leqslant g(x) < (k+1)\,\varepsilon/8\}$$

(k entier positif). Définissons par récurrence des temps d'arrêt de la manière suivante : 1) $H_0 = 0$; 2) H est, si $X_0(\omega) \in A_k$, le temps d'entrée dans l'ensemble $E_k = \{x : |g(x) - k\varepsilon/8| \geqslant \varepsilon/4\}$; 3) Si $H_n(\omega) = T(\omega)$, alors $H_{n+1}(\omega) = T(\omega)$; 4) Si $H_n(\omega) < T(\omega)$, alors $H_{n+1}(\omega) = H(\theta_{H_n}\omega)$ (2).

Il est tout d'abord clair que $H_1(\omega) = H(\omega) \leqslant T(\omega)$. En effet, de deux choses l'une : ou bien $|g \circ X_{T-} - g \circ X_0| > \varepsilon/2$, alors, comme $X_0 \in A_k$, $|g \circ X_{T-} - k\varepsilon/8| > \varepsilon/4$, et alors $H < T$; ou bien $|g \circ X_{T-} - g \circ X_0| \leqslant \varepsilon/2$, il en résulte que

$$|g \circ X_T - g \circ X_0| > \varepsilon/2,$$

donc $|g \circ X_T - k\varepsilon/8| \geqslant \varepsilon/4$ et $H \leqslant T$. D'autre part, la

(1) Ce résultat est indépendant de l'hypothèse (L).

(2) Si R et T sont des temps d'arrêt, une expression telle que $X_R(\theta_T\omega)$ désigne, conformément aux principes de notation du § 1 de la première partie, la variable aléatoire $X_{R(\theta_T\omega)}(\theta_T\omega) = X_{T+R(\theta_T)}(\omega)$.

fonction g ne présentant pas de discontinuités de seconde espèce sur les trajectoires, comme $|g \circ X_H - g \circ X_0| \geqslant \varepsilon/8$, les H_i ne peuvent s'accumuler à distance finie, et il en résulte que, ou bien il existe un n tel que $H_n(\omega) = T(\omega)$, ou bien $T(\omega) = \infty$ et $\lim H_n(\omega) = \infty$.

Raisonnons alors par récurrence: supposons que nous ayons construit une suite $\{S_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, telle que: les S_n^p croissent avec n; $\lim\limits_n S_n^p = H_p$ P^ν-p.s.; pour P^ν-presque tout ω tel que $T(\omega) < \infty$ et $T(\omega) = H_p(\omega)$, on a $S_n^p(\omega) < T(\omega)$ pour tout n. Tout revient à montrer que nous pouvons construire des S_n^{p+1} possédant les mêmes propriétés relativement à H_{p+1}. Nous pourrons en effet construire par récurrence les S_n^p pour toutes les valeurs de p et n, poser $S_n = \sup(S_n^1 \ldots S_n^n)$, puis $T_n = \inf(S_n, n)$: les T_n rempliront les conditions de la définition de l'accessibilité.

Soit μ la mesure dont la valeur sur un ensemble B de $\mathcal{B}'$ est égale à $P^\nu[X_{H_p}(\omega) \in B,\ H_p(\omega) < T(\omega)]$. Soit μ_k la mesure $\chi_{A_k}.\mu$. Il existe une suite d'ouverts décroissants $\{G_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, contenant E_k, et tels que le temps d'entrée dans $G_{k,n}$ tende en croissant, P^{μ_k} - p.s., vers le temps d'entrée H dans E_k — cela, grâce au fait que la mesure initiale μ_k ne charge pas l'ensemble E_k [1]. Soit $R_n(\omega)$ la variable aléatoire égale au temps d'entrée dans $G_{k,n}$ si $X_0(\omega) \in A_k$; c'est un temps d'arrêt inférieur à H, et qui tend vers H en croissant. De plus, si $H(\omega) = T(\omega)$, comme $T(\omega)$ est par définition un point de continuité de la trajectoire ω, comme $X_T(\omega) \in E_k$, et par conséquent est intérieur à l'ensemble ouvert $G_{k,n}$, la trajectoire ω doit avoir rencontré $G_{k,n}$, avant l'instant $T(\omega)$. Par conséquent, si $H(\omega) = T(\omega)$, $R_n(\omega) < T(\omega)$ pour tout n. Posons maintenant:

$$\begin{aligned} S_n^{p+1}(\omega) &= S_n^p(\omega) && \text{si} \quad S_n^p(\omega) < H_p(\omega) \\ S_n^{p+1}(\omega) &= H_p(\omega) + R_n(\theta_{H_p}\omega) && \text{si} \quad S_n^p(\omega) = H_p(\omega). \end{aligned}$$

Il est facile de voir, comme d'après l'hypothèse de récurrence $S_n^p(\omega) = H_p(\omega) \Longrightarrow H_p(\omega) < T(\omega)$, comme aussi sur l'ensemble où $H_p(\omega) < T(\omega)$ on a

$$H_{p+1}(\omega) = H_p(\omega) + H(\theta_{H_p}\omega), \quad T(\omega) = H_p(\omega) + T(\theta_{H_p}\omega).$$

[1] Voir Hunt [I], p. 55.

que les S_n^{p+1} sont des temps d'arrêt [1] qui répondent bien aux conditions exigées. D'après les remarques faites plus haut, la démonstration est alors achevée.

2. Soit $\{K_n\}$ une suite de compacts de X, telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et que $\bigcup_n K_n = X$. Soit S'_n le temps d'entrée dans $\hat{X} - K_n$, et $S_n = \inf[S'_n, n]$. Posons aussi $S_0 = 0$. Les S_n tendent en croissant vers une limite $\leqslant S$, et on déduit immédiatement du théorème de Blumenthal que cette limite est égale à S pour presque toute trajectoire ω. De plus, si $S(\omega) = \infty$, ou si $X_{S\_}(\omega) = \partial$, les $S_n(\omega)$ sont strictement inférieurs à $S(\omega)$. On pourra dire qu'une trajectoire ω est : absorbée à distance finie si $S(\omega) < \infty$ et $X_{S\_}(\omega) \in X$; absorbée à l'infini [2] si $S(\omega) < \infty$ et $X_{S\_}(\omega) = \partial$; non absorbée si $S(\omega) = \infty$.

DÉFINITION 2. 1. — *On dit qu'une fonction excessive f est un potentiel si* $\lim_n f \circ X_{S_n}(\omega) = 0$ *p.s. pour toute mesure initiale. On dit que f est harmonique si l'on a, pour tout x et tout n, la relation* $f(x) = E^x[f \circ X_{S_n}]$.

DÉFINITION 2. 2. — *On dit qu'une fonction excessive f appartient à la classe* (D) *si, pour toute mesure initiale ponctuelle* ε_x *et toute suite de temps d'arrêt* $\{T_n\}$, *les variables aléatoires* $f \circ X_{T_n}$ *sont* P^x*-uniformément intégrables.*

DÉFINITION 2. 3. — *On dit qu'une fonction excessive f est uniformément excessive si elle est bornée, et si, lorque* $t \to 0$, $P_t f \to f$ *uniformément sur* X.

DÉFINITION 3. 4. — *On dit qu'une fonction excessive f est régulière si, quelle que soit la mesure initiale* ν, *la fonction* $t \to f \circ X_t(\omega)$ *est* P^ν — *p.s., continue en tout point t où la fonction* $t \to X_t(\omega)$ *l'est.*

(1) En voici sommairement la démonstration : on remarque d'abord que, si T et T' sont des temps d'arrêt, l'ensemble $\{T < T'\}$ appartient à F_T, comme on le voit en approchant T' du côté droit par des temps d'arrêt qui ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs. L'ensemble $\{S_n^{p+1} < a\}$ est alors la réunion de l'ensemble $\{S_n^p < H_p\} \cap \{S_n^p < a\}$, qui appartient à F_a du fait que l'ensemble $\{S_n^p < H_p\}$ appartient à $F_{S_n^p}$ d'après la remarque qui précède; et de l'ensemble $\{S_n^p = H_p,\ H_p = a\} \cap \{H_p + R_n(\theta_{H_p}) < a\}$, intersection de deux ensembles dont chacun appartient à F_a.

(2) Dans certains cas, il sera plus naturel de dire « à la frontière » plutôt que « à l'infini ».

Le reste de ce paragraphe va être consacré maintenant à l'étude des relations qui existent entre ces quatre définitions.

3. *Remarques.* — Une fonction de la classe (D) est finie. Une fonction excessive majorée par une fonction excessive de la classe (D) appartient à la classe (D). Une constante appartient à la classe (D).

On ne sait pas si une fonction excessive f telle que les variables aléatoires $f \circ X_t$ soient uniformément intégrables pour toute mesure initiale ponctuelle, appartient à la classe (D).

Théorème 2. 2. — *Soit f une fonction excessive finie, et R_n le temps d'entrée dans l'ensemble $\{y : f(y) > n\}$.*

1° *Pour que f appartienne à la classe* (D), *il faut et il suffit que l'on ait, pour tout x, $\lim\limits_n E^x[f \circ X_{R_n}] = 0$.*

2° *Si cette condition est réalisée, les variables aléatoires $f \circ X_{T_n}$ sont uniformément intégrables, quelle que soit la suite de temps d'arrêt T_n et la mesure initiale ν telle que $\nu(f) < \infty$.*

3° *Pour qu'une fonction excessive f soit un potentiel de la classe* (D), *il faut et il suffit que l'on ait, pour tout x et toute suite de temps d'arrêt T_n qui tendent en croissant vers la durée de vie* S, $\lim\limits_n E^x[f \circ X_{T_n}] = 0$.

Démonstration. — D'après une inégalité de la théorie des supermartingales (¹) :

$$n.P^\nu [\sup_{0 \leqslant t < \infty} f \circ X_t > n] \leqslant E^\nu[f \circ X_0].$$

Il en résulte que pour presque toute trajectoire ω on a

$$R_n(\omega) = \infty$$

dès que n est assez grand. Par convention, $f \circ X_{R_n}(\omega)$ est alors nul. Si f appartient à la classe (D), on peut passer à la limite sous les symboles d'espérance mathématique, et en déduire que $E^x[f \circ X_{R_n}] \to 0$. Comme les R_n croissent, $E^x[f \circ X_{R_n}]$ décroît (²), et le théorème de Lebesgue montre que $E^\nu[f \circ X_{R_n}] \to 0$.

Réciproquement, soit $\{T_k\}$ une suite de temps d'arrêt.

(¹) Voir Doob [I], p. 314. Il convient de tenir compte, pour obtenir l'inégalité ci-dessus, de la positivité de la supermartingale $f \circ X_t$.

(²) Voir Doob [I], § 11, et le Séminaire [II], exposé 4.

Pour que les variables aléatoires $f\circ X_{T_k}$ soient P^ν-uniformément intégrables, il faut et il suffit que les intégrales :

$$\int_{\{f\circ X_{T_k}>n\}} f\circ X_{T_k}\, dP^\nu$$

tendent vers 0 uniformément en k lorsque $n\to\infty$. Or, posons $T'_k(\omega) = T_k(\omega)$ si $f\circ X_{T_k}(\omega) > n$, et $T'_k(\omega) = \infty$ sinon; les $T'_k(\omega)$ sont des temps d'arrêt, et les intégrales ci-dessus sont égales aux $E^\nu[f\circ X_{T'_k}]$, quantités majorées par $E^\nu[f\circ X_{R_n}]$, puisque $R_n \leqslant T'_k$.

Les deux premières assertions de l'énoncé sont ainsi démontrées. La dernière est une conséquence immédiate de la possibilité de passer à la limite sous le symbole E lorsque les variables aléatoires sont uniformément intégrables, et du fait que la limite de f le long de la suite de temps d'arrêt envisagée est 0.

Théorème 2. 3. — *Soit f une fonction excessive finie. On appelle donnée frontière stochastique associée à f* (1) *la variable aléatoire* $b(\omega) = \lim\limits_n f\circ X_{S_n}(\omega)$ (2), *nulle par convention sur les trajectoires issues du point* ∂. *On appelle solution de Dirichlet associée à f* (1) *la fonction* $c(x) = E^x[b(\omega)]$ *sur* X. *Cette solution de Dirichlet est une fonction harmonique de la classe* (D), *qui admet même donnée frontière stochastique que f. La différence $f - c$ est un potentiel* (« *décomposition de Riesz* »).

Démonstration. — Remarquons que l'on a, si T est un temps d'arrêt : $b(\theta_T\omega) = b(\omega)$ si $T(\omega) < S(\omega)$, et $b(\theta_T\omega) = 0$ si $T(\omega) \geqslant S(\omega)$.

Alors : $P_T(x, c) = E^x[b(\theta_T\omega)] \leqslant c(x)$. Il en résulte immédiatement que c est excessive. Le lemme de Fatou montre que $E^x[b(\omega)] \leqslant \lim E^x[f\circ X_{S_n}]$, avec égalité si et seulement si les $f\circ X_{S_n}$ sont uniformément intégrables. La solution de Dirichlet est donc majorée par f, et égale à f si f est une fonction harmonique de la classe (D). D'autre part, on a :

$$P_{S_n}(x, c) = E^x[b(\theta_{S_n}\omega)] = E^x[b(\omega)]$$

(1) D'après une terminologie due à Doob.

(2) Le processus $f\circ X_{S_n}$ étant une super-martingale positive, cette limite existe bien, d'après les théorèmes de Doob (Doob [I], § 11. Voir aussi l'exposé 4 du Séminaire [II]).

car $S_n(\omega) < S(\omega)$ sur toute trajectoire pour laquelle $b(\omega) > 0$. La solution de Dirichlet c est donc harmonique. L'évaluation précédente de $P_T(x, c)$ montre encore que, si les R_n sont les temps d'arrêt utilisés dans le théorème précédent, $P_{R_n}(x, c) \underset{n\to\infty}{\to} 0$: autrement dit, c appartient à la classe (D). Enfin, si U est un événement antérieur à S_n, $\lim\limits_n c \circ X_{S_n}$ et b ont même intégrale sur U, et il en résulte immédiatement que la donnée frontière stochastique associée à $c(x)$ est encore $b(\omega)$.

Montrons que $f - c$ est une fonction excessive. Comme nous venons de voir que f et c ont même donnée frontière stochastique, $f - c$ sera alors un potentiel (de la classe (D) si f appartient à cette classe). Nous avons, si T est un temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} P_T f^x + c(x) - P_T c^x &= \int_{\{T<S\}} f \circ X_T \, dP^x + \int_{\{T \geq S\}} \lim_n f \circ X_{S_n} dP^x \\ &\leq \int_{\{T<S_n\}} f \circ X_T \, dP^x + \int_{\{S_n \leq T < S\}} f \circ X_T \, dP^x \\ &\quad + \int_{\{T \geq S_n\}} \lim_k f \circ X_{S_k} dP^x. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$ la seconde intégrale du second membre tend vers 0. L'événement $\{T \geq S_n\}$ est antérieur à S_n, et la dernière intégrale est donc majorée par $\int_{\{T\geq S_n\}} f \circ X_{S_n} dP^x$. La somme de cette intégrale et de la première est égale, si l'on pose $H = \inf(T, S_n)$, à $E^x[f \circ X_H] \leq f(x)$. Il en résulte bien que $c - P_T c \leq f - P_T f$.

Les théorèmes 2. 1 et 2. 2 sont indépendants de l'hypothèse (L).

4. Passons maintenant aux questions liées à la régularité.

THÉORÈME 2. 4. — *Soit g une fonction uniformément excessive. Pour toute suite de temps d'arrêt* T_n *qui croissent vers un temps d'arrêt* T, $\lim g \circ X_{T_n}(\omega)$ *est égal à* $g \circ X_T(\omega)$ *pour presque tous les* ω *tels que* $T(\omega) < \infty$, *quelle que soit la mesure initiale.*

Démonstration. — En remplaçant au besoin chaque T_n par $\inf[T_n, a]$, où a est une constante positive, on se ramène au cas où T est borné. Soit k un entier, U un événement antérieur à T_k, ε un nombre > 0, et $R_n = \sup[T_n + \varepsilon, T]$; R_n

est une variable aléatoire mesurable sur la tribu F_T. Nous avons, si $k \leqslant n$:

$$(1) \qquad \int_U g \circ X_{T_n+\varepsilon}\, dP^\nu = \int_U P_\varepsilon(X_{T_n},\ g)\, dP^\nu.$$

Supposons ν bornée; g estant uniformément excessive, $\|P_\varepsilon g - g\|$ peut être rendue très petite par un choix convenable de ε, et il en résulte que, ε étant ainsi choisi, les intégrales

$$(2) \qquad \int_U g \circ X_{T_n+\varepsilon}\, dP^\nu, \qquad \int_U g \circ X_{T_n}\, dP^\nu$$

diffèrent très peu l'une de l'autre, quel que soit n. Choisissons alors n assez grand pour que $T_n + \varepsilon$ dépasse T, sauf sur un ensemble de mesure très petite : comme g est bornée, la première intégrale diffère très peu de $\int_U g \circ X_{R_n}\, dP^\nu$, intégrale qui est elle-même égale à $\int_U P_{R_n - T}(X_T,\ g)\ dP^\nu$. Utilisons à nouveau le fait que g est uniformément excessive : comme $R_n - T \leqslant \varepsilon$; cette dernière intégrale diffère très peu de $\int_U g \circ X_T\, dP^\nu$. Autrement dit, en rapprochant de (2) le résultat obtenu, nous avons montré que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_U g \circ X_{T_n}\, dP^\nu = \int_U g \circ X_T\, dP^\nu.$$

Or $g \circ X_{T_n}(\omega)$ admet p.s., une limite $\gamma(\omega)$ lorsque $n \to \infty$, et, comme g est bornée, il en résulte que, pour tout événement U antérieur à l'un des T_k, $\gamma(\omega)$ et $g \circ X_T(\omega)$ ont même intégrale sur U. Or ces deux variables aléatoires sont mesurables sur la tribu engendrée par la réunion des F_{T_k}, c'est évident pour γ, et pour l'autre cela résulte du théorème de Blumenthal. Par conséquent, elles sont égales P^ν-p.s.

Cette démonstration est indépendante de l'hypothèse (L).

Corollaire 2. 4. 1. — *Soit g une fonction excessive quelconque, T_n une suite croissante de temps d'arrêt, T sa limite. Pour presque toute trajectoire ω telle que $T(\omega) < \infty$, on a l'inégalité* $g \circ X_T(\omega) \leqslant \lim_n g \circ X_{T_n}(\omega)$.

Démonstration. — Il existe une suite croissante de fonctions h_n, uniformément λ-excessives pour une valeur > 0

de λ (λ-potentiels de fonctions positives bornées) qui tend vers g en tout point. Ce résultat est d'ailleurs évident si les fonctions excessives sont semi-continues inférieurement.

COROLLAIRE 2. 4. 2. — *Sous les mêmes conditions, et si g appartient à la classe* (D), *pour que les $g \circ X_{T_n}$ tendent* P^x — p.s., *vers $g \circ X_T$ sur l'ensemble où* T *est fini, il faut et il suffit que* $E^x[g \circ X_{T_n}]$ *tende vers* $E^x[g \circ X_T]$.

Démonstration. — Conséquence immédiate du corollaire précédent.

THÉORÈME 2. 5. — *Pour qu'une fonction excessive g vérifie la condition de l'énoncé du théorème* 2. 4, *il faut et il suffit qu'elle soit régulière. En particulier, toute fonction uniformément excessive est régulière.*

Démonstration (indépendante de l'hypothèse (L)). — Il ne serait pas difficile de démontrer ce théorème sans utiliser le lemme 2. 1. Nous ne chercherons pas à le faire ici.

Il est clair tout d'abord que la régularité de g implique la condition envisagée. De deux choses l'une, en effet : ou bien $T(\omega)$ est un point de continuité de la trajectoire ω, les $X_{T_n}(\omega)$ tendent alors vers $X_T(\omega)$ et, g étant régulière,

$$g \circ X_{T_n}(\omega) \rightarrow g \circ X_T(\omega);$$

ou bien $T(\omega)$ est un point de discontinuité, les $T_n(\omega)$ sont p.s. égaux à $T(\omega)$ à partir d'un certain rang, en vertu du théorème de Blumenthal, et il n'y a rien à démontrer.

Réciproquement, tout revient à démontrer que, pour tout ε, le temps d'arrêt $T(\omega)$ défini comme le premier instant t où la trajectoire associée à ω est continue, et où

$$|g \circ X_t(\omega) - g \circ X_{t-}(\omega)| > \varepsilon,$$

est p.s. infini pour tout processus. Or cela résulte immédiatement de l'hypothèse faite sur g, et du fait que T est accessible, d'après le lemme 2. 1.

COROLLAIRE 2.5.1. — *Soit g une fonction excessive quelconque. Quelle que soit la mesure initiale ν, on a pour presque toute trajectoire ω, entre la limite à gauche $g \circ X_{t-}(\omega)$ et la valeur $g \circ X_t(\omega)$, l'inégalité $g \circ X_{t-}(\omega) \geqslant g \circ X_t(\omega)$ en tout point t où la trajectoire ω est continue.*

Démonstration. — Identique à celle du corollaire 2.4.1.

COROLLAIRE 2. 5. 2. — *Soit g une fonction excessive régulière; toute fonction excessive f telle que $f \ll g$ (ordre fort) est régulière.*

Démonstration. — Soit h la fonction excessive telle que $f + h = g$. En un point de continuité t d'une trajectoire ω, on a

$$g \circ X_{t-}(\omega) = g \circ X_t(\omega), \qquad h \circ X_{t-}(\omega) \geqslant h \circ X_t(\omega),$$

$f \circ X_{t-}(\omega) \geqslant f \circ X_t(\omega)$: il en résulte immédiatement que les deux dernières inégalités sont en fait des égalités.

COROLLAIRE 2. 5. 3. — *Soit g une fonction harmonique de la classe* (D) : *g est régulière.*

Démonstration. — Soit T_k une suite croissante de temps d'arrêt qui tendent vers T; nous voulons vérifier que les $g \circ X_{T_n}$ tendent vers $g \circ X_T$ p.s. Il nous suffit pour cela de raisonner sur les temps d'arrêt $H_n = \inf(T_n, S_k)$, $H = \inf(T, S_k)$, où les S_k sont les temps d'arrêt définis au début du n° 2 de ce paragraphe. Or $g(x) = E^x[g \circ X_{S_k}]$, il en résulte donc que $E^x[g \circ X_{H_n}] \to E^x[g \circ X_H]$, les deux membres étant égaux à $g(x)$; le corollaire 2. 4. 1 permet alors de conclure. Le résultat ci-dessus est d'ailleurs vrai même si g n'appartient pas à la classe (D) — car, en vertu du lemme de Fatou et du corollaire 2. 4. 1, le fait que $E^x[g \circ X_{H_n}]$ tende vers $E^x[g \circ X_H]$ entraîne la convergence de $g \circ X_{H_n}$ vers $g \circ X_H$.

5. L'expérience montre que les fonctions uniformément excessives jouent, dans la théorie de Hunt, le rôle que tiennent les fonctions excessives continues et bornées dans la théorie classique. Le théorème qui suit correspond donc au théorème, dû à Choquet, suivant lequel, lorsque le noyau de la théorie du potentiel est régulier (c'est-à-dire lorsque toutes les fonctions excessives sont régulières) toute fonction excessive est limite d'une suite, croissante suivant l'ordre fort, de fonctions excessives continues. Notre démonstration est d'ailleurs inspirée directement de celle de Choquet.

THÉORÈME 2. 6. — *Soit f un potentiel de la classe* (D). *Pour qu'il existe une suite f_n de fonctions uniformément excessives qui tende vers f en croissant suivant l'ordre fort, il faut et il suffit que f soit une fonction excessive régulière.*

Démonstration. — Nous ne prouverons pour l'instant que la suffisance de la condition ci-dessus; la nécessité sera établie au paragraphe 3. Le lecteur pourra constater que la condition (L) est utilisée ici de manière essentielle, pour la première fois.

Soit a une fonction continue sur $\hat{X}$ (1), comprise entre 0 et 1. Soit ε un nombre positif arbitraire. Appelons (a, ε)-*chaîne* une suite de temps d'arrêt T_n satisfaisant aux conditions suivantes : 1) $T_0 = 0$; 2) $\forall n$, on a $T_n \leqslant T_{n+1}$; 3) Les $T_n(\omega)$ forment un ensemble discret pour presque tout ω, quelle que soit la mesure initiale; si $S(\omega) < \infty$, il existe un entier n tel que $T_n(\omega) = S(\omega)$; si $S(\omega) = \infty$, alors $\lim_n T_n(\omega) = \infty$. 4) Pour presque toute trajectoire ω, l'oscillation de la fonction

$$t \to a \circ X_t(\omega)$$

sur chaque intervalle $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)[$ est plus petite que ε. Il existe des (a, ε)-chaînes : il suffit de construire les T_n par récurrence, $T_{n+1}(\omega)$ étant la borne inférieure de l'ensemble des $t > T_n(\omega)$ tels que $|a \circ X_t(\omega) - a \circ X_{T_n}(\omega)| \geqslant \varepsilon/2$. Les propriétés ci-dessus sont évidemment vérifiées, la fonction $t \to a \circ X_t(\omega)$ étant continue à droite et dépourvue de discontinuité de seconde espèce. Nous aurons aussi besoin de la remarque suivante : soient $\{T_n\}$ une (a, ε)-chaîne, et $\{R_n\}$ une famille de temps d'arrêt, telle que l'ensemble des $R_n(\omega)$ soit discret pour presque toute trajectoire ω. Soit $\{U_k(\omega)\}$ la famille des variables aléatoires obtenue en comptant, dans l'ordre où ils se présentent, les points de la réunion des ensembles des $R_n(\omega)$ et des $T_n(\omega)$: il est facile de voir que cette famille $\{U_k(\omega)\}$ est une famille de temps d'arrêt, et une (a, ε)-chaîne. En particulier, si la famille $\{R_n\}$ est une (b, ε')-chaîne, nous parlerons de la chaîne obtenue par superposition des chaînes $\{T_n\}$ et $\{R_n\}$.

Soit C une chaîne de temps d'arrêt $\{T_n\}$; nous poserons :

$$\begin{aligned} W^x(C, a) &= \sum_0^\infty E^x[a \circ X_{T_n} . (f \circ X_{T_n} - f \circ X_{T_{n+1}})] \\ &= \sum_0^\infty E^x[a \circ X_{T_n} . (f \circ X_{T_n} - P_{T_{n+1}-T_n} f \circ X_{T_n})] \end{aligned}$$

la seconde expression s'obtenant en prenant dans le terme de

(1) La fonction a n'est pas supposée nulle au point ∂, ce que nous signalons conformément à notre convention. La valeur de la fonction a au point ∂ n'interviendra d'ailleurs pas dans ce qui suit.

rang n de la première une espérance mathématique conditionnelle par rapport à la tribu F_{T_n}. Comme f est excessive, chacun des termes de la seconde somme est positif.

Prenons d'abord $a = 1$: $W^x(C, 1)$ est égal à $\sum_0^\infty (P_{T_n} f^x - P_{T_{n+1}} f^x)$; comme f est un potentiel de la classe (D), cette somme est égale à $f(x)$. Il en résulte que, pour les fonctions a comprises entre 0 et 1, nous aurons $W^x(C, a) \leqslant f(x)$, pour toute chaîne C.

Soient C et C′ deux (a, ε) chaînes, et soit C″ la chaîne obtenue par leur superposition. La différence $|W^x(C, a) - W^x(C'', a)|$ est plus petite que $\varepsilon . f(x)$, comme on peut le voir sur la première expression. Par conséquent, lorsque les chaînes deviennent de plus en plus fines, ε tendant vers 0, les fonctions $W^x(C, a)$ ont une limite $W^x(a)$. Cette fonction est positive, majorée par f. Elle dépend linéairement de a, car si b est une autre fonction continue, on peut évaluer $W^x(a + b)$ avec des chaînes qui sont simultanément des (a, ε)-chaînes, des (b, ε)-chaînes et des $(a + b, 2\varepsilon)$-chaînes. Prolongeons maintenant la fonction $W^x(a)$ par linéarité à tout l'espace $\mathcal{C}(\hat{X})$; nous obtenons une forme linéaire qui est, en vertu de la relation $|W^x(a)| \leqslant f(x)\|a\|$, une mesure de Radon positive sur $\hat{X}$, nulle si $x = \partial$.

Supposons de nouveau a comprise entre 0 et 1, et continue. Montrons que la fonction $x \to W^x(a)$ est excessive, et $\leqslant f$; comme $W(a) + W(1 - a) = f$, et que si la somme des deux fonctions surmédianes est excessive chacune des deux fonctions doit être excessive, il nous suffit de montrer que la fonction $W^x(a)$ est surmédiane. Prenons une (a, ε)-chaîne $\{T_n\} = C$, celle qui a été construite plus haut, par exemple, et soit C′ la chaîne construite de la manière suivante : ses points de subdivision sont, sur la trajectoire ω, les points de la chaîne C antérieurs au temps t, le point t, les points de la forme $t + T_n(\theta_t)$. La chaîne C′ est encore une (a, ε)-chaîne, et on a

$$P_t(x, W(C, a)) \leqslant W(C', a),$$

car le premier membre est la somme d'une partie des termes du second, ceux qui viennent après le temps t. D'où le résultat en passant à la limite.

Soit maintenant a une fonction borélienne quelconque, comprise entre 0 et 1, et $W^x(a) = \int_{\hat{X}} W^x(dy) a(y)$. Cette fonction de x est universellement mesurable, puisqu'il en est ainsi lorsque a est continue. Considérons l'ensemble des fonctions boréliennes a comprises entre 0 et 1 telles, que la fonction $x \to W^x(a)$ ainsi définie soit excessive, et majorée au sens fort par f. Cet ensemble contient les fonctions de $\mathcal{C}(\hat{X})$, et il est stable pour les opérations de passage à la limite monotone : c'est évident pour les passages à la limite croissants, puisqu'une limite d'une suite croissante de fonctions excessives est excessive; il suffit alors de remarquer que lorsque des a_n croissent, les fonctions $(1 - a_n)$ décroissent. On atteint par l'itération transfinie de ces passages à la limite toutes les fonctions boréliennes comprises entre 0 et 1, et par conséquent pour une telle fonction $W^x(a)$ est bien excessive.

Revenons au cas où a est continue, et soit G un ouvert tel que a soit nulle hors de G. Soit R le temps d'entrée dans G; on a $P_R W(a) = W(a)$ — il suffit pour le voir de faire la construction qui nous a servi plus haut à montrer que la fonction $W(a)$ était excessive, en intercalant dans la chaîne le temps d'entrée R au lieu du temps constant t : on a

$$P_R(W(C, \ a)) = W(C', \ a),$$

car tous les termes de la différence sont nuls. On passe alors à la limite.

Nous n'avons pas encore utilisé la régularité de la fonction f. Pour montrer au lecteur ce que nous avons construit, signalons que si les hypothèses étaient celles de Hunt [III], et f un potentiel $U\mu$, $W(a)$ serait tout simplement le potentiel de la mesure $a.\ \mu$.

Soit K un compact, I_K sa fonction caractéristique, R_G le temps d'entrée dans un voisinage G de K. Comme I_K est l'enveloppe inférieure d'une suite de fonctions continues à support compact contenu dans G, on a $P_{R_G}[W(I_K)] = W(I_K)$ Or, comme $W(I_K) \ll f$ régulière, $W(I_K)$ est elle-même régulière d'après le corollaire 2. 5. 2, et appartient à la classe (D) comme f. Par conséquent, si R est le temps d'entrée dans K, on a $P_R[W(I_K)] = W(I_K)$.

Voici maintenant le raisonnement adapté de celui de Choquet : choisissons une mesure ξ telle que toute fonction excessive nulle ξ-presque partout soit nulle partout, et telle aussi que f soit ξ-intégrable. Soit η la mesure image de ξ par le transposé de l'opérateur W qui vient d'être construit. On peut trouver, grâce au théorème d'Egorov appliqué à η, une suite de compacts K_n croissants tels que : 1) f soit bornée sur K_n; 2) sur chaque K_n, $P_t f$ tende uniformément vers f lorsque $t \to 0$; 3) $\eta(X - K_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ autrement dit,

$$W(X - K_n) \to 0 \qquad \xi\text{ - p.p.},$$

en décroissant, donc $W(1) = f = \sup W(I_{K_n})$ ξ - p.p., donc partout. Les fonctions $W(I_{K_n})$ tendent donc vers f en croissant au sens fort, il nous suffit de montrer qu'elles sont uniformément excessives. Comme $W(I_{K_n}) \leqslant f$, $W(I_{K_n})$ est bornée sur K_n, donc partout puisque elle est égale à $P_{R_n}W(I_{K_n})$, où R_n est le temps d'entrée dans K_n. D'autre part, il existe pour tout ε un h positif tel que, si $t < h$, on ait $f \leqslant P_t f + \varepsilon$ sur K_n. Autrement dit :

$$\begin{aligned} W(I_{K_n}) + P_t[W(1 - I_{K_n})] &\leqslant W(I_{K_n}) + W(1 - I_{K_n}) \\ &= f \leqslant P_t f + \varepsilon = P_t[W(I_{K_n})] + P_t[W(1 - I_{K_n})] + \varepsilon. \end{aligned}$$

sur K_n : rapprochons les membres extrêmes, il apparaît que $\varepsilon + P_t[W(I_{K_n})]$ majore $W(I_{K_n})$ sur K_n, donc partout, pour $t < h$. L'uniformité de la convergence est bien prouvée.

3. — Les fonctionnelles additives de Markov.

1. Ce paragraphe contient la définition des potentiels des fonctionnelles additives de Markov, et le théorème fondamental concernant l'existence d'une fonctionnelle additive ayant un potentiel donné. Le lecteur que cela intéresse pourra trouver au § 7 quelques résultats concernant les relations entre les fonctionnelles additives et les fonctionnelles multiplicatives de Markov continues.

Dans tout ce paragraphe, l'espace Ω utilisé est identique à l'espace Ω^* des trajectoires.

Définition 3. 1. — *On appelle fonctionnelle additive de Markov une famille* $\{A_t\}$ *de variables aléatoires positives sur* Ω^* *telle, que la famille des variables aléatoires* $\{e^{-A_t}\}$ *soit une* *fonctionnelle multiplicative de Markov normalisée, pour laquelle tous les points de* X *sont permanents* [1]. *Autrement dit :*

1) *Quelle que soit la mesure initiale* ν, *la fonction* $t \rightarrow A_t(\omega)$ *est* P^ν*-p.s. positive, croissante, continue à droite, nulle à l'instant* 0, *continue à l'instant* $S(\omega)$ *et constante à partir de cet instant. (On a* $A_\infty(\omega) = A_{S_-}(\omega)$).

2) *Pour tout* $t \geqslant 0$, A_t *est* F_t*-mesurable.*

3) *Pour chaque couple* (u, v) *de nombres positifs, on a la relation*

$$A_{u+v}(\omega) = A_u(\omega) + A_v(\theta_u\omega) \quad P^\nu\text{-p.s.}$$

Définition 3. 2. — *On dit que la fonctionnelle additive* $\{A_t\}$ *appartient à la classe* (U) (« *classe d'unicité* ») *si, quelle que soit la mesure initiale* ν, *les applications* $t \rightarrow X_t(\omega)$, $t \rightarrow A_t(\omega)$ *n'ont* P^ν*-p.s. aucune discontinuité commune.*

Exemple. — Toute fonctionnelle additive continue appartient à la classe (U); si les trajectoires du processus $\{X_t\}$ sont continues, toutes les fonctionnelles additives appartiennent à la classe (U).

Définition 3. 3. — *Soit* f *une fonction borélienne positive. On appelle* λ*-potentiel de* f *par rapport à la fonctionnelle additive* $A = \{A_t\}$, *et on note* $U_A^\lambda f$, *la fonction (finie ou non) dont la valeur au point* x *est:*

$$U_A^\lambda f^x = E^x\Big[\int_0^\infty f \circ X_t(\omega) . e^{-\lambda t} dA_t(\omega)\Big].$$

On note U_A, et on appelle *potentiel de* A, la fonction $U_A^0 1$. L'expression ci-dessus se réduit alors à $E^x[A_\infty]$.

Remarques. — 1) Précisons la signification de l'intégrale ci-dessus : la fonction $s \rightarrow A_s(\omega)$ est p.s. une fonction de s croissante et continue à droite; la fonction $s \rightarrow f \circ X_s(\omega)$ est p.s. une fonction borélienne sur R_+, puisqu'il en est ainsi lorsque f est continue : on intègre alors sur chaque trajectoire la seconde fonction par rapport à la première. Le résultat est une fonction mesurable de ω — pour le voir, il suffit de raisonner dans le cas où f est continue; on peut alors utiliser

[1] Voir la première partie, définition 2.2, et les remarques qui suivent le théorème 2.2. Rappelons que S désigne la durée de vie.

des sommes de Riemann, dont les points de subdivision constituent des (f, ε)-chaînes comme dans la démonstration du théorème 2. 6.

Il n'y a aucune difficulté à admettre des fonctions f presque boréliennes dans la définition 3. 3. Si f est seulement universellement mesurable, on peut l'encadrer entre deux fonctions boréliennes f_1 et f_2 égales presque partout pour la mesure $U^\lambda_A(x, dy)$, en déduire que sur P^x-presque toute trajectoire les intégrales de $f_1 \circ X_t(\omega)$ et $f_2 \circ X_t(\omega)$ sont les mêmes, et s'en servir pour prolonger l'opérateur U^λ_A. Nous n'aurons pas besoin de cette extension par la suite, l'espace des fonctions presque boréliennes bornées nous suffisant bien.

2) D'après notre convention, $f \circ X_t(\omega) = 0$ pour $S(\omega) \leqslant t$: on pourrait donc se passer ici de la normalisation, et écrire une intégrale étendue de 0 à $S(\omega)$ au lieu de 0 à $+\infty$. Nous avons choisi plutôt des notations telles, qu'il n'y ait pas lieu de distinguer les cas markovien et sous-markovien.

3) Soient $\{Q_t\}$ un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$, V son potentiel, R un temps terminal associé. On pourrait définir une fonction

$$V_A f = E^x\left[\int_0^{R(\omega)} f \circ X_t(\omega) \, . \, dA_t(\omega)\right] = E^x\left[\int_0^\infty f \circ X_t \, . \, M_t \, . \, dA_t\right],$$

où $\{M_t\}$ est la fonctionnelle multiplicative qui correspond au semi-groupe. La théorie de ces potentiels « relatifs », dont les U^λ_A sont des exemples, ne semble pas comporter de difficulté nouvelle par rapport à la théorie « absolue » que nous développons ici.

4) D'après le théorème 4. 3 de la première partie, la relation de Markov forte (si T est un temps d'arrêt, H une variable aléatoire plus grande que T, A une fonctionnelle additive, on a p.s. $A_H(\omega) = A_T(\omega) + A_{H-T}(\theta_T\omega)$) est valable pour les fonctionnelles additives. Chaque fois que nous aurons à utiliser un autre résultat de la première partie de ce travail, nous le signalerons explicitement.

Définition 3. 4. — *Soit f une fonction borélienne $\geqslant 0$; on appelle fonctionnelle produit de la fonctionnelle* $A = \{A_t\}$ *par la fonction f la fonctionnelle* $fA = \left\{\int_0^{t+} f \circ X_s \, dA_s\right\}$ *(le symbole t_+ signifiant que le point t appartient au domaine d'inté-*

gration). En particulier, si f est la fonction caractéristique d'un ensemble E, *la fonctionnelle* χ_E. A *est appelée la restriction de* A *à* E; *si cette restriction est non nulle, on dit que* A *charge* E; *si elle est identique à* A, *on dit que* A *est portée par* E.

Remarques. — 1) Il est clair que toutes ces considérations s'étendent aux fonctions positives presque boréliennes (et aussi, d'ailleurs, aux fonctions universellement mesurables).

2) Si A est une fonctionnelle, les discontinuités de f. A sont des discontinuités de A : en particulier, si A est continue, ou appartient à la classe (U), il en est de même de fA.

3) On a $U_{fA} = U_A(f)$.

2. Théorème 3. 1. — *Soit* A *une fonctionnelle additive,* f *une fonction positive,* T *un temps d'arrêt. On a :*

$$P_T U_A f^x = E^x\left[\int_{T(\omega)+}^{\infty} f\circ X_t(\omega)\ dA_t(\omega)\right]$$

où le signe « + » indique que le point $T(\omega)$ *est exclu de l'intervalle d'intégration.*

Démonstration.

$$P_T U_A f^x = E^x\left[\int_0^{\infty} f\circ X_t(\theta_T\omega)\, dA_t(\theta_T\omega)\right]$$
$$= E^x\left[\int_0^{\infty} f\circ X_{T+t}(\omega)\ dA_{T+t}(\omega)\right]$$

et on en déduit immédiatement le résultat. On aurait un théorème analogue pour les $U_A^\lambda f$.

Théorème 3. 2. — *Si le potentiel* U_A *est fini, c'est une fonction excessive, qui est un potentiel de la classe* (D). *Si la fonctionnelle* A *est continue,* U_A *est une fonction excessive régulière.*

Démonstration. — U_A est une fonction excessive, comme le montre immédiatement le théorème précédent. Soit $\{T_n\}$ une suite de temps d'arrêt qui tend en croissant vers la durée de vie S; $P_{T_n} U_A^x = E^x[A_\infty - A_{T_n}]$ tend vers 0, d'après le théorème de Lebesgue et la relation $A_\infty = A_{S-}$. On en déduit que U_A appartient à la classe (D) en appliquant le théorème 2. 2. Enfin, si la fonctionnelle A est continue, et si des temps d'arrêt T_n tendent en croissant vers T, $P_{T_n} U_A \to P_T U_A$: U_A est donc régulière d'après le théorème 2. 5.

Le théorème suivant montre que les seules fonctionnelles additives qui présentent une analogie avec les mesures de la théorie classique, en ce qui concerne les théories du potentiel qu'elles déterminent, sont les fonctionnelles de la classe (U) :

THÉORÈME 3. 3. — 1) *Soient* A *une fonctionnelle additive,* G *un ouvert, et* R *le temps d'entrée dans* G. *Si* f *est une fonction borélienne nulle hors de* G, *telle que* $U_A f$ *soit fini, et si* A *appartient à la classe* (U), *alors* $P_R U_A f = U_A f$. *Si* A *est continue, on peut remplacer* G *par un ensemble presque analytique* E *quelconque.*

2) *Supposons réciproquement que* A *soit une fonctionnelle additive dont le potentiel est fini, et que l'on ait, pour toute fonction* f *continue à support compact, et tout voisinage ouvert* G *du support de* f, $P_R U_A f = U_A f$; *alors* A *appartient à la classe* (U) [1].

Démonstration. — Supposons d'abord A continue, et f nulle hors de E presque analytique; soit T le temps d'entrée dans E. Dans la formule du théorème 3. 1, on peut remplacer T_+ par T, et, comme f est nulle avant le temps T, $U_A f - P_T U_A f = 0$.

Passons maintenant au cas où A appartient à la classe (U) : la différence entre $P_R U_A f^x$ et $U_A f^x$ est, puisque

$$\int_0^{R_-} f\circ X_t(\omega)\, dA_t(\omega) = 0,$$

égale à $E^x[f\circ X_R(\omega).(A_R(\omega) - A_{R_-}(\omega))]$. Le terme à intégrer est nul si la fonctionnelle est continue à l'instant $R(\omega)$; si la fonctionnelle est discontinue à cet instant, puisqu'elle appartient à la classe (U), c'est que la trajectoire est continue à l'instant $R(\omega)$: il en résulte, comme G est ouvert, que l'on ne peut avoir $X_R(\omega) \in G$; par conséquent, $f\circ X_R(\omega) = 0$, et le terme à intégrer est encore nul. $P_R U_A f$ et $U_A f$ sont donc égaux.

Supposons, réciproquement, que A n'appartienne pas à la classe (U). Il existe alors un $\varepsilon > 0$, et une mesure initiale ν, tels que, si $T(\omega)$ désigne le premier instant t tel que

$$d(X_t(\omega),\ X_{t_-}(\omega)) > \varepsilon,$$

on ait avec une probabilité positive $A_T(\omega) - A_{T_-}(\omega) > 0$.

[1] Ce théorème sera développé plus loin (théorème 4.6).

Soit H l'ensemble des trajectoires qui vérifient cette condition. A tout nombre rationnel s, attachons l'ensemble H_s des trajectoires ω : qui appartiennent à H, qui sont telles que $s < T(\omega)$, et que l'oscillation de la trajectoire sur l'intervalle $[s, T(\omega)[$ soit plus petite que $\varepsilon/3$. H est la réunion des H_s, il existe donc un s tel que $P^\nu(H_s) > 0$. Soit alors μ la mesure νP_s; comme, si $s < T(\omega)$, on a $T(\theta_s\omega) = T(\omega) - s$, l'ensemble des ω pour lesquelles $T(\omega)$ coïncide avec le premier instant t tel que $d(X_0(\omega), X_t(\omega)) > \varepsilon/3$, et pour lesquelles $A_T(\omega) - A_{T-}(\omega) > 0$, n'est pas P^μ-négligeable. Il existe alors une mesure ponctuelle ε_x telle, que cet ensemble ne soit pas P^x-négligeable. (Cf. première partie, § 1, nº 3). Soit alors G le complémentaire de la boule fermée de centre x et de rayon $\varepsilon/3$, R le temps d'entrée dans G. Comme $d(X_0(\omega), X_T(\omega)) \geqslant 2\varepsilon/3$ sur les trajectoires ci-dessus, $X_R(\omega) \in G$ sur ces trajectoires. Il est alors clair que si g désigne la fonction caractéristique de G, $P_R U_A g \neq U_A g$, et il ne reste plus qu'à choisir une suite croissante de fonctions f_n, continues, à support compact contenu dans G, qui converge vers g : l'inégalité précédente est alors vérifiée pour l'une des f_n, dès que n est assez grand.

3. Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental de ce paragraphe :

Théorème 3. 4. — *Soit f une fonction excessive, partout finie; pour que f soit un potentiel de la classe* (D), *il faut et il suffit qu'il existe au moins une fonctionnelle* A *telle que* $U_A = f$. *Il existe alors une telle fonctionnelle qui appartient à la classe* (U). *Pour que f soit de plus régulière, il faut et il suffit qu'il existe une fonctionnelle* A *continue dont le potentiel est f.*

Démonstration. — Le théorème résultera des lemmes suivants :

Lemme 1. — *Soit u une fonction excessive finie, somme d'une série u_n de fonctions excessives, potentiels de fonctionnelles additives A_n. La somme ΣA_n est alors une fonctionnelle additive dont le potentiel est u; si les A_n appartiennent à la classe* (U), *ou sont continues, il en est de même de leur somme.*

Démonstration. — Soit, pour chaque t, $A_t(\omega) = \Sigma A_{n,t}(\omega)$: comme $E^x[A_\infty]$ est égale à u, $A_\infty(\omega)$ est p.s., finie pour toute mesure P^ν. Comme les $A_{n,t}$ sont des fonctions croissantes de t, la série converge uniformément sur toute la droite pour presque tout ω : il en résulte que l'application $t \to A_t(\omega)$ est p.s., continue à droite, et on voit immédiatement que A est une fonctionnelle, et qu'elle appartient à la classe (U), ou est continue, si les A_n appartiennent à la classe (U) ou sont continues. Enfin, il résulte alors du théorème 3. 2 que u est un potentiel de la classe (D).

Lemme 2. — *Soit u un potentiel régulier de la classe* (D). *Il existe une fonctionnelle additive continue dont le potentiel est égal à u.*

Démonstration. — D'après le lemme 1, et le théorème 2. 6, il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où u est uniformément excessive. C'est alors un résultat de Volkonski, que nous admettrons ici (voir Volkonski [I] et [II]). Nous avons donné au § 7 une autre démonstration du lemme 2, valable sous les hypothèses de Hunt [III]; mais nous ne prétendons en aucune manière la substituer à la démonstration de Volkonski, qui est très générale, puisqu'elle est indépendante de l'homogénéité dans le temps du processus, et de la propriété forte de Markov, et qui utilise des méthodes bien plus élémentaires que les nôtres.

Corollaire (fin de la démonstration du théorème 2. 6). — *Soit u une fonction excessive de la classe* (D), *limite d'une suite fortement croissante de fonctions excessives régulières u_n ; la fonction u est régulière.*

Démonstration. — Décomposer chaque u_n en une partie harmonique v_n, un potentiel w_n; il est immédiat que les deux suites v_n et w_n sont fortement croissantes. D'après le corollaire 2. 5. 3, les v_n et w_n sont régulières. Il ne reste plus qu'à remarquer que la limite des v_n est une fonction harmonique de la classe (D), donc régulière, et que chaque $w_{n+1} - w_n$ est le potentiel d'une fonctionnelle additive continue, ce qui permet d'appliquer le lemme 1.

Le lemme suivant est important, il donne beaucoup de renseignements sur la structure des fonctionnelles de la classe (U).

LEMME 3. — *Soit u un potentiel de la classe* (D) : *u peut être représenté comme la somme d'une fonction excessive régulière v, et d'une fonction excessive w, telle que la seule fonction excessive régulière $f \leqslant w$ soit la fonction* 0.

Il existe une fonctionnelle additive A *de la classe* (U) *dont le potentiel est w; la variable aléatoire* — $A_\infty(\omega)$ *est égale à la somme de tous les sauts de la fonction $t \to u \circ X_t(\omega)$ qui ont lieu en des points où l'application $t \to X_t(\omega)$ est continue.*

Démonstration. — Nous ne nous occuperons pas ici de la propriété caractéristique de w envisagée ci-dessus, qui sera une conséquence évidente des théorèmes d'unicité du paragraphe suivant. Soit ε un nombre positif, et $T(\omega)$ le premier instant t où la trajectoire ω est continue, et où

$$|u \circ X_t(\omega) - u \circ X_{t-}(\omega)| \geqslant \varepsilon.$$

D'après le corollaire 2. 5. 1, on a l'inégalité

$$u \circ X_{T-}(\omega) \geqslant u \circ X_T(\omega) \text{ p.s.}$$

Définissons des temps T_n par récurrence, en posant $T_0 = 0$, $T_1 = T, \ldots, T_{n+1}(\omega) = T(\theta_{T_n}\omega)$. Les temps d'arrêt T_n ne peuvent s'accumuler sur aucun intervalle fini, et tendent donc p.s., vers $+\infty$. Soit alors $A_t^\varepsilon(\omega)$ la somme :

$$A_t^\varepsilon(\omega) = \sum_{T_n(\omega) \leqslant t} [u \circ X_{T_n-}(\omega) - u \circ X_T(\omega)].$$

Il est clair que la famille des variables aléatoires A_t^ε est une fonctionnelle additive de Markov A^ε, dont nous désignerons le potentiel par la notation w^ε. Nous poserons aussi $v^\varepsilon = u - w^\varepsilon$.

Nous avons la relation :

$$u^x - P_{T_n}u^x = \sum_1^n E^x[u \circ X_{T_i-} - u \circ X_{T_i}] + \sum_0^{n-1} E^x[u \circ X_{T_i} - u \circ X_{(T_{i+1})-}].$$

Comme le temps d'arrêt T est accessible (lemme 2. 1), on a $E^x[u \circ X_{T-}] \leqslant u(x)$; il en résulte que le premier terme de la seconde somme est positif, et il est clair par translation qu'il en est de même de tous les autres. Faisons alors tendre n vers $+\infty$: comme u appartient à la classe (D), $P_{T_n}u \to 0$, le premier membre se réduit à u, la première somme du second membre devient égale à w^ε, et la seconde, par conséquent à v^ε. Nous venons de voir que la fonction v^ε est positive, montrons qu'elle est excessive; il suffit pour cela, comme elle est différente de deux fonctions excessives, et par conséquent finement continue, de montrer qu'elle est surmédiane. Nous pouvons même, pour simplifier un peu le raisonnement, nous borner à vérifier l'inégalité $P_t(x, v^\varepsilon) \leqslant v^\varepsilon(x)$, pour les valeurs de t qui sont telles que $P^x[T_n(\omega) = t]$ soit nul pour tout n -ensemble de valeurs dont le complémentaire est dénombrable, et qui est donc partout dense. Alors :

$$P_t(x, v^\varepsilon) = E^x[u \circ X_t - u \circ X_{(T_1(\theta_t)+t)-}] \\ + E^x[u \circ X_{T_1(\theta_t)+t} - u \circ X_{(T_2(\theta_t)+t)-}] + \cdots$$

et la différence $v^\varepsilon - P_t v^\varepsilon$ est égale à :

$$\int_{\{T_1>t\}} [u(x) - u \circ X_t]\, dP^x \\ + \int_{\{T_1<t,\ T_2>t\}} [(u(x) - u \circ X_{T_1-}) + (u \circ X_{T_1} - u \circ X_t)]\, dP^x \\ + \int_{\{T_1<t,\ T_2<t,\ T_3>t\}} [(u(x) - u \circ X_{T_1-}) + (u \circ X_{T_1} - u \circ X_{T_2-}) \\ + (u \circ X_{T_2} - u \circ X_t)]\, dP^x + \cdots$$

Somme qui peut aussi s'écrire :

$$\left\langle \int_{\{T_1>t\}} [u(x) - u \circ X_t]\, dP^x + \int_{\{T_1<t\}} [u(x) - u \circ X_{T_1-}]\, dP^x \right\rangle \\ + \left\langle \int_{\{T_1<t,\ T_2>t\}} [u \circ X_{T_1} - u \circ X_t]\, dP^x \right. \\ \left. + \int_{\{T_1<t,\ T_2<t\}} [u \circ X_{T_1} - u \circ X_{T_2-}]\, dP^x \right\rangle + \cdots$$

Excluons encore, pour simplifier, l'ensemble dénombrable des valeurs de t pour lesquelles $P^x[u \circ X_t \neq u \circ X_{t-}] > 0$; nous pouvons alors remplacer dans chaque intégrale $u \circ X_t$ par $u \circ X_{t-}$, et chaque couple d'intégrales entre crochets $\langle\ \rangle$ prend la forme suivante : H est un temps d'arrêt accessible (dans le second crochet, par exemple, $H = \inf(t, T_2)$) [1], R un temps d'arrêt partout $< H$ (T_1 dans le second crochet), U un événement antérieur à R($\{T_1 < t\}$ dans le second crochet). Nous avons à évaluer :

$$\int_U [u \circ X_R - u \circ X_{H-}]\, dP^x$$

[1] C'est un temps d'arrêt accessible, d'après le lemme 2.1.

il est immédiat d'après la définition de l'accessibilité qu'une telle intégrale est positive. La fonction v^ε est donc excessive.

Faisons tendre maintenant ε vers 0 : les fonctionnelles A^ε tendent en croissant vers une fonctionnelle A, qui appartient à la classe (U) (lemme 1). Soit w le potentiel de A, les w^ε tendent vers w en croissant au sens fort. Les fonctions v^ε tendent en décroissant vers une fonction v, qui est excessive, car elle est surmédiane et continue à droite sur les trajectoires.

Il reste à démontrer que v est régulière. Pour cela, il faut et il suffit, comme v appartient à la classe (D), que pour toute suite de temps d'arrêt R_n qui tend en croissant vers un temps d'arrêt R, on ait $\lim_n (P_{R_n}v - P_R v) = 0$ (th. 2. 5). Cette différence est égale, si U désigne l'ensemble des ω tels que $R_n(\omega) < R(\omega)$ pour tout n, à $\int_U [v \circ X_{R_-} - v \circ X_R]\, dP^x$. Or, en vertu du théorème de Blumenthal, une trajectoire qui appartient à U est p.s. continue à l'instant R : il suffit alors de remarquer que

$$\int_U [u \circ X_{R_-} - u \circ X_R]\, dP^x = \int_U [w \circ X_{R_-} - w \circ X_R]\, dP^x,$$

par la construction même de la fonction w, et le théorème 3. 1, pour obtenir la relation $\int_U [v \circ X_{R_-} - v \circ X_R]\, dP^x = 0$, et la régularité de v.

4. Du théorème d'existence 3. 4, et du lemme 1, on déduit le :

Théorème 3. 5. — *Soit u une fonction excessive finie : s'il existe une suite u_n fortement croissante de fonctions excessives de la classe* (D) *qui converge vers u, u appartient à la classe* (D).

Démonstration. — Chaque $u_{n+1} - u_n$ est un potentiel de fonctionnelle additive, il en est donc de même de leur somme (lemme 1).

En particulier, la limite d'une suite fortement croissante de potentiels bornés appartient à la classe (D). Inversement :

Théorème 3. 6. — *Soit f un potentiel de la classe* (D); *il existe une suite fortement croissante de potentiels bornés qui converge vers f.*

Démonstration. — La famille des potentiels bornés $\leqslant f$ est filtrante croissante pour l'ordre fort, car la borne supérieure forte de deux fonctions excessives bornées u, v, est majorée par $u + v$, et donc bornée. Pour montrer que l'enveloppe supérieure de cette famille est f — ce qui, d'après le théorème 1. 1, entraînera le résultat que nous cherchons — il nous suffit évidemment de démontrer la propriété suivante : pour tout potentiel de la classe (D), u, on peut trouver un potentiel borné $h \leqslant u$ différent de 0. Reprenons alors les notations du lemme 3; il nous suffit de prouver ce résultat séparément pour la fonction régulière v, et pour chaque w^ε. La fonction v est limite d'une suite fortement croissante de fonctions uniformément excessives, donc bornées (théorème 2. 6). Soit d'autre part $k = \inf(u, n)$, où n est un entier, et $h(x) = \sum_1^\infty E^x[k \circ X_{T_i-} - k \circ X_{T_i}]$; d'après le lemme 3, on a $h \leqslant k$, et h est évidemment bornée; si n est assez grand, h est $\neq 0$; enfin, on voit sur cette expression que h est le potentiel d'une fonctionnelle additive plus petite que A^ε, et par conséquent $h \leqslant w^\varepsilon$. Le théorème est démontré.

La démonstration du lemme 3 fournit encore un résultat intéressant : supposons que u n'appartienne pas à la classe (D). Cela n'empêche pas de construire les fonctions w^ε, v^ε, et de montrer qu'elles sont excessives. D'autre part, $P_{T_n}u$ est excessive — par exemple, parce que $T_n(\omega) \leqslant t + T_n(\theta_t\omega)$. Il en résulte que $w^\varepsilon \leqslant u$. Soit alors f une fonction excessive finie quelconque : on peut la décomposer en une partie harmonique (qui appartient à la classe (D)) et un potentiel h; l'enveloppe supérieure des potentiels de la classe (D) qui sont majorés fortement par h est un potentiel de la classe (D), que nous noterons v. Soit enfin $u = h - v$: il n'existe aucune fonction de la classe (D) qui soit fortement majorée par u, nous dirons donc que u est étrangère à la classe (D). En particulier, la fonction w^ε construite à partir de u, qui est un potentiel de fonctionnelle additive, doit être nulle pour tout ε — cela signifie que u est régulière. On a donc le :

Théorème 3. 7. — *Toute fonction excessive finie peut être décomposée de manière unique, en la somme : d'une fonction harmonique de la classe* (D); *d'un potentiel régulier de la classe*

(D); *d'un potentiel de la classe* (D), *purement irrégulier (c'est-à-dire qui ne majore au sens fort aucune fonction régulière); d'un potentiel étranger à la classe* (D), *qui est régulier.*

On peut déduire enfin du théorème 3. 4 quelques cas intéressants dans lesquels une importante conjecture de Doob (cf. Doob, [I], p. 363) se trouve être vraie.

THÉORÈME 3. 8. — *Soit f un potentiel de la classe* (D); *la supermartingale* $\{f \circ X_t\}$ *est la somme: d'une martingale par rapport aux tribus* F_t, *d'un processus dont presque toutes les trajectoires sont décroissantes.*

Démonstration. — Soit $\{A_t\}$ une fonctionnelle additive dont le potentiel est f. Il suffit d'écrire que $f \circ X_t = [f \circ X_t + A_t] - A_t$ et de vérifier que le processus $\{f \circ X_t + A_t\}$ est une martingale, ce qui est très facile.

4. — Le théorème d'unicité.

1. DÉFINITION 4. 1. — *Nous désignerons dans la suite par la notation $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions de la forme $u_1 - u_2$, où u_1 et u_2 sont des fonctions uniformément λ-excessives pour une valeur au moins de λ. L'espace $\overline{\mathcal{H}}$ sera l'adhérence en norme de $\mathcal{H}$.*

L'intérêt de l'espace $\overline{\mathcal{H}}$ provient de ce que ses fonctions sont presque boréliennes, se comportent très bien sur les trajectoires du processus (théorèmes 2. 4 et 2. 5); de ce qu'il est invariant dans $\mathcal{G}'$ par les opérateurs P_t; enfin, de ce que deux mesures bornées pour lesquelles les fonctions de $\overline{\mathcal{H}}$ ont mêmes intégrales sont égales (si $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda f$, et $\lambda U^\lambda f \in \mathcal{H}$).

THÉORÈME 4. 1. — *Soit $A = \{A_t\}$ une fonctionnelle additive possédant un potentiel fini, et f une fonction de $\mathcal{G}$. On a la relation :*

$$(4.\,1.\,1) \qquad E^x[f \circ X_t . A_t] = E^x\left[\int_0^{t_+} P_{t-s}(X_s, f)\, dA_s\right].$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer cette identité lorsque $f \in \mathcal{C}_0(X)$, ou lorsque $f \in \mathcal{H}$. On aurait d'ailleurs évidemment pû énoncer le théorème pour des fonctions presque boréliennes [1],

[1] Il est d'ailleurs vrai pour les fonctions universellement mesurables.

plutôt que boréliennes. Supposons, d'autre part, que la formule soit prouvée pour des fonctionnelles A_n, et que la série A_n converge vers une fonctionnelle A dont le potentiel est fini; il est très facile de voir que la relation est vérifiée par la fonctionnelle A. Soient alors A une fonctionnelle dont le potentiel est fini, et $B_{n,t}(\omega)$ la somme des sauts de la fonction $s \to A_s(\omega)$, qui ont lieu sur l'intervalle $[0, t]$, et dont l'amplitude est comprise entre $1/(n-1)$ (exclu) et $1/n$ (inclus); $\{B_{n,t}\}$ est une fonctionnelle additive, et la différence entre A et la somme de la série des B_n est une fonctionnelle continue. D'après les remarques qui précèdent, nous pouvons donc nous borner à raisonner dans les cas 1) et 2) ci-dessous :

1) La fonctionnelle $A = \{A_t\}$ est purement discontinue, ses sauts sont bornés inférieurement par un nombre positif ε.

L'ensemble de ces sauts est alors nécessairement discret. Soient $T_0 = 0$, T_1, ..., T_n ... ces sauts dans l'ordre où on les rencontre. La première intégrale de (4. 1. 1) est égale à :

$$E^x\Big[\sum_{i=1}^{\infty} f \circ X_t(A_{H_i} - A_{H_{i-1}})\Big] \qquad \text{où} \qquad H_i = \inf(T_i, t).$$

Remplaçons le i-ème terme par son espérance mathématique conditionnelle par rapport à F_{H_i}, il vient :

$$E^x\Big[\sum_{i=1}^{\infty} P_{t-H_i}(X_{H_i}, f)\,(A_{H_i} - A_{H_{i-1}})\Big]$$

qui est évidemment égale à la seconde intégrale de (4. 1. 1).

2) La fonctionnelle A est continue, la fonction f appartient à $\mathcal{H}_+$.

Nous supposerons f comprise entre 0 et 1. Soit ε un nombre positif; il est possible de trouver un nombre $c > 0$ tel que les relations : $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 \leqslant s' \leqslant t$, $|s - s'| \leqslant c$, entraînent l'inégalité $\|P_s f - P_{s'} f\| < \varepsilon/8$. Choisissons maintenant une subdivision de l'intervalle $[0, t]$ en intervalles (s_i, s_{i+1}) de longueur plus petite que c; comme les fonctions $P_{s_i} f$ appartiennent à $\mathcal{H}$, ces fonctions ne présentent p.s. pas de discontinuité de seconde espèce sur les trajectoires du processus; soient alors n un entier, B_n l'ensemble des trajectoires ω telles que l'une des fonctions $r \to P_{s_i}(X_r(\omega), f)$ présente plus de n sauts dont l'amplitude dépasse $\varepsilon/4$, sur l'intervalle $[0, t]$, il est clair que $\bigcap_n B_n$ est un ensemble de mesure nulle. Comme $E^x[A_t] \leqslant E^x[A_\infty] < \infty$, nous pouvons choisir n de telle sorte, que $\int_{B_n} A_t\, dP^x < \varepsilon$. De plus, soit un $s \leqslant t$ quelconque, et $\omega \notin B_n$; comme il existe un s_i tel que $\|P_s f - P_{s_i} f\| < \varepsilon/4$, la fonction $r \to P_s(X_r(\omega), f)$ ne peut présenter sur l'intervalle $[0, t]$ plus de n sauts dont l'amplitude dépasse $\varepsilon/2$.

Appelons I_1 (resp. I_2) l'intégrale qui figure au premier (resp. au second) membre de (4. 1. 1). Construisons par récurrence des temps d'arrêt T_i de la manière suivante : 1) $T_0 = 0$; 2) $T_{p+1}(\omega) = T_p(\omega)$ si $T_p(\omega) = t$, sinon $T_{p+1}(\omega)$ est l'inf. de t, de $T_p(\omega) + c$, de l'ensemble des r tels que l'une des inégalités suivantes ait lieu :

$$A_r(\omega) - A_{T_p}(\omega) \geqslant \varepsilon/n, \quad |P_{s_i}(X_r(\omega), f) - P_{s_i}(X_{T_p}(\omega), f)| \geqslant \varepsilon/8.$$

Toutes les fonctions $P_{s_i} f$ étant dépourvues de discontinuités de seconde espèce sur les trajectoires, et la fonctionnelle continue et croissante, les temps d'arrêt T_i ne peuvent s'accumuler sur l'intervalle $[0, t]$; il existe donc pour chaque trajectoire ω un i tel que $T_i(\omega) = t$. D'autre part, l'oscillation d'une fonction $r \to P_s(X_r(\omega), f)$ quelconque sur l'intervalle $[T_i(\omega), T_{i+1}(\omega)[$ ne peut dépasser $\varepsilon/2$. L'intégrale I_2, qui est égale à :

$$E^x\Big[\sum_i \int_{[T_i, T_{i+1}[} P_{t-s}(X_s, f)\, dA_s\Big]$$

est très voisine de la somme :

$S_2 = E^x\Big[\sum_i P_{t-T_i}(X_{T_i}, f) \cdot (A_{T_{i+1}} - A_{T_i})\Big]$; en effet, dans l'intégrale I_2, comme $s - T_i(\omega) \leqslant c$, $P_{t-s}(X_s(\omega), f)$ et $P_{t-T_i}(X_s(\omega), f)$ diffèrent de moins de $\varepsilon/8$, et l'oscillation de cette dernière fonction de s sur l'intervalle $[T_i(\omega), T_{i+1}(\omega)[$ ne dépasse pas $\varepsilon/2$; enfin la fonctionnelle est continue, ce qui permet d'écrire $A_{T_{i+1}}$ au lieu de $A_{(T_{i+1})-}$. Il résulte de tout cela que la différence entre I_2 et S_2 est plus petite que $\varepsilon \sum E^x[A_{T_{i+1}} - A_{T_i}] \leqslant \varepsilon U_A(x)$.

Passons à l'intégrale I_1 : elle s'écrit aussi

$$E^x\Big[f \circ X_t \cdot \sum_i (A_{T_{i+1}} - A_{T_i})\Big].$$

Prenons des espérances mathématiques conditionnelles par rapport à $F_{T_{i+1}}$ dans le i-ème terme, I_1 s'écrit

$$E^x\Big[\sum_i P_{t-T_{i+1}}(X_{T_{i+1}}, f)\,(A_{T_{i+1}} - A_{T_i})\Big]$$

Comme $T_{i+1} - T_i < c$, cette somme diffère de moins de $\varepsilon U_A(x)$ de :

$$S_1 = E^x\Big[\sum_i P_{t-T_i}(X_{T_{i+1}}, f)(A_{T_{i+1}} - A_{T_i})\Big].$$

Évaluons la différence entre S_1 et S_2 :

— Contribution des ω de B_n : dans chacune des deux sommes, comme $0 \leqslant f \leqslant 1$, elle est inférieure à $\int_{B_n} A_t\, dP^x \leqslant \varepsilon$.

— Contribution des $\omega \notin B_n$: comme l'oscillation de la fonction $r \to P_{t-T_i}(X_r(\omega), f)$ sur l'intervalle $]T_i, T_{i+1}[$ est plus petite que $\varepsilon/2$, l'oscillation de cette fonction sur l'intervalle fermé $[T_i, T_{i+1}]$ ne peut dépasser ε que si la différence $|P_{t-T_i}f \circ X_{T_{i+1}} - P_{t-T_i}f \circ X_{T_{(i+1)-}}|$ dépasse $\varepsilon/2$: ceci ne peut se produire que n fois au plus, et sur les intervalles pour lesquels cela se produit, $A_{T_{i+1}} - A_{T_i} < \varepsilon/n$. Il en résulte alors que la contribution de ces ω est, elle aussi, très petite. I_1 et I_2 sont donc égales.

THÉORÈME 4. 2. — *Soit un $\lambda \geqslant 0$, f une fonction positive, A une fonctionnelle dont le potentiel est fini; on a la relation :*

$$U_A^\lambda U^\lambda f^x = E^x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t . A_t . dt\Big].$$

Démonstration. — Il suffit de raisonner dans le cas où $\lambda > 0$, et où f est bornée et borélienne. Multiplions par $e^{-\lambda t}$ les deux membres de (4. 1. 1), et intégrons de 0 à ∞ ; le premier membre donne $E^x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t . A_t\, dt\Big]$; le second,

$$E^x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int_0^{t_+} P_{t-s}(X_s, f) .\ dA_s\Big]$$
$$= E^x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, dA_s \int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)} P_{t-s}(X_s,\ f)\, dt\Big] = U_A^\lambda U^\lambda f^x.$$

LEMME 4. 3. — *Soient $\{A_t\}$ et $\{B_t\}$ deux fonctionnelles dont le potentiel est fini; si l'on a, pour toute fonction $a \in \mathcal{C}_0(X)$, tout t et tout x, la relation $E^x[a \circ X_t . A_t] = E^x[a \circ X_t . B_t]$, les fonctionnelles $\{A_t\}$ et $\{B_t\}$ sont identiques (à une équivalence près, c'est-*

à-dire, rappelons-le, que l'on a pour tout t et toute mesure initiale ν, $P^\nu[A_t(\omega) \neq B_t(\omega)] = 0$).

Démonstration. — Les fonctionnelles $\{A_t\}$ et $\{B_t\}$ étant normalisées, il nous suffit de montrer qu'elles sont égales jusqu'au temps S. Posons $A'_t = A_t\chi_{\{t<S\}}$, $B'_t = B_t\chi_{\{t<S\}}$; ce sont des variables aléatoires F_t-mesurables, et, en tant que fonctions de t, elles sont continues à droite. Il nous suffit donc de vérifier que l'on a, pour tout système de nombres $t_1 < t_2 \ldots t_n < t$, et de fonctions $a_1, \ldots, a_n$, a de $\mathcal{G}'$, l'égalité :

$$\forall x \; E^x[a_1 \circ X_{t_1} \ldots a_n \circ X_{t_n} . a \circ X_t . A_t] = E^x[a_1 \circ X_{t_1} \ldots a \circ X_t . B_t].$$

Par hypothèse, cette relation a lieu lorsque $a_1 \ldots a_n$ sont égales à 1. Il nous suffit donc de démontrer qu'une telle espérance mathématique peut se calculer en fonction d'intégrales de la forme $E^x[a \circ X_t . A_t]$.

Posons, pour la simplicité de l'écriture : $t_n = s$, et

$$b(\omega) = a_1 \circ X_{t_1}(\omega) \ldots a_n \circ X_{t_n}(\omega).$$

Nous avons :

$$E^x[b(\omega) . a \circ X_t(\omega) . A_t(\omega)] = E^x[b(\omega) . a \circ X_t(\omega) . (A_s(\omega) + A_{t-s}(\theta_t\omega))]$$

qui est la somme de deux termes, dont le premier,

$$E^x[b . A_s . a \circ X_t]$$

est égal à $E^x[b(\omega) . A_s(\omega) . P_{t-s}(X_s(\omega), a)]$ — comme on le voit en prenant une espérance mathématique conditionnelle par rapport à F_s — expression qui est du même type que celle dont on est parti, mais avec un nombre de facteurs inférieur d'une unité. Le second terme est égal à

$E^x[b(\omega) . a \circ X_{t-s}(\theta_s\omega) . A_{t-s}(\theta_s\omega)] = E^x[b(\omega) . E^{X_s(\omega)}[a \circ X_{t-s} . A_{t-s}]]$, qui est une fonction bien déterminée de l'intégrale à un seul terme $y \to E^y[a \circ X_{t-s} . A_{t-s}]$. Comme l'égalité

$$E^x[a \circ X_t . A_t] = E^x[a \circ X_t . B_t],$$

si elle a lieu pour $a \in \mathcal{C}_0(X)$, a lieu pour tout $a \in \mathcal{G}'$, le lemme est démontré.

2. THÉORÈME 4. 4. — *Si deux fonctionnelles* A *et* B *sont telles, que pour toute fonction* $a \in \mathcal{C}_0(X)$ *les potentiels* $U_A a$ *et* $U_B a$ *soient partout finis et égaux, elles sont identiques* (*à une équivalence près*).

Démonstration. — Remarquons d'abord que si $b(x)$ est une fonction de $\mathcal{G}'$ telle que l'on ait $U_A b = U_B b$, on a aussi $U_A^\lambda b = U_B^\lambda b$ pour tout λ; adjoignons en effet à l'espace Ω^* une variable aléatoire S_λ, indépendante des processus, dont la répartition est exponentielle de paramètre λ : S_λ est un temps d'arrêt, qui ne coïncide presque sûrement pas avec une discontinuité des fonctionnelles A ou B. Alors :

$$U_A^\lambda b^x = E^x\left[\int_0^{S_\lambda} b \circ X_t \, dA_t\right] = U_A b^x - E^x\left[\int_{S_\lambda}^{\infty} b \circ X_t \, dA_t\right]$$
$$= U_A b^x - P_{S_\lambda} U_A b^x$$

d'après le théorème 3. 1. Il en résulte que, sous les hypothèses de l'énoncé, on a la relation $U_A^\lambda U^\lambda a = U_B^\lambda U^\lambda a$ pour toute fonction a de $\mathcal{C}_0(X)$; or, d'après le théorème 4. 2, les deux membres sont les transformées de Laplace des fonctions continues à droite $E^x[a \circ X_t . A_t]$ et $E^x[a \circ X_t . B_t]$ resp.; ces fonctions sont donc identiques, et l'on peut appliquer le lemme 4. 3.

Théorème 4. 5. — *Soient* A *et* B *deux fonctionnelles additives de la classe* (U); *si leurs potentiels* U_A *et* U_B *sont partout finis et égaux, elles sont identiques* (*à une équivalence près*).

Démonstration. — Il nous suffit, d'après le théorème précédent, de montrer que la connaissance de U_A entraîne, si A appartient à la classe d'unicité (U), celle de tout potentiel $U_A a$, où $a \in \mathcal{C}_0(X)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Posons $f = U_A$, et reprenons la démonstration du théorème 2. 6 : soit C la chaîne de temps d'arrêt T_n construite par récurrence, au moyen des relations $T_0 = 0$, $T_{n+1}(\omega) = \inf \{t : |a \circ X_t(\omega) - a \circ X_{T_n}(\omega)| > \varepsilon\}$; C est une (a, ε)-chaîne, et la somme $W^x(C, a)$ diffère donc de $W^x(a)$ de moins de $\varepsilon f(x)$. Le terme $E^x[a \circ X_{T_n}(f \circ X_{T_n} - f \circ X_{T_{n+1}})]$ de la somme $W^x(C, a)$, d'autre part, est égal à

$$E^x[a \circ X_{T_n}(A_{T_{n+1}} - A_{T_n})],$$

d'après le théorème 3. 1. Comparons alors cette somme à l'intégrale $U_A a^x = \sum_n E^x\left[\int_{]T_n, T_{n+1}]} a \circ X_s \, dA_s\right]$; de deux choses l'une : ou bien l'oscillation de la fonction $s \to a \circ X_s(\omega)$ sur l'intervalle fermé $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)]$ est inférieure ou égale à 2ε, on peut alors remplacer la n-ième intégrale par $a \circ X_{T_n}(A_{T_{n+1}} - A_{T_n})$

à $2\varepsilon(A_{T_{n+1}} - A_{T_n})$ près; ou bien cette oscillation dépasse 2ε : comme elle est $\leqslant 2\varepsilon$ sur l'intervalle $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)[$, il doit y avoir une discontinuité de la trajectoire au point $T_{n+1}(\omega)$, et la fonctionnelle est, par conséquent, continue en ce point. On peut alors remplacer l'intégrale $\int_{T_n, T_{n+1}[} a \circ X_s \, dA_s$ par $a \circ X_{T_n}(A_{(T_{n+1})-} - A_{T_n})$ à $2\varepsilon(A_{T_{n+1}} - A_{T_n})$ près, et comme il n'y a pas de masse au point $T_{n+1}(\omega)$, on peut remplacer l'intervalle], [par],] et $A_{(T_{n+1})-}$ par $A_{T_{n+1}}$ sans rien changer. En définitive, $W^x(a)$ et $U_A a^x$ ne diffèrent donc que de $2\varepsilon f(x)$ au plus, et sont donc égaux; comme $W^x(a)$ ne dépend que de f, le théorème 4. 5 est démontré.

Une conséquence intéressante de ce théorème, que nous aurons à utiliser par la suite, est la suivante : $W^x(a)$ et $U_A a^x$ sont des mesures en a, et sont donc égales pour toute fonction a. Si $a \in \overline{\mathcal{K}}$, le calcul que nous venons de faire est encore légitime, et il montre alors que l'on peut évaluer $W^x(a)$ au moyen de (a, ε)-chaînes, comme dans le cas où a est continue.

Nous sommes en mesure maintenant de compléter de manière satisfaisante le théorème 3. 3 :

THÉORÈME 4. 6. — *Soit* A *une fonctionnelle dont le potentiel est fini; supposons que pout tout compact* E *on ait l'égalité* $P_E U_A(\chi_E) = U_A(\chi_E)$ *(où* P_E *est une abréviation pour* P_{T_E}*, l'opérateur associé au temps d'entrée dans* E*). La fonctionnelle* A *est alors continue.*

Démonstration. — Si G est un voisinage de E, on a

$$P_G U_A(\chi_E) = U_A(\chi_E),$$

et par conséquent A appartient à la classe (U) (théorème 3. 3). D'autre part, comme $U_A(\chi_E)^x = W^x(\chi_E)$, on voit immédiatement que l'on peut répéter la dernière partie de la démonstration du théorème 2. 6, et en déduire que U_A est régulière. Comme tout potentiel régulier de la classe (D) est le potentiel d'une fonctionnelle continue, il résulte du théorème d'unicité que A est elle-même continue.

Nous laisserons aux soins du lecteur de démontrer que les théorèmes 4. 4 et 4. 5 restent vrais lorsqu'on remplace les potentiels par les λ-potentiels, $\lambda > 0$.

3. Si les trajectoires du processus sont continues, toutes les fonctionnelles appartiennent à la classe (U); il résulte alors du théorème d'unicité que deux fonctionnelles sont les potentiels (ou les λ-potentiels) sont partout finis et égaux sont égales. Si la théorie du potentiel est « régulière » — c'est-à-dire, si toute fonction excessive est régulière — toute fonctionnelle de la classe (U) dont le potentiel (ou le λ-potentiel) est partout fini est continue. Ces deux conditions sont réalisées simultanément dans le cas du mouvement brownien. On a donc le résultat suivant :

Théorème 4. 7. — *Pour le processus du mouvement brownien sur un espace de Green* (1), *toute fonctionnelle additive dont le potentiel (ou un λ-potentiel) est fini est continue* (2).

5. — Théorèmes de compacité.

1. On sait combien les propriétés de compacité vague des ensembles bornés de mesures de Radon ont d'importance en théorie classique du potentiel. Nous démontrons dans ce paragraphe des théorèmes de compacité qui peuvent, lorsque le noyau de la théorie du potentiel n'est pas un noyau-fonction, se substituer aux théorèmes classiques. L'analogie n'est cependant pas complète, car les fonctionnelles additives de Markov ne peuvent servir à représenter que des fonctions excessives de la classe (D), et les êtres que l'on pourrait songer à construire, en prenant des limites de fonctionnelles additives pour des topologies suffisamment faibles sur Ω, semblent peu maniables. Aussi devrons-nous, dans la plupart des cas, nous borner à des ensembles de potentiels de la classe (D) majorés par un potentiel fixe de la classe (D), ou par une constante.

Définition 5. 1. — *Soit μ une mesure positive sur* X. *Nous désignerons par σ^μ (σ^x si μ est la masse unité au point x) la topologie faible $\sigma[L^1(\Omega, F, P^\mu), L^\infty(\Omega, F, P^\mu)]$.*

En particulier, une suite de variables aléatoires $f_n(\omega)$, F-mesurables, intégrables pour la mesure P^μ, converge dans

(1) Voir Doob [IV].
(2) Ce théorème a été trouvé avant nous par Volkonski [II].

la topologie σ^μ s'il existe une variable aléatoire f, F-mesurable et P^μ-intégrable, telle que pour toute fonction u de $L^\infty(\Omega, F)$ — c'est-à-dire F-mesurable et bornée — l'intégrale $E^\mu(f_n . u)$ converge vers $E^\mu(f . u)$.

Rappelons un théorème classique d'analyse fonctionnelle (voir par exemple Dunford et Schwartz, [I], IV, 8) : Pour qu'un ensemble de variables aléatoires $\{u_i\}$ intégrables pour la mesure P^μ soit relativement compact pour la topologie σ^μ, il faut et il suffit que les u_i soient P^μ-uniformément intégrables. De toute suite u_{i_n} on peut alors extraire une suite qui converge pour la topologie σ^μ. Pour qu'une suite converge dans cette topologie, il faut et il suffit qu'elle soit uniformément intégrable, et admettre un seul point adhérent.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 5. 1. — *Soit Ω un espace muni d'une tribu* F, *et de deux mesures p et q, positives, bornées, telles que q soit absolument continue par rapport à p. Soient f_n des fonctions* F*-mesurables, uniformément intégrables pour les deux mesures p et q. Si les f_n convergent vers une fonction f de* F *dans la topologie σ^p, elles convergent aussi vers f dans la topologie σ^q.*

Démonstration. — Il nous suffit de prouver que, quelle que soit la suite extraite de la suite f_n qui converge vers une fonction g, F-mesurable, pour la topologie σ^q, on a $g = f$ q-presque partout; pour simplifier les notations, nous supposerons que toute la suite f_n converge vers f dans la topologie σ^p, vers g dans la topologie σ^q. Posons $p + q = r$; la suite f_n est une suite de Cauchy pour la topologie σ^r, et converge donc (Voir Dunford et Schwartz, [I], p. 290) vers une fonction h dans cette topologie. Soit $k(\omega)$ la densité $(\leqslant 1)$ de p par rapport à r; si $u \in L^\infty(F)$, $\int u . f_n \, dr \to \int u . h \, dr$; remplaçons u par $u . k$, puis $k . dr$ par dp : il apparaît que $f_n \to h$ dans la topologie σ^p, et par conséquent $h = f$ p-presque partout. De même, $h = g$ q-presque partout. Il en résulte bien que $f = g$ q-presque partout.

LEMME 5. 2. — *Soient g un potentiel de la classe* (D), *et h_n des fonctions positives dont les potentiels Uh_n sont majorés par g; soit $A_\infty^{h_n}(\omega) = \int_0^\infty h_n \circ X_t(\omega) \, dt$. Soit μ une mesure positive* *telle que g soit μ-intégrable; les variables aléatoires $A_\infty^{h_n}$ sont uniformément intégrables pour la mesure P^μ. La même propriété a lieu si g est une constante.*

Démonstration. — Soient G_p l'ensemble $\{x\colon\ g(x) \leqslant p\}$, I_p sa fonction caractéristique, T_p le temps d'entrée dans le complémentaire de G_p; $\lim_p T_p = S$ P^μ-presque sûrement, et il en résulte, comme g appartient à la classe (D) et est μ-intégrable, que $E^\mu[g \circ X_{T_p}] \to 0$ lorsque $p \to \infty$ (théorème 2. 2, 2). Soit alors h une fonction positive presque borélienne dont le potentiel est majoré par g. On a :

$$E^\mu[A_\infty^h - A_\infty^{hI_p}] \leqslant E^\mu\left[\int_{T_p}^\infty h \circ X_t \, dt\right]$$
$$= \int_X P_{T_p}(x, Uh)\, d\mu(x) \leqslant E^\mu[g \circ X_{T_p}];$$

de sorte que la norme $\| \ \|_1$ de la différence au premier membre tend vers 0 lorsque $p \to \infty$, d'une manière indépendante de la fonction h. Il nous suffit donc de montrer que les variables aléatoires $A_\infty^{hI_p}$ sont uniformément intégrables — mais $E^x\left[\int_0^\infty (hI_p) \circ X_t \, dt\right] \leqslant p$ partout : on est donc ramené au même problème, g étant remplacé par la constante p.

Raisonnons alors comme Volkonski ([II]). Soit h une fonction dont le potentiel est majoré par p. Nous avons :

$$E^\mu[(A_\infty^h)^2] = 2E^\mu\left[\int_0^\infty \left((h \circ X_u(\omega) \int_u^\infty h \circ X_v(\omega)\, dv\right) du\right]$$
$$= 2\int_0^\infty du \,.\, E^\mu\left[h \circ X_u \int_u^\infty h \circ X_v \, dv\right];$$

remplaçons le terme intérieur au crochet par son espérance mathématique conditionnelle par rapport à F_u, qui est égale à $(hUh) \circ X_u(\omega)$, on voit que le premier membre est égal à $2 \int_X U(h \,.\, Uh)^x \, d\mu(x) \leqslant 2p \int_X Uh \, d\mu \leqslant 2p^2$. Le théorème s'en déduit immédiatement.

THÉORÈME 5. 3. — *Soient g un potentiel de la classe* (D) *et* $\{A^n\}$ *une suite de fonctionnelles additives de Markov satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) *Pour toute mesure η telle que $\int_X g(x)\, d\eta(x) < \infty$, les variables aléatoires A_∞^n sont P^η-uniformément intégrables.*

2) *Les potentiels* u_n *des* A^n *sont majorés par* g.

On peut alors trouver une suite n_k *tels que :*

1) *La suite* u_{n_k} *converge presque partout vers un potentiel* u *de la classe* (D).

2) *Il existe une fonctionnelle* A *dont le potentiel est* u, *telle que les aléatoires* $A_\infty^{n_k}$ *convergent vers* A_∞, *pour presque tout* x, *dans la topologie* σ^x.

Démonstration. — Nous utiliserons comme espace de base l'espace $\Omega = \Omega^* \times R_+$, muni des tribus $F_t = F_t^* \times \mathcal{B}(R_+)$, et des mesures produits des mesures P^ν sur Ω^*, par une mesure fixe sur R_+, dont la densité est exponentielle de paramètre 1; de sorte que si Z désigne la seconde coordonnée, $P^\nu[Z > t] = e^{-t}$. Soit p la première projection, et soit T un temps d'arrêt sur Ω par rapport aux nouvelles tribus F_t; si φ est une variable aléatoire sur Ω^*, nous noterons encore φ la variable aléatoire $\omega \to \varphi(p(\omega))$ sur Ω, et $\varphi(\theta_T)$ la variable aléatoire $\omega \to \varphi(\theta_{T(\omega)}p(\omega))$ La variable aléatoire $\varphi(\theta_T)$ est mesurable sur la tribu engendrée par les variables aléatoires X_{T+s}, $s \geqslant 0$. Nous désignerons par $S_\lambda(\lambda > 0)$ la variable aléatoire Z/λ; c'est un temps d'arrêt, sa répartition est exponentielle de paramètre λ, et $S_\lambda \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$.

Soit ξ une mesure bornée, telle que g soit ξ-intégrable, et que la classe des ensembles ξ-négligeables soit identique à celle des ensembles de potentiel nul. D'après l'hypothèse 1), on peut trouver une suite n_k d'entiers, telle que les $A_\infty^{n_k}$ convergent vers une variable aléatoire N_∞ dans la topologie σ^ξ. Pour alléger les notations, nous supposerons que toute la suite A_∞^n converge ainsi. N_∞ n'est définie qu'à une équivalence près, il nous sera commode de la supposer finie et positive, ce qui est évidemment possible.

Soit T un temps d'arrêt par rapport aux F_t, et ν une mesure initiale telle que $\langle \nu, g\rangle < \infty$. Comme $P_T g \leqslant g$, on a $\langle \nu P_T, g\rangle < \infty$, et les A_∞^n sont uniformément intégrables par rapport à la mesure $P^{(\nu P_T)}$; supposons que les A_∞^n convergent vers une variable aléatoire φ dans la topologie σ associée à cette mesure : les $A_\infty^n(\theta_T)$ convergent alors vers $\varphi(\theta_T)$ dans la topologie σ^ν. On a en effet à vérifier que $E^\nu[A_\infty^n(\theta_T).f(\omega)]$ converge vers $E^\nu[\varphi(\theta_T).f(\omega)]$, pour toute fonction $f(\omega)$, F-mesurable et bornée; il suffit alors, comme $A_\infty^n(\theta_T)$

et $\varphi(\theta_T)$ sont mesurables sur la tribu engendrée par les X_{T+s}, $s \geqslant 0$, de remplacer f par son espérance mathématique conditionnelle par rapport à cette tribu, qui est de la forme $f'(\theta_T)$, et d'appliquer la propriété forte de Markov.

Prenons en particulier $\nu = \varepsilon_x$, $T = S_\lambda$; la mesure νP_T n'est alors autre que la mesure $\lambda U^\lambda(x, dy)$; elle est donc absolument continue par rapport à ξ, et il en résulte que les A^n_∞ convergent vers N_∞ pour la mesure $P^{\nu P_T}$ (lemme 5. 1) : les $A^n_\infty(\theta_{S_\lambda})$ convergent donc vers $N_\infty(\theta_{S_\lambda})$ pour la mesure P^x. Nous allons en tirer quelques conséquences :

Soit tout d'abord $v(y)$ la fonction positive, $\mathcal{G}'$-mesurable, $y \to E^y[N_\infty]$; d'après ce qui vient d'être démontré, $E^x[A^n_\infty(\theta_{S_\lambda})]$ tend pour tout x vers $E^x[N_\infty(\theta_{S_\lambda})]$. Or le premier membre vaut $\lambda U^\lambda u_n$, le second $\lambda U^\lambda v$. Comme chaque u_n, donc aussi chaque $\lambda U^\lambda u_n$, est excessive, $\lambda U^\lambda v$ est surmédiane, en tant que limite de surmédianes, finement continue en tant que λ-potentiel, donc excessive. D'autre part, le premier membre est pour chaque u_n une fonction croissante de λ; il en est donc de même du second, et il existe donc une fonction excessive u telle que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda v = u$.

Prenons maintenant comme mesure initiale ξ; ξU^λ est absolument continue par rapport à ξ, et le même raisonnement que ci-dessus montre que les $A^n_\infty(\theta_{S_\lambda})$ tendent vers $N_\infty(\theta_{S_\lambda})$ dans la topologie σ^ξ; comme $A^n_\infty(\theta_{S_\lambda}) \leqslant A^n_\infty$, on a P^ξ-p.s., la même relation pour N_∞, et on l'a par conséquent P^x-p.s., pour presque tout x. Donnons désormais à λ des valeurs entières : pour chaque λ, on a presque partout l'inégalité $\lambda U^\lambda v \leqslant v$. En passant à la limite, on obtient l'inégalité $u \leqslant v$ presque partout; soit un $\mu > 0$, comme $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda v = u$, on a

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mu U^\mu \lambda U^\lambda v = \mu U^\mu u,$$

or on déduit de l'équation résolvante que cette limite est $\mu U^\mu v$: il en résulte que $u = v$ presque partout.

Faisons toujours tendre λ vers ∞ par valeurs entières. Pour chaque x, on a P^x — p.s., si $\lambda < \lambda'$, $N_\infty(\theta_{S_\lambda}) \leqslant N_\infty(\theta_{S_{\lambda'}})$; soit B_∞ la fonction égale à la limite des $N_\infty(\theta_{S_\lambda})$ là où elle existe, à 0 si elle n'existe pas. Montrons que $B_\infty = N_\infty$ P^ξ — p.s. — ce qui nous permettra dans la suite de remplacer N_∞ par B_∞; il suffit pour cela, comme $B_\infty \leqslant N_\infty$ P^ξ — p.s., de vérifier que

$E^\xi[B_\infty] = E^\xi[N_\infty]$, ou encore que $\lim_{\lambda\to\infty} \int_X \lambda U^\lambda v \, d\xi = \int_X v \, d\xi$; cela résulte immédiatement du théorème de Lebesgue, de ce que u est excessive et égale à v presque partout.

Soit maintenant $f(\omega)$ une fonction F-mesurable, positive, et bornée. Posons $\varphi_{n,\lambda}(x) = E^x[f(\omega).A^n_\infty(\theta_{s_\lambda}\omega)]$, et

$$\varphi_n(x) = E^x[f(\omega).A^n_\infty(\omega)];$$

lorsque $n \to \infty$, $E^x[f.A^n_\infty(\theta_{s_\lambda})]$ tend vers $E^x[f.N_\infty(\theta_{s_\lambda})]$. Soit un x tel que $N_\infty = B_\infty \; P^x$ — p.s. :

$$E^x[f.N_\infty] = \lim_\lambda E^x[f.N_\infty(\theta_{s_\lambda})] = \lim_\lambda \lim_n E^x[f.A^n_\infty(\theta_{s_\lambda})]$$

mais les $\varphi_{n,\lambda}$ sont majorés par les φ_n; donc :

$$E^x[f.N_\infty] \leqslant \lim\inf \varphi_n(x) \qquad \text{presque partout.}$$

Appliquons alors le lemme de Fatou :

$$\int_X \lim\inf \varphi_n(x) \, d\xi\,(x) \leqslant \lim\inf \int_X \varphi_n(x) \, d\xi\,(x);$$

mais $\int \varphi_n(x) \, d\xi\,(x) = E^\xi[f.A^n_\infty] \to E^\xi[f.N_\infty]$. Il en résulte que l'on a, pour chaque f, pour presque tout x, la relation :

$$E^x[f.N_\infty] = \lim \varphi_n(x).$$

Prenons d'abord $f = 1$; *nous voyons que les u_n tendent presque partout vers u.*

Utilisons d'autre part le théorème 7 et le lemme 8, p. 292, de Dunford et Schwartz [I] : choisissons une infinité dénombrable d'ensembles qui engendrent la tribu F^* (aux complétions par rapport aux différentes mesures près). Soient f_p leurs fonctions caractéristiques : pour chaque p,

$$E^x[f_p.A^n_\infty] \to E^x[f_p.N_\infty]$$

presque partout. Comme les A^n_∞ sont P^x-uniformément intégrables pour tout x, cela entraîne que *les A^n_∞ convergent vers N_∞ dans presque toute topologie σ^x.*

Le théorème sera démontré si nous prouvons qu'il existe une fonctionnelle additive A telle que $A_\infty = N_\infty \; P^\xi$-p.s. C'est un problème de régularisation de N_∞, que nous n'avons malheureusement su traiter qu'en utilisant les théorèmes sur les résolvantes des semi-groupes subordonnés. Dans cette partie du raisonnement, nous supposerons que les variables aléatoires exponentielles S_λ, au lieu d'être construites à l'aide d'une même variable auxiliaire Z, sont toutes indépendantes entre elles, et indépendantes des processus.

Nous aurons besoin maintenant des remarques suivantes : soit F° (Cf. § 1, première partie) la tribu engendrée par les coordonnées sur Ω^* (sans complétion par rapport à quelque mesure que ce soit); comme N_∞ n'est définie qu'à une P^ξ-équivalence près, nous pourrons la supposer F°-mesurable (et toujours finie, positive). La famille des fonctions $\varphi(\omega^*)$, F°-mesurables, telles que l'application $(t, \omega^*) \to \varphi(\theta_t\omega^*)$ soit mesurable par rapport à l'ensemble des deux variables (t, ω^*) est évidemment un espace vectoriel, stable pour les passages à la limite croissants et décroissants; il contient aussi les fonctions de la forme $h_1 \circ X_{t_1} \dots h_n \circ X_{t_n}$, où $h_1 \dots h_n$ sont des fonctions continues sur X, $t_1 \dots t_n$ des instants en nombre fini : il contient donc toutes les variables aléatoires F°-mesurables.

Remarquons alors que, si $h(t, \omega^*)$ est une fonction mesurable de (t, ω^*), et T une variable aléatoire finie, positive, indépendante des processus, dont la répartition est une mesure γ sur R_+, on a la relation, valable pour toute mesure initiale ν :

$$E^\nu[h(T, \omega^*)] = E^\nu\left[\int_0^\infty h(t, \omega^*)\, d\gamma\,(t)\right]$$

comme le montre un raisonnement semblable à celui qui vient d'être fait.

Posons alors : $N_{S_\lambda}(\omega) = N_\infty(\omega) - N_\infty(\theta_{S_\lambda}\omega)$
$M_{S_\lambda}(\omega) = \exp\,[- N_{S_\lambda}(\omega)]$

et, de même, $N_t = N_\infty - N_\infty(\theta_t)$, $M_t = \exp\,[- N_t]$. Il résulte de la remarque précédente que l'on a, pour toute fonction f de $\mathcal{G}'$:

$$E^x[M_{S_\lambda}(\omega) . f \circ X_{S_\lambda}(\omega)] = E^x\left[\int_0^\infty M_t(\omega) . f \circ X_t(\omega) \lambda e^{-\lambda t}\, dt\right]$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, N_{S_λ} est la limite, au sens de la topologie P^ξ, des $A^n_\infty - A^n_\infty(\theta_{S_\lambda}) = A_{S_\lambda}$. Il en résulte qu'il existe une variable aléatoire H_λ, comprise entre 0 et 1, F_{S_λ}-mesurable, telle que $P^\xi[N_{S_\lambda} \neq H_\lambda] = 0$. Si nous posons $K_\lambda = \exp[- H_\lambda]$, l'ensemble des x tels que M_{S_λ} ne soit pas P^x — p.s. égal à K_λ est de potentiel nul.

Soit, pour $f \in \mathcal{G}'$, $\lambda V^\lambda(x, f) = E^x[M_{S_\lambda} . f \circ X_{S_\lambda}]$ (ou plutôt, rappelons-le, avec des notations plus détaillées,

$$E^x[M_{S_{\lambda}(\omega)}(p\omega) . f \circ X_{S_\lambda}(p\omega)],$$

où p est la projection sur Ω^*). Soit aussi S'_μ une variable aléatoire exponentielle de paramètre μ, indépendante de S_λ et des processus (μ peut être égal à λ). Évaluons l'intégrale :

$$E^x[M_{S_\lambda + S'_\mu} . f \circ X_{S_\lambda + S'_\mu}].$$

D'une part, d'après les remarques faites plus haut, la variable aléatoire $S_\lambda + S'_\mu$ étant indépendante des processus, et ayant une répartition dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue dt sur R_+ est égale à $\frac{\mu}{\mu - \lambda} \lambda e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{\lambda - \mu} e^{-\mu t}$, cette intégrale est égale à $\frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} [V^\lambda(x, f) - V^\mu(x, f)]$. D'autre part, elle est égale à $E^x[M_{S_\lambda} . M_{S'_\mu}(\theta_{S_\lambda}) . f \circ X_{S_\lambda + S'_\mu}]$ (c'est une conséquence immédiate, et purement formelle, de la définition $N_{S_\lambda + S'_\mu} = N_\infty - N_\infty(\theta_{S_\lambda + S'_\mu})$. Choisissons un x tel que

$$M_{S_\lambda} = K_\lambda \quad P^x - \text{p.s.},$$

prenons des espérances mathématiques conditionnelles par rapport à F_{S_λ}, nous voyons que l'intégrale est égale aussi à $\lambda V_\lambda(x, \mu V^\mu f)$: autrement dit, les V^λ vérifient l'équation résolvante presque partout : $\forall \lambda$, on a pour presque tout x, pour tout $f \in \mathcal{G}'$ et tout $\mu > 0$ la relation

$$V^\lambda(x, f) - V^\mu(x, f) = -(\lambda - \mu) V^\lambda(x, V^\mu f).$$

On verrait très facilement aussi que, si x est un point tel que $P^x[M_{S_\lambda} \neq K_\lambda] = 0$, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{G}'_+$ les inégalités $0 \leqslant V^\lambda(x, f) \leqslant U^\lambda(x, f)$.

Soit f une fonction positive, posons $(U^\lambda - V^\lambda) f = h$; le lecteur vérifiera aisément que la fonction h est presque partout positive, et que pour chaque $\mu > 0$ on a p.p. $\mu U^{\lambda+\mu} h \leqslant h$. Il en résulte que l'on a partout, si $\nu > 0$, $\nu U^{\lambda+\nu} \mu U^{\lambda+\mu} h \leqslant \nu U^{\lambda+\nu} h$, et cela entraîne que la fonction $\mu \to \mu U^{\lambda+\mu} h$ est partout croissante; elle admet donc une limite lorsque $\mu \to \infty$, limite qui est presque partout inférieure ou égale à h. Autrement dit, $\lim_{\mu \to \infty} \mu U^{\mu} V^{\lambda} f = W^{\lambda} f$ existe partout, et majore presque partout $V^{\lambda} f$. Il est alors très facile de voir que les W^{λ} sont des opérateurs positifs, ainsi que les $U^{\lambda} - W^{\lambda}$, qu'ils vérifient l'équation résolvante, que $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda W^{\lambda} 1 = 1$ (cette propriété ayant lieu lorsque λ ne prend que des valeurs entières). [1] Il en résulte alors (première partie, théorème 5. 1) que les W^{λ} sont les résolvantes d'un semi-groupe subordonné, pour lequel tous les points de l'espace sont permanents. Ce semi-groupe est associé à une fonctionnelle multiplicative M'_t (première partie, théorème 2. 2) que l'on peut supposer normalisée. Désignons par $\{Q_t\}$ le semi-groupe subordonné ainsi construit, et par R_t les opérateurs définis par la relation

$$R_t(x, f) = E^x[f \circ X_t . M_t]:$$

les R_t induisent un semi-groupe sur $L^1(\xi)$, dont la résolvante est $\{V^{\lambda}\}$, qui est continu à droite en norme sur $\mathcal{C}_0$. Il en est de même des Q_t, et sur l'espace $L^1(\xi)$ les opérateurs induits par les V^{λ} et les W^{λ} sont identiques. Il résulte alors de l'unicité de la transformée de Laplace que les R_t et les Q_t coïncident sur $L^1(\xi)$. On en déduit alors que, si $a_1 \dots a_n$ sont des fonctions de $\mathcal{C}_0$, si $t_1 < \cdots < t_n$, on a

$$E^{\xi}[a_1 \circ X_{t_1} \dots a_n \circ X_{t_n} . M_{t_n}] = E^{\xi}[a_1 \circ X_{t_1} \dots a_n \circ X_{t_n} . M'_{t_n}].$$

Il en résulte immédiatement que $M'_{\infty} = M_{\infty}$ P^{ξ}-p.s., et donc, que si l'on pose $A_{\infty} = -\log M'_{\infty}$, les A^n_{∞} tendent vers A_{∞} dans la topologie σ^{ξ}, et dans presque toute topologie σ^x.

LEMME 5. 4. — *Si dans les conditions du théorème* 5. 3, *les* A^n_{∞} *convergent au sens de la topologie* σ^{ξ} *vers* A_{∞}, *elles convergent vers* A_{∞} *dans toute topologie* σ^x, *telle que les potentiels* u_n *des* A_n *convergent au point* x *vers le potentiel* u *de* A.

Démonstration. — Pour tout x, et toute fonction $f(\omega)$, F-mesurable, comprise entre 0 et 1, $E^x[A^n_{\infty}(\theta_{s_\lambda}) . f]$ converge vers $E^x[A_{\infty}(\theta_{s_\lambda}) . f]$. Il en résulte que $E^x[A_{\infty} . f] \leqslant \liminf_n E^x[A^n_{\infty} . f]$. Comme la même inégalité est vraie si l'on remplace f par $1 - f$,

[1] Nous laisserons ce point aux soins du lecteur : il suffit de remarquer que les W^{λ} s'obtiennent en remplaçant dans toutes les définitions N_{∞} par B_{∞}, et que $B_{\infty} - B_{\infty}(\theta_{s_\lambda}) \to 0$. P^x — p.s. pour tout x.

on aura l'égalité $E^x[A_\infty . f] = \lim_n E^x[A^n_\infty . f]$ pour tout f, si elle a lieu pour $f = 1$. Or elle se réduit dans ce cas à

$$u(x) = \lim_n u_n(x).$$

LEMME 5. 5. — *Sous les mêmes conditions que dans l'énoncé du lemme précédent, on a pour toute fonction a de $\mathcal{H}$ (Cf. définition 4. 1) la relation*

$$\lim_n U_{A^n}(a)^x = U_A(a)^x$$

en tout point x tel que $u_n(x)$ tende vers $u(x)$.

Démonstration. — Nous avons la relation :

$$E^x[a \circ X_{S_\lambda} . A_{S_\lambda}] = \lambda U^\lambda_A U^\lambda a^x$$

(théorème 4. 2) et une relation analogue pour les A^n; si x est tel que $u_n(x)$ tende vers $u(x)$, les $A^n_{S_\lambda}$ tendent vers A_{S_λ} au sens de la topologie σ^x d'après le lemme précédent. Comme $a \circ X_{S_\lambda}$ est bornée, il en résulte que :

$$U^\lambda_{A^n} U^\lambda a^x \to U^\lambda_A U^\lambda a^x.$$

Comme les fonctions de la forme $U^\lambda a$ sont denses dans $\mathcal{H}$ en norme, et que les normes des mesures $U_{A^n}(x, dy)$ sont uniformément bornées, on en déduit que pour toute fonction a de $\mathcal{H}$, $\lim_n U^\lambda_{A^n} a^x = U^\lambda_A a^x$ $(\lambda > 0)$.

Supposons a comprise entre 0 et 1; cette relation a lieu aussi pour la fonction 1 (qui en général n'appartient pas à $\mathcal{H}$), du fait que $U^\lambda_{A^n} 1 = U_{A^n} 1 - P_{S_\lambda} U_{A^n} 1 = u_n - \lambda U^\lambda u_n$ (voir la démonstration de ce point après le th. 4. 4). Passons alors à la limite, en faisant tendre λ vers 0, il vient :

$$U_A a^x \leqslant \liminf U_{A^n}(a)^x \qquad U_A(1 - a)^x \leqslant \liminf U_{A^n}(1 - a)^x$$

et comme $U_A 1^x = \lim U_{A^n} 1^x$, le théorème est démontré. Soit encore a une fonction de $\mathcal{H}$; si u est une fonction excessive, et $C = \{T_k\}$ une (a, ε) chaîne de temps d'arrêt (voir le théorème 2. 6) nous poserons :

$$W^x(C, a, u) = \sum_k E^x[a \circ X_{T_k} . (a \circ X_{T_k} - a \circ X_{T_{k+1}})]$$

et nous désignerons par $W^x(a, u)$ la limite des $W^x(C, a, u)$ pour des chaînes de plus en plus fines, lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous avons alors le lemme suivant, que nous perfectionnerons par la suite.

LEMME 5. 6. — *Soient u_n des potentiels de la classe* (D), *majorés par un potentiel fixe g de la classe* (D), *qui convergent* partout *vers une fonction excessive u. Pour toute fonction $a \in \mathcal{H}$, les fonctions $W^x(a, u_n)$ tendent vers $W^x(a, u)$. La même propriété est vraie si $a \in \mathcal{C}_0$.*

Démonstration. — Immédiate; comme les u_n sont majorés par g, qui est un potentiel de la classe (D), il suffit de démontrer le théorème analogue pour les $W^x(C, a, u_n)$, et même pour chaque terme de la somme $W^x(C, a, u_n)$: c'est alors une application du théorème de Lebesgue.

2. Nous avons maintenant à notre disposition tous les lemmes nécessaires pour la démonstration des théorèmes importants de ce paragraphe. Le lecteur pourra d'ailleurs constater qu'on obtient au moyen de ces théorèmes une nouvelle démonstration du théorème d'existence. [1] Soient d'abord u un potentiel de la classe (D), h_n la fonction $n(u - P_{1/n}u)$, et $A_n^t(\omega) = \int_0^t h_n \circ X_t(\omega)\, dt$. Le potentiel Uh_n tend partout vers u en croissant (Cf. Hunt, [I], p. 66). D'après le lemme 5. 2, les A_∞^n sont P^ν-uniformément intégrables pour toute mesure ν telle que $\int u(x)\, d\nu(x) < \infty$; il existe donc, d'après le théorème 5. 3, une fonctionnelle additive A dont le potentiel est u, telle que les $A_\infty^{n_k}$ convergent vers A_∞ au sens de la topologie σ^ξ, où n_k est une suite d'entiers qui tendent vers l'infini. D'après le lemme 5. 4, les A_∞^{nk} convergent vers A_∞ au sens de toute topologie σ^x. Les fonctionnelles A^n appartiennent à la classe d'unicité, donc, si $u_n = Uh_n$, $W^x(a, u_n) = U_{A^n}(a)$ pour toute fonction a de $\mathcal{H}$ (théorème 4. 5); il résulte alors des lemmes 5. 5 et 5. 6 que $W^x(a, u) = U_A a$ pour toute fonction de $\mathcal{H}$, et donc pour toute fonction de $\mathcal{G}$. Si $a \in \mathcal{C}_0(X)$, et a son support dans un ouvert G, $P_G W(a, u_n) = W(a, u_n)$, donc

$$P_G W(a, u) = W(a, u).$$

Il résulte alors du théorème 3. 3 que A appartient à la classe

[1] Théorème 3. 4. (à l'exception de la dernière assertion).

(U); le théorème d'unicité montre alors que toute suite extraite de la suite des A^n_∞ qui converge au sens de la topologie σ^ξ converge vers A_∞, toute la suite converge donc vers A_∞. D'où le :

THÉORÈME 5. 7. — *Pour qu'une fonctionnelle* A *dont le potentiel u est fini appartienne à la classe* (U), *il faut et il suffit que l'on ait :*

$$A_\infty = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty n.(u - P_{1/n}u) \circ X_t \, dt$$

au sens de toute topologie σ^ν, *où* ν *est une mesure positive telle que* $\int u \, d\nu < \infty$.

Comme l'adhérence d'une famille uniformément intégrable de fonctions d'un espace L^1 est uniformément intégrable, on peut déduire du lemme 5. 2 et du théorème 5. 7 la conséquence suivante :

THÉORÈME 5. 8. — *Soit g un potentiel fixe de la classe* (D); *l'ensemble des variables aléatoires* A^i_∞ *associées aux fonctionnelles* A^i *de la classe* (U) *dont le potentiel est majoré par g, est uniformément intégrable pour toute mesure* P^ν, *où* ν *est telle que* $\int g \, d\nu < \infty$.

On peut alors à nouveau utiliser le théorème 5. 3. On en déduit les conséquences suivantes, que nous séparerons pour plus de clarté :

THÉORÈME 5. 8. — *De toute suite de fonctions excessives* u_n *on peut extraire une suite qui converge presque partout vers une fonction excessive finie ou non.*

Démonstration. — Si le théorème est démontré pour les fonctions excessives bornées, une application du procédé diagonal montre qu'il est vrai pour des fonctions excessives quelconques. Si les u_n sont bornées, d'autre part, ce sont des potentiels de la classe (D) relatifs au semi-groupe $\{e^{-\lambda t}P_t\}$, pour $\lambda > 0$; il suffit alors d'appliquer les théorèmes 5. 8 et 5. 3 à ce semi-groupe, et de remarquer que la fonction u, régularisée de la limite de la suite extraite, est excessive, et non seulement λ-excessive. Ce théorème est dû à Deny (cf. Deny [I]) dans le cas newtonien.

THÉORÈME 5. 9. — *Soit une suite* u_n *de potentiels de la classe* (D), *majorée par un potentiel* g *de la classe* (D) ; *on peut en extraire une suite* u_{n_k} *qui possède les propriétés suivantes :*

1) *Elle converge presque partout vers un potentiel de la classe* (D), u.

2) *Soit* A^n *la fonctionnelle de la classe* (U) *dont le potentiel est* u_n, *Il existe une fonctionnelle* A *dont le potentiel est* u, *telle que la suite* $A^{n_k}_\infty$ *converge vers* A_∞ *dans toute topologie* σ^x, *où* x *est un point tel que* $u_{n_k}(x)$ *tende vers* $u(x)$.

3) *Si la convergence des* u_{n_k} *vers* u *lieu partout,* A *est la fonctionnelle de la classe* (U) *dont le potentiel est* u.

La démonstration de ce théorème est une répétition pure et simple de remarques qui précèdent le théorème 5. 7.

3. Nous allons nous occuper maintenant du problème suivant : supposons que g soit un potentiel fixe de la classe (D), et que les A^n soient des fonctionnelles de la classe (U) dont les potentiels u_n sont majorés par g, telles en outre que les variables aléatoires A^n_∞ associées convergent dans la topologie σ^ξ vers A_∞, où A est une fonctionnelle additive. Nous nous proposons de trouver des conditions qui permettent d'affirmer que la fonctionnelle A appartient à la classe (U). Les théorèmes précédents nous ont montré, par exemple, que si les u_n convergent *partout* vers $u = U_A$, alors A appartient à la classe (U).

Hunt a appelé « Hypothèse (B) » l'hypothèse suivante [1] :

(B) : Soit E un compact quelconque de X, et soit G un voisinage ouvert de E. On désigne par P^λ_E, P^λ_G les opérateurs associés aux temps d'entrée T_E, T_G dans E et G respectivement. On a la relation :

$$\forall\lambda > 0 \quad P^\lambda_G P^\lambda_E = P^\lambda_E.$$

Hunt montre alors que cette relation est alors vraie si E est seulement supposé presque-analytique. On ne connaît pas d'hypothèses commodes et générales qui entraînent cette propriété. Nous utiliserons plutôt la variante suivante de l'hypothèse (B) :

(B′) : *Il existe un* $\lambda > 0$ *tel que la relation* $P^\lambda_G P^\lambda_E = P^\lambda_E$ *soit vérifiée pour tout ensemble presque-analytique* E *et tout voisinage ouvert* G *de* E.

[1] Hunt [I], p. 78. L'hypothèse (F) de Hunt entraîne (B) (III, p. 170).

THÉORÈME 5. 11. — *Considérons les propositions suivantes :*

1) *L'hypothèse* (B') *a lieu pour un* $\lambda > 0$.

2) *Soit* A *un ensemble semi-polaire; pour toute mesure initiale* ν, P^ν*-presque toute trajectoire* ω *est continue en tout point t pour lequel* $X_t(\omega) \in A$.

3) *Soit un* $\mu \geqslant 0$ *quelconque; soient* A^n, A *des fonctionnelles additives de Markov telles : que les* A^n *appartiennent à la classe* (U); *que les* $U^\mu_{A^n}$ *soient majorés par un* μ*-potentiel de la classe* (D), *et convergent quasi partout vers* U^μ_A. *Alors* A *appartient à la classe* (U).

On a entre ces propositions les relations suivantes: $1 \Longrightarrow 2$, $2 \Longrightarrow 3$. *Si toute fonction continue à support compact appartient à* $\overline{\mathcal{H}}$, *alors* $3 \Longrightarrow 1$ (¹) *pour tout* λ.

Démonstration. — Un ensemble semi-polaire B est réunion d'ensembles B_n effilés en chacun de leurs points, donc tels que $P^\lambda_{B_n}1$ soit partout < 1 sur B_n. B_n lui-même est donc réunion des $B_{nk} = B_n \cap \{P^\lambda_{B_n}1 < 1 - 1/k\}$; nous pouvons donc nous borner à démontrer (2) dans le cas où B est tel qu'il existe une constante positive α pour laquelle $P^\lambda_B 1 < 1 - \alpha$ sur B; soit alors T le temps d'entrée dans B : on sait (²) que la répartition de X_T est portée par la réunion de B et de l'ensemble des points réguliers pour B — donc par B dans le cas qui nous occupe — par conséquent, $P^\lambda_B P^\lambda_B 1 < 1 - \alpha$ partout. La série $P^\lambda_B 1 + P^\lambda_B P^\lambda_B 1 + \cdots$ converge donc comme une série géométrique, et il en résulte que presque toute trajectoire ne rencontre B qu'un nombre fini de fois sur tout intervalle fini.

Désignons par N^λ_B la somme de la série précédente.

Il nous suffit évidemment de montrer que, pour toute mesure initiale ν, P^ν-presque toute trajectoire est continue à l'instant T. Montrons d'abord que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une mesure initiale ν pour laquelle on n'ait pas la continuité P^ν-presque sûre à l'instant T, et telle que $\nu(B) = 0$. On peut en effet trouver une mesure initiale ponctuelle ε_x, telle que l'on n'ait pas la continuité presque sûre à l'instant T, pour la mesure P^x (Cf. première partie, § 1, la fin du nº 3). Si $x \notin B$, il suffit de prendre $\nu = \varepsilon_x$; si $x \in B$, x n'est pas régulier pour B, T est donc presque sûrement > 0, et pour t assez petit

(¹) Il nous semble très vraisemblable que (3) $\Longrightarrow$ (1) même sans cette restriction.
(²) Voir Hunt [I], p. 56.

on a par conséquent encore une probabilité positive pour une discontinuité à l'instant T, la mesure initiale étant $P_t(x, dy)$ — or B est de potentiel nul, et par conséquent la mesure $P_t(x, dy)$ ne charge B pour presque aucun t, il suffit alors de prendre pour ν une mesure $P_t(x, dy)$ ne chargeant pas B. La mesure initiale étant ainsi choisie, il existe, d'après Hunt (1), une suite d'ouverts G_n décroissants contenant B, tels que le temps d'entrée T_n dans G_n tende P^ν — p.s., vers le temps d'entrée T en croissant. Il résulte du théorème de Blumenthal que pour les trajectoires ω telles que $T(\omega)$ soit un point de discontinuité pour ω, on a p.s., $T_n(\omega) = T(\omega)$ dès que n est assez grand; la trajectoire $\theta_{T_n}(\omega)$ présente donc, sur l'intervalle $]0, S_\lambda]$ (où S_λ est toujours une variable exponentielle de paramètre λ, indépendante des processus) une rencontre de B de moins que la trajectoire ω. Comme N^λ_B est l'espérance mathématique du nombre de ces rencontres, il en résulte que, pour n assez grand, $P^\lambda_{G_n} N^\lambda_B \neq N^\lambda_B$, et cela contredit l'hypothèse (B').

L'assertion (2) est indépendante de λ. Pour montrer qu'elle implique l'assertion (3), nous supposerons que $\mu = 0$; comme les trajectoires et les ensembles semi-polaires sont les mêmes pour tous les semi-groupes $\{e^{-\mu t} P_t\}$, il n'y a pas là de restriction à la généralité de la démonstration, et cela nous permettra de conserver les notations du n° 2.

Supposons que nous ayons démontré ceci : si des A^n_∞ convergent vers A_∞ au sens de la topologie σ^ξ (voir le début de la démonstration du th. 5. 3), si les fonctionnelles A^n appartiennent à la classe (U), si les $u_n = U_{A^n}$ sont majorés par un potentiel fixe g et convergent quasi partout vers $u = U_A$, alors, pour toute fonction a de $\mathcal{C}_0$ ou de $\overline{\mathcal{H}}$, $W^x(a, u_n) \to W^x(a, u)$ en tout point x tel que $u_n(x) \to u(x)$. L'assertion (3) est alors facile à établir. Nous savons en effet que, si les A^n_∞ convergent vers A_∞, et si $a \in \overline{\mathcal{H}}$, on a en un tel point x la relation $\lim U_{A^n}(a)^x = U_A a^x$ (lemme 5. 5); comme les fonctionnelles A^n appartiennent à la classe (U), $U_{A^n}(a) = W(a, u_n)$. Par conséquent, on a aussi $U_A a = W(a, u)$ pour toute fonction de $\overline{\mathcal{H}}$, donc pour toute fonction de $\mathcal{G}'$. On a vu lors de la démonstration du théorème 2. 6 que, si a est continue à support compact et G un voisinage du support de a, on a $P_G W(a, u) = W(a, u)$. Cela

(1) Hunt [I], p. 55.

entraîne (théorème 3. 3) que A appartient à la classe (U). Dans ces conditions, d'ailleurs, si l'on sait simplement que les u_n sont majorées par g et convergent quasi-partout vers u, sans être renseignés sur la convergence des A^n_∞, le fait qu'il n'y ait qu'une limite possible pour toute suite extraite de la suite A^n_∞, puisqu'il n'existe qu'une fonctionnelle A de la classe (U) dont le potentiel est u, montre que toute la suite A^n_∞ converge vers A_∞.

Soit donc une fonction a de $\mathcal{H}$ (ou de $\mathcal{C}_0$); pour montrer que les $W^x(a, u_n)$ tendent vers $W^x(a, u)$, il nous suffit de construire, pour tout ε, une chaîne $C = \{T_k\}$ de temps d'arrêt, qui soit une (a, ε)-chaîne, et qui soit telle que $W^x(C, a, u_n)$ tende vers $W^x(C, a, u)$ pour tout x tel que $u_n(x) \to u(x)$. Comme les u_n sont majorés par g, potentiel fixe de la classe (D), on peut se borner à regarder la convergence de chaque terme $E^x[a \circ X_{T_k}(u_n \circ X_{T_k} - u_n \circ X_{T_{k+1}})]$ vers $E^x[a \circ X_{T_k}(u \circ X_{T_k} - u \circ X_{T_{k+1}})]$, et il suffit évidemment pour cette convergence que, pour chaque $k > 0$, la répartition de X_{T_k} ne charge pas l'ensemble semi-polaire B où u_n ne tend pas vers u. Dans ces conditions, il nous suffit de construire le temps d'arrêt T_1 de sorte que sa répartition ne charge pas cet ensemble, pour une mesure initiale donnée ν, et de poursuivre la construction par récurrence.

Soit η un nombre compris entre $\varepsilon/2$ et ε, et soit $T^\eta(\omega)$ la borne inférieure de l'ensemble des t tels que

$$|a \circ X_t(\omega) - a \circ X_0(\omega)| > \eta;$$

si la trajectoire ω est continue à l'instant t, l'application $s \to a \circ X_s(\omega)$ est aussi continue à l'instant t (puisque $a \in \mathcal{H}$ ou $a \in \mathcal{C}_0$), et l'on a $|a \circ X_{T^\eta}(\omega) - a \circ X_0(\omega)| = \eta$. Considérons l'ensemble $E^\eta = \{\omega : X_{T^\eta}(\omega) \in B\}$; si nous montrons que l'ensemble des η tels que $P^\nu[E^\eta] > 0$ est dénombrable, nous saurons que son complémentaire n'est pas vide, nous choisirons un nombre η dans ce complémentaire et nous poserons $T_1 = T^\eta$; la construction de notre chaîne sera donc possible. Or, nous l'avons vu au début de la démonstration de ce théorème, B est la réunion d'ensembles B_{nk} ($n \in \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N}$), tels, que presque toute trajectoire ω rencontre B_{nk} suivant un ensemble isolé. Soit donc R_{nkp} l'instant de la p-ème rencontre de B_{nk}. L'ensemble E^η est contenu dans la réunion des ensembles $E^\eta_{nkp} = \{\omega : a \circ X_{R_{nkp}}(\omega) = \eta\}$; or E^η_{nkp} ne peut avoir une mesure positive que pour une infinité dénombrable de valeurs de η, car la variable aléatoire $a \circ X_{R_{nkp}}$ ne peut prendre, avec une probabilité positive, plus d'une infinité dénombrable de valeurs. Il en résulte bien que l'ensemble des η tels que $P^{\nu}[E^{\eta}] > 0$ est dénombrable.

Il nous reste à montrer que, si $\mathcal{C}_0 \in \overline{\mathcal{H}}$ (c'est-à-dire, si $\lambda U^{\lambda} a \to a$ uniformément sur X lorsque $\lambda \to \infty$) alors l'assertion (3) entraîne (1). Il nous suffit (Hunt [I], p. 78) de montrer que l'on a, pour tout compact E et tout voisinage G de E, la relation $P^{\lambda}_{G} P^{\lambda}_{E} = P^{\lambda}_{E}$, et pour la vérifier il nous suffit de vérifier que les deux membres ont même valeur, lorsqu'on les applique à une fonction f, qui est un λ-potentiel de fonction positive bornée, et par conséquent une fonction λ-excessive régulière. Soit une suite d'ouverts G_n, tels que $\overline{G}_{n+1} \subset G_n$, et que $\bigcap_n G_n = E$; la limite des $P^{\lambda}_{G_n} f$ est $P^{\lambda}_{E} f$, sauf peut-être aux points de E non réguliers pour E — donc quasi-partout. Soit A^n la fonctionnelle de la classe (U) dont le λ-potentiel est $P^{\lambda}_{G_n} f$, et A celle dont le λ-potentiel est $P^{\lambda}_{E} f$; les A^n_{∞} convergent vers A_{∞} d'après les remarques qui ont été faites plus haut dans cette démonstration. Soit a une fonction continue à support compact, comprise entre 0 et 1 partout, égale à 1 sur un voisinage de E; elle est égale à 1 sur $\overline{G}_n$ dès que n est assez grand, et par conséquent on a $U^{\lambda}_{A^n} a = U^{\lambda}_{A^n}$; en effet, comme on a la relation $P^{\lambda}_{G^n} P^{\lambda}_{G^n} f = P^{\lambda}_{G^n} f$ (qui est vraie sans l'utilisation de l'hypothèse (B′), parce que G_n est ouvert), ou encore

$$P^{\lambda}_{G^n} U^{\lambda}_{A^n} = U^{\lambda}_{A^n},$$

la fonction $A^n_t(\omega)$ est nulle pour $t \leqslant T_{G_n}(\omega)$ d'après le théorème 3. 1. Comme $f \in \mathcal{H}$, on peut passer à la limite dans les deux membres de cette relation (lemme 5. 5), et par conséquent $U^{\lambda}_{A} a = U^{\lambda}_{A} 1$. Faisons tendre a vers la fonction caractéristique de E, utilisons, comme A appartient à la classe (U), le théorème 3. 3, il vient bien que $P^{\lambda}_{G} P^{\lambda}_{E} f = P^{\lambda}_{E} f$, pour tout ouvert G contenant E.

Signalons un cas important dans lequel le théorème que nous venons de démontrer peut s'appliquer : d'après le théorème de convergence de Doob que nous avons rappelé au début de cette seconde partie, si une suite de fonctions excessives u_n converge partout vers une fonction $\overline{u}$, on a partout

$\overline{u} = \liminf u_n$, et par conséquent $\overline{u}$ ne diffère de sa régularisée u que sur un ensemble semi-polaire; la suite u_n converge donc quasi-partout vers la fonction excessive u.

Nous démontrerons au paragraphe VI que, sous l'hypothèse (F) de Hunt [1], si des potentiels de mesures $U\mu_n$, où les μ_n ont des supports contenus dans un compact fixe, convergent presque partout vers un potentiel $U\mu$, alors les μ_n convergent vaguement vers μ — et en particulier, μ est portée par ce même compact. Ce résultat permet d'obtenir, sous l'hypothèse (F), une version très satisfaisante du théorème 5. 11.

THÉORÈME 5. 12. — *Sous l'hypothèse* (F) *de Hunt, soit g un potentiel de la classe* (D), *ξ une mesure telle que la famille des ensembles ξ-négligeables soit identique à celle des ensembles de potentiel nul, et que g soit ξ-intégrable. L'ensemble des variables aléatoires* A_∞ *associées aux fonctionnelles additives* A *de la classe* (U), *dont le potentiel est majoré par g, est compact et métrisable pour la topologie σ^ξ. L'application* $A \to U_A$ *de cet ensemble sur celui des fonctions excessives majorées par g, muni de la topologie induite par* $L^1(\xi)$, *est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Nous la donnerons au paragraphe VI, afin de ne pas avoir à introduire ici tout un système de nouvelles notations.

6. — Applications à la théorie du potentiel.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de faire le lien entre la théorie que nous avons développée dans les paragraphes précédents, et la théorie du potentiel telle qu'elle est traitée dans la troisième partie du mémoire de Hunt. Un potentiel de la classe (D) admet alors deux représentations : l'une, comme potentiel d'une mesure, l'autre, comme potentiel d'une fonctionnelle; il serait intéressant d'étudier les rapports entre ces deux représentations, ce que nous n'avons fait ici que très sommairement.

Rappelons, parmi les conséquences de l'hypothèse (F) de Hunt, celles que nous aurons à utiliser ici. Nous disposons d'une

[1] Voir Hunt (III] p. 154.

mesure positive privilégiée sur l'espace X, que nous noterons dx, et de *deux* semi-groupes fortement continus sur l'espace $\mathcal{C}_0(X)$, sous-markoviens, qui laissent $\mathcal{C}_0(X)$ invariant. Nous les désignerons par les notations P_t et $\hat{P}_t$, et pour le second nous écrirons $\hat{P}_t(dy, x)$ au lieu de la notation $\hat{P}_t(x, dy)$ habituelle pour les diffusions. La mesure dx est excessive pour les deux semi-groupes — ce qui signifie que l'on a, pour toute fonction f positive :

$$\int_X dx\, P_t(x, f) \leqslant \int_X f(x)\, dx; \qquad \int_X \hat{P}_t(f, y)\, dy \leqslant \int_X f(y)\, dy.$$

Soient $\gamma(t)$ une fonction à support compact sur R_+, dt la mesure de Lebesgue sur R_+; on pose

$$P_\gamma \ (\text{resp. } \hat{P}_\gamma) = \int_{R_+} P_t \gamma(t)\, dt \ \left(\text{resp.} = \int_{R_+} \hat{P}_t \gamma(t)\, dt\right).$$

On suppose qu'il existe une fonction $p_\gamma(x, y)$, telle que les applications $x \to p_\gamma(x, y)$, $y \to p_\gamma(x, y)$ appartiennent à $\mathcal{C}_0(X)$, et telle que l'on ait :

$$P_\gamma(x, dy) = p_\gamma(x, y).dy; \qquad \hat{P}_\gamma(dx, y) = dx.p_\gamma(x, y);$$

de sorte que les semi-groupes jouent un rôle symétrique. Nous nous écarterons un peu de la terminologie de Hunt, et nous distinguerons par le préfixe « co- » les éléments de la théorie du potentiel relative au semi-groupe $\hat{P}_t$; de sorte que nous parlerons, par exemple, de fonctions coexcessives, de points coréguliers, etc. Le chapeau ^ nous servira au même usage. Voici maintenant une liste des propriétés fondamentales que nous aurons à utiliser :

a) Les fonctions excessives (coexcessives) sont semi-continues inférieurement (Cf. Hunt [III], p. 186).

b) Les noyaux pour les potentiels sont des noyaux fonctions :

$$U^\lambda(x, dy) = U^\lambda(x, dy).dy; \qquad \hat{U}^\lambda(dx, y) = dx.U^\lambda(x, y)$$

séparément semi-continus inférieurement; cela permet de définir le potentiel d'une mesure $U^\lambda\mu$ (resp. le copotentiel μU^λ) qui est une fonction excessive (coexcessive). Si des μ_n (positives, comme toutes les mesures que nous aurons à considérer) convergent vaguement vers une mesure μ, on a l'inégalité $U\mu \leqslant \lim\inf U\mu_n$.

c) Si f est une fonction bornée à support compact, et $\lambda > 0$, les fonctions

$$U^\lambda f\left(= \int U^\lambda(x,\, y)f(y)\,dy\right) \quad \text{et} \quad fU^\lambda\left(= \int dx\, f(x)U^\lambda(x, y)\right)$$

appartiennent à $\mathcal{C}_0$. (Cf. Hunt [III], p. 172 prop. 18. 1).

d) Soit K un compact; il existe un compact K′ tel que le copotentiel $(\gamma_{K'})U^\lambda$ soit borné inférieurement sur K par un nombre > 0. (Cf. Hunt [II], p. 329, prop. 12. 1 (appliquée au semi-groupe $\hat{P}_t$)).

e) Soit E un ensemble analytique, soient T_E et $\hat{T}_E$ les temps d'entrée dans E des processus $\{X_t\}$ et $\{\hat{X}_t\}$ respectivement, P_E^λ et $\hat{P}_E^\lambda$ les opérateurs de balayage associés à ces temps d'entrée. On a la relation :

$$\int P_E^\lambda(x,\, dy)\, U^\lambda(y,\, z) = \int U^\lambda(x,\, z)\hat{P}_E^\lambda(dz,\, y).$$

Cf. Hunt [III], p. 168, relation (18. 3)).

f) Toute fonction excessive (coexcessive) finie est localement sommable par rapport à la mesure dx (Hunt [III], p. 167).

Tous ces résultats sont faciles à établir, sauf l'identité (*e*). Nous allons d'abord en déduire un théorème, que Hunt n'énonce pas sous cette forme.

THÉORÈME 6. 1. — *Les ensembles polaires et semi-polaires sont les mêmes pour les deux semi-groupes* $\{P_t\}$ *et* $\{\hat{P}_t\}$.

Démonstration. — Soit E un ensemble polaire; il est contenu dans un ensemble borélien polaire (§ 1, nº 4); le premier membre de (*e*) étant identiquement nul, il en est de même du second. L'image de $\mathcal{C}_0$ par l'application $f \to fU^\lambda$ étant dense dans $\mathcal{C}_0$, les mesures $\hat{P}_E^\lambda(dz,\, y)$ sont nulles pour tout y, et E est polaire pour le semi-groupe $\hat{P}_t$.

Soit de même F un ensemble semi-polaire; il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles E_p, boréliens, tels que les opérateurs $(P_{E_p}^\lambda)^n$ tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$ (Cf. la démonstration du théorème 5. 11, et le § 1, nº 4) — il nous suffit donc de raisonner sur un ensemble E de ce type. D'après la propriété (*e*) :

$$\lim_n\, (P_E^\lambda)^n\, U^\lambda 1 = 0 = \lim_n U^\lambda(\hat{P}_E^\lambda)^n 1.$$

Il en résulte que la fonction $(\hat{P}_E)^n 1$ tend vers 0 presque partout lorsque $n \to \infty$ et nous avons vu au § 1, n° 4, que cela entraîne que E est semi-polaire pour le semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$.

2. Nous allons démontrer maintenant, d'après Choquet [1], un théorème important. Comme nous ne voulons pas utiliser l'hypothèse (G) de Hunt, nous raisonnerons dans le cas où λ est strictement positif.

Définition 6. 1. — *Soit* $\{G_n\}$ *une suite croissante d'ouverts relativement compacts dont la réunion est* X. *Nous appellerons topologie de la convergence* L^1 *locale* (*sur l'espace des fonctions localement sommables pour la mesure* dx) *la topologie définie par les semi-normes* $||u||_n = \int_{G_n} |u|\, dx$.

Théorème 6. 2. — *Soit* Γ *le cône des fonctions* λ*-excessives localement sommables* (*ce qui équivaut à : finies hors d'un ensemble polaire*), *et soit* H *une partie de* Γ *telle que l'on ait, pour tout* n, $\sup_{h \in H} ||h||_n < \infty$ (H *est une partie bornée de* Γ). H *est alors relativement compacte pour la topologie de la convergence* L^1 *locale.*

Démonstration. — Nous avons à démontrer que de toute suite de fonctions h_n de H, nous pouvons extraire une suite qui converge au sens de la topologie L^1-locale. Pour chaque G_k, considérons la fonction $P^\lambda_{\complement G_k} h_n$: c'est, d'après Hunt ([III], p. 173, prop. 18. 4) un potentiel de mesure bornée $U^\lambda \mu_{k,n}$ où $\mu_{k,n}$ est portée par $\overline{G}_k$. Pour chaque k, les masses totales des $\mu_{k,n}$ sont bornées, d'après la propriété (d), et le fait que les intégrales des h_n sur tout compact K' sont uniformément bornées. En utilisant : le théorème de Deny (théorème 5. 8), le critère de compacité vague des ensembles de mesures, et le procédé diagonal, on peut construire une suite de fonctions h_p, extraite de la suite h_n, telle que :

les h_p convergent presque partout;

les $P^\lambda_{\complement G_k} h_p$ convergent presque partout pour tout k;

les mesures $\mu_{k,p}$ convergent vaguement pour tout k.

Il nous suffit maintenant de montrer que les h_p sont uniformément intégrables sur tout compact. Or $h_p = P^\lambda_{\complement G_k} h_p$ sur

(1) Voir Choquet [I] et le Séminaire [I].

G_k : il nous suffit donc de montrer que les $P^\lambda_{G_k} h_p$ sont uniformément intégrables sur G_k. Cela résultera du lemme suivant :

Lemme 6. 2. 1. — *Soit u_p une suite de λ-potentiels localement sommables de mesures μ_p portées par un compact* K. *On suppose : que les μ_p convergent vaguement vers une mesure μ, que les u_p convergent presque partout vers une fonction λ-excessive u. Alors on a $u = U^\lambda\mu$, et les intégrales $\int_G u_p\, dx$ convergent vers $\int_G u\, dx$, pour tout ouvert relativement compact* G *contenant* K.

Démonstration. — La dernière phrase équivaut évidemment à l'intégrabilité uniforme des u_p sur G; montrons comment elle peut se déduire de la première.

Soit g la fonction $(\chi_G)U^\lambda$ qui est continue d'après la propriété (c). Comme les μ_p convergent vaguement vers μ, $\langle g, \mu_p\rangle \rightarrow \langle g, \mu\rangle$ ce qui signifie encore que $\int_G u_p . dx \rightarrow \int_G u\, dx$, et entraîne l'intégrabilité uniforme des u_p sur G.

Reste à démontrer la première phrase; posons $v = U\mu$. D'après la semi-continuité inférieure du noyau $U^\lambda(x, y)$ en y, on a la relation $v \leqslant \liminf u_p$, donc $v \leqslant u$ presque partout, et donc partout. Si l'on avait $v \neq u$, on pourrait trouver un compact A, de mesure positive, et un $\varepsilon > 0$, tel que $v + \varepsilon \leqslant u_p$ sur A pour tout p assez grand. Cela entraînerait la relation

$$\int_A v\, dx < \liminf \int_A u_p\, dx,$$

ou encore

$$\langle(\chi_A)U^\lambda, \mu\rangle < \liminf \langle(\chi_A)U^\lambda, \mu_p\rangle,$$

ce qui est impossible, car $(\chi_A)U^\lambda$ est une fonction continue, les μ_p ont leurs supports dand un compact fixe et convergent vaguement vers μ.

Nous allons déduire de ce théorème plusieurs conséquences assez intéressantes :

a) Corollaire 6. 3. — *Le cône Γ étant muni de la topologie de la convergence* L^1 *locale, et g désignant une fonction positive mesurable localement bornée inférieurement, toute fonction* *excessive u telle que* $\int_X u.g\,dx < \infty$ *est barycentre d'une mesure positive unique portée par l'ensemble des fonctions excessives extrémales h telles que* $\int_X h.g\,dx = 1$.

Démonstration. — Dans l'espace X des classes de différences de deux fonctions excessives $u_1 - u_2$, où u_1 et u_2 sont sommables pour la mesure $g.dx$, qui est un espace localement convexe pour la topologie de la convergence L^1 locale, l'ensemble des fonctions excessives u pour lesquelles $\int_X u.g\,dx \leqslant 1$ est un convexe compact (d'après le lemme de Fatou) et métrisable; ses points extrémaux sont le point 0, et les points extrémaux de la « base » formée des fonctions u telles que $\int_X u.g\,dx = 1$. Enfin, l'ensemble des restrictions à ce compact convexe des formes linéaires affines continues dans tout l'espace est réticulé. Le corollaire est donc une conséquence du théorème de Choquet (Cf. Choquet [II]).

b) *Démonstration du théorème* 5. 12. — Nous savons déjà (en conservant les notations de l'énoncé de ce théorème) que l'ensemble des A_∞ associées aux fonctionnelles de la classe (U) telles que $U_A \leqslant g$, est uniformément intégrable (théorème 5. 8) pour la mesure P^ξ. Il en est donc de même de son adhérence pour la topologie σ^ξ. La topologie induite par σ^ξ sur cette adhérence est alors métrisable — car, pour que des fonctions $f_i(\omega)$ convergent vers une fonction $f(\omega)$ au sens de la topologie σ^ξ (suivant un filtre) il faut et il suffit, si la famille f_i est uniformément intégrable, que les $E^\xi[\chi_{A_k}.f_i]$ convergent vers $E^\xi[\chi_{A_k}.f_i]$ suivant ce filtre, où les A_k constituent une suite de parties de Ω qui engendrent la tribu F^0 (1). Il nous suffit donc de montrer que, si une suite de variables aléatoires A^n_∞ converge au sens de σ^ξ vers A_∞, la fonctionnelle A appartient à la classe (U). Or, nous savons que si a est une fonction de $\mathcal{H}$ — et en particulier ici si $a \in \mathcal{C}_0$ —, $U^\lambda_{A^n}a \to U^\lambda_A a$ presque partout. Si a est nulle hors d'un compact K,

$$P^\lambda_G U^\lambda_{A^n} a = U^\lambda_{A^n} a$$

d'après le théorème 3. 3, pour tout voisinage G de K, et $U^\lambda_{A^n}a$

(1) Voir par exemple Dunford et Schwartz [I], pp. 291-292.

est par conséquent (Hunt [III], prop. 18. 4) le potentiel d'une mesure μ_n portée par K. Il résulte alors du théorème 6. 2 qu'il en est de même de $U^\lambda_A a$; par conséquent, $P^\lambda_G U^\lambda_A a = U^\lambda_A a$, et cela implique bien que A est de la classe (U) d'après le théorème 3. 3. La dernière phrase de l'énoncé est alors immédiate : l'application $A \to U_A$ est une application biunivoque et continue d'un espace compact sur un espace topologique séparé, c'est donc un homéomorphisme.

c) Théorème 6. 4. — *Soient une fonctionnelle additive* A *de la classe* (U), *et une mesure* μ, *telles que les potentiels* U_A *et* $U\mu$ *soient finis et égaux; on a alors* $U_A a = U(a.\mu)$ *pour toute fonction a borélienne et positive.*

Démonstration. — Il nous suffit évidemment de raisonner dans le cas où a est une fonction positive, continue, et à support compact. D'autre part, nous pouvons nous borner à considérer les semi-groupes pour lesquels l'hypothèse (G) de Hunt (le potentiel et le copotentiel de tout compact sont des fonctions bornées) est vérifiée — semi-groupes pour lesquels les raisonnements de la démonstration du théorème 6. 2 restent valables lorsque $\lambda = 0$. Si notre théorème est démontré sous cette hypothèse, il le sera en effet pour les semi-groupes $\{e^{-\lambda t}P_t\}$ $(\lambda > 0)$; si nous avons $U_A = U\mu$, nous aurons $U^\lambda_A = U^\lambda\mu$ (cf. la démonstration du théorème 4. 4), par conséquent, $U^\lambda_A(a) = U^\lambda(a.\mu)$, et il suffira de faire tendre λ vers 0 pour obtenir le résultat cherché.

Supposons donc l'hypothèse (G) réalisée. Soit u la valeur commune des deux potentiels, et soit ξ une mesure positive, équivalente à la mesure dx, telle que u soit ξ-intégrable. Considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures ν dont le potentiel est majoré par u, muni de la topologie vague. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des variables aléatoires B_∞, associées aux fonctionnelles B de la classe (U) dont le potentiel est majoré par u, muni de la topologie σ^ξ. Soit enfin $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions excessives majorées par u, muni de la topologie induite par celle de $L^1(\xi)$. L'application $B \to U_B$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{L}$ (théorème 5. 12), l'application $\nu \to U\nu$ un homéomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{L}$ (théorème 6. 2, et Hunt [III], théorème 18. 7). Il existe donc un homéomorphisme φ et un seul, de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{F}$, tel que l'on ait $U\nu = U_{\varphi(\nu)}$ pour toute mesure ν de $\mathcal{M}$. Si a est une fonction continue à support compact, comprise entre 0 et 1, l'application $\nu \rightarrow a.\nu$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ est continue, ainsi que l'application $B \rightarrow a.B$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ (lemme 5. 5). L'ensemble des mesures ν telles que $\varphi(a.\nu) = a.\varphi(\nu)$ est donc fermé dans $\mathcal{M}$. Comme il contient les mesures absolument continues par rapport à la mesure dx, il est aussi dense dans $\mathcal{M}$, c'est donc $\mathcal{M}$ tout entier. C.Q.F.D.

3. Il est important de posséder des critères qui permettent de reconnaître, par l'examen d'une mesure μ, si son potentiel appartient à l'une des trois classes envisagées dans l'énoncé du théorème 3. 7. Nous raisonnerons encore en supposant vérifiée l'hypothèse (G) de Hunt.

THÉORÈME 6. 5. — *Soit μ une mesure à support compact, dont le potentiel u est fini en tout point. Pour que u soit une fonction régulière de la classe* (D), *il faut et il suffit que μ ne charge aucun ensemble semi-polaire.*

Démonstration. — *a*) Supposons que u appartienne à la classe (D), et soit régulière. Il existe alors une série de fonctions excessives u_n bornées et régulières (théorème 3. 6, et corollaire 2. 5. 2) dont la somme est u. Chaque u_n est un potentiel de mesure $U\mu_n$ (Hunt, théorème 18. 7, p. 177), et il nous suffit évidemment de raisonner pour chaque μ_n. Supposons que μ_n charge un ensemble semi-polaire; cet ensemble est aussi co-semi-polaire, et μ_n charge par conséquent un compact K sans point corégulier. Soit ν la restriction de μ_n à K; le potentiel $U^\lambda\nu$ est borné et régulier, puisque majoré λ-fortement par $U^\lambda\mu_n = u_n - \lambda U^\lambda u_n$; on a pour tout voisinage G de K la relation $P^\lambda_G U^\lambda \nu = \nu$ [1], et d'autre part

$$P^\lambda_K U^\lambda \nu = U^\lambda \hat{P}^\lambda_K \nu \neq U^\lambda \nu \ (^2).$$

Il suffit de choisir une suite de voisinages G_n de K telle, que le temps d'entrée dans G_n tende en croissant vers le temps d'entrée dans K, pour obtenir une contradiction.

(1) Hunt [III], p. 170.
(2) La masse totale de $\hat{P}^\lambda_K \nu$ est strictement plus petite que celle de ν.

b) Réciproquement, supposons que μ ne charge aucun ensemble semi-polaire. D'après le théorème 6. 1, étant donné un compact quelconque K, l'ensemble des points de K qui sont coréguliers pour K porte la restriction μ_K de μ à K. Il en résulte que l'on a $P_K U(\mu_K) = U\hat{P}_K(\mu_K) = U(\mu_K)$, puisque la mesure $\hat{P}_K(dy, x)$ est la masse unité ε_x pour μ_K-presque-tout x. Il en résulte que l'on peut répéter la dernière partie du raisonnement du théorème 2. 6, pour montrer que $U\mu$ est limite d'une suite fortement croissante de potentiels uniformément excessifs, et par conséquent, que u est régulière et appartient à la classe (D).

THÉORÈME 6. 6. — *Soit μ une mesure à support compact dont le potentiel u est fini en tout point. Pour que u appartienne à la classe* (D), *il faut et il suffit que μ ne charge aucun ensemble polaire.*

Démonstration. — Si une mesure μ est portée par un ensemble compact polaire K, et si son potentiel u appartient à la classe (D), ce potentiel est nul. Pour le voir, il suffit de prendre une suite de voisinages G_n de K tels, que le temps d'entrée dans G_n tende en croissant vers la durée de vie S, de remarquer que $P_{G_n} u = u$, et que $P_{G_n} u \to 0$ si u appartient à la classe (D). La nécessité de la condition est donc évidente.

Soit, inversement, une mesure à support compact μ dont le potentiel u est étranger à la classe (D). Montrons d'abord que μ est portée par un ensemble semi-polaire; soit en effet $\mathcal{F}$ la famille des potentiels de mesures $\varphi = U\nu$, tels que $\varphi \ll u$ et que ν soit portée par un ensemble semi-polaire : $\mathcal{F}$ est filtrante croissante pour l'ordre fort, et la limite de toute suite fortement croissante de fonctions de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. D'après le théorème 1. 1, il en résulte que l'enveloppe supérieure de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$; soit φ cette enveloppe supérieure, d'après le théorème 6. 5, $u - \varphi$ est une fonction de la classe (D), fortement majorée par u, donc nulle. La mesure μ charge donc un compact sans point corégulier, K. Comme ce compact est une réunion dénombrable de compacts K_n de la forme

$$K \cap \{x : \hat{P}_K^{\lambda} 1 \leqslant 1 - 1/n\},$$

nous pouvons nous ramener au cas où K est un compact, qui n'est rencontré que suivant un ensemble discret par presque toute trajectoire du processus $\{\hat{X}_t\}$ (Cf. la démonstration du théorème 5. 11). Comme les ensembles semi-polaires et co-semi-polaires sont identiques, nous pouvons encore réduire K, en supposant que la même propriété a lieu pour le processus $\{X_t\}$, sans que μ cesse de le charger. Considérons alors les fonctions excessives $P_K 1$, $P_K P_K 1 \ldots (P_K)^n 1$; ce sont des potentiels de mesures π_K, $\pi_K^{(2)}$, ..., $\pi_K^{(n)}$... portées par K, et la restriction de μ à K est étrangère à toutes ces mesures. Pour finir, nous pouvons donc trouver un compact $L \subset K$, négligeable pour toutes ces mesures, tel que μ charge L; nous allons montrer que L est polaire, et notre théorème en résultera. Soit G un voisinage relativement compact de K, et π_G la distribution capacitaire de G ($U\pi_G = P_G 1$). Nous avons :

$$U\pi_K = P_K 1 = P_K P_G 1 = P_K U\pi_G = U\hat{P}_K \pi_G;$$

donc $\pi_K = \hat{P}_K \pi_G$. De même, par récurrence, on voit que $\pi_K^{(n)} = (\hat{P}_K)^n \pi_G$. Or, L est $\pi_K^{(n)}$-négligeable : il en résulte que L est négligeable, pour π_G-presque tout x, pour toute mesure $\hat{P}_K^n(dy, x)$. Or $\sum_n \hat{P}_K^n(L, x)$ est l'espérance mathématique du nombre des rencontres de L par un processus $\widehat{\{X_t\}}$ issu du point x; on a donc aussi $\hat{P}_L(1, x) = 0$ pour π_G-presque tout x. Il ne reste plus qu'à remarquer que la fonction $P_L 1 = P_L P_G 1$ est égale à $U\hat{P}_L \pi_G$, d'où résulte que $P_L 1 = 0$, et que L est polaire.

En raisonnant comme au début de la démonstration du théorème 6. 6, le lecteur prouvera facilement le :

THÉORÈME 6. 7. — *Soit μ une mesure dont le potentiel u est partout fini.*

Pour que u soit un potentiel étranger à la classe (D), *il faut et il suffit que μ soit portée par un ensemble polaire.*

Pour que u appartienne à la classe (D), *et soit purement irrégulier, il faut et il suffit que μ ne charge aucun ensemble polaire, mais soit portée par un ensemble semi-polaire.*

Pour que u soit un potentiel régulier de la classe (D), *il faut et il suffit que μ ne charge aucun ensemble semi-polaire.*

7. — Fonctionnelles additives continues (1).

1. Nous ne sommes par parvenus à utiliser de manière satisfaisante le fait qu'une fonctionnelle additive est tout simplement le logarithme d'une fonctionnelle multiplicative. Dans le cas où les fonctionnelles sont *continues*, on peut obtenir quelques résultats dans cette direction.

Dans tout ce qui suit, $\{M_t\}$ désigne une fonctionnelle multiplicative de Markov, continue, pour laquelle tous les points de X sont permanents; $\{Q_t\}$, R, sont respectivement le semi-groupe subordonné, le temps terminal associés à cette fonctionnelle. Les résolvantes du semi-groupe $\{Q_t\}$ sont notées V^λ. Enfin, $\{A_t\}$ désigne la fonctionnelle additive de Markov $\{-\log M_t\}$.

LEMME 7. 1. — *Soit $a(t)$ une application de R_+ dans R_+ croissante et continue à droite, et soit $c(t) = \inf\{s : a(s) > t\}$; la fonction $c(t)$ (à valeurs dans $\overline{R}_+$) est croissante et continue à droite, et l'on a $a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}$. Soit f une fonction borélienne positive sur R_+ (que l'on prolonge à $\overline{R}_+$ en posant $f(+\infty) = 0$); on a la relation :*

$$\int_{R_+} f(t)\, da(t) = \int_{R_+} f\circ c(t)\, dt.$$

Démonstration. — Il nous suffit de démontrer la relation $a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}$, qui n'est autre que la relation intégrale ci-dessus, écrite en prenant pour f la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, s]$; les deux membres étant des mesures en f, il en résultera que la relation sera vraie pour toute fonction f. Remarquons que, comme l'on a

$$c(a(s)) = \inf[r : a(r) > a(s)],$$

on a $c(a(s)) \geqslant s$ pour tout s, avec égalité si et seulement si le point s est un point de croissance à droite pour la fonction a (c'est-à-dire, un point s tel que $a(s+\varepsilon) > a(s)$ pour tout $\varepsilon > 0$). Il en résulte que l'on a $c(a(s+\varepsilon)) \geqslant s+\varepsilon > s$

(1) Plusieurs résultats de ce paragraphe ont été publiés par Volkonski (cf. Volkonski [II]).

pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, on a $\inf \{t : c(t) > s\} \leqslant a(s+\varepsilon)$, et on voit que cette borne inférieure est $\leqslant a(s)$. Si elle était strictement plus petite, on pourrait trouver un $r < a(s)$ tel que $c(r) > s$, ce qui est impossible, car $c(r) > s \Longrightarrow a(r) \leqslant s$ par définition de la fonction c.

THÉORÈME 7. 2. — *Associons à la fonctionnelle additive* $A = \{A_t\}$ *les quantités* $c_t(\omega) = \inf \{s : A_s(\omega) > t\}$; *les* c_t *forment une famille croissante et continue à droite de temps d'arrêt, et l'on a pour tout* $\lambda \geqslant 0$ *et toute fonction* f *positive, la relation :*

$$U_A^\lambda f^x = E^x\left[\int_0^\infty \exp\,[-\lambda c_t]\,.f \circ X_{c_t}\,dt\right].$$

Démonstration. — Application directe du lemme précédent. La continuité de la fonctionnelle n'est pas utilisée.

THÉORÈME 7. 3. — A, R *ayant les significations indiquées plus haut, on a la relation* $U_A^\lambda f = P_R^\lambda f + P_R^\lambda U_A^\lambda f$. *En outre, les opérateurs* U_A^λ *et* P_R^λ *commutent* (1).

Démonstration. — Les c_t étant définis comme ci-dessus, on a la relation :

$$E\,[\exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t}] = E\,[\exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t},\ c_t < R] + E[\ldots,\ c_t = R] + E[\ldots,\ c_t > R].$$

Intégrons de 0 à ∞, avec la mesure initiale ε_x. D'après le théorème 7. 2, le premier membre devient $U_A^\lambda f^x$. Le premier terme du second membre, qui est aussi égal à

$$E\,[\exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t}\,.\,M_{c_t}],$$

est égal après intégration à $E^x\left[\int_0^\infty \exp(-\lambda t) f \circ X_t\,.\,M_t\,dA_t\right]$, et comme $M_t\,dA_t = -dM_t$, cela vaut aussi $P_R^\lambda f^x$ (la relation $M_t\,dA_t = -dM_t$ est vérifiée parce que $A_t = -\log M_t$ et que la fonctionnelle est continue; si elle ne l'était pas, il faudrait définir A_t comme égale à $\left.\int_0^{t_+} -dM_t/M_t\right)$. Le second terme du second membre, égal à $E^x\,[\exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t}(M_{c_t} - M_{c_t-})]$, est nul si la fonctionnelle est continue. Enfin, désignons par

(1) Comparer à Hunt [I], prop. 4.4.

$t \to r_t(\omega)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $]R(\omega), \infty[$. Nous avons :

$$\begin{aligned} P_R^\lambda U_A^\lambda f^x &= E^x\left[\int_0^\infty r_t(\omega) \exp(-\lambda t) f \circ X_t(\omega)\, dA_t(\omega)\right] \quad \text{(théorème 3. 1)} \\ &= E^x\left[\int_0^\infty r_{c_t}(\omega) \exp(-\lambda_{c_t}) f \circ X_{c_t}(\omega)\, dt\right] \quad \text{(lemme 7. 1)} \\ &= \int_0^\infty dt \int_{\{c_t > R\}} \exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t}\, dP^x \end{aligned}$$

qui est bien l'intégrale du dernier terme du second membre. Le fait que les opérateurs U_A^λ et P_R^λ commutent résultera un peu plus loin du calcul explicite de P_R^λ.

Définition 7. 1. — *On appelle* changement de temps *une famille de temps d'arrêt c_t, définis sur l'espace des trajectoires Ω^*, et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) *La fonction $t \to c_t(\omega)$ est, quelle que soit la mesure initiale* ν, P^ν — p.s. *continue à droite et croissante.*

2) *Pour tout couple u, v de nombres positifs, la relation :*

$$c_{u+v}(\omega) = c_u(\omega) + c_v(\theta_{c_u}\omega)$$

est vérifiée hors d'un ensemble $H_{u,v}$ *négligeable pour toute mesure* P^ν.

Exemple. — Les c_t associés à la fonctionnelle additive continue $\{A_t\}$ (voir l'énoncé du théorème 7. 2) constituent un changement de temps, tel que c_0 soit égal à 0. La première des deux conditions ci-dessus est évidemment vérifiée; la seconde l'est si $c_u(\omega) < \infty$; si $c_u(\omega) < \infty$, la fonction continue $s \to A_s(\omega)$ prend la valeur u, et des valeurs plus grandes. Soit t le dernier point tel que $A_t(\omega) = u$; on a $c_{A_t} = t$, et $t = c_u$. Alors :

$$\begin{aligned} c_{u+v}(\omega) &= \inf\{s : A_s(\omega) > u + v\} = \inf\{s : A_s(\omega) - A_t(\omega) > v\} \\ &= \inf\{s : A_{s-t}(\theta_t\omega) > v\} = t + \inf\{r : A_r(\theta_t) > v\} \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque $t = c_u$.

Nous n'énonçons le théorème suivant que pour des changements de temps $\{c_t\}$ tels que c_0 soit égal à 0 p.s. pour toute mesure P^ν.

Théorème 7. 4. — *Soit $\{c_t\}$ un changement de temps tel que c_0 soit* p.s. *nul pour toute mesure initiale. Posons*

$C_t^\lambda(x, f) = E^x[\exp(-\lambda c_t) . f \circ X c_t]$; *les opérateurs* C_t^λ *forment un semi-groupe sous-markovien subordonné au semi-groupe* $\{C_t\} = \{C_t^0\}$. *Une fonction* g, *qui est* λ*-excessive par rapport au semi-groupe* $\{P_t\}$, *est excessive par rapport au semi-groupe* $\{C_t^\lambda\}$.

Enfin, le processus $\{Y_t\} = \{X_{c_t}\}$ *est markovien par rapport aux tribus* F_{c_t}, *et admet* $\{C_t\}$ *comme semi-groupe de transition.*

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} C_{s+t}^\lambda(x, f) &= E^x[\exp(-\lambda c_{s+t}) f \circ X_{c_{s+t}}] \\ &= E^x[\exp(-\lambda c_s) \exp(-\lambda c_t(\theta_{c_s})) f \circ X_{c_t(\theta_{c_s})}) (\theta_{c_s})]. \\ &= E^x[E[\ldots | F_{c_s}]] \\ &= E^x[\exp(-\lambda c_s) . E^{X_{c_s}}[\exp(-\lambda c_t) f \circ X_{c_t}] \\ &\qquad\qquad\qquad (1^{\text{re}} \text{ partie, § 1, n}^{\text{o}}\ 3, \text{ relation } 1). \\ &= C_s^\lambda(x, C_t^\lambda f). \end{aligned}$$

La dernière phrase de l'énoncé se démontre de manière analogue. Si g est une fonction λ-excessive, le processus

$$\{\exp(-\lambda t)\, g \circ X_t\}$$

est une supermartingale; d'après les théorèmes de Doob (Cf. [I], p. 376), il en est de même du processus « arrêté »

$$\{\exp(-\lambda c_t)\, g \circ X_{c_t}\};$$

en particulier, on a $E^x[\exp(-\lambda c_t)\, g \circ X_{c_t}] = C_t^\lambda(x, g) \leqslant g(x)$, ce qui exprime que g est C_t^λ-excessive.

Application au calcul de P_R. — L'opérateur U_A^λ est égal (théorème 7. 2) au potentiel du semi-groupe $\{C_t^\lambda\}$; soit $W^\lambda = \int_0^\infty C_t^\lambda e^{-t}\, dt$. Les opérateurs U_A^λ et W^λ commutent, et $(I - W^\lambda)$ est l'inverse de $(I + U_A^\lambda)$ d'après l'équation résolvante. Or on a (théorème 7. 3) $P_R^\lambda(I + U_A^\lambda) = U_A^\lambda$. Il en résulte que l'on a $P_R^\lambda = W^\lambda$. En particulier, P_R^λ et U_A^λ commutent.

D'après le lemme 3. 1 de la première partie, on a :

$$P^\lambda U^\lambda = U^\lambda - V^\lambda.$$

Alors :

$$\begin{aligned} P_R^\lambda U^\lambda = U_A^\lambda(I - P_R^\lambda U^\lambda) U^\lambda &\quad (\text{équation résolvante}) \\ = U_A^\lambda U^\lambda - U_A^\lambda(U^\lambda - V^\lambda) &= U_A^\lambda V^\lambda. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit la formule : $U^\lambda = V^\lambda + U_A^\lambda V^\lambda$.

2. Dans la première rédaction de ce travail, le théorème de Volkonski n'était pas utilisé. Nous allons donner ici le théorème qui en tenait lieu, car il nous semble comporter une démonstration intéressante.

THÉORÈME 7. 5. (« théorème d'inversion des changements de temps »). — *Soit* $\{Q_t\}$ (resp. $\{P_t\}$) *un semi-groupe sous-markovien qui satisfait à la condition* (A) *de Hunt* (*voir* 1re *partie,* § 1, n° 5). *Soit* $(\Omega', G, \{Y_t\}, Q^\nu)$ (resp. $(\Omega, F, \{X_t\}, P^\nu)$) *une réalisation du processus du type envisagé au* § 1 *de la première partie, odmettant* $\{Q_t\}$ *comme semi-groupe de transition* (resp. $\{P_t\}$) *et* ν *comme mesure initiale.*

S'il existe sur l'espace Ω' *une fonctionnelle additive continue* B *telle que le processus obtenu à partir de* $\{Y_t\}$ *par le changement de temps associé à* B *admette* $\{P_t\}$ *comme semi-groupe de transition, il existe sur* Ω *une fonctionnelle additive continue* A *telle, que le processus obtenu à partir de* $\{X_t\}$ *par le changement de temps associé à* A *admette* $\{Q_t\}$ *comme semi-groupe de transition.*

Démonstration. — Soit $\{k_t\}$ le changement de temps associé à la fonctionnelle additive continue $\{B_t\}$ sur Ω'. Nous avons par hypothèse la relation $P_t(x, f) = E^x[f \circ Y_{k_t}]$. Le semi-groupe $\{P_t^1\}$ défini par la relation $P_t^1(x, f) = E^x[\exp(-k_t) . f \circ Y_{k_t}]$ est donc un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$; il existe donc (première partie, théorème 2. 2) une fonctionnelle additive $\{M_t\}$ sur Ω associée à ce semi-groupe. Nous allons montrer que la fonctionnelle $\{A_t\} = \{-\log M_t\}$ répond aux conditions de l'énoncé.

Montrons d'abord que l'application $t \to k_t(\omega')$ est p.s. continue, pour toute mesure initiale. Pour cela, il faut et il suffit que l'application $t \to B_t(\omega')$ (qui est p.s. continue) soit p.s. strictement croissante [1], pour toute mesure initiale. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une mesure ν, deux nombres rationnels r et r', tels que $r < r'$ et que

$$Q^\nu[B_r(\omega') = B_{r'}(\omega')] > 0.$$

Nous pourrions alors, en posant $s = r' - r$, $\mu = \nu Q_r$, trouver une mesure initiale μ telle que $Q^\mu[B_s(\omega') = 0] > 0$. Il en résulterait que, pour cette mesure initiale, on n'aurait pas p.s.

[1] Strictement croissante jusqu'à l'instant $S(\omega')$, car, les fonctionnelles étant comme toujours normalisées, on a $k_S(\omega') = \infty$.

la relation $k_0 = 0$. Or l'opérateur $Q_{k_0} = P_0$ est l'identité, et l'on a bien $k_0 = 0$. Notre supposition était donc absurde.

Soit φ l'application de Ω' dans Ω qui associe à la trajectoire ω' la trajectoire $t \to Y_{k_t}(\omega')$. C'est une application mesurable, et qui conserve la mesure (si l'on a choisi les mêmes mesures initiales pour les deux processus). Montrons que la fonctionnelle $\{M_t\}$ (et donc aussi $\{A_t\}$) est continue et strictement croissante en tout point. Nous raisonnerons par exemple sur la continuité. L'ensemble des trajectoires ω telles que l'application $t \to M_t(\omega)$ soit discontinue est F-mesurable, car c'est la réunion des $H_{r,r'}$, où r et r' sont rationnels, $r < r'$, et $H_{r,r'}$ désigne l'ensemble des ω telles que l'application $t \to M_t(\omega)$ prenne, pour t rationnel, des valeurs $< r$, des valeurs $> r'$, mais ne prenne aucune valeur comprise entre r et r'. Pour montrer que l'ensemble des trajectoires discontinues est de mesure nulle, il nous suffit donc de montrer qu'il est de mesure intérieure nulle — c'est-à-dire qu'il ne contient aucun ensemble de mesure positive de la forme $\{\omega : \forall n,\ X_{t_n}(\omega) \in D_n\}$, où les t_n sont des instants en infinité dénombrable, et les D_n des parties boréliennes de X. S'il en était ainsi, l'ensemble $\{\omega' : \forall n,\ Y_{k_{t_n}} \in D_n\}$ serait de mesure positive, et contenu dans l'ensemble des ω' pour lesquels l'application $t \to M_t(\varphi\omega')$ est discontinue. Or ceci est impossible, car on a pour presque tout ω' la relation $M_t(\varphi\omega') = \exp(-k_t(\omega'))$ pour tout t, et le second membre est, nous l'avons vu, une fonction continue. Pour le vérifier, comme les deux membres sont des fonctions de t continues à droite, il nous suffit de montrer que l'on a, pour *chaque* t, $M_t(\varphi\omega') = \exp(-k_t(\omega'))$. Les deux membres sont mesurables sur la tribu engendrée par les Y_{k_s}, $s \leqslant t$; il suffit alors de refaire le raisonnement d'unicité qui a été fait dans la démonstration du théorème 2. 1 de la première partie.

Il nous reste enfin à montrer que, par le changement de temps $\{c_t\}$ associé à la fonctionnelle continue $\{A_t\}$ sur Ω, on obtient bien le semi-groupe $\{Q_t\}$. Soit R un temps terminal associé à la fonctionnelle $\{M_t\}$, $\{Q'_t\}$ le semi-groupe obtenu par le changement de temps $\{c_t\}$, W^1 le potentiel de ce semi-groupe correspondant à la valeur 1 du paramètre, V^1 le potentiel analogue du semi-groupe $\{Q_t\}$. D'après le calcul qui suit le théorème 7. 4, on a $P_R f = W^1 f$ pour toute fonction mesurable f. D'autre part :

$$P_R f^x = -E^x\left[\int_0^\infty f \circ X_t(\omega)\, dM_t(\omega)\right]$$
$$= E^x\left[\int_0^\infty f \circ Y_{k_t}(\omega')\, d[-\exp(-k_t(\omega'))]\right.$$
$$= E^x\left[\int_0^\infty f \circ Y_t(\omega')\, d(-\exp(-t))\right] = V^1 f^x.$$

Il en résulte que les deux semi-groupes $\{Q_t\}$ et $\{Q'_t\}$ ont même potentiel pour la valeur 1 du paramètre. Ils sont donc égaux (Cf. par exemple Hunt [II], p. 353.)

THÉORÈME 7. 6. — *Soit* $\{P_t\}$ *un semi-groupe qui satisfait aux hypothèses* (F) *et* (G) *de Hunt,* ν *une mesure dont le potentiel* $U\nu$ *est dans* $\mathcal{C}_0$. *Il existe une fonctionnelle additive continue* A *telle que* $U_A = U\nu$.

Démonstration. — Il est très facile de voir (Cf. par exemple les raisonnements faits au § 15 du mémoire de Hunt, [II], p. 357) que l'on peut trouver une fonction $a \in \mathcal{C}_0$, strictement positive en tout point, telle que $Ua \in \mathcal{C}_0$. Soient μ la mesure $\nu + a.dx$, b la densité de la mesure de Lebesgue par rapport à μ, h celle de ν par rapport à μ. Il nous suffit évidemment de montrer qu'il existe une fonctionnelle continue A dont le potentiel est $U\mu$, car la fonctionnelle $h.A$ répondra alors à la question [1]. Considérons l'application : $f \to U(\mu.f)$ définie sur l'espace $\mathcal{C}_K$ des fonctions continues à support compact. Si nous pouvons montrer qu'elle satisfait aux axiomes de Hunt (γ) et (δ) (cf. [II], p. 351) le théorème sera démontré. En effet, il existe alors un semi-groupe $\{Q_t\}$, qui satisfait à la condition (A), et dont le potentiel V coïncide avec cette application sur $\mathcal{C}_K$. Si nous faisons sur ce semi-groupe le changement de temps associé à la fonctionnelle additive B qui correspond à la fonction b, le potentiel du semi-groupe obtenu est l'application $f \to U(b.\mu.f)$, c'est-à-dire U. D'après Hunt ([II], p. 353) ce semi-groupe est alors identique à $\{P_t\}$, et on peut conclure au moyen du théorème précédent à l'existence de A.

[1] Ou plus immédiatement, la fonctionnelle : $\left\{A_t - a\int_0^t a \circ X_s\, ds\right\}$

L'axiome (δ) (principe de domination) est immédiat à vérifier. Si $f \in \mathcal{C}_K$ (on peut la supposer par exemple comprise entre 0 et 1) la fonction $U(\mu f)$ et la fonction $U(\mu(1-f))$ sont semi-continues inférieurement, et leur somme est la fonction $U(\mu)$ de $\mathcal{C}_0$. Chacune d'elles appartient donc à $\mathcal{C}_0$. Il ne nous reste plus qu'à vérifier l'axiome (γ) : la densité de l'image de $\mathcal{C}_K$ dans $\mathcal{C}_0$.

Soit W l'application $f \rightarrow U(\mu.f)$; comme l'image de $\mathcal{C}_K$ par U est dense dans $\mathcal{C}_0$, il nous suffit de montrer que si g est positive et appartient à $\mathcal{C}_K$, il existe des fonctions φ_n de $\mathcal{C}_K$ telles, que $W(\varphi_n)$ tende uniformément vers Ug. Or

$$Ug = W(b.g) = \sup W(j),$$

où j parcourt la famille des fonctions semi-continues supérieurement positives $\leqslant b.g$ (donc à support compact). Les $W(j)$ sont continues, car elles sont semi-continues inférieurement en tant que fonctions excessives, et supérieurement, car l'opérateur W laisse $\mathcal{C}_0$ invariant. D'après le lemme de Dini, Ug est donc approchée uniformément par les $W(j)$. Or chaque $W(j)$ est approchée (encore uniformément, d'après le lemme de Dini) par les $W(k^j)$, où les k^j parcourent la famille des fonctions continues, à support compact, plus grandes que j. On en déduit immédiatement le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

Blanc-Lapierre (A) et Fortet (R). *Théorie des Fonctions Aléatoires*. Masson, Paris, 1953.

Blumenthal (R.M.) An extended Markov property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 85, 1957, pp. 52-72.

Brelot (M.). Éléments de la théorie classique du potentiel. Paris, *Centre de Documentation Universitaire*, 1959.

Brelot (M.) et Choquet (G.) Le théorème de convergence en théorie du potentiel. *J. Madras Univ.*, t. 27, 1957, pp. 277-286.

Choquet (G.).

[I] *Notes au C. R. Acad. Sc. Paris sur la théorie fine du potentiel*, t. 243, 1956, pp. 635-638 et t. 244, 1957, pp. 1606-1609.

[II] Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts. *Ann. Inst. Fourier*, t. X, 1960, pp. 333-344.

Deny (J.). Sur la convergence des suites de potentiels, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 218, 1944, pp. 497-499.

DOOB (J.-L.).
[I] *Stochastic processes*, New York, Wiley, 1953.
[II] Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 77, 1954, pp. 86-121.
[III] A Probability approach to the heat equation *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80, 1955, pp. 216-280.
[IV] Brownian motion on a Green Space *Teor. Veroiat. i ee prim.*, t. 2, 1957, pp.1-33.

DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J.) Linear Operators-General Theory, *Interscience Publishers*, 1958.

DYNKIN (E. B.).
[I] *Fondements de la théorie des processus de Markov* (en russe), Moscou, 1959 (Trad. Anglaise, Pergamon Press, 1960).
[II] Topologie naturelle et fonctions excessives associées à un processus de Markov (en russe). *Dokl. Akad. Nauk.*, 1959, t. 127, n° 1, pp. 17-19.
[III] Les processus de Markov, et les problèmes d'analyse qui leur sont liés (en russe). *Uspekhi Natem. Nauk.*, t. 15, 1960, pp.3-24. (Contient une très abondante bibliographie des travaux russes, à laquelle nous renvoyons le lecteur.)
[IV] Transformations de processus de Markov, liées aux fonctionnelles additives, *Proc. of the 4-th Berkeley Symp. on Math. Stat. and. Prob. University of Calif. Press*, 1960 (contient un exposé des résultats de Volkonski).

HUNT (G. A.). Markoff processes and potentials:
[I] *Illinois J. Of Math.*, t. 1, 1957, pp. 46-93.
[II] *Illinois J. Of Math.*, t. 1, 1957, pp. 316-369.
[III] *Illinois J. Of Math.*, t. 2, 1958, pp. 151-213.

KINNEY (J. R.). Continuity properties of sample functions of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 74, 1953, pp. 280-302.

LOÈVE (M.). *Probability theory*, 2e éd., éd. Van Nostrand, 1960.

MEYER (P. A.). (Résumé de ce travail). *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, pp. 1962-1964, t. 251, pp. 2279-2280, t. 252, pp. 1557-1558.

VOLKONSKI (V. A.).
[I] Fonctionnelles additives des processus de Markov (en russe). *Dokl. Akad. Nauk.*, t. 127 (1959).
[II] Fonctionnelles additives des processus de Markov (en russe), *Trudy Mosk. Matem. Ob-va.*, t. 9, 1960, pp. 143-189. (Cf. aussi Dynkin [IV]).

Séminaire de théorie du potentiel (Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY). *Institut Henri-Poincaré*, Paris.
[I] Première année, 1957.
[II] Cinquième année (consacrée aux travaux de Hunt et Doob).