ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE BÉZIVIN

Quotients de fonctions entières et quotients de Hadamard de séries formelles

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 737-752

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_737_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 737-752

QUOTIENTS DE FONCTIONS ENTIÈRES ET QUOTIENTS DE HADAMARD DE SÉRIES FORMELLES

par Jean-Paul BÉZIVIN

1. Introduction et notations.

Dans tout cet article, nous notons PE l'ensemble des polynômes-exponentiels, c'est-à-dire les fonctions $f(z)$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ ayant une expression de la forme :

$$f(z) = \sum P_i(z) \exp(a_i z) \tag{1}$$

où les P_i sont des polynômes de $\mathbf{C}[z]$ et les a_i des éléments distincts de $\mathbf{C}$.

Nous dirons que les a_i sont les fréquences de f.

Nous notons aussi SE la partie de PE formée par les sommes exponentielles, c'est-à-dire les f telles que dans (1), les polynômes P_i soient des constantes.

Le résultat suivant est bien connu :

THÉORÈME B. — *Soit f et g appartenant à PE, avec g non nulle. On suppose que la fonction $h(z) = f(z)/g(z)$ est une fonction analytique entière.*

Alors il existe un polynôme non nul $P(z)$ tel que $P(z)h(z)$ appartienne à PE.

Mots-clés : Fonctions de type exponentiel – Quotient de Hadamard.
Classification A.M.S. : 30D – 11B.

Ce théorème est attribué à W.B. Bouwsma dans [13], où on pourra en trouver une démonstration, d'ailleurs dans un cadre un peu plus général.

La présence du polynôme $P(z)$ est indispensable en général, comme le montre l'exemple $\sin(z)/z$. Cependant, l'étude de ce genre de question a été inaugurée par J.-F. Ritt dans [9] avec le résultat suivant :

THÉORÈME R. — *Soient f dans PE, et g appartenant à SE, non nulle. On suppose que le quotient $h(z) = f(z)/g(z)$ est une fonction entière.*

Alors $h(z)$ appartient à PE.

Diverses généralisations ont été données de ces résultats, notamment à plusieurs variables. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux références [2], [4], [6], [11] et [12].

Nous décrivons maintenant un autre type de questions, lié cependant au précédent.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle; soient $f(x) = \sum a(n)x^n$ et $g(x) = \sum b(n)x^n$ deux séries formelles à coefficients dans K. Le produit de Hadamard de f par g est alors la série formelle $\sum a(n)b(n)x^n$.

Supposons $b(n)$ non nul pour tout n. On peut alors définir le quotient de Hadamard de f par g comme étant la série formelle $\sum a(n)/b(n)x^n$.

Nous dirons que la série formelle $f(x)$ est une série rationnelle si elle représente le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle. Il est équivalent de dire que la suite des coefficients de Taylor $a(n)$ de la série f vérifie pour n assez grand une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\sum_{i=0}^{s} b_i a(n+i) = 0 \tag{2}$$

où les b_i sont des éléments non tous nuls de K.

Il est aussi équivalent de dire que, si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, on peut écrire pour n assez grand :

$$a(n) = \sum_{j=0}^{t} P_j(n)\omega_j^n \tag{3}$$

où les ω_j sont des éléments non nuls de $\overline{K}$, et les P_j des polynômes non nuls de $\overline{K}[x]$.

Nous dirons aussi que les ω_j sont les fréquences de la suite récurrente linéaire $a(n)$.

On a alors le résultat suivant, conjecturé par C. Pisot (voir [3]) et démontré par Y. Pourchet et A.-J. Van der Poorten ([8], [15]) (voir aussi la rédaction complète de la démonstration de ce résultat par R. Rumely dans [10]).

THÉORÈME DU QUOTIENT DE HADAMARD. — *Soient* $\sum a(n)x^n$ *et* $\sum b(n)x^n$ *deux séries rationnelles, à coefficients dans* K. *On suppose que* $b(n)$ *est non nulle pour toute valeur de* n *et qu'il existe un sous-anneau* A *de* K, *de type fini sur* $\mathbf{Z}$, *et tel que* $a(n)/b(n)$ *appartienne à* A *pour tout* n.

Alors la série $\sum a(n)/b(n)x^n$ *est rationnelle.*

Au vu de la formule (3) la similitude entre ce résultat et les théorèmes B et R est évidemment frappante.

Dans cet article, nous nous proposons de généraliser ces théorèmes, à d'autres ensembles de fonctions entières de type exponentiel pour le théorème B, et à d'autres ensembles de séries formelles pour le théorème du quotient de Hadamard.

Plus précisément, introduisons l'application qui, à la série formelle $f(x) = \sum a(n)x^n$, associe la série formelle $\sum n!a(n)x^n = \tilde{f}(x)$.

La transformation qui à f associe $\tilde{f}$ est à peu de chose près la transformation de Laplace.

Il est très facile de voir que les fonctions $f(z)$ appartenant à PE sont exactement les fonctions f telles que $\tilde{f}$ soit une série rationnelle.

Un surensemble naturel de PE est donc formé des fonctions f telles que $\tilde{f}$ soit une série algébrique. Nous notons AE cet ensemble de fonctions, dont on voit immédiatement qu'il est inclus dans l'ensemble E des fonctions entières de type exponentiel.

On peut donc se poser la question suivante : soient f appartenant à AE et g non nulle dans PE. On suppose que $h = f/g$ est entière. Existe-t-il alors un polynôme non nul P tel que $P(z)h(z)$ appartienne à AE ?

De la même manière, on peut considérer une série algébrique $\sum a(n)x^n$, dans $\mathbf{Q}[[x]]$, et une série rationnelle $\sum b(n)x^n$ avec $b(n)$ non nul pour tout n. Si on a par exemple $a(n)/b(n)$ dans $\mathbf{Z}$ pour toute valeur de n, a-t-on que la série $\sum a(n)/b(n)x^n$ est algébrique?

La suite de cet article est organisée de la façon suivante : nous énonçons nos résultats sur les questions précédentes dans la partie 2. Dans la partie 3, nous donnons quelques propriétés de l'ensemble AE, ainsi que des résultats qui nous seront utiles pour la démonstration des théorèmes 1 et 2. La partie 4 donne la démonstration du théorème 1. La partie 5 est consacrée à la démonstration du théorème 2. Enfin, dans la partie 6 nous faisons quelques remarques.

L'auteur remercie vivement G. Christol pour de fructueuses conversations.

2. Enoncés des résultats.

Nous donnons d'abord l'analogue du théorème B :

THÉORÈME 1. — *Soit f un élément de AE, et g un élément non nul de PE. On suppose que la fonction $h(z) = f(z)/g(z)$ est entière.*

Alors il existe un polynôme P non nul dans $\mathbf{C}[z]$ tel que $P(z)h(z)$ appartienne à AE.

Nous passons maintenant à l'analogue du théorème du quotient de Hadamard, pour lequel nous avons des résultats plus partiels.

Nous notons $\mathbf{K}$ un corps qui dans tout ce qui suit, sera toujours soit $\mathbf{Q}$, soit un corps quadratique imaginaire.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $f(x) = \sum u(n)x^n$ une série algébrique à coefficients dans $\mathbf{K}$. Soit $g(x) = \sum v(n)x^n$ une série rationnelle à coefficients dans $\mathbf{K}$. Nous faisons les hypothèses suivantes sur la suite $v(n)$:*

1) *$v(n) = b_1a_1^n + P_2(n)a_2^n + \cdots + P_s(n)a_s^n$, où b_1 et les a_i sont des éléments non nuls de $\mathbf{K}$, et les P_i des éléments de $\mathbf{K}[x]$.*

2) *Si s est supérieur à 1, alors on a $|a_1| > |a_i|$ pour $i = 2, \ldots s$.*

3) *$v(n)$ est non nul pour toute valeur de n.*

On suppose que, pour tout entier n, $a(n) = u(n)/v(n)$ est un entier algébrique de $\mathbf{K}$.

Alors la série $\sum a(n)x^n$ est une série algébrique.

3. Résultats préliminaires à la démonstration des théorèmes 1 et 2.

D'après sa définition, AE est une partie des fonctions entières de type exponentiel, que nous notons E.

Nous aurons aussi besoin de l'ensemble, que nous notons DE, des fonctions entières de type exponentiel qui vérifient une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. On voit facilement que f appartient à DE, si et seulement si $\tilde{f}$ est une série entière de rayon de convergence non nul dans $\mathbf{C}$, qui vérifie une équation différentielle de même type. Il est clair que AE est inclus dans DE.

Remarquer que PE et SE sont de façon évidente des anneaux intègres.

Le théorème suivant est dû à M. Tsuji :

THÉORÈME T. — *Soit $f(z) = \sum w(n)z^n$ une série algébrique de rayon de convergence 1. Il existe alors un entier naturel k, et un nombre rationnel r n'appartenant pas aux entiers négatifs, tels que l'on ait pour tout n assez grand :*

$$c_1 n^r \leq |w(n)| + \cdots + |w(n+k)| \leq c_2 n^r .$$

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème A de [14].

PROPOSITION 1. — *Les ensembles DE et AE sont des sous-PE-modules de E, qui sont stables par dérivation.*

Démonstration. — Pour montrer que AE et DE sont des $PE-$modules, il suffit de démontrer que ces ensembles sont stables par multiplication par z et $\exp(az)$ où a est un nombre complexe quelconque. On voit facilement que l'on a :

1) Si $g(z) = zf(z)$, alors $\tilde{g}(x) = x^2\tilde{f}'(x) + x\tilde{f}(x)$.

2) Si $g(z) = \exp(az)f(z)$, alors $\tilde{g}(x) = 1/(1-ax)\tilde{f}(x/(1-ax))$.

3) Si $g(z) = f'(z)$, alors $\tilde{g}(x) = (f(x) - f(0))/x$.

On en tire facilement les conclusions de la proposition 1.

PROPOSITION 2. — *L'ensemble DE est une sous-algèbre de E. Ceci n'est pas le cas pour l'ensemble AE.*

Démonstration. — La première partie de la proposition 2 est évidente, puisque le produit de deux fonctions de type exponentiel est encore de type exponentiel, et que le produit de deux fonctions vérifiant des équations différentielles homogènes à coefficients polynômes possède aussi cette propriété.

Pour montrer la seconde partie, nous allons voir que le carré de la fonction $f(z) = \sum \binom{2n}{n} z^n/(n!4^n)$ n'est pas dans AE, bien que la fonction f elle-même soit un élément de AE, puisque $\tilde{f}(x) = 1/\sqrt{1-x}$.

Nous nous contentons de donner un schéma de démonstration, sans trop entrer dans les détails des calculs.

Soit $b(n) = \binom{2n}{n} 4^{-n}$, et $d(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)b(n-k)$. Alors le développement de Taylor du carré de la fonction $f(z)$ est égal à $\sum d(n)z^n/n!$, et il nous faut donc démontrer que la série $\sum d(n)x^n$ n'est pas algébrique.

Pour cela, remarquons que :

(4) $b(k)$ est équivalent à $c_3(k+1)^{-1}(k+2)^{-1/2}$ quand k tend vers l'infini, où c_3 est une constante non nulle.

Nous posons :

(5) $$w(n) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)^{-1}(n-k+1)^{-1}(k+2)^{-1/2}(n-k+2)^{-1/2}.$$

On peut réécrire $w(n)$ sous la forme suivante :

(6) $$w(n) = 1/((n+4)(n+3)(n+2)(n+1)2^n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n+4}{k+2} (k+2)^{1/2}(n+4-k-2)^{1/2}.$$

On en déduit que :

(7) $w(n)$ est équivalent à
$$2^{-n}n^{-3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+4}{k+2} ((k+2)/(n+4))^{1/2}(1-(k+2)/(n+4))^{1/2}.$$

Et par suite que :

(8) $w(n)$ est équivalent à $2^{-n}n^{-3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((k/n)(1-k/n))^{1/2}$,
à une constante multiplicative non nulle près.

Notons $\varphi(x)$ la fonction $\sqrt{x(1-x)}$, qui est continue sur le segment $[0,1]$ de $\mathbf{R}$. Par suite le polynôme de Bernstein, défini par :

(9) $$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(k/n) t^k (1-t)^{n-k}, \text{ converge vers } \varphi(t)$$

pour toute valeur de t dans $[0,1]$.

Si l'on prend $t = 1/2$, on voit que ceci prouve que $w(n)$ est équivalent à $c_4 n^{-3}$ quand n tend vers l'infini, c_4 étant une constante non nulle.

Il résulte alors de (4) que l'on a, après quelques calculs, l'équivalence suivante :

(10) $d(n)$ est équivalent à $c_5 2^{-n} n^{-3}$ si n tend vers l'infini.

Le théorème T permet alors d'affirmer que la série $\sum d(n)x^n$ n'est pas algébrique, ce qui termine la démonstration de la proposition 2. Nous aurons aussi besoin du petit résultat suivant :

LEMME 1. — *Soient f et g deux fonctions indéfiniment dérivables, avec g non nulle. Pour tout q entier, il existe des polynômes $B_{k,q}$ dans $\mathbf{Z}$ $[X_0, \ldots, X_q]$ tels que :*

$$g^q (d/dx)^q (f/g) = (-1)^q q! (g')^q f/g + \sum_{k=0}^{q} f^{(k)} B_{k,q}(g, \ldots, g^{(q)}).$$

Démonstration. — Pour $q = 1$, on a $g(d/dx)(f/g) = f' - g'f/g$; on procède ensuite par récurrence sur l'entier q, le calcul étant immédiat.

Le résultat suivant est dû à Y. André (voir [1]) :

THÉORÈME A. — *Soit $\mathbf{L}$ un corps de nombres, et $y(x) \in \mathbf{L}[[x]]$. On suppose que pour presque tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathbf{L}$, les coefficients de Taylor de $y(x)$ sont des entiers $\mathfrak{P}$-adiques. Si la dérivée $y'(x)$ de $y(x)$ est une série algébrique, alors $y(x)$ est aussi une série algébrique.*

On en déduit le résultat suivant :

LEMME 2. — *Soient p dans $\mathbf{Z}$ et q non nul dans $\mathbf{N}$. On suppose que la série $y(x) = \sum a(n)x^n$ est à coefficients entiers algébriques du corps de nombres $\mathbf{L}$, et que la série $\sum (qn-p)a(n)x^n$ est algébrique. Alors la série $y(x)$ est elle-même algébrique.*

Preuve. — Puisque la série $\sum(qn-p)a(n)x^n$ est algébrique, il en est de même de la série $\sum(qn-p)a(n)x^{qn-p-1}$, où nous avons éventuellement éliminé un nombre fini de termes pour éviter les exposants négatifs. D'après le théorème A, la série $\sum a(n)x^{q^{n-p}}$ est alors algébrique, d'où on déduit facilement le lemme 2.

4. Démonstration du théorème 1.

Nous démontrons d'abord la proposition suivante, qui a probablement son intérêt propre :

PROPOSITION 3. — *Soit f appartenant à DE et g non nul dans PE. On suppose que $h = f/g$ est analytique entière. Alors h appartient à DE.*

Démonstration. — Nous posons $f(z) = \sum u(n)/n!\, z^n$ et $g(z) = P_0(z)\exp(a_0 z) + \cdots + P_s(z)\exp(a_s z)$.

Nous posons aussi $h(z) = f(z)/g(z) = \sum v(n)/n!\, z^n$.

D'après un théorème de Lindelöf ([7]), la fonction $h(z)$ est, comme les fonctions f et g, une fonction entière de type exponentiel.

Il en résulte que la série $\tilde{h}(x) = \sum v(n)x^n$ a un rayon de convergence non nul dans $\mathbf{C}$.

En remplaçant si nécessaire z par az avec $a \in \mathbf{C} - \{0\}$ convenable, on peut supposer qu'il existe un indice i_0 tel que, pour i différent de i_0, on ait $\mathrm{Re}(a_i) > \mathrm{Re}(a_{i_0})$, (où nous avons noté $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe z). On peut clairement supposer que i_0 est égal à zéro.

De plus, en multipliant si nécessaire f et g par $\exp(-a_0 z)$, on peut supposer que a_0 est nul.

Soit α tel que, pour tout $i = 1, \ldots, s$ on ait $\mathrm{Re}(a_i) > \alpha > 0$.

On note $T(N)$ l'ensemble des sommes de N éléments choisis parmi les a_i, $i = 1, \ldots, s$. On a alors d'après ce qui précède que, pour tout élément γ de $T(N)$, $\mathrm{Re}(\gamma) > N\alpha$.

Nous écrivons maintenant, pour tout z dans $\mathbf{C}$ tel que $P_0(z)$ soit non nul :

$$g(z) = P_0(z)(1 - r(z)) \tag{11}$$

avec :

$$r(z) = -\sum_{k=1}^{s} P_k(z)/P_0(z)\exp(a_k z). \tag{12}$$

Soit N un entier assez grand, que nous choisirons plus loin.

On a :

$$P_0(z)^{N+1}f(z)/g(z) = P_0(z)^N f(z)(1 + r(z) + \cdots + r(z)^N) \\ + f(z)r(z)^{N+1}P_0(z)^{N+1}/g(z). \tag{13}$$

Nous notons $w_k(z) = P_0(z)^k r(z)^k$. Il est facile de voir que $w_k(z)$ est un polynôme-exponentiel, dont les fréquences sont des éléments de $T(k)$. On a donc : $P_0(z)^{N+1}f(z)/g(z) = H_N(z) + w_{N+1}(z)f(z)/g(z)$, où $H_N(z)$ est égal à $\sum_{k=0}^{N} P_0(z)^{N-k}w_k(z)f(z)$, et est donc un élément de DE, d'après la proposition 1.

On a donc :

$$P_0(z)^{N+1}h(z) = H_N(z) + w_{N+1}(z)h(z). \tag{14}$$

Nous appliquons maintenant l'opération $f \to \tilde{f}$ aux deux membres de l'égalité (14). On trouve d'après la proposition 1 que :

$$L_N(D)(\tilde{h})(x) = \widetilde{H}_N(x) + \sum L_\gamma(D)(\tilde{h})(x/(1-\gamma x)). \tag{15}$$

Dans (15), D est la dérivation d/dx, $L_N(D)$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynômes, la sommation a lieu sur les γ dans $T(N+1)$, et les $L_\gamma(D)$ sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients fractions rationnelles (*cf.* la démonstration de la proposition 1).

Nous savons que la série $\tilde{h}(x)$ a un rayon de convergence non nul dans $\mathbf{C}$, que nous notons R.

La fonction $\tilde{h}(x/(1-\gamma x))$, et par suite aussi la fonction $L_\gamma(D)(\tilde{h})(x/(1-\gamma x))$, est donc méromorphe dans le domaine $C(\gamma) = \{x \in \mathbf{C} \mid |x/(1-\gamma x)| < R\}$.

Tout élément γ de $T(N+1)$ est de partie réelle supérieure à $(N+1)\alpha$, donc de module supérieur à cette même quantité. Par suite, on voit facilement que pour N assez grand, $C(\gamma)$ n'est autre que le complémentaire dans la sphère de Riemann du disque $D(\gamma)$ de centre $R^2\overline{\gamma}/(R^2|\gamma|^2-1)$ et de rayon $R/(R^2|\gamma|^2-1)$ (on a noté $\overline{\gamma}$ le conjugué du nombre complexe γ).

Quand N tend vers l'infini, les rayons de ces disques $D(\gamma)$ tendent vers zéro uniformément par rapport à γ dans $T(N+1)$, et les distances de leurs centres à l'origine tendent de la même façon vers zéro. On voit facilement d'autre part que ces disques sont tous inclus dans le demi-plan V des nombres complexes z de partie réelle positive, toujours pour N assez grand.

Soit M un nombre réel positif et inférieur à R. D'après ce qui précède, on peut trouver un entier N tel que la réunion des disques $D(\gamma)$ pour γ parcourant $T(N+1)$ soit incluse dans l'intersection de V avec le disque de centre zéro, rayon M.

La fonction $Z(x) = \sum L_\gamma(D)(\tilde{h})(x/(1-\gamma x))$ est alors méromorphe dans le complémentaire de l'intersection de V avec $D(0,M)$.

Maintenant, la fonction $\widetilde{H}_N$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. On peut donc trouver un entier t et des polynômes $Q_0, \ldots, Q_t$, avec Q_t non nul tels que :

$$\sum_{i=0}^{t} Q_i(x)\widetilde{H}_N^{(i)}(x) = 0. \tag{16}$$

Des égalités (15) et (16), on déduit :

$$\sum_{i=0}^{t} Q_i(x)(L_N(D)(\tilde{h})^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{t} Q_i(x)Z^{(i)}(x). \tag{17}$$

Le premier membre de (17) est comme $\tilde{h}$, une fonction analytique dans le disque de centre zéro, rayon R. Le second membre de (17) se prolonge comme $Z(x)$ en une fonction méromorphe dans le complémentaire dans la sphère de Riemann de $V \cap D(0,M)$.

Il en résulte que le premier membre de (17) se prolonge en une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann, et par suite est une fraction rationnelle. Par conséquent la fonction $\tilde{h}$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes, et il en est de même de h, ce qui termine la démonstration de la proposition 3.

Preuve du théorème 1. — D'après la proposition 3, la fonction $h(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes :

$$\sum_{i=0}^{m} U_i(z)h^{(i)}(z) = 0 \quad (\text{avec } U_m \text{ non nul}). \tag{18}$$

En revenant au fait que $h = f/g$, en multipliant par g^m et en utilisant le lemme 1, on voit que l'on peut écrire :

$$U_m(z)(g'(z))^m h(z) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(z)C_k(z, g(z), \ldots, g^{(m)}(z)) \tag{19}$$

où C_k est un polynôme à $m+2$ variables.

Il résulte de (19) et de la proposition 1 que le premier membre de (19) appartient à AE.

Pour poursuivre, nous aurons besoin de la notation suivante : si g appartient à PE, et est donné par l'expression (1), on appelle longueur de g l'entier $\sum(\deg(P_i)+1)$.

Les éléments de PE de longueur 1 sont les fonctions de la forme $b \exp(az)$, et le théorème est trivial dans ce cas.

Nous allons terminer la démonstration en faisant une récurrence sur la longueur de g. Soit donc d un entier naturel supérieur ou égal à 1, et supposons la conclusion du théorème vraie quand g est de longueur inférieure ou égale à d.

Soit g un élément de PE de longueur $d+1$. Nous pouvons, comme dans la démonstration de la proposition 3, supposer que g possède une fréquence nulle. Il est alors clair que la longueur de g' est égale à d.

D'après ce que l'on a vu, $U_m(z)(g'(z))^m h(z) = W(z)$ appartient à AE.

Donc $W(z)/g'(z) = U_m(z)(g'(z))^{m-1}h(z)$ est entière, et est le quotient de W appartenant à AE par l'élément g' de PE, qui est de longueur d. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver un polynôme $B(z)$ non nul tel que $B(z)U_m(z)(g'(z))^{m-1}h(z)$ appartienne à AE.

En répétant m fois cette opération, on voit qu'il existe un polynôme $P(z)$ non nul tel que $P(z)f(z)/g(z)$ appartienne à AE, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

5. Démonstration du théorème 2.

Nous suivons un schéma de démonstration identique à celui de la démonstration du théorème 1.

Nous commençons par démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soit $\sum u(n)x^n$ appartenant à $\mathbf{K}[[x]]$, vérifiant une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Soit $\sum v(n)x^n$ une série rationnelle possédant les propriétés 1), 2) et 3) du théorème 2.*

On suppose que $a(n) = u(n)/v(n)$ est un entier algébrique de $\mathbf{K}$ *pour tout n. Alors la série $\sum a(n)x^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes.*

Démonstration de la proposition 4. — Posons

$$r(n) = -b_1^{-1}a_1^{-n}\sum_{i=2}^{s} P_i(n)a_i^n \ ;$$

on a, d'après l'hypothèse 2) du théorème, $|r(n)| < 1$ pour n assez grand. On écrit alors :

$$a(n) = u(n)/v(n) = u(n)b_1^{-1}a_1^{-n}(1 + r(n) + \cdots + (r(n))^N) \\ +u(n)(r(n))^{N+1}/v(n),$$

où N est un entier assez grand, que nous choisirons plus loin.

On a donc :

$$a(n) = u(n)/v(n) = u(n)w_N(n) + R_N(n) \tag{20}$$

où $w_N(n)$ est la suite récurrente linéaire $b_1^{-1}a_1^{-n}(1 + r(n) + \cdots + r(n)^N)$, et où on a posé $R_N(n) = r(n)^{N+1}a(n)$.

D'après la propriété 2) du théorème, on peut choisir N suffisamment grand pour que l'on ait $R_N(n) = 0\,(\theta^n)$ avec $\theta \in]0,1[$. Nous fixons un tel N dans la suite.

Les deux séries $\sum u(n)x^n$ et $\sum w_N(n)x^n$ vérifient des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients polynômes de $\mathbf{K}[x]$. Il en est donc de même de leur produit de Hadamard $\sum u(n)w_N(n)x^n$. Il en résulte que la suite $u(n)w_N(n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômes de $\mathbf{K}[x]$ dont les coefficients sont des entiers algébriques, que nous écrivons :

$$\sum_{i=0}^{q} S_i(n)u(n+i)w_N(n+i) = 0 \tag{21}$$

(pour n assez grand), S_q étant non nul.

On a donc pour n assez grand, l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{q} S_i(n)a(n+i) = \sum_{i=0}^{q} S_i(n)R_N(n+i). \tag{22}$$

Le premier membre de (22) est un entier algébrique du corps $\mathbf{K}$, qui est soit $\mathbf{Q}$, soit un corps quadratique imaginaire. Le second membre de (22) tend vers zéro si n tend vers l'infini. Par suite, les deux membres de l'égalité (22) sont nuls à partir d'un certain rang, ce qui démontre la proposition 4.

Preuve du théorème 2. — Remarquons que nous savons en plus par rapport à la proposition 4, que la série $\sum u(n)x^n$ est une série algébrique. Il en est donc de même de la série $h(x) = \sum u(n)w_N(n)x^n$, qui s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients fractions rationnelles en des termes de la forme $h^{(i)}(ax)$, i dans $\mathbf{N}$ et a dans $\overline{\mathbf{Q}}$.

On sait que l'équation différentielle d'ordre minimal vérifiée par une série algébrique est telle que son polynôme indiciel a toutes ses racines rationnelles.

D'autre part, cette équation différentielle se traduit par une équation aux différences du type (21), le polynôme $S_q(x-q)$ étant alors à une constante multiplicative non nulle près le polynôme indiciel.

Nous appelons maintenant longueur de la suite récurrente $v(n)$ l'entier $1 + \sum(\deg(P_i) + 1)$, et nous allons raisonner par récurrence sur cette longueur. Remarquons que si la suite $v(n)$ vérifiant les hypothèses du théorème est de longueur 1, alors $v(n) = b_1 a_1^n$, et il n'y a rien à démontrer.

Nous supposons le théorème vrai pour les suites de longueur inférieure ou égale à L, et nous supposons que $v(n)$ a une longueur $L+1$.

On déduit de $\sum S_i(n)u(n+i)/v(n+i) = 0$, en multipliant par $v(n)\dots v(n+q-1)$ que :

(23) la série $\sum S_q(n)v(n)\dots v(n+q-1)u(n+q)/v(n+q)x^n$ est algébrique.

Considérons les suites récurrentes suivantes :

$$M_i(n) = v(n+q) - a_2^{q-i}v(n+i)\ ,\quad 0 \le i < q.$$

On voit facilement, d'après l'expression 1) de la suite $v(n)$ donnée dans le théorème 2, que les suites $M_i(n)$ possèdent encore les propriétés 1) et 2) de ce théorème. D'après la propriété 2), elles sont non nulles pour n assez grand, et enfin elles sont toutes de longueur inférieure ou égale à L.

A un facteur constant non nul près, la série (23) est égale à :

$$\sum S_q(n)M_0(n)v(n+1)\dots v(n+q-1)u(n+q)/v(n+q)x^n \\ - \sum S_q(n)v(n+1)\dots v(n+q-1)u(n+q)x^n.$$

Par suite, la série $\sum S_q(n)M_0(n)v(n+1)\dots v(n+q-1)u(n+q)/v(n+q)x^n$ est aussi algébrique.

Répétant ce procédé, on voit que :

(24) La série $\sum S_q(n)M_0(n)\dots M_{q-1}(n)u(n+q)/v(n+q)x^n$ est algébrique.

En multipliant si nécessaire par d^n, où d est un entier naturel convenablement choisi, chacun des facteurs des coefficients de Taylor de la série (24), on peut supposer que ces facteurs sont à valeurs entiers algébriques de $\mathbf{K}$.

On applique alors plusieurs fois l'hypothèse de récurrence, en divisant successivement par $M_0(n),\dots,M_{q-1}(n)$, et on en déduit que :

(25) La série $\sum S_q(n)u(n+q)/v(n+q)x^n$ est algébrique.

Pour terminer la démonstration, nous allons utiliser le lemme 2. En effet, nous avons déjà vu que le polynôme $S_q(x-q)$ avait toutes ses racines rationnelles. En le décomposant en ses facteurs linéaires, et en appliquant plusieurs fois le lemme 2, on voit que la série $\sum u(n)/v(n)x^n$ est algébrique, ce qui termine la démonstration du théorème 2.

6. Remarques.

1) Pour le théorème 1, on voit que le résultat demeure vrai si, au lieu de considérer l'ensemble AE des fonctions f telles que $\tilde{f}$ soit algébrique, on considère les fonctions f telles que $\tilde{f}$ appartienne à une classe de fonctions qui soit stable par les opérations 1), 2) et 3) de la démonstration de la proposition 1, et dont tous les éléments vérifient des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients polynômes.

C'est le cas pour les classes $D(t)$ des diagonales de fractions rationnelles à t variables, dont nous rappelons la définition :

DÉFINITION. — Soit $w(x) = \sum u(n)x^n$ une série formelle à coefficients dans le corps K. On dit que w est diagonale de fraction rationnelle à t variables, s'il existe une fraction rationnelle F à t variables, à coefficients dans K, régulière à l'origine, de développement de Taylor $\sum v(n_1,\dots,n_t)\underline{x}^{\underline{n}}$, telle que l'on ait $u(n) = v(n,\dots,n)$ pour tout n.

L'ensemble $D(1)$ est l'ensemble des séries rationnelles. On sait que $D(2)$ est l'ensemble de séries algébriques, et que $D(3)$ contient des séries transcendantes. Pour tout ce qui concerne ce sujet, voir l'article de G. Christol [5].

2) Toujours en ce qui concerne le théorème 1, une question que nous n'avons pu résoudre est celle de savoir si l'analogue du théorème R obtenu en remplaçant dans ce théorème "$f \in PE$" par "$f \in AE$" est vrai.

3) En ce qui concerne le théorème 2, on peut bien sûr se poser la question de savoir si l'analogue du théorème du quotient de Hadamard est vrai en toute généralité.

4) Enfin, toujours pour le théorème 2, et de manière symétrique à ce qui concerne le théorème 1, on peut considérer les séries $\sum u(n)x^n$ qui sont diagonales de fractions rationnelles à t variables, au lieu de séries algébriques. Mais apparemment, aucun résultat analogue au théorème A n'est connu dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. André, G–functions and Geometry. Chap. VIII. Livre à paraître, Editions Vieweg, collection Aspects of Mathematics series of the MPI Bonn.

[2] V. Avanissian et R. Gay, Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France, 103, n° 3 (1975), 341–384.

[3] B. Benzaghou, Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. Math. France, 28 (1970), 209–252.

[4] C.A. Berenstein and M.A. Dostal, The Ritt's theorem in several variables, Ark. Math., 12, n° 2 (1974), 267–280.

[5] G. Christol, Diagonales de fractions rationnelles, A paraître au Séminaire de Théorie des Nombres de Paris.

[6] P.D. Lax, The quotients of exponentials polynomials, Duke Math. Journal, 15 (1948), 967–970.

[7] E. Lindelof, Sur les fonctions entières d'ordre entier, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., 22 (1905), 369–395.

[8] Y. Pourchet, Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, C.R. Acad. Sci., Paris, 288, série A (1979), 1055–1057.

[9] J.F. Ritt, On the zeros of exponential polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 29 (1927), 584–596.

[10] R. Rumely, Notes on Van der Poorten's proof of the Hadamard quotient theorem, A paraître au Séminaire de Théorie des Nombres de Paris.

[11] H. Selberg, Uber einige transzendente Gleichungen, Avh. Norske. Vid. Akad. Oslo, I, n° 10 (1932), 1–8.

[12] H. Selberg, Einige Darstellungsatze aus der Theorie der ganzer Funktionen endlicher Ordnung, J. Mat. Naturvid Klasse, 10, n° 1 (1934), 7–15.

[13] A. Shield, On quotients of exponential-polynomials, Comm. on pure and applied Math., 16 (1963), 27–31.

[14] M. TSUJI, On a power series which has only algebraic singularities on its convergence circle, Japanese Journal of Math., 3 (1926), 69–85.

[15] A.J. VAN DER POORTEN, Solution de la conjecture de Pisot sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, C.R. Acad. Sci., Paris, 306, série I (1988), 97–102.

Manuscrit reçu le 18 juillet 1988,
révisé le 26 janvier 1989.

Jean-Paul BÉZIVIN,
Université Paris VI
Mathématiques
Tour 45–46, 5e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05 (France).