

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DAVID J. A. TROTMAN

Une version microlocale de la condition (w) de Verdier

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 3 (1989), p. 825-829

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_825_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_825_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE VERSION MICROLOCALE DE LA CONDITION (w) DE VERDIER

par David TROTMAN

En 1976, Verdier a introduit une condition de régularité locale sur des couples de strates d'une stratification C^2 , qu'il a notée (w) . Verdier a démontré qu'une stratification C^2 (w) -régulière est localement topologiquement triviale le long de chaque strate (par isotopie rugueuse), et que tout ensemble sous-analytique admet une stratification sous-analytique (w) -régulière. Deux démonstrations de ce dernier résultat, sans la désingularisation de Hironaka, ont été trouvées récemment par Denkowski-Wachta et Lojasiewicz-Stasica-Wachta. Celle de Lojasiewicz et al. est extraordinairement élémentaire.

Kashiwara et Schapira ont proposé (depuis 1984) une nouvelle condition de régularité sur un couple de sous-variétés C^2 , X, Y d'une variété C^2 , M :

$$(\mu) \quad (T_Y^*M \hat{+} T_X^*M) \cap (T^*M)|_Y \subseteq T_Y^*M ,$$

où $\hat{+}$ est une "somme" géométrique naturelle dans l'analyse microlocale et ses applications aux E.D.P. (cf. les travaux cités de Kashiwara-Schapira, Delort-Lebeau, et Lebeau). Dans cette note, nous démontrons que la (μ) -régularité de Kashiwara et Schapira équivaut à la (w) -régularité de Verdier, répondant à une question posée par Kashiwara en 1984. On déduit des théorèmes cités ci-dessus l'existence de stratifications (μ) -régulières sous-analytiques des ensembles sous-analytiques. Kashiwara et Schapira ont une preuve directe de l'existence des stratifications (μ) -régulières dont la rédaction est en cours.

Mots-clés : Stratification – (w) -régularité – Microlocale.
Classification A.M.S. : 58A35 – 35A27.

Je remercie P. Schapira de m'avoir posé ce problème (lors de son cours à Paris 7 en 1985), ainsi que J.-C. Delort, G. Lebeau et L.-C. Wilson pour des discussions utiles.

1. Définitions.

Soit M une variété différentiable de classe C^2 . Pour tout couple de sous-ensembles coniques $A, B \subset T^*M$ on définit suivant Kashiwara-Schapira [5, p.18] un sous-ensemble $A \hat{+} B$ de T^*M :

$$A \hat{+} B = \{(c, \gamma) | \exists \text{ des suites } (a_n, \alpha_n) \in A, (b_n, \beta_n) \in B \\ \text{telles que } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, \alpha_n + \beta_n, |a_n - b_n| \cdot |\alpha_n|) = (c, c, \gamma, 0)\}.$$

On rappelle que pour toute sous-variété X de classe C^2 de M le fibré conormal T_X^*M est $\{(x, \xi) \in T_x^*M | x \in X, T_x X \subseteq \ker \xi\}$. Selon Kashiwara et Schapira un couple de sous-variétés X, Y de M , tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (μ) -régulier si l'inclusion (μ) ci-dessus a lieu. Evidemment (X, Y) est (μ) -régulier si et seulement si (X, Y) est (μ) -régulier en y_0 pour tout $y_0 \in Y$.

Rappelons que, selon Verdier, un couple de sous-variétés (X, Y) de M , tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (w) -régulier en $y_0 \in Y$ si dans une carte locale pour Y en y_0 on peut trouver un voisinage U de y_0 dans M et une constante $C > 0$ tels que

$$(1) \quad \varepsilon(T_y Y, T_x X) < C|x - y|$$

pour $x \in U \cap X$, $y \in U \cap Y$. Ici, nous suivons Lojasiewicz-Stasica-Wachta en notant $\varepsilon(V, W)$ la distance (non-symétrique) entre deux sous-espaces vectoriels V, W d'un espace vectoriel euclidien E de dimension finie :

$$\varepsilon(V, W) = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|v - \pi_W(v)\|$$

où π_W est la projection orthogonale $\pi_W : E \rightarrow W$. Il est facile de vérifier que $\varepsilon(V, W) = \varepsilon(W^\perp, V^\perp)$. Ainsi l'inégalité (1) devient

$$\varepsilon(N_x X, N_y Y) < C|x - y|$$

avec $N_x X = (T_x X)^\perp$, $N_y Y = (T_y Y)^\perp$, ou encore,

$$(2) \quad \sup_{\xi \in N_x X} \|\xi - \pi_{N_y Y}(\xi)\| < C|x - y| \cdot \|\xi\|.$$

2. Equivalence de (μ) et (w) .

THÉORÈME. — Un couple de sous-variétés (X, Y) d'une variété C^2, M , tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (μ) -régulier (en $y_0 \in Y$) si et seulement si (X, Y) est (w) -régulier (en y_0).

Démonstration. — On suppose d'abord que la condition (w) n'est pas vérifiée en y_0 pour (X, Y) . Il existe donc par (2) des suites $x_n \in X$, $y_n \in Y$ et $\xi_n \in N_{x_n} X$ telles que $x_n \rightarrow y_0$, $y_n \rightarrow y_0$ et

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\xi_n - \eta_n\|}{|x_n - y_n| \cdot \|\xi_n\|} = \infty$$

où $\eta_n = \pi_{N_{y_n} Y}(\xi_n)$.

On pose $\lambda_n = (\|\xi_n - \eta_n\|)^{-1}$, et (3) devient

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \cdot \|\lambda_n \xi_n\| = 0.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \|\lambda_n \eta_n\| &= \|\lambda_n \eta_n - \lambda_n \xi_n + \lambda_n \xi_n\| \\ &\leq (\lambda_n \|\eta_n - \xi_n\| + \|\lambda_n \xi_n\|) \\ &= (1 + \|\lambda_n \xi_n\|). \end{aligned}$$

Donc (4) entraîne

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \cdot \|\lambda_n \eta_n\| = 0.$$

Maintenant, on considère les suites $(y_n, -\lambda_n \eta_n)$ dans $T_Y^* M$ et $(x_n, \lambda_n \xi_n)$ dans $T_X^* M$, par l'identification évidente de $(T_Y^* M)_{y_n}$ avec $N_{y_n} Y$, etc. Après extraction éventuelle de sous-suites on peut supposer que

$$\eta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\lambda_n \eta_n + \lambda_n \xi_n)$$

existe, et vu que $\|\eta_0\| = 1 < \infty$, nous avons montré que $(y_0, \eta_0) \in (T_Y^* M \hat{+} T_X^* M) \cap T_{y_0}^* M$.

Mais on a $(\xi_n - \eta_n) \perp N_{y_n} Y$ pour tout n , et donc on a $\eta_0 \perp N_{y_0} Y$, en identifiant $N_{y_0} Y$ avec $\{\eta \in T^* M | T_{y_0} Y \subset \ker \eta\}$. Ceci implique que (y_0, η_0) n'appartient pas à $T_Y^* M$ et donc que la condition (μ) n'est pas vérifiée en y_0 . Ainsi (μ) implique (w) .

Réciproquement, supposons que (μ) ne soit pas vérifiée et qu'il existe (y_0, η_0) dans $(T_Y^* M \hat{+} T_X^* M) \cap T_{y_0}^* M$ tel que $(y_0, \eta_0) \notin T_Y^* M$. Nous avons alors des suites $(x_n, \xi_n) \in T_X^* M$ et $(y_n, \eta_n) \in T_Y^* M$ telles que $x_n \rightarrow y_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $(\xi_n + \eta_n) \rightarrow \eta_0$ et $(|x_n - y_n| \cdot \|\eta_n\|) \rightarrow 0$, mais $(y_0, \eta_0) \notin T_Y^* M$.

On en déduit que $\eta_0 - \pi_{(T_Y^* M)_{y_0}}(\eta_0) \neq 0$; autrement dit on a

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n - \pi_{(T_Y^* M)_{y_n}}(\xi_n)) \neq 0.$$

Parce que $\|\xi_n + \eta_n\|$ est borné, et $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \cdot \|\eta_n\| = 0$, il résulte que

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \cdot \|\xi_n\| = 0,$$

et (6) et (7) contredisent (2) après identification de $N_{y_n} Y$ avec $(T_Y^* M)_{y_n}$ et de $N_{x_n} X$ avec $(T_X^* M)_{x_n}$, et donc impliquent que la condition (w) n'est pas vérifiée en y_0 . Ainsi (w) implique (μ).

3. Remarques.

(i) La même démonstration s'applique à l'équivalence entre une condition

$$\varepsilon(T_x X, T_y Y) < C|x - y|^r$$

pour un nombre réel r positif, et une inclusion d'espaces

$$(T_Y^* M \hat{+}_r T_X^* M) \cap (T_{y_0}^* M) \subseteq T_Y^* M$$

où on impose que $|a_n - b_n|^r \cdot \|\alpha_n\| \rightarrow 0$ dans la définition de $\hat{+}_r$.

(ii) Une version équivalente de (μ) est

$$(NY \hat{+} NX) \cap (TM)|_Y \subseteq NY.$$

(iii) L'opération $\hat{+}$ apparaît implicitement pour la première fois en 1981 chez Kashiwara-Schapira [4]. Elle est un outil essentiel dans l'analyse microlocale : voir les livres de Kashiwara et Schapira, et les articles de Delort et Lebeau.

(iv) Des travaux récents de Kuo-Trotman et de Trotman-Wilson relient la condition (w) avec d'autres conditions de régularité plus faibles, les (t^s).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-C. DELORT et G. LEBEAU, Majorations de deuxièmes micro-supports, Journées EDP, Saint-Jean-de-Monts, 1986, Exposé 14.
- [2] J.-C. DELORT et G. LEBEAU, Microfonctions I-Lagrangiennes, J. Math. Pures et appl., 67 (1988), 39-84.

- [3] Z. DENKOWSKA et K. WACHTA, Une construction de la stratification sous-analytique avec la condition (w), Bull. Pol. Acad. Sci. (Math.), 35 (1987), 401–405.
- [4] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel, Journées E.D.P., Saint-Jean-de-Monts, 1981, Exposé 17.
- [5] M. KASHIWARA and P. SCHAPIRA, Microlocal study of sheaves, Astérisque, 128 (1985).
- [6] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, An introduction to microlocal analysis, Univ. Fed. Pernambuco, Recife, 173 pages, 1984.
- [7] T.-C. KUO and D. TROTMAN, On (w) and (t^s)–regularity, Inventiones Math., 92 (1988), 633–643.
- [8] G. LEBEAU, Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires, Inventiones Math., 95 (1989), 277–323.
- [9] S. LOJASIEWICZ, J. STASICA et K. WACHTA, Stratifications sous-analytiques. Condition de Verdier, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 34 (1986), 531–539.
- [10] D. TROTMAN et L.-C. WILSON, Travaux en préparation.
- [11] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math., 36 (1976), 295–312.

Manuscrit reçu le 1er février 1989.

David TROTMAN,
University of Hawaii at Manoa
et
Université de Paris-Sud.