

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC PAULIN

Points fixes des automorphismes de groupe hyperbolique

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 3 (1989), p. 651-662

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_651_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_651_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POINTS FIXES DES AUTOMORPHISMES DE GROUPE HYPERBOLIQUE

par Frédéric PAULIN

Notons Γ un groupe de type fini, muni d'une famille génératrice finie fixée. Nous supposons que la métrique des mots est δ -hyperbolique au sens de M. Gromov [Gr2], avec $\delta \geq 0$. Ceci signifie que dans un triangle géodésique du graphe de Cayley de Γ , tout point d'un côté est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de l'un des deux autres côtés. Remarquons que $\delta = 0$ correspond au cas des groupes libres. Mais il y a "beaucoup" d'autres groupes hyperboliques, par exemple les groupes à petites simplifications (voir [LyS]) et les groupes fondamentaux de variétés riemanniennes compactes à courbure strictement négative (voir [Gr2] §0.2 et [GhH]). Nous allons montrer, avec une approche géométrique, le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ un automorphisme. Alors le sous-groupe $\text{Fix}(f)$ des points fixes de f est de type fini.*

Ce théorème a été démontré dans le cas des groupes libres par S.M. Gersten [Ge] (voir aussi [GoT] et [S]). Nous allons généraliser la preuve qu'en donne D. Cooper [C] aux cas des groupes hyperboliques. Je remercie L. Guillou pour m'avoir raconté la preuve de D. Cooper et E. Ghys pour ses commentaires.

Mots-clés : Groupe de type fini – Métrique des mots – Groupe hyperbolique – Automorphismes de groupe.

Classification A.M.S. : 20E36 - 20F32.

Soit $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ la partie génératrice fixée, supposée stable par passage à l'inverse. Nous notons $\|\gamma\|$ la longueur minimale d'un mot en les générateurs représentant l'élément $\gamma \in \Gamma$, i.e.

$$\|\gamma\| = \min\{p \in \mathbb{N} / \gamma = g_{i_1} \dots g_{i_p} \text{ et } g_{i_p} \in S\}.$$

Construisons alors une distance sur Γ , dite *métrique des mots*, invariante par translation à gauche, en posant $d(\alpha, \beta) = \|\alpha^{-1}\beta\|$ pour $\alpha, \beta \in \Gamma$. Les boules, pour la métrique des mots, de rayon fini sont finies. Notons $C = C(f)$ le maximum des normes des images par f et f^{-1} des éléments de S . Alors nous avons

$$\forall \gamma \in \Gamma, \frac{1}{C}\|\gamma\| \leq \|f(\gamma)\| \leq C\|\gamma\|.$$

Ceci nous dit que l'automorphisme f est une $(C-)$ quasi-isométrie au sens de M. Gromov, i.e. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \frac{1}{C}d(\alpha, \beta) \leq d(f(\alpha), f(\beta)) \leq Cd(\alpha, \beta)$. Notons que si S' est une autre partie génératrice finie de Γ , stable par passage à l'inverse, alors l'identité de Γ est une quasi-isométrie entre les deux métriques des mots, la constante C étant le maximum des normes pour une partie génératrice des éléments de l'autre partie génératrice, et vice-versa.

Une *géodésique* entre deux points x et y de Γ est un plus court chemin entre x et y , i.e. une suite de points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de Γ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, $d(x_{i-1}, x_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ et $d(x, y) = n$. Entre deux points passe au moins une géodésique, mais celle-ci n'est pas forcément unique. L'une des définitions équivalentes d'un *groupe hyperbolique* est la suivante : pour tous points a, b, c de Γ , pour toutes géodésiques A, B, C entre b et c , c et a , a et b respectivement, alors tout point de A est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de $B \cup C$. Si l'on préfère travailler avec des espaces de longueur [Gr1], il suffit de plonger Γ dans son graphe de Cayley associé à S . Nous appellerons aussi géodésique une suite infinie de points $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tous $p > q$ entiers, la sous-suite finie $(x_i)_{q \leq i \leq p}$ soit une géodésique au sens précédent. Notons que les géodésiques infinies sont propres (i.e. pour tout compact K de Γ , il existe N tel que si $|n| > N$, alors $x_n \notin K$). En effet, Γ est discret, donc les compacts sont les parties finies de Γ .

Nous allons rappeler quelques faits élémentaires de [Gr2] sur les groupes hyperboliques (voir [GhH] pour une étude complète). Nous en donnons les démonstrations (par ailleurs assez faciles) en annexe car il faut beaucoup travailler pour les trouver entre les lignes de [Gr2]. On peut avoir en tête le modèle du disque de Poincaré $\mathbf{H}^2$ pour mieux visualiser.

A tout groupe hyperbolique Γ , M. Gromov associe un *espace à l'infini* $\partial\Gamma$ ([Gr2] §1). L'ensemble $\partial\Gamma$ est l'ensemble des classes d'équivalences de géodésiques $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, où nous identifions deux géodésiques $a_1 = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $a_2 = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ s'il existe une constante positive $D = D(a_1, a_2)$ telle que $d(x_i, y_i) \leq D$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La *distance de Hausdorff* entre deux parties P_1 et P_2 d'un espace métrique X est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que tout point de P_1 est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de P_2 , et tout point de P_2 est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de P_1 . S'il n'existe pas de tel ε , la distance de Hausdorff entre P_1 et P_2 est dite infinie.

LEMME 1. — Deux géodésiques $a_1 = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $a_2 = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont à distance de Hausdorff finie, et si et seulement si, pour n suffisamment grand, le point x_n de a_1 est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point de a_2 .

LEMME 2. — Par deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ passe au moins une géodésique (i.e. si $b \in \partial\Gamma$ et $z \in \Gamma$, alors il existe une géodésique $(y_s)_{s \in \mathbb{N}}$ appartenant à b , avec $y_0 = z$; et si $a, b \in \partial\Gamma$ avec a et b distincts, alors il existe une géodésique $(z_s)_{s \in \mathbb{Z}}$ telle que $(z_s)_{s \in \mathbb{N}}$ appartienne à a et $(z_{-s})_{s \in \mathbb{N}}$ appartienne à b).

LEMME 3. — Dans un triangle géodésique de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, tout point d'un côté est à distance inférieure ou égale à $\delta' = 20\delta$ d'un point de l'un des deux autres côtés.

Si $\lambda \geq 0$, une (λ) -quasi-géodésique est une suite $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ou $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tous entiers $p \leq q$ tels que x_p et x_q sont définis, $\sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda d(x_p, x_q)$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda$. L'image d'une géodésique par une (C) -quasi-isométrie est une (C^2) -quasi-géodésique entre les images de ces points.

LEMME 4. — Une quasi-géodésique est à distance de Hausdorff finie d'une géodésique. Il existe une constante $C' = C'(C, \delta)$ telle que, pour toute C -quasi-isométrie f de Γ et pour tous α, β dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$, si $\gamma \in \Gamma$ appartient à une géodésique entre α et β , alors $f(\gamma)$ est à distance inférieure ou égale à C' d'une géodésique entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

Remarque 5. — Le lemme précédent permet de montrer que si nous

avons une autre partie génératrice S' , et si C est le coefficient de la quasi-isométrie entre $(\Gamma, \|\cdot\|_{S'})$ et $(\Gamma, \|\cdot\|_S)$, alors la métrique des mots définie par S' est $2C(C'(C^2, \delta) + \delta)$ -hyperbolique.

La quasi-isométrie f s'étend à l'espace à l'infini $\partial\Gamma$ en définissant l'image d'une géodésique $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ comme étant la classe d'équivalence d'une géodésique à distance de Hausdorff finie de la quasi-géodésique image. Ceci ne dépend pas de cette géodésique, car deux géodésiques à distance de Hausdorff finie sont équivalentes, ni de la géodésique équivalente à $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ choisie, car une quasi-isométrie transforme deux parties à distance de Hausdorff finie en deux parties à distance de Hausdorff finie.

LEMME 6. — *Il existe une constante $C'' = C''(C, \delta)$ vérifiant la propriété suivante. Soient α, β deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ et $\gamma \in \Gamma$. Soit y (resp. y') un point d'une géodésique entre α et β (resp. $f(\alpha)$ et $f(\beta)$), minimisant la distance à γ (resp. $f(\gamma)$). Alors $d(f(y), y') \leq C''$.*

Démonstration. — Notons $[a, b]$ une géodésique quelconque entre $a, b \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Le choix n'a pas d'importance, à la valeur exacte des constantes près, puisque si deux géodésiques ont mêmes extrémités, un point de l'une est à distance inférieure ou égale à δ' d'un point de l'autre.

Le point y existe bien, car les géodésiques infinies sont propres. En particulier, puisque y réalise le minimum de la distance d'un point donné de $[\gamma, y]$ à la géodésique $[\alpha, \beta]$, un point de $[\gamma, y]$ situé à distance strictement supérieure à δ' du point y est, par le lemme 3 appliqué au triangle $\{\gamma, y, \alpha\}$ (resp. $\{\gamma, y, \beta\}$), à distance inférieure ou égale à δ' d'un point de $[\gamma, \alpha]$ (resp. $[\gamma, \beta]$). Donc y est à distance inférieure ou égale à $2\delta' + 1$ d'un point de $[\gamma, \alpha]$ (resp. $[\gamma, \beta]$).

D'après le lemme 4, le point $f(y)$ est à distance inférieure ou égale à C' d'un point $z_{\alpha\beta}$ de $[f(\alpha), f(\beta)]$, et à $(2\delta' + 1)C + C'$ d'un point z_α de $[f(\gamma), f(\alpha)]$ (resp. z_β de $[f(\gamma), f(\beta)]$). Supposons par exemple $z_{\alpha\beta} \in [f(\alpha), y']$. Puisque $d(y', f(y)) \leq d(y', z_{\alpha\beta}) + d(z_{\alpha\beta}, f(y))$, il suffit de majorer la distance de y' à $z_{\alpha\beta}$. En appliquant le lemme 3 au triangle $\{f(\gamma), y', f(\beta)\}$, le point z_β est à distance inférieure ou égale à δ' d'un point t de $[y', f(\beta)]$ ou d'un point t' de $[y', f(\gamma)]$.

Supposons que nous soyons dans le premier cas. Puisque $y' \in [z_{\alpha\beta}, t]$, nous avons $d(y', z_{\alpha\beta}) \leq d(t, z_{\alpha\beta}) \leq d(t, z_\beta) + d(z_\beta, f(y)) + d(f(y), z_{\alpha\beta}) \leq \delta' + ((2\delta' + 1)C + C') + C'$, ce qui montre le résultat.

Dans le second cas, puisque y' minimise la distance d'un point de la

géodésique $[f(\gamma), y']$ à la géodésique $[f(\alpha), f(\beta)]$, nous avons $d(y', t') \leq d(z_{\alpha\beta}, t')$. Donc $d(y', z_{\alpha\beta}) \leq d(y', t') + d(t', z_{\alpha\beta}) \leq 2d(t', z_{\alpha\beta}) \leq 2(d(t', z_\beta) + d(z_\beta, f(y)) + d(f(y), z_{\alpha\beta})) \leq 2(\delta' + ((2\delta' + 1)C + C') + C')$, ce qui montre le résultat. $\square$

M. Gromov ([Gr2]§1) munit l'ensemble $\Gamma \cup \partial\Gamma$ d'une topologie, induisant la topologie originelle sur Γ , et Γ est un ouvert dense dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Schématiquement, un point x de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est proche d'un point y de $\partial\Gamma$ si une (et donc toute) géodésique entre x et y est loin d'un point base donné x_0 . En particulier, tout point d'une géodésique entre x et y est aussi proche de y . Notons que si nous avons deux suites de points $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $d(y_i, z_i)$ est bornée, et si $\{y_i\}$ converge vers $y \in \partial\Gamma$, alors $\{z_i\}$ converge aussi vers y . La topologie ne dépend pas du point base choisi.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons V_n l'ensemble des couples (x, y) dans $(\Gamma \cup \partial\Gamma)^2$ tels que ou bien $x = y$, ou bien $x \neq y$ et tout point de toute géodésique entre x et y est à distance supérieure ou égale à n du point base x_0 . Alors la famille $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $(\Gamma \cup \partial\Gamma)^2$ forme un système fondamental d'entourages ([B1] chap. 2, §1). Toutes les vérifications sont formelles, sauf celle qui dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que si $(x, y) \in V_m$ et $(y, z) \in V_m$, alors $(x, y) \in V_n$. Mais ceci découle du lemme 3, avec $m \geq n + \delta'$.

Puisque le système fondamental d'entourages est dénombrable, la topologie définie par cette structure uniforme est métrisable ([B2], chap. 9, §4, prop. 2). La topologie induite sur Γ est bien la topologie discrète.

LEMME 7. — *L'espace $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est compact.*

La quasi-isométrie f s'étend en un homéomorphisme de $\Gamma \cup \partial\Gamma$. En effet, l'extension au bord de f^{-1} est clairement inverse de l'extension au bord de f . De plus, l'image par f (et f^{-1}) d'une géodésique entre deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, située à une distance au moins R de x_0 , est une quasi-géodésique, proche d'une géodésique située à distance au moins $\frac{R}{C} - C''$ de $f(x_0)$, donc au moins $\frac{R}{C} - C'' - d(x_0, f(x_0))$ de x_0 , d'après le lemme 6 appliqué avec $\gamma = x_0$.

Ce même résultat nous dit que les espaces à l'infini pour deux systèmes de générateurs sont homéomorphes.

Démonstration du théorème. — Supposons que $\text{Fix}(f)$ ne soit pas de type fini. Alors il existe une partie génératrice infinie $\{x_i/i \in \mathbb{N}\}$ de telle

sorte que x_{i+1} n'appartienne pas au groupe G_i engendré par les x_j avec $0 \leq j \leq i$.

Prenons z_i de norme minimale dans $G_{i-1}x_i$. En particulier $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ engendre $\text{Fix}(f)$. Par compacité de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, il existe une sous-suite z_{n_i} convergente vers un élément $z_\infty \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Le point z_∞ est fixé par f , par continuité. Il est en fait dans $\partial\Gamma$, car les boules de rayon fini sont finies, donc les éléments z_{n_i} sont de normes non bornées.

Notons O l'élément neutre du groupe Γ , pris comme point base. Soit y_{n_i} un point d'une géodésique $[O, z_\infty]$ entre O et z_∞ minimisant la distance entre z_{n_i} et cette géodésique. Par définition de la convergence des z_{n_i} vers z_∞ , pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $k \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand, alors tout point d'une géodésique $[z_\infty, z_{n_k}]$ est à distance strictement supérieure à $d(O, y_{n_j}) + \delta'$ du point O . En appliquant la caractérisation des groupes hyperboliques au triangle $\{O, z_\infty, z_{n_k}\}$, le point y_{n_j} est donc à distance inférieure ou égale à δ' d'un point d'une géodésique $[O, z_{n_k}]$. D'où, par inégalité triangulaire,

$$|d(z_{n_k}, O) - (d(z_{n_k}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, O))| \leq 2\delta'.$$

Il existe donc $D' (= 2\delta' + 1) > 0$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists N(j) \in \mathbb{N}, \forall k \geq N(j), |\|y_{n_j}^{-1} z_{n_k}\| - (\|z_{n_k}\| - \|y_{n_j}\|)| < D'.$$

D'après le lemme 6 appliqué au triangle $\{\alpha = O, \beta = z_\infty, \gamma = z_{n_p}\}$ de points fixes par f , pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons $d(f(y_{n_p}), y_{n_p}) \leq C''$. Puisque les boules de rayon fini sont finies, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que, pour une infinité de j dans $\mathbb{N}$, nous avons

$$f(y_{n_i})^{-1} y_{n_j} = f(y_{n_j})^{-1} y_{n_j}.$$

D'après les rappels sur la topologie de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, les points y_{n_i} tendent aussi vers z_∞ . En particulier, $d(y_{n_j}, O)$ tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$. Il existe donc des indices $i, j \in \mathbb{N}$, que nous fixons, tels que $\|y_{n_j}\| > \|y_{n_i}\| + D'$ et $f(y_{n_i})^{-1} y_{n_i} = f(y_{n_j})^{-1} y_{n_j}$.

Posons $w = y_{n_i} y_{n_j}^{-1}$. Alors $f(w) = w$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $w \in G_{n_k-1}$ et avec de plus $k \geq N(j)$. En particulier, d'après la construction des z_i , nous avons

$$\|w z_{n_k}\| \geq \|z_{n_k}\|.$$

Or $\|w z_{n_k}\| \leq \|y_{n_i}\| + \|y_{n_j}^{-1} z_{n_k}\| \leq \|y_{n_i}\| - \|y_{n_j}\| + D' + \|z_{n_k}\| < \|z_{n_k}\|$. Ceci est une contradiction. $\square$

Remarquons que dans un groupe hyperbolique, l'intersection de sous-groupes de type fini n'est pas forcément de type fini. Soit M une variété

de dimension 3 fibrée sur le cercle S^1 , de fibre une surface F compacte, orientée, connexe, sans bord, de genre supérieur ou égal à 2 et d'holonomie pseudo-anosov. D'après W. Thurston [T], la variété M peut être munie d'une métrique à courbure constante -1, et donc $\Pi_1(M)$ est hyperbolique [Gr2]. De plus, W. Jaco [J] a montré que si $T \in \Pi_1(M)$ est envoyé sur le générateur de $\Pi_1(S^1)$ par la fibration, et A est un lacet non homologue à zéro sur F , si H est le sous-groupe de $\Pi_1(M)$ engendré par T et A , alors $H \cap \Pi_1(F)$ n'est pas de type fini. D'autres contre-exemples ont été construits par R. Strebel. Nous avons néanmoins le résultat suivant, la preuve étant similaire à la preuve précédente :

THÉORÈME. — Soient $f_1, \dots, f_n$ des automorphismes de Γ , alors $\bigcap_{i=1}^n \text{Fix}(f_i)$ est de type fini. □

Par des méthodes analogues, nous allons aussi montrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soit f un automorphisme de Γ , n'ayant qu'un nombre fini de points fixes dans Γ . Alors f n'a qu'un nombre fini de points fixes dans $\partial\Gamma$.

Démonstration. — Supposons par l'absurde que f possède un nombre infini de points fixes dans $\partial\Gamma$.

D'après la compacité de $\partial\Gamma$, il existe un point $x_\infty \in \partial\Gamma$ sur lequel s'accumulent des points fixes $x_i \in \partial\Gamma$. L'ensemble des points fixes étant fermé, le point à l'infini x_∞ est fixé par f . D'après le lemme 2, il existe au moins une géodésique entre x_∞ et x_i . Notons y_i l'un des points d'une géodésique entre x_∞ et x_i le plus près de l'élément neutre O . Remarquons que y_i tend vers x_∞ quand i tend vers $+\infty$, et en particulier n'admet pas de sous-suite constante.

D'après le lemme 6, le point y_i est à distance uniformément bornée de son image $f(y_i)$. Puisque les boules de rayon fini sont finies, il existe un entier i tel que, pour une infinité d'entiers i_n avec $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(y_i)^{-1}y_i = f(y_{i_n})^{-1}y_{i_n}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments $y_{i_n}y_i^{-1}$ de Γ , qui ne sont pas en nombre fini, sont fixés par f . Ceci contredit notre hypothèse. □

J. Alonso nous a fait remarquer que le théorème suivant, démontré par J. Stallings [S] dans le cas des groupes libres, a une preuve similaire au

théorème principal. Notons qu'une quasi-isométrie est injective, mais pas nécessairement surjective.

THÉORÈME. — Soient Γ, Γ' deux groupes hyperboliques et $f_1, f_2 : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ deux homomorphismes quasi-isométriques. Alors le sous-groupe $\text{Equa}(f_1, f_2) = \{x \in \Gamma / f_1(x) = f_2(x)\}$ est de type fini. De plus, si $\text{Equa}(f_1, f_2)$ est fini, alors f_1 et f_2 ne prennent la même valeur que sur un nombre fini de points de l'espace à l'infini $\partial\Gamma$. $\square$

Annexe.

Démonstration du lemme 1. — Supposons tout d'abord qu'il existe une constante D telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_{i_n}) < D$. Soit n tel que $d(x_n, x_0) > D + 2\delta$. Soit $N \geq n$ tel que $d(x_n, x_N) > D + 4\delta$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_0, x_N, y_{i_0}\}$, nous en déduisons que x_n est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point z d'une géodésique entre x_N et y_{i_0} . En effet, si x_n était à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point z d'une géodésique entre x_0 et y_{i_0} , alors x_n serait à distance inférieure ou égale à $D + 2\delta$ de x_0 . Maintenant, en appliquant la définition de groupe hyperbolique au triangle $\{y_{i_N}, x_N, y_{i_0}\}$, nous en déduisons que z est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique a_2 entre y_{i_N} et y_{i_0} .

Réciproquement, supposons que pour $n \geq N$, tout point x_n de a_1 est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{i_n} de a_2 . Puisque $d(x_0, x_n)$ tend vers $+\infty$, il existe N' dans $\mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'$, alors $i_n \geq i_N$. Si $n \geq \sup\{N, N'\}$, nous avons $d(x_n, y_n) \leq d(y_{i_n}, y_n) + 4\delta = |i_n - n| + 4\delta = |i_n - i_N| - (n - i_N) + 4\delta$, donc $d(x_n, y_n) \leq |d(y_{i_n}, y_{i_N}) - (n - i_N)| + 4\delta \leq |d(x_n, x_N) - (n - i_N)| + 12\delta = |(n - N) - (n - i_N)| + 12\delta = |i_N - N| + 12\delta$. Posons $D = \sup\{|i_N - N| + 12\delta, \sup\{d(x_i, y_i) / i = 1, \dots, \sup\{N, N'\}\}\}$. Nous avons donc $d(x_n, y_n) \leq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Démonstration du lemme 2. — Tout d'abord, si $z \in \Gamma$ et $B = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une géodésique, alors fixons-nous une géodésique A_i entre z et x_i pour tout i dans $\mathbb{N}$; (dans la suite, quand nous disons "la" géodésique entre deux points, c'est que nous considérons la géodésique entre ces deux points précédemment introduite). Pour $s \in \mathbb{N}$, notons $a_i(s)$ le point de A_i à distance s de z , qui est défini pour i assez grand. Les boules de rayon fini étant finies, quitte à extraire, nous pouvons supposer que la suite $(a_i(s))$ est constante à partir d'un certain rang, et vaut y_s . Par extraction diagonale,

nous pouvons supposer que ceci est vrai pour tout s dans $\mathbb{N}$. Mais alors la suite $(y_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est une géodésique, qui est de plus équivalente à $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, avec $y_0 = z$. En effet, en appliquant la définition de groupe hyperbolique au triangle $\{z, x_0, x_i\}$ pour i grand, le point y_s , pour s suffisamment grand, est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique B , et nous appliquons alors le lemme 1.

D'autre part, soient $a, b \in \partial\Gamma$ et $A = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $B = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des géodésiques appartenant à a et b respectivement, avec $x_0 = y_0$. Fixons-nous une géodésique $(w_i)_{0 \leq i \leq p}$ entre $w_0 = x_k$ et $w_p = y_k$. Posons $r = \sup\{i \in [0, p] / d(w_i, A) \leq 2\delta\}$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_0, x_k, y_k\}$, le point $m_k = w_r$ sur $[x_k, y_k]$ est à distance inférieure ou égale à $2\delta + 1$ d'un point u_k de A et d'un point v_k de B . Montrons que, quitte à extraire, la suite m_k est constante, et vaut z_0 . Pour cela, il suffit de montrer que les points m_k restent à distance bornée de x_0 . Sinon, il existe une sous-suite m_{k_i} telle que $d(m_{k_i}, x_0)$ tend vers $+\infty$. Mais alors, $d(u_{k_i}, x_0)$ tend vers $+\infty$ et $d(u_{k_i}, v_{k_i}) \leq 2(2\delta + 1)$. Montrons que ceci implique que tout point de la géodésique A (resp. B) est à distance inférieure ou égale à $2(6\delta + 2)$ d'un point de la géodésique B (resp. A). Ceci contredira, par le lemme 1, le fait que $a \neq b$. En effet, tout point de A est entre u_{k_i} et $u_{k_{i+1}}$ pour un certain i ; en appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{u_{k_i}, u_{k_{i+1}}, v_{k_i}\}$, puisque $d(u_{k_i}, v_{k_i}) \leq 2(2\delta + 1)$, tout point entre u_{k_i} et $u_{k_{i+1}}$ est à distance inférieure ou égale à $2(2\delta + 1) + 2\delta$ d'un point d'une géodésique entre $u_{k_{i+1}}$ et v_{k_i} ; de même tout point de cette géodésique est à distance inférieure ou égale à $6\delta + 2$ d'un point entre $v_{k_{i+1}}$ et v_{k_i} .

Maintenant, comme dans l'étude précédente, la géodésique entre $m_k = z_0$ et x_k (resp. y_k) contenue dans la géodésique entre x_k et y_k converge quitte à extraire vers une géodésique $(z_s)_{s \in \mathbb{N}}$ (resp. $(z_{-s})_{s \in \mathbb{N}}$) appartenant à a (resp. b). La suite $(z_s)_{s \in \mathbb{Z}}$ est bien une géodésique, si ces deux extractions ont été simultanées. $\square$

Démonstration du lemme 3. — Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où les trois points sont à l'infini, la constante 20 étant meilleure dans les autres cas. Soient $a, b, c \in \partial\Gamma$ et $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des géodésiques entre c et b , a et c , a et b respectivement. D'après le lemme 1, pour N entier positif suffisamment grand, x_N est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point z_{i_N} de la géodésique $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, z_N est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{i_N} de la géodésique $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et z_{-N} est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{j_N} de la géodésique

$(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Nous pouvons supposer $i_N \geq 0$ et $j_N \leq 0$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_{-N}, x_N, z_{i_N}\}$, tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 6δ d'un point d'une géodésique entre x_{-N} et z_{i_N} . Donc tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 12δ d'un point d'une géodésique entre y_{i_N} et z_{i_N} . De même, tout point d'une géodésique entre z_{i_N} et z_{-N} est à distance inférieure ou égale à 6δ d'un point d'une géodésique entre z_{i_N} et y_{j_N} . En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{y_{i_N}, y_{j_N}, z_{i_N}\}$, tout point de la géodésique entre y_{i_N} et z_{i_N} est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique entre y_{j_N} et z_{i_N} ou d'un point de la géodésique entre y_{j_N} et y_{i_N} . En récapitulant, tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 20δ d'un point de la géodésique $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ou de $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. $\square$

Démonstration du lemme 4. — Toute quasi-géodésique finie entre deux points est à distance de Hausdorff bornée par une constante ne dépendant que de λ et de δ d'une géodésique entre ces deux points ([GhH] et [Gr2] Proposition 7.2.A). Pour passer aux quasi-géodésiques infinies, par exemple $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, il suffit, avec des méthodes déjà utilisées plus haut, de faire converger par extraction les géodésiques entre x_{-N} et x_N , qui restent à distance uniformément bornée de la quasi-géodésique, en commençant par faire converger un point. $\square$

Démonstration de la remarque 5. — En effet, soient a, b, c trois points de Γ , et A', B', E' trois géodésiques, pour la métrique des mots définie par S' , entre b et c , a et c , a et b . Soit z un point de A . Alors A', B', E' sont des C^2 -quasi-géodésiques pour S , à distance de Hausdorff inférieure ou égale à C' de géodésiques A, B, E pour S , d'après le lemme 4. Donc z est à distance (pour S) inférieure ou égale à C' d'un point de A , qui est à distance (pour S) inférieure ou égale à 2δ d'un point de B ou E , qui est à distance (pour S) inférieure ou égale à C' d'un point de B' ou E' respectivement. Donc z est à distance (pour S') inférieure ou égale à $2C(C' + \delta)$ d'un point de B' ou E' . $\square$

Démonstration du lemme 7. — Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Notons ω_n une géodésique entre y_n et le point base x_0 , et $\omega_n(s)$ le point de cette géodésique à distance s de x_0 , avec $s \in \mathbb{N}$. Nous pouvons supposer, quitte à extraire, que la distance $d(y_n, x_0)$ tend en croissant vers $+\infty$. Car sinon, la suite reste dans une boule de rayon finie, qui est finie, et donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente. La suite $(\omega_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$

est alors définie pour n assez grand. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, la suite $(\omega_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans la boule de centre x_0 et de rayon s possède une sous-suite convergente. Par extraction diagonale, les points $\omega_{n_k}(s)$ vont converger (i.e. être constants à partir d'un certain rang) vers des points $\omega_\infty(s)$ qui appartiennent à une même géodésique par un argument déjà vu. Le point y_∞ de $\partial\Gamma$ défini par cette géodésique infinie est limite de $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. En effet, pour k suffisamment grand, les géodésiques entre y_∞ et x_0 , et y_{n_k} et x_0 coïncident le long de la géodésique $[\omega_{n_k}(s), x_0]$ contenue dans ω_{n_k} . En appliquant le lemme 3 au triangle $\{y_\infty, \omega_{n_k}(s), y_{n_k}\}$, et puisque $\omega_{n_k}(s)$ appartient aux géodésiques entre y_∞ et x_0 , et y_{n_k} et x_0 , nous voyons qu'une géodésique entre y_∞ et y_{n_k} est à distance au moins $s - \delta'$ de x_0 . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.
- [B2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 5 à 10, Hermann, Paris, 1971.
- [C] D. COOPER, Automorphisms of free group have finitely generated fixed point set, J. of Alg., 111, n°2 (1987), 453-456.
- [Ge] S.M. GERSTEN, Fixed points of automorphisms of free groups, Adv. in Math., 64, n°1 (1987), 51-85.
- [GhH] E. GHYS et P. de LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, à paraître, Profess in Math., Birkhäuser.
- [GoT] R.Z. GOLDSTEIN and E.C. TURNER, Automorphisms of free groups and their fixed points, Inv. Math., 78 (1984), 1-12.
- [Gr1] M. GROMOV, Hyperbolic manifolds, groups and actions, Riemann surfaces and related topics, Proc. of the 1978th Stony Brook Conference, Ann. of Math. Studies, 97 (1980), 183-215.
- [Gr2] M. GROMOV, Hyperbolic groups, In : Essays in group theory, Ed. S.M. Gersten, M.S.R.I. Springer-Verlag, 8 (1987), 75-263.
- [J] W. JACO, Lectures on three-manifold topology, C.B.M.S. Reg. Conf. Series in Math. A.M.S., 43 (1980).
- [LyS] R.C. LYNDON and P.E. SCHUPP, Combinatorial group theory, a Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 89 (1977).

- [S] J.R. STALLINGS, Graphical theory of automorphisms of free groups, In : Combinatorial group theory and topology, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, 111 (1987).
- [T] W. THURSTON, Hyperbolic structures on 3-manifolds II : surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, à paraître dans *Ann. of Math.*.

Manuscrit reçu le 6 septembre 1988,
révisé le 14 novembre 1988.

Frédéric PAULIN,
C.N.R.S. – U.R.A.D.O. 746
Laboratoire de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).