ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

EMMANUEL PAUL

Classification topologique des germes de formes logarithmiques génériques

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 4 (1989), p. 909-927
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_909_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 4 (1989), 909-927.

CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES GERMES DE FORMES LOGARITHMIQUES GÉNÉRIQUES

par Emmanuel PAUL

0. INTRODUCTION

Nous étudions ici la classification topologique des germes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de feuilletages définis par des 1-formes holomorphes singulières intégrables du type « logarithmique » :

$$f_1 f_2 \dots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

où les f_j sont des germes de fonctions analytiques irréductibles étrangers et les λ_j des complexes non nuls. Rappelons que, d'après un résultat de D. Cerveau et J. F. Mattei, de tels feuilletages décrivent en dimension supérieure ou égale à trois une situation générique pour les germes de feuilletages de codimension un, non dicritiques [2]. La classification obtenue ici est cependant valable dès la dimension deux. Cette étude a déjà été abordée dans [1] lorsque les germes f_j sont des coordonnées de $\mathbb{C}^n$.

Nous nous proposons donc de classifier ces objets modulo la relation d'équivalence suivante : deux germes de formes sont topologiquement conjugués lorsqu'il existe un germe d'homéomorphisme de $(\mathbb{C}^n, 0)$ envoyant le lieu singulier de la première sur celui de la deuxième et

Mots-clés : Singularités - Formes logarithmiques.
Classification A.M.S. : 32B30 - 57R30.

envoyant feuilles sur feuilles. Les résultats de ce travail se regroupent en l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $\{\omega^s = f_1^s \dots f_p^s \Sigma \lambda_j^s \, df_j^s / f_j^s,\ s \in (\mathbb{C},0)\}$ *une famille de germes de formes logarithmiques « génériques ». Cette famille est topologiquement triviale si et seulement s'il existe une famille* $\{g^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ *de* $GL^+(2,\mathbb{R})$ *tel que pour tout* $j = 1 \dots p$,

$$g^s(2i\pi\lambda_j^0) = 2i\pi\lambda_j^s.$$

Nous fixons d'abord les séparatrices $X: f_1 f_2 \dots f_p = 0$. Pour prouver que la condition énoncée suffit à la construction d'une famille de conjugaisons topologiques, on utilise une désingularisation de X [4]. Nous obtenons alors une famille de formes logarithmiques, à pôles sur un diviseur à croisements normaux : la classification topologique de tels objets a été considérée dans [6]. Nous appliquons le principal résultat de cette étude. Les conditions de généricité portent ici sur le type de désingularisation de X ainsi que sur les résidus λ_j (sans relations entières à coefficients positifs).

Cette condition reliant les périodes $2i\pi\lambda_j^s$ de cette famille est aussi une condition nécessaire à la trivialité topologique : la classe Λ des résidus $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ modulo $GL(2,\mathbb{R})$ est un invariant topologique du feuilletage. Pour vérifier cette assertion, on identifie Λ à l'ensemble des suites de p-uples $(p_j^k, j = 1 \dots p)$ telles que $\Sigma(p_j^k \lambda_j)$ tende vers zéro quand k tend vers l'infini, et on donne une interprétation topologique de ces suites, qui s'apparente aux cycles asymptotiques introduits par Schwartzman [9], puis Plante [8].

Enfin, nous complétons la preuve du théorème annoncé en montrant qu'en déformant les séparatrices d'un germe de forme logarithmique générique à résidus fixés, on obtient une famille topologiquement triviale.

Cette étude m'a été proposée par J. F. Mattei lors de mon travail de thèse à l'Université Paul Sabatier de Toulouse [7]. Son soutien et ses nombreuses suggestions m'ont été fort utiles et il en trouve ici mes plus vifs remerciements.

1. GERME DE 1-FORME LOGARITHMIQUE GÉNÉRIQUE DE $(\mathbb{C}^n, 0)$

1.1. *Définitions et rappels.*

On appelle *germe de* 1*-forme logarithmique* à l'origine de $\mathbb{C}^n$, tout germe de 1-forme holomorphe du type :

$$f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

où les f_j désignent des germes de fonctions analytiques irréductibles étrangers, et les λ_j des nombres complexes non nuls. Rappelons un résultat de généricité dû à D. Cerveau et J. F. Mattei [2] qui motive l'étude des germes de feuilletages définis par de telles formes.

Considérons un germe à l'origine de $\mathbb{C}^n$, n supérieur ou égal à 2, de 1-forme holomorphe intégrable. Son lieu singulier est un germe d'ensemble analytique en 0, que l'on pourra toujours supposer de codimension au moins deux. Soit ω_ν, le premier jet non nul de ω. De par l'homogénéité de la forme ω_ν, le champ radial R de $\mathbb{C}^n$ laisse invariant le feuilletage défini par ω_ν. On suppose que ω_ν est non dicritique, i.e. le champ R laisse *transversalement* invariant ce feuilletage. Le polynôme homogène : $P = \omega_\nu(R)$ est alors non identiquement nul.

On appelle *cône tangent* de ω_ν l'ensemble $C(\omega_\nu)$ des singularités sur le projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ du feuilletage obtenu à partir de ω_ν par éclatement de l'origine de $\mathbb{C}^n$. Il s'identifie dans le cas non dicritique avec le lieu des zéros du polynôme homogène $P = \omega_\nu(R)$ dans le projectif. Son complémentaire dans le projectif est une feuille du feuilletage éclaté. De plus, le polynôme P est *facteur intégrant* de ω_ν, c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{\omega_\nu}{P}\right) = 0.$$

Notons : $\{\lambda_j, j=1 \dots p\}$ les résidus de la forme méromorphe fermée ω_ν/P le long de chaque composante irréductible du cône tangent de ω_ν.

1.2. Définition. — *Soit ω_ν un germe de forme homogène de degré ν non dicritique. Nous dirons que ω_ν est* générique *lorsque :*

i) — *le polynôme $P = \omega_\nu(R)$ est réduit (sans facteurs multiples),*
— *les composantes $(P_j=0)$ du cône tangent $C(\omega_\nu)$ sont lisses,*
— *le cône tangent $C(\omega_\nu)$ est à croisements normaux.*

ii) — *les résidus $\{\lambda_j, j=1 \ldots p\}$, $p \geqslant 3$, sont sans relations entières,*
— *il existe deux indices j et k de $\{1 \ldots p\}$, $j \neq k$, tels que λ_j/λ_k soit non réel.*

1.3. Proposition. — *L'ensemble des formes génériques de degré ν est dense dans l'ensemble des formes intégrables homogènes de degré ν non dicritiques.*

Cette proposition se déduit de [2, 4e partie, théorème 1.1].

1.4. Théorème [2, 4e partie, II.2.1]. — *En dimension supérieure ou égale à trois, toute forme intégrable ω dont le premier jet non nul ω_ν est non dicritique, générique, admet une intégrale première multiforme du type : $f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}$, où les f_j sont des germes de fonctions analytiques irréductibles et les complexes λ_j les résidus de la forme méromorphe fermée $\omega_\nu/\omega_\nu(R)$.*

Ainsi, tout germe de forme de $(\mathbb{C}^n, 0)$, n supérieur ou égal à 3, dont le premier jet non nul est non dicritique générique, est un germe de forme logarithmique. Nous les appellerons : *germes de formes logarithmiques génériques.*

2. DESCRIPTION DU FEUILLETAGE DÉFINI PAR

$$\omega = f_1 \ldots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

Soit X_j le germe d'hypersurface d'équation $(f_j=)$ et X la réunion des X_j, $j = 1 \ldots p$.

2.1. *Lieu singulier $S(\omega)$ de ω.*

On a immédiatement :

$$S(\omega) = \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j) \bigcup_j S(df_j).$$

En particulier le germe d'ensemble analytique $S(\omega)$ est inclus dans X et est de codimension au moins deux.

2.2. *Séparatrices de ω.*

On vérifie aisément qu'il existe une deux-forme holomorphe η telle que :

$$\omega \Lambda \, df_j = f_j . \eta .$$

Les hypersurfaces X_j sont donc des séparatrices du feuilletage $\mathscr{F}(\omega)$ défini par ω.

2.3. *Espace des feuilles de $\mathscr{F}(\omega)$.*

Fixons un représentant du germe ω sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et notons $\mathscr{F}_u(\omega)$ le feuilletage qu'il définit sur U. En dehors de la réunion des séparatrices, ce feuilletage coïncide avec celui défini par la forme méromorphe fermée :

$$\Omega = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Le groupe H des périodes de Ω est le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par $\{2i\pi\lambda_j, j=1 \ldots p\}$. En effet, on obtient une base de $H_1(U \backslash X, \mathbb{Z})$ en prenant les bords orientés de petits disques complexes transverses à chaque X_j. Choisissons une primitive multiforme F de Ω sur $U \backslash X$, c'est-à-dire fixons une composante connexe de l'espace total du faisceau des germes de primitives de Ω [6] : c'est un revêtement de $U \backslash X$ de groupe structural H. On peut lui associer une application (que nous noterons encore F) de $U \backslash X$ dans $\mathbb{C}/H$. Les feuilles de $\mathscr{F}_u(\omega)$ sont les composantes connexes des hypersurfaces de niveau de cette application.

2.4. PROPOSITION. — *Soit ω un germe de forme logarithmique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. On suppose qu'il existe deux indices distincts j et k tels que λ_j/λ_k ne soit pas réel. Soit F une primitive multiforme de la forme fermée associée à ω. Il existe un système fondamental de voisinages U de l'origine tel que les hypersurfaces de niveau de F sur U soient connexes.*

2.5. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de (2.4), l'espace des feuilles de $\mathscr{F}_u(\omega)$ est exactement $\mathbb{C}/H$.*

Preuve de la proposition 2.4. — Effectuons une récurrence sur le nombre N d'éclatements nécessaires à la désingularisation de ω ([10], [11] ou [5 : appendice I]). Pour $N = 0$, la forme ω est alors linéaire :

$$\omega = \lambda_1 z_2\, dz_1 + \lambda_2 z_1\, dz_2.$$

En utilisant le revêtement universel de $\mathbb{C}^{*2}$, on constate que la proposition est vérifiée dans ce cas. Supposons la proposition vraie pour tout germe de forme logarithmique se désingularisant après au plus $N - 1$ éclatements. Fixons une forme logarithmique ω sur $U \subset \mathbb{C}^2$ se désingularisant après N éclatements. Soit F une primitive multiforme de la forme fermée associée Ω. Notons :

$$E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to U \subset \mathbb{C}^2$$

l'éclatement de l'origine de $\mathbb{C}^2$, et choisissons une carte (x,t) de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ dans laquelle le projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ a pour équation $(x=0)$. On a :

$$f_j \circ E = x^{\nu_j} \tilde{f}_j$$

$$E^*\Omega = \left(\sum_{j=1}^{p} \nu_j \lambda_j\right) \frac{dx}{x} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j}.$$

Soit $\{t_j, j=1\ldots k\}$ les points du cône tangent de X: $(f_1 \ldots f_p = 0)$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Choisissons un facteur transverse T au projectif en un point t_0 distinct des t_j. On peut supposer — sans restreindre la généralité — que le résidu $\lambda_0 = \Sigma \nu_j \lambda_j$ de $E^*\Omega$ le long du projectif est égal à 1. La primitive multiforme $F \circ E$ de $E^*\Omega$ est alors uniforme le long de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Prenons U tel que $E^{-1}(U) \cap T$ soit un ouvert de trivialisation du revêtement $F \circ E$, et fixons une détermination de $F \circ E$ sur cet ouvert. Notons z la coordonnée obtenue sur le facteur transverse T en prenant l'exponentielle de cette détermination. Nous voulons prouver qu'on peut trouver un voisinage ouvert U' de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ inclus dans $E^{-1}(U)$ tel que, si deux points P et Q de U' vérifient :

$$(1) \qquad F \circ E(P) = F \circ E(Q) \quad \text{dans } \mathbb{C}/H,$$

alors ils appartiennent à une même feuille de $\mathscr{F}_{U'}(E^*\Omega)$. Choisissons pour U' l'ouvert obtenu en prenant la réunion de $E^{-1}(X)$ et des hypersurfaces de niveau de F rencontrant $E^{-1}(U) \cap T$. D'après ce choix, on peut se limiter à considérer deux points P et Q sur le facteur transverse T. L'égalité (1) équivaut alors dans la coordonnée z à :

$$(2) \qquad \exists h \in H, \quad z(Q) = z(P) \cdot e^h,$$

et il nous suffit de prouver l'implication :

$$(2) \Rightarrow (P \sim Q)$$

où $\sim$ désigne la relation d'équivalence : « appartenir à une même feuille de $\mathscr{F}_{U'}(E^*\Omega)$ ». Pour chaque point t_j du cône tangent de X, considérons un représentant Ω_j du germe de $E^*\Omega$ en t_j. Soit H_j le groupe des périodes de Ω_j : H_j est le sous-groupe de H engendré par les résidus associés aux séparatrices de ω dont le cône tangent est t_j. Soit F_j une primitive multiforme de Ω_j. Il est clair que Ω_j se désingularise en au plus $\mathrm{N}-1$ éclatements. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un voisinage ouvert V_j de t_j dans $\tilde{\mathbb{C}}^2$ tel que :

- $V_j \backslash E^{-1}(X) \subset U'$
- $\forall P, Q \in V_j$, $(F_j(P) = F_j(Q)$ dans $\mathbb{C}/H_j) \Rightarrow (P \sim Q)$.

Par transport holonome, on construit, à partir des ouverts V_j, des disques D_j de centre t_0 dans T tels que, pour tout couple de points (P,Q) appartenant à D_j :

$$(3) \qquad (\exists h_j \in H_j, \quad z(Q) = z(P) \cdot e^{h_j}) \Rightarrow (P \sim Q).$$

En effet, la coordonnée z est aussi, à une constante multiplicative près, une détermination de F_j. Remarquons maintenant que la réunion des groupes H_j engendre H. L'élément h de H de (2) se décompose en :

$$(4) \qquad h = h_1 + \cdots + h_k, \; h_j \in H_j.$$

Considérons alors les difféomorphismes linéaires de T :

$$\varphi_j : z \to e^{h_j} \cdot z$$

et choisissons un disque D_h de T tel que :

$$- \ D_h \subset \bigcap_{j=1\dots k} D_j$$

$$- \ \varphi_1(D_h) \subset \bigcap_{j=1\dots k} D_j$$

$$\vdots$$

$$- \ \varphi_k \circ \cdots \varphi_1(D_h) \subset \bigcap_{j=1\dots k} D_j .$$

Un des rapports λ_j/λ_k étant non réel, il existe un élément ψ du groupe d'holonomie en t_0 de la feuille $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\backslash C_x$ qui soit contractant. Pour un entier m suffisamment grand, les images P' et Q' de P et Q par ψ^m. sont dans D_h. De (2), on déduit :

$$\exists h \in H, \qquad z(Q') = z(P')\cdot e^h.$$

En effet, l'expression de ψ dans z étant linéaire, ψ^m commute avec l'application : $z \to e^h \cdot z$. D'après (4), on a :

$$Q' = (\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1)\,(\mathrm{P}').$$

En itérant alors k fois l'implication (3), on obtient : $P' \sim Q'$ et, par application de ψ^{-m}, $P \sim Q$. □

3. UN THÉORÈME DE TRIVIALITÉ TOPOLOGIQUE

Soit $\{\omega^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ une famille de germes de formes logarithmiques de $(\mathbb{C}^n,0)$, n supérieur ou égal à 2, dont l'ensemble des séparatrices X est fixé :

$$\omega^s = f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j}, \qquad s \in (\mathbb{C},0).$$

Nous allons, par une désingularisation de X, nous ramener à une situation considérée dans [6] et obtenir ainsi un résultat de trivialité topologique pour cette famille. Rappelons le théorème d'existence d'une désingularisation (analytique) dû à H. Hironaka [4] :

3.1. Théorème. — *Soit X un représentant d'un germe d'hypersurface analytique sur un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{C}^n$. Il existe une variété analytique complexe M et une application analytique propre E de M sur U telle que :*

i) *E est un difféomorphisme analytique de $M \backslash E^{-1}(\operatorname{Sing} X)$ sur $U \backslash \operatorname{Sing} X$,*

ii) *$E^{-1}(X)$ est une réunion d'hypersurfaces lisses à croisements normaux.*

Considérons alors la famille des formes méromorphes fermées à pôles sur $D = E^{-1}(\operatorname{Sing} X)$:

$$\Omega^s = E^* \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j} \right).$$

3.2. Définition. — Soit D un diviseur à croisements normaux d'une variété analytique, et M un voisinage de D. Une forme méromorphe fermée Ω à pôles sur D est dite *logarithmique* si, en tout point de D, Ω multipliée par une équation locale réduite de D se prolonge en une forme holomorphe sur M.

3.3. Proposition. — *Les formes Ω^s sont logarithmiques à pôles sur D. De plus, les résidus μ_j^s de Ω^s le long de chaque branche D^j de D sont de la forme :*

$$\mu_j^s = \sum_{k=1}^{p} \nu_j^k \lambda_k^s$$

où les ν_j^k sont des entiers positifs ou nuls ne dépendant que des f_k.

Preuve. — Précisons l'expression locale de Ω_s. Soit V un ouvert simplement connexe de M et $(y^j = 0)$, $j \in J$, les équations locales des hypersurfaces D^j de D rencontrant V. Puisque $f_k \circ E$ s'annule sur $E^{-1}(X_k) = E^{-1}(0) \cup \tilde{X}_k$, on a :

$$f_k \circ E = \prod_J y_j^{\nu_j^k} \cdot u_k$$

où les ν_j^k sont des entiers positifs ou nuls, et u_k des unités sur V qu'on écrira sous la forme e^{v_k}. On a

$$\begin{aligned}\Omega^s &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^s \frac{d(f_k \circ E)}{f_k \circ E} \\ &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{k=1}^{p} \nu_j^k \lambda_k^s\right)\frac{dy_j}{y_j} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^s \, dv_k .\end{aligned}$$

En posant :

$$\mu_j^s = \sum_{k=1}^{p} \nu_j^k \lambda_k^s$$

$$z_j = y_j \exp\left(\frac{1}{|J|\mu_j^s} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^s v_k\right),$$

on obtient :

$$\Omega^s = \sum_J \mu_j^s \frac{dz^j}{z^j} .$$

Nous reconnaissons ici l'écriture locale d'une forme logarithmique fermée à pôles sur D [6]. De plus, les résidus μ_j^s de Ω^s le long de chaque composante lisse D^j de D sont de la forme annoncée. □

Pour une telle famille de formes logarithmiques, nous avons un théorème de trivialité topologique :

3.4. THÉORÈME [6]. — *Soit $\{\Omega^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ une famille de 1-formes logarithmiques fermées à pôles sur D. S'il existe une famille $\{g^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ de $GL^+(2,\mathbb{R})$ telle que chaque application $\mathbb{R}$-linéaire g^s envoie les périodes $2i\pi\mu_j^0$ de Ω^0 sur les périodes $2i\pi\mu_j^s$ de Ω^s, alors cette famille est topologiquement triviale (i.e. il existe une famille d'homéomorphismes Φ^s laissant stable D et envoyant les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}(\Omega^0)$ défini par Ω^0 sur celles du feuilletage $\mathcal{F}(\Omega^s)$ défini par Ω^s).*

La preuve de ce théorème utilise essentiellement les conjugaisons topologiques des modèles locaux de [1], recollées à l'aide d'une construction développée dans [6] : « structures de Clémens adaptées à (D,Ω^s) ». Nous allons en déduire ici le :

3.5. THÉORÈME. — *Soit ω^s une famille de germes de formes logarithmiques :*

$$f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j}, \qquad s \in (\mathbb{C},0),$$

dont les résidus sont sans relations à coefficients entiers positifs. On suppose qu'il existe une désingularisation E de X : $(f_1 \dots f_p = 0)$, telle que

E soit un difféomorphisme analytique de $M\backslash E^{-1}(0)$ sur $U\backslash\{0\}$. S'il existe une famille $\{g^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ de $GL^+(2,\mathbb{R})$ telle que chaque application g^s envoie les périodes $2i\pi\lambda_j^0$ de ω^0 sur les périodes $2i\pi\lambda_j^s$ de ω^s, alors la famille $\{\omega^s, s \in (\mathbb{C},0)\}$ est topologiquement triviale.

3.6. *Remarque.* — En dimension deux, l'hypothèse portant sur la désingularisation de X est toujours vérifiée. En dimension quelconque, les formes logarithmiques génériques (1.4) vérifient aussi cette hypothèse, X se désingularisant alors par un éclatement de l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Preuve du théorème 3.5. — D'après 3.3, l'hypothèse :

$$g^s(2i\pi\lambda_j^0) = 2i\pi\lambda_j^s$$

s'étend par linéarité aux périodes $2i\pi\mu_j^s$ de Ω^s. Le théorème 3.4 prouve l'existence d'une famille d'homéomorphismes Φ^s de M tels que :

i) Φ^s laisse stable $D = E^{-1}(0)$.

ii) Φ^s est une conjugaison topologique des feuilletages définis par $E^*(\omega^0)$ et $E^*(\omega^s)$.

L'application E étant un difféormorphisme en dehors de $E^{-1}(0)$ sur $U\backslash\{0\}$, la trivialisation cherchée est alors obtenue par image directe par E. □

3.7. *Remarque.* — On peut conjecturer que le théorème (3.5) est encore vérifié sans l'hypothèse restrictive sur la désingularisation de X : E est un difféomorphisme de $M\backslash E^{-1}(0)$ sur $U\backslash\{0\}$. Pour pouvoir « redescendre » la conjugaison par E, il est alors nécessaire de construire une famille d'homéomorphismes Φ^s de M qui laissent stables les fibres de la désingularisation au-dessus du lieu singulier de X. Ceci nécessiterait un raffinement de la construction effectuée dans [6].

4. UN INVARIANT TOPOLOGIQUE DU FEUILLETAGE DÉFINI PAR UN GERME DE FORME LOGARITHMIQUE ω

Notons : $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des résidus de ω.

On considère la relation d'équivalence :

$$\Lambda \sim \Lambda' \Leftrightarrow \exists g \in GL(2,\mathbb{R}), g(\lambda_j) = \lambda_j'.$$

4.1. THÉORÈME. — *Soit ω un germe de forme logarithmique à l'origine de $\mathbb{C}^n$, dont les résidus $\Lambda = \{\lambda_1 \dots \lambda_p\}$, $p \geqslant 3$, ne vérifient pas de relations entières. On suppose de plus qu'il existe deux indices distincts j et k tels que λ_j/λ_k ne soit pas réel. La classe de Λ modulo $GL(2,\mathbb{R})$ est un invariant topologique du feuilletage défini par ω.*

4.2. LEMME. — *Soit $\Delta(\Lambda)$ l'ensemble des suites $(p_k^j)\, j = 1 \dots p$ de $\mathbb{Z}^p$ telles que :*

$$\lim_k \sum_{j=1}^{p} p_k^j \lambda_j = 0 .$$

L'ensemble $\Delta(\Lambda)$ caractérise la classe de Λ modulo $GL(2,\mathbb{R})$.

4.3. *Remarques.* — i) Les hypothèses effectuées sur les résidus nous permettent d'affirmer que 0 est dans l'adhérence du sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ engendré par Λ. Ainsi, $\Delta(\Lambda)$ n'est pas réduit à la suite nulle.

ii) On trouve des caractérisations analogues de la classe de Λ modulo de $GL(2,\mathbb{R})$ en vue de leur interprétation topologique dans [12].

Preuve du lemme 4.2. — On vérifie immédiatement que si $\Lambda \sim \Lambda'$ alors $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$. Réciproquement, supposons cette égalité vérifiée. Choisissons deux éléments de Λ (resp. Λ') — disons λ_1 et λ_2 (resp. λ_1' et λ_2') — qui forment une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Il existe une unique application g de $GL(2,\mathbb{R})$ telle que :

$$g(\lambda_1) = \lambda_1' \qquad \text{et} \qquad g(\lambda_2) = \lambda_2' .$$

Nous savons que, pour tout autre résidu λ_j, $j \neq 1,2$, l'origine de $\mathbb{C}$ est point d'accumulation du sous groupe de $(\mathbb{C},+)$ engendré par $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j\}$. Il existe une suite de triplets (p_k^1, p_k^2, p_k^j) de $\mathbb{Z}^3$ tels que :

$$\lim_k p_k^1\lambda_1 + p_k^2\lambda_2 + p_k^j\lambda_j = 0 . \tag{1}$$

Ainsi la suite : $(p_k^1, p_k^2, 0 \dots, p_k^j, \dots 0)$ de $\mathbb{Z}^p$ appartient à $\Delta(\Lambda)$ et donc, par hypothèse, à $\Delta(\Lambda')$. D'où,

$$\lim_k p_k^1\lambda_1' + p_k^2\lambda_2' + p_k^j\lambda_j' = 0 .$$

Or d'après (1) on a :

$$\lim_k p_k^1 g(\lambda_1) + p_k^2 g(\lambda_2) + p_k^j g(\lambda_j) = g(0) = 0 .$$

Par différence,

$$\lim_k p_k^j[\lambda_j'-g(\lambda_j)] = 0$$

d'où, pour tout j : $g(\lambda_j) = \lambda_j'$. □

Preuve du théorème 4.1. – Soit Ω la forme fermée :

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

définie sur un voisinage ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Fixons un point P_0 de $U\backslash X$.

4.4. Définition. – *Nous appelons* cycle asymptotique *en* P_0 *du feuilletage* $\mathscr{F}_u(\Omega)$ *la donnée d'une suite de chemins* γ_k *d'origine* P_0 *fixée et d'extrémités* P_k *telle que :*

– *les chemins* γ_k *sont contenus dans la feuille* L_0 *passant par* P_0,

– $\lim_k P_k = P_0$.

Notons : $\mathscr{P}_\Omega(P_0)$ l'ensemble des cycles asymptotiques en P_0 du feuilletage $\mathscr{F}_u(\Omega)$.

4.5. Lemme. – *Il existe une application* Ψ *surjective de* $\mathscr{P}_\Omega(P_0)$ *sur* $\Delta(\Lambda)$.

Preuve. – Choisissons un ouvert contractile V inclus dans $U\backslash X$ contenant P_0. Pour k suffisamment grand, l'extrémité P_k de γ_k appartient à V. Refermons alors γ_k par un chemin δ_k reliant P_k à P_0 dans V. Associons au cycle asymptotique (γ_k) la suite de $\mathbb{Z}^p$:

$$n^j(\gamma_k), \qquad j = 1 \dots p$$

des composantes du lacet $\Gamma_k = \gamma_k^* \delta_k$ dans une base fixée de $H_1(U\backslash X, \mathbb{Z})$. L'ouvert V étant contractile, ces entiers ne dépendent pas du choix de δ_k. On a :

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = \int_{\gamma_k} \Omega + \int_{\delta_k} \Omega = \int_{\delta_k} \Omega \qquad \text{car} \qquad \gamma_k \subset L_0,$$

d'où

$$2\pi i \sum_{j=1}^{p} n_j(\gamma_k)\lambda_j = \int_{\delta_k} \Omega.$$

Le chemin δ_k reliant P_0 (fixé) à P_k dans un ouvert contractile, nous avons :

$$\lim_k \int_{\delta_k} \Omega = 0 \Leftrightarrow \lim_k P_k = P_0$$

d'où :

$$\lim_k \sum_{j=1}^{p} n_j(\gamma_k)\lambda_j = 0 .$$

La suite $(n^j(\gamma_k))$, $j = 1 \ldots p$ appartient donc à $\Delta(\Lambda)$. Réciproquement, montrons que tout élément $(n_k^j, j=1 \ldots p)$ de $\Delta(\Lambda)$ peut être « réalisé » par un cycle asymptotique en P_0. Il suffit pour cela de traiter la question en dimension deux. Nous savons en effet, d'après un résultat de Hamm-Lê Dung Trang [3], que pour tout plongement générique par rapport à X:

$$i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

la flèche :

$$i_* : \pi_1[i^{-1}(U)\backslash i^{-1}(X)] \to \pi_1(U/X)$$

est surjective. On peut extraire d'une base $(c_1 \ldots c_q)$ de $H_1(i^{-1}(U)\backslash i^{-1}(X), \mathbb{Z})$ une partie dont l'image par i engendre $H_1(U\backslash X, \mathbb{Z})$. Il suffit alors de réaliser un cycle asymptotique (γ_k) dans $i^{-i}(U)\backslash i^{-1}(X)$ ayant pour composantes (n_k^j) sur cette partie et zéro sur les autres éléments de base. Soit F la primitive multiforme de Ω dont une détermination s'annule en P_0. Il s'agit, d'après [6] d'un revêtement de $U\backslash X$ de groupe structural H le groupe des périodes de Ω. Soit V un ouvert de trivialisation (contractile) de ce revêtement, contenant P_0, et F_0 la section de F sur V qui s'annule en P_0 :

$$F_0 : V \to \mathbb{C} .$$

A l'élément (n_k^j) de $\Delta(\Lambda)$, on associe une suite :

$$h_k = \sum_{j=1}^{p} n_k^j \lambda_j$$

d'éléments de H, qui tend vers zéro. L'application F_0 étant continue, il existe, pour k suffisamment grand, une suite de points P_k de V telle que :

$$F_0(P_k) = h_k .$$

Par construction on a :

$$\lim_k P_k = P_0.$$

De plus, h_k étant un élément du groupe des périodes de Ω, les points P_0 et P_k appartiennent à une même hypersurface de niveau de la fonction multiforme F. La réduction à la dimension deux nous permet d'appliquer la proposition 2.4 : on peut choisir l'ouvert U de telle manière que les hypersurfaces de niveau de F soient connexes. Ainsi nous pouvons relier P_0 et P_k par un chemin γ_k dans la feuille L_0. On obtient alors un cycle asymptotique en P_0. La suite $n^j(\gamma_k)$ de $\mathbb{Z}^p$ qui lui est associée est bien n_k^j. En effet :

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = F_0(P_k) - F_0(P_0) = h_k$$

et

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} n_j(\gamma_k)\lambda_j.$$

En l'absence de relations entre les λ_j, l'écriture de h_k sous la forme $2i\pi\Sigma n_k^j\lambda_j$ est unique, d'où : $n^j(\gamma_k) = n_k^j$. □

Fin de la preuve du théorème 4.1. — Supposons que les feuilletages $\mathscr{F}_u(\omega)$ et $\mathscr{F}_u(\omega')$ soient conjugués par un homéomorphisme Φ. Il induit une application bijective

$$\Phi_* : H_1(U\backslash X, \mathbb{Z}) \to H_1(U'\backslash X', \mathbb{Z}).$$

En identifiant $H_1(U\backslash X, \mathbb{Z})$ et $H_1(U'\backslash X', \mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}^p$ par un choix de bases, Φ_* est caractérisé par une matrice à coefficients entiers. En particulier Φ_* laisse globalement invariant $\Delta(\Lambda)$. De plus, il est clair que l'homéomorphisme Φ envoie tout cycle asymptotique de $\mathscr{P}_\Omega(P_0)$ sur un cycle asymptotique de $\mathscr{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0))$, de sorte que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_\Omega(P_0) & \xrightarrow{\psi} & \Delta(\Lambda) \\ \Phi_* \big\downarrow & & \big\downarrow \Phi_* \\ \mathscr{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0)) & \xrightarrow{\psi'} & \Delta(\Lambda') \end{array}$$

D'après la surjectivité des applications ψ et ψ' (lemme 4.4) :

$$\Phi_*[\psi(\mathscr{P}_\Omega(P_0))] = \Phi_*(\Delta(\Lambda)) = \Delta(\Lambda)$$

et

$$\psi'[\Phi_*(\mathscr{P}_\Omega(P_0))] = \psi'[\mathscr{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0))] = \Delta(\Lambda')$$

d'où

$$\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda'). \qquad \square$$

5. DÉFORMATION DES SÉPARATRICES D'UN GERME DE FORME LOGARITHMIQUE

Considérons une famille de germes logarithmiques à résidus fixés : $\omega_z = \omega|_{\mathbb{C}\times\{z\}}$ avec

$$\omega = f_1(x,z)\ \dots\ f_p(x,z) \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j(x,z)}{f_j(x,z)}$$

où les f_j sont des germes à l'origine de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ de fonctions analytiques. Notons :

- f_j^z la restriction de f_j à $\mathbb{C}^n \times \{z\}$
- $\nu(f_j^z)$ son ordre : $\inf\{k, j^k(f_j^z) \neq 0\}$
- P_j^z sa partie homogène de plus bas degré.

5.1. Théorème. — *Supposons que les séparatrices de* ω *vérifient les conditions suivantes :*

i) *pour tout* j, *l'ordre* $\nu(f_j^z)$ *est constant :* $\nu(f_j^z) = \nu(f_j^0)$

ii) *chaque* P_j^0 *est réduit et le lieu des zéros de* P_j^0 *dans* $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ *est lisse*

iii) *l'hypersurface* $P_1^0 \dots P_p^0 = 0$ *du projectif est à croisements normaux. Alors la famille des feuilletages définis par* $\{\omega_z, z \in (\mathbb{C},0)\}$ *est topologiquement triviale.*

Preuve. — Effectuons un éclatement E de l'axe des z et plaçons-nous dans une carte (x_1, t, z) de la variété éclatée $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$, où $(x_1 = 0)$ est l'équation locale du diviseur exceptionnel et $t = (t^2, \dots, t^n)$. L'hypothèse i — nous permet de considérer les éclatés divisés :

$$\tilde{f}_j = \frac{f_j \circ E}{x_1^{\nu_j}}, \qquad \tilde{P}_j = \frac{P_j \circ E}{x_1^{\nu_j}}.$$

Fixons un point m de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \{0\}$ sur une strate S_J d'équation : $\prod_J P_i^0 = 0$.

Les hypothèses ii) et iii) nous permettent d'affirmer que $(x_1, \tilde{P}_j^0)$, $j \in J$, fournit le début d'un système de coordonnées locales sur $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \{0\}$ en m. Il en est alors de même pour $(x_1, \tilde{f}_j^0)$, $j \in J$. Ainsi on peut compléter : $(x_1, \tilde{f}_j, z)$, $j \in J$, en un système de coordonnées locales sur un voisinage ouvert V de m dans $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$. En multipliant la coordonnée x_1 par une unité convenable, on obtient des coordonnées : $(X_1, \tilde{f}_j, z)$, $j \in J$, dans lesquelles la fonction multiforme $F \circ E = x_1^{\nu_0} \tilde{f}_1^{\lambda_1} \dots \tilde{f}_p^{\lambda_p}$ s'écrit :

$$X_1^{\lambda_0} \prod_J \tilde{f}_j^{\lambda_j}.$$

Le feuilletage éclaté est donc trivial le long de l'axe des z au voisinage du point m. En particulier, le champ local Z sur V qui s'écrit dans ce système de coordonnées : $\partial/\partial z$, est une trivialisation de ce feuilletage sur V. Considérons maintenant un recouvrement localement fini du diviseur exceptionnel par des ouverts V_α de $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$, et munissons la trace de ces ouverts sur le diviseur d'une partition de l'unité. Étendons-là par la fibration de Hopf en des fonctions C^∞ ρ_α de V_α dans $[0,1]$ telles que :

$$\sum_\alpha \rho_\alpha = 1.$$

Soit π la projection de $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$ sur l'axe des z. Sur chaque ouvert V_α choisissons un champ Z_α qui trivialise le feuilletage éclaté tel que :

$$\pi_* Z_\alpha = \partial/\partial z.$$

Considérons alors les champs réels :

$$Z'_\alpha = Z_\alpha^R \text{ (« réelifié » de } Z_\alpha)$$
$$Z''_\alpha = iZ_\alpha^R.$$

(1) Ces champs ont des trajectoires de dimension réelle 1 incluses dans les feuilles du feuilletage éclaté. Recollons-les en des champs C^∞ globaux :

$$Z' = \sum_\alpha \rho_\alpha Z'_\alpha$$
$$Z'' = \sum_\alpha \rho_\alpha Z''_\alpha.$$

Ces champs vérifient :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \pi_* Z' &= \Big(\sum_\alpha \rho_\alpha\Big)(\partial/\partial z)^R = (\partial/\partial z)^R \\ \pi_* Z'' &= \Big(\sum_\alpha \rho_\alpha\Big) i(\partial/\partial z)^R = i(\partial/\partial z)^R . \end{aligned}$$

Soit ψ'_t, ψ''_t, t réel, les flots de ces deux champs. Le difféomorphisme C^∞ :

$$\begin{aligned} \Phi_{z'+iz''} : \tilde{\mathbb{C}}^n \times \{0\} &\to \tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C} \\ m &\to \psi''_{z''} \circ \psi'_{z'}(m) \end{aligned}$$

- prend ses valeurs dans $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \{z\}$ d'après (2),
- conjugue les feuilletages définis par $E^*\omega_0$ et $E^*\omega_z$ d'après (1),
- laisse stable le diviseur exceptionnel $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C},0)$.

Cette dernière condition nous permet, par image directe par E, d'obtenir la trivialisation cherchée. □

Les résultats 3.5, 4.1, et 5.1 se résument alors par le théorème annoncé dans l'introduction de ce travail. De plus, de 5.1 nous déduisons :

5.2. Corollaire. — *Soit $\{\omega^s, s \in [0,1]\}$ une famille de germes de formes logarithmiques génériques à résidus fixés. Cette famille est topologiquement triviale.*

Preuve. — Il suffit de recouvrir le segment $[0,1]$ par des disques de $\mathbb{C}$ suffisamment petits pour appliquer le théorème 5.1. On conclut alors par compacité de $[0,1]$. □

5.3. Corollaire. — *Soit $\omega = f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ un germe de forme logarithmique générique. Soit P_j la partie homogène de plus bas degré de f_j. Alors le feuilletage défini par ω est topologiquement conjugué à celui défini par :*

$$P_1 \dots P_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{dP_j}{P_j}.$$

Preuve. — On appliquera le corollaire précédent à : $f_j = P_j + s(f_j - P_j)$, $s \in [0,1]$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CAMACHO, A. LINS NETO, The topology of integrable differentiable forms near a singularity, Publications Mathématiques de l'IHES, 55 (1982), 5-35.

[2] D. CERVEAU, J. F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, S.M.F., Astérisque, n° 97 (1982).

[3] HAMM, LÊ DUNG TRANG, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., vol. 6 (1973), 317-366.

[4] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Memorias de Mathematica del Instituto Jorge Juan Madrid, 28 (1974).

[5] J. F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 13 (1980), 469-523.

[6] E. PAUL, Étude topologique des formes logarithmiques fermées, Invent. Math., 95 (1989), 395-420.

[7] E. PAUL, thèse, Toulouse (1987).

[8] J. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math., 102 (1975), 327-361.

[9] S. SCHWARTZMAN, Asymptotic cycles, Ann. of Math., 66 (1957), 270-284.

[10] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $A\,dy = B\,dx$, Amer. J. of Math., (1968), 248-269.

[11] A. VAN DEN ESSEN, Reduction of singularities of the differentiable equation $A\,dy + B\,dx = 0$, Lectures notes in math., n° 712, 44-59, Springer-Verlag.

[12] C. CAMACHO, N. H. KUIPER, J. PALIS, The topology of Holomorphic Flows with Singularity, Publications Mathématiques de l'IHES, 48 (1978), 5-38.

Manuscrit reçu le 24 octobre 1988,
révisé le 19 juillet 1989.

Emmanuel PAUL,
Université Paul Sabatier
Laboratoire d'Analyse sur les Variétés
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex.