

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

K. HULEK

JOSEPH LE POTIER

**Sur l'espace de modules des faisceaux semi stables  
de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, n° 2 (1989), p. 251-292

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1989\\_\\_39\\_2\\_251\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_2_251_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'ESPACE DE MODULES  
DES FAISCEAUX SEMISTABLES DE RANG 2,  
DE CLASSES DE CHERN (0,3) SUR  $\mathbb{P}_2$ ,**

par **K. HULEK** et **J. LE POTIER**

---

**PLAN**

0. Introduction.
1. L'hypersurface  $\Sigma \subset M$ .
2. Identification de  $M$  avec  $\widehat{\text{Gr}}$ .
3. Le plongement  $M \rightarrow \text{Gr} \times \mathbb{P}_9$ .
4. Cohomologie de  $M$ , et classes de Chern du faisceau universel.
5. Les surfaces de  $M$ .

**0. Introduction.**

Soit  $M = M(c_1, c_2)$  l'espace de modules des faisceaux semistables de rang 2, de classes de Chern  $c_1$  et  $c_2$  sur  $\mathbb{P}_2$ . C'est une variété projective et irréductible de dimension  $4c_2 - c_1^2 - 3$ ; dans  $M$ , les points qui proviennent de faisceaux localement libres forment un ouvert  $M^0$  dont le complémentaire  $\partial M$  est une hypersurface irréductible de codimension 1. On sait que dans l'ouvert  $M^0$  il existe des courbes complètes dès que  $4c_2 - c_1^2 > 8$  si  $c_1$  est pair, et  $4c_2 - c_1^2 \geq 7$  si  $c_1$  est impair [7]. L'existence de surfaces complètes plongées dans  $M^0$  est également connue dans certains cas particuliers; c'est le cas par exemple de  $M(0,15)$  ou de  $M(-1,4)$  [8]. On s'intéresse ici à l'espace de modules  $M = M(0,3)$ , pour lequel la question de l'existence de surfaces complètes ne rencontrant pas la frontière  $\partial M$  était restée ouverte.

*Mots-clés* : Espaces de modules - Faisceaux - Fibrés vectoriels - Cohomologie - Classe fondamentale.

*Classification AMS* : 14 D 20 - 14 F 05.

THÉORÈME 0.1. — *Toute surface complète de  $M = M(0,3)$  rencontre la frontière  $\partial M$ .*

Autrement dit, il n'existe pas de famille complète à 2 paramètres de fibrés vectoriels de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$ . La réponse à cette question a été rendue possible grâce à la description de  $M(0,3)$  que nous avons annoncée dans [11], et dont nous donnons ici une version détaillée au chapitre 2. Pour ceci, nous introduisons la grassmannienne  $\text{Gr}$  des réseaux de coniques dans  $\mathbb{P}_2$ . Le plan projectif dual  $\mathbb{P}_2^*$  se plonge dans  $\text{Gr}$  de la façon suivante : à la droite  $\ell$  d'équation  $u = 0$ , on associe le réseau des coniques d'équation  $uv = 0$ , avec  $v \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ . Soit  $\widehat{\text{Gr}}$  l'éclaté de  $\mathbb{P}_2^*$  dans  $\text{Gr}$  ; c'est une variété projective lisse de dimension 9.

THÉORÈME 0.2. — *Il existe un isomorphisme*

$$\hat{\phi} : M = M(0,3) \rightarrow \widehat{\text{Gr}}.$$

Cet isomorphisme, établi au chapitre 2, permet de donner une description détaillée de l'anneau de Chow de  $M$ , ou ce qui revient au même, de l'algèbre de cohomologie entière  $H(M)$  de  $M$ , en termes de générateurs et relations, et de préciser la matrice d'intersection (cf. chapitre 4). D'autre part, il existe, sur  $M \times \mathbb{P}_2$ , des faisceaux universels, définis modulo  $\text{Pic } M$ . Si on normalise convenablement un tel faisceau  $\mathcal{F}$  peut être défini à isomorphisme près, et décrit en termes de la géométrie sous-jacente à la variété  $\widehat{\text{Gr}}$ . Il est alors possible de calculer au moins les trois premières classes de Chern du faisceau  $\mathcal{F}$ . La troisième classe de Chern  $c_3(\mathcal{F})$  est particulièrement intéressante, puisqu'elle s'interprète comme la classe fondamentale du lieu singulier de  $\mathcal{F}$ .

Le plan de la démonstration du théorème 0.1 est alors le suivant : supposons qu'il existe une surface complète  $Z \subset M$  qui ne rencontre pas la frontière  $\partial M$ , de classe fondamentale  $|Z| \in H^{14}(M) \simeq \mathbb{Z}^4$ .

(1) L'équation, à valeurs dans  $H^{20}(M \times \mathbb{P}_2) \cong \mathbb{Z}^3$ ,

$$c_3(\mathcal{F}) \cdot \text{pr}_2^*(|Z|) = 0$$

fournit trois relations entre les composantes de  $|Z|$ , ce qui impose de sérieuses restrictions à la classe fondamentale  $|Z|$  (cf. corollaire (4.10)).

(2) Le fait que  $Z$  soit effective conduit à certaines inégalités entre les composantes de  $|Z|$ . On peut en obtenir d'autres en observant que  $Z$  n'est pas contenue dans le diviseur exceptionnel  $\Sigma$  (cf. lemme (5.1)).

Ceci reste malheureusement insuffisant pour aboutir à une contradiction. Il est indispensable d'introduire le morphisme canonique

$$f: M \rightarrow \mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)))$$

qui associe à un point  $s \in M$  la cubique des droites de saut du faisceau  $\mathcal{F}_s$  correspondant au point  $s$ . D'après Barth [2] le morphisme  $f|_{M_0}$  est à fibres finies; de là et de l'étude de  $f|_{\partial M}$  il n'est pas difficile de vérifier que  $Z' = f(Z)$  est une surface de  $\mathbb{P}_9$ , et que toute composante  $Z''$  de  $f^{-1}(Z')$  est de dimension 2. L'étude de  $f|_{\Sigma}$  permet aussi de vérifier que  $Z'' \not\subset \Sigma$ , ce qui permet d'écrire pour  $|Z''|$  les conditions (2) ci-dessus, ce qui conduit à une contradiction (cf. chapitre 5).

Comme sous-produit de notre démonstration, signalons le résultat suivant, obtenu au chapitre 3. Soit  $\phi: M \rightarrow \text{Gr}$  le morphisme composé  $M \xrightarrow{\hat{\phi}} \widehat{\text{Gr}} \rightarrow \text{Gr}$ .

**THÉORÈME 0.3.** — *Le morphisme  $(\phi, f): M \rightarrow \text{Gr} \times \mathbb{P}_9$  est un plongement.*

Ce résultat éclaire et précise de façon significative l'énoncé de Strømme [14] donnant la description du cône ample de  $\text{Pic } M$ : c'est exactement l'image du cône ample de  $\text{Pic}(\text{Gr} \times \mathbb{P}_9)$  par le morphisme image réciproque

$$(\phi, f)^*: \text{Pic}(\text{Gr} \times \mathbb{P}_9) \rightarrow \text{Pic } M.$$

Nous remercions J. Harris qui, par une méthode entièrement différente, nous a aidés à trouver les relations entre les composantes de la classe fondamentale  $|Z|$  (corollaire (4.10)).

*Notations.*

- $\text{pr}_i, \text{pr}_{i,j}$  : Projection canonique d'une variété produit sur le  $i$ -ème facteur (resp. sur le produit du  $i$ -ème et du  $j$ -ème facteur).
- $\boxtimes$  : Produit tensoriel externe.
- $Q$  ou  $Q_{\mathbb{P}_2}$  : Fibré universel quotient de rang 2 sur  $\mathbb{P}_2$ .
- $V$  : Espace vectoriel des sections de  $Q$ ; le dual  $V^*$  s'identifie à l'espace vectoriel des sections de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ .
- $M = M(0,3)$  : Variété de modules des faisceaux semistables de rang 2 de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$ .

- $\mathcal{F}$  : Faisceau universel sur  $M \times \mathbb{P}_2$ , normalisé de sorte que le faisceau  $R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F})$  soit trivial.
- $\mathcal{F}_s$  : Faisceau induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}_2$  par le plongement  $\mathbb{P}_2 \rightarrow M \times \mathbb{P}_2$  défini par le point  $s \in M$ .
- $M^0$  : Ouvert de  $M$  des points  $s$  tels que  $\mathcal{F}_s$  soit localement libre.
- $\partial M = M \setminus M^0$  : Frontière de  $M$ .
- $\Sigma \subset M$  : Diviseur exceptionnel de  $M$ ; il correspond aux points  $s \in M$  tels que  $h^1(\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{Q}) \neq 0$ .
- $\mathbb{P}_2^*$  : Plan projectif dual.
- $\mathcal{F}(i) = \mathcal{F} \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(i))$ .
- $A = \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(1))$ .
- $B = R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(-1))$ ;  $B' = R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(-2))$ .
- $\text{Gr} = \text{grass}(3, \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)))$ : Grassmannienne des réseaux de coniques de  $\mathbb{P}_2$ .
- $S$  : Sous-fibré universel de rang 3 de  $\text{Gr} \times \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2))$ .
- $\mathbb{P}_2^* \xrightarrow{i} \text{Gr}$  : Plongement du plan projectif dual dans  $\text{Gr}$ .
- $N = N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}}$  : Fibré normal de  $\mathbb{P}_2^*$  dans  $\text{Gr}$ .
- $D \subset \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  : Variété d'incidence des couples (droite, point).
- $\sigma$  : Section canonique de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2}(1,1)$ ; elle a  $D$  pour schéma des zéros.
- $c_i$  : Classes de Chern du fibré universel quotient sur  $\text{Gr}$ .
- $c_{ijk} (i \geq j \geq k)$  : Cycles de Schubert sur  $\text{Gr}$ .
- $e = |\Sigma|$  : Classe fondamentale de  $\Sigma$ .
- $\phi: M \rightarrow \text{Gr}$  : Morphisme canonique, défini au chapitre 2.
- $f: M \rightarrow \mathbb{P}_9$  : Morphisme qui associe au point  $s \in M$  la cubique des droites de saut de  $\mathcal{F}_s$ .

### *Stabilité et semistabilité.*

La notion de semistabilité utilisée ici est celle de Gieseker et Maruyama [12]; ainsi, si  $F$  est un faisceau semistable de rang 2 et de classes de Chern  $(0,3)$  sur  $\mathbb{P}_2$ , il est en fait stable et n'a pas de section non nulle; plus précisément, si  $\mathcal{I}$  est un idéal de colongueur finie se plongeant dans  $F$ ,  $c_2(\mathcal{I}) \geq 2$ . Dans le cas particulier où  $F$  est localement libre, si  $F$  est stable, il est en fait  $\mu$ -stable, ce qui nous autorisera à

utiliser les résultats de Barth [2]. Remarquons encore que l'ensemble sous-jacent à  $M$  coïncide avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux stables de classes de Chern (0,3).

*Suite spectrale de Beilinson [9].*

Soient  $T$  une variété algébrique,  $F$  un faisceau de modules sur  $T \times \mathbb{P}_2$ . Considérons les projections  $\text{pr}_{12}$  et  $\text{pr}_{13} : T \times \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \rightrightarrows T \times \mathbb{P}_2$ . La résolution de Koszul de la diagonale de  $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ , remontée à  $T \times \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$  par la projection  $\text{pr}_{23}$  et tensorisée par  $\text{pr}_{13}^*(F)$ , fournit par image directe par  $\text{pr}_{12}$  une suite spectrale d'aboutissement  $F$ , dont le terme  $E_1^{p,q}$  est donné par

$$E_1^{p,q} = R^q \text{pr}_{1*}(F(p)) \otimes \Lambda^{-p} Q^*.$$

Cette suite spectrale est appelée suite spectrale de Beilinson de  $F$ .

### 1. L'hypersurface $\Sigma \subset M$ .

#### 1.1. La suite $h^1(F(i))$ .

Le lemme suivant étend aux faisceaux semi-stables un résultat démontré dans [10] pour les fibrés vectoriels.

LEMME 1.1. — Soit  $F$  un faisceau  $\mu$ -semistable de rang 2 sur  $\mathbb{P}_2$ , de pente  $\mu \geq 0$ . Alors si  $h^1(F) \neq 0$ ,  $h^1(F(1)) < h^1(F)$ .

*Démonstration.* — Le théorème de Grauert-Mulich montre qu'il existe une droite  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  ne passant pas par les points singuliers de  $F$  et telle que  $F|_\ell = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ , avec  $0 \leq a - b \leq 1$ . La suite exacte de cohomologie associée à la droite  $\ell$  montre qu'alors  $h^1(F(1)) \leq h^1(F)$ , et qu'en cas d'égalité le morphisme de restriction  $H^0(F(1)) \rightarrow H^0(F(1)|_\ell)$  est surjectif. Soit  $\ell'$  une autre droite de  $\mathbb{P}_2$ ; on peut écrire  $F|_{\ell'} = \mathcal{O}(a') \oplus \mathcal{O}(b') \oplus T$  avec  $a' \geq b'$  et  $T$  faisceau de torsion sur  $\ell'$ . Soit  $x$  le point d'intersection de  $\ell$  et  $\ell'$ . Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(F|_\ell) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 H^0(F) & & & & F_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbb{C} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & H^0(F|_{\ell'}) & & 
 \end{array}$$

la flèche composée est surjective; il en est de même de la flèche d'évaluation  $H^0(F|_{\ell'}) \rightarrow F_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbb{C}$ . Ceci impose  $b' \geq 0$ , et par suite  $h^1(F|_{\ell'}) = 0$ . Le morphisme canonique sur  $\mathbb{P}_2^*$ :

$$H^1(F) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \rightarrow H^1(F(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$$

serait alors un isomorphisme, ce qui est absurde, sauf si les deux membres sont nuls.  $\square$

Pour les faisceaux semistables de classe de Chern  $c_1 = 0$ , on a  $h^0(F(i)) = 0$  pour  $i \leq 0$ , et  $h^2(F(i)) = 0$  pour  $i \geq -2$ ; la formule de Riemann-Roch permet le calcul de  $h^1(F(i))$  pour  $-2 \leq i \leq 0$ . Si  $F$  est de rang 2 et de classes de Chern (0,3), le lemme ci-dessus permet le calcul de  $h^1(F(i))$  pour  $i > 0$ . Ceci conduit au tableau suivant, donnant les valeurs de  $h^q(F(i))$ :

|     |     |     |   |   |
|-----|-----|-----|---|---|
| 2   | 0   | 0   | 0 | 0 |
| 1   | 3   | 3   | 1 | 0 |
| 0   | 0   | 0   | 0 | 3 |
| $q$ |     |     |   |   |
| $i$ | - 2 | - 1 | 0 | 1 |

## 1.2. Description des faisceaux stables de rang 2 de classes de Chern (0,3).

Elle diffère suivant qu'il existe ou non une droite de saut d'ordre  $\geq 2$ . Rappelons qu'une droite  $\ell$  est une droite de saut d'un faisceau semistable  $F$  de classe de Chern  $c_1 = 0$  si  $\text{Hom}(F, \mathcal{O}_\ell(-1)) \neq 0$ ; si  $\text{Hom}(F, \mathcal{O}_\ell(-2)) \neq 0$ , on dit que  $\ell$  est une droite de saut d'ordre  $\geq 2$  pour  $F$ . Par dualité de Serre, cette condition est équivalente à  $h^1(F|_\ell) \neq 0$ . Pour les faisceaux stables de rang 2 de classes de Chern (0,3), cette condition est facile à caractériser:

LEMME 1.2. — Soit  $F$  un faisceau stable de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $h^1(F \otimes Q) \neq 0$ .
- (2) Il existe une droite de saut d'ordre  $\geq 2$  pour  $F$ .
- (3) Il existe une suite exacte  $0 \rightarrow Q^* \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}_\ell(-2) \rightarrow 0$ .

Si ces conditions sont satisfaites, on a  $h^1(F \otimes Q) = 1$ , et la droite de saut d'ordre 2,  $\ell$  est unique.

*Démonstration.* — (1)  $\Rightarrow$  (2) : La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \otimes V \rightarrow Q \rightarrow 0$$

conduit par tensorisation par  $F$  à la suite exacte de cohomologie

$$H^1(F(-1)) \rightarrow H^1(F) \otimes V \rightarrow H^1(F \otimes Q) \rightarrow 0.$$

La condition (1) est donc équivalente au fait que l'application canonique  $\beta : V^* \rightarrow L(H^1(F(-1)), H^1(F))$  est de rang  $\leq 2$ . Ceci donne l'existence d'un élément non nul  $z \in V^*$  appartenant au noyau de  $\beta$ . Pour la droite  $\ell$  d'équation  $z = 0$ ,  $h^1(F|_\ell) \geq 1$ , ce qui démontre (2).

(2)  $\Rightarrow$  (3) : S'il existe une droite de saut  $\ell$  d'ordre  $\geq 2$ , il existe un morphisme non nul  $F \rightarrow \mathcal{O}_\ell(-2)$ . Du fait que  $h^1(F(1)) = 0$ , on déduit que  $h^1(F(1)|_\ell) = 0$  et donc  $\text{Hom}(F, \mathcal{O}_\ell(-3)) = 0$  par dualité de Serre. Il en résulte qu'un tel morphisme est obligatoirement surjectif. Son noyau  $K$  est un faisceau sans torsion de classes de Chern  $(-1, 1)$ ,  $\mu$ -stable : en effet, si l'on avait  $\text{Hom}(K, \mathcal{O}(-1)) \neq 0$ ,  $K$  aurait un sous-faisceau  $L$  de rang un de classe de Chern  $c_1(L) \geq 0$ , et tel que  $K/L$  soit sans torsion. Le faisceau  $L$  étant un sous-faisceau de  $F$ ,  $c_1(L) = 0$  et  $c_2(L) \geq 2$ . Mais alors  $c_2(K/L) < 0$ , ce qui est absurde. Par suite, le faisceau  $K$  est isomorphe à  $Q^*$ , ce qui démontre (3).

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Si on tensorise la suite exacte  $0 \rightarrow Q^* \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow 0$  par  $Q$ , on obtient, compte tenu du fait que  $h^1(Q^* \otimes Q) = 0$  et que  $Q|_\ell = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ ,  $h^1(F \otimes Q) = 1$ , ce qui démontre (1). En outre, le fait que  $\text{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_\ell(-2)) = 0$  démontre l'unicité de la droite  $\ell$ .  $\square$

LEMME 1.3. — Soit  $F$  un faisceau stable de rang 2, de classes de Chern  $(0, 3)$  sur  $\mathbb{P}_2$ , tel que  $h^1(F \otimes Q) = 0$ . Alors il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathcal{O}^3 \rightarrow F(1) \rightarrow 0.$$

*Démonstration* (cf. [10], lemme 4.2.). — L'hypothèse signifie que le morphisme canonique  $\beta : V^* \rightarrow L(H^1(F(-1)), H^1(F))$  est un isomorphisme. Alors le morphisme  $d_1^{-2,1} : H^1(F(-1)) \otimes \Lambda^2 Q^* \rightarrow H^1(F) \otimes Q^*$  qui figure dans la suite spectrale de Beilinson de  $F(1)$ , donné par  $h \otimes z' \wedge z'' \mapsto \beta(z'')h \otimes z' - \beta(z')h \otimes z''$ , pour  $h \in H^1(F(-1))$ ,  $z'$  et  $z'' \in Q_x^*$ ,  $x \in \mathbb{P}_2$ , est surjectif, et son noyau est isomorphe à  $\mathcal{O}(-2)$ . La suite spectrale de Beilinson de  $F(1)$  fournit un isomorphisme entre respectivement le noyau de  $d_1^{-2,1}$  et le noyau du morphisme d'évaluation, et le conoyau de  $d_1^{-2,1}$  et le conoyau du morphisme d'évaluation. On

obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(F(1)) \rightarrow F(1) \rightarrow 0$$

ce qui donne le résultat, compte tenu du fait que  $h^0(F(1)) = 3$ .  $\square$

1.3. *Les sous-variétés  $Y$ ,  $Y^*$  et  $\Sigma$ .*

On sait que l'espace de modules  $M$  des faisceaux stables de rang 2 de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$  est une variété projective lisse de dimension 9 ; de plus, on sait qu'il existe sur  $M \times \mathbb{P}_2$  un faisceau universel  $\mathcal{F}$  défini à élément de  $\text{Pic } M$  près. D'après le théorème de semi-continuité, les faisceaux  $A = \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(1))$ ,  $B = R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(-1))$ ,  $C = R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F})$  sont des faisceaux localement libres de rangs respectifs 3, 3, 1. On considère les morphismes canoniques sur  $M \times \mathbb{P}_2$  et  $M \times \mathbb{P}_2^*$  respectivement

$$\begin{array}{ccc} B \boxtimes \Lambda^2 Q^* & \xrightarrow{b} & C \boxtimes Q^* \\ B \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) & \xrightarrow{b^*} & C \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \end{array}$$

et on désigne par  $\Sigma$  le fermé de  $M$  des points  $s$  tels que  $h^1(\mathcal{F}_s \otimes Q) \neq 0$ .

PROPOSITION 1.4. (1) — *L'idéal de Fitting des mineurs maximaux de  $b$  définit une sous-variété  $Y$  de  $M \times \mathbb{P}_2$ , lisse au-dessus de  $\mathbb{P}_2$ , de codimension 2.*

(2) *Le schéma des zéros de  $b^*$  est une sous-variété lisse  $Y^*$  de  $M \times \mathbb{P}_2^*$  de codimension 3 ; le morphisme  $Y^* \rightarrow M$  induit par  $\text{pr}_1$  est un plongement dont l'image est  $\Sigma$ . En particulier,  $\Sigma$  est une hypersurface lisse de  $M$ .*

(3) *Soient  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  le morphisme associé à l'inverse de l'isomorphisme  $Y^* \cong \Sigma$  par composition avec  $\text{pr}_2$ , et  $D \subset \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  la sous-variété d'incidence des couples (droite, point). On a alors un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_2^* \end{array}$$

Commençons par rappeler la description de  $M$  issue des complexes de Kronecker [3]. Soient  $H$  et  $H'$  deux espaces vectoriels de dimension 3,

$\mathcal{M}$  la variété des complexes de Kronecker stables ([3], § 2.3)

$$0 \rightarrow H' \otimes \Lambda^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} H \otimes Q^* \xrightarrow{\beta} \mathcal{O} \rightarrow 0.$$

La variété  $\mathcal{M}$  est lisse, et sur  $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$ , il existe un complexe de Kronecker universel, dont on désigne par  $\mathcal{E}$  le faisceau de cohomologie. Le groupe  $G = GL(H') \times GL(H)$  opère sur  $\mathcal{M}$  par la formule  $((f', f), (\alpha, \beta)) \mapsto (f' \alpha f'^{-1}, \beta f^{-1})$ , où  $f' \in GL(H')$ ,  $f \in GL(H)$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}$ ; cette action est propre et libre. Le groupe  $G$  opère sur le complexe universel, et par suite sur le faisceau  $\mathcal{E}$ . Le faisceau  $\mathcal{E}$  induit un morphisme équivariant

$$p: \mathcal{M} \rightarrow M$$

qui fait de  $M$  un quotient géométrique de  $\mathcal{M}$  par  $G$ . Le faisceau quotient  $\mathcal{F} = \mathcal{E}/G$  obtenu sur  $M \times \mathbb{P}_2$  est un faisceau universel; pour ce faisceau universel, le faisceau  $C$  est trivial, et le faisceau  $B$  s'identifie au fibré quotient

$$B \cong \mathcal{M} \times H/G.$$

LEMME 1.5. — *Le morphisme de projection  $(\alpha, \beta) \mapsto \beta$ :*

$$\mathcal{M} \rightarrow \text{Hom}(H \otimes Q^*, \mathcal{O}) = L(V^*, H^*)$$

*est une submersion.*

La démonstration de ce lemme repose sur l'interprétation de l'espace vectoriel tangent en un point à  $\mathcal{M}$ , et le fait que  $H^1(\mathcal{E}_{(\alpha, \beta)}(1)) = 0$ , qui résulte du paragraphe 1.1. Elle est identique à celle de [10], lemme 4.1.

LEMME 1.6. — (1) *Le morphisme  $b: B \boxtimes \Lambda^2 Q^* \rightarrow C \boxtimes Q^*$  est partout de rang  $\geq 1$ ; il est de rang 1 en  $(s, x)$  si et seulement si  $s \in \Sigma$ , et si  $x$  appartient à la droite  $\ell$  de saut d'ordre 2 de  $\mathcal{F}_s$ .*

(2) *En un point  $(s, x)$  où  $b_{(s, x)}$  est de rang 1, la différentielle partielle  $d_1 b_{(s, x)}: T_s M \rightarrow L(\ker b_{(s, x)}, \text{coker } b_{(s, x)})$  est surjective.*

*Démonstration.* — Soient  $(s, x) \in M \times \mathbb{P}_2$ , et  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}$  tel que  $p(\alpha, \beta) = s$ . Le fait que le complexe de Kronecker soit stable implique que le morphisme  $\beta: H \otimes Q^* \rightarrow \mathcal{O}$  est surjectif ([3], proposition 2.3). On désigne par  $\underline{\beta}: V^* \rightarrow H^*$  l'application linéaire associée; elle est de rang  $\geq 2$ . On peut supposer que  $x$  est défini par les équations indépendantes  $z' = z'' = 0$ ; l'application linéaire  $b_{(s, x)}$  est alors conju-

guée à l'application linéaire  $H \otimes \Lambda^2 Q_x^* \rightarrow Q_x^*$  définie par  $h \otimes z' \wedge z'' \mapsto \beta(z'')h \otimes z' - \beta(z')h \otimes z''$ ; par suite, elle est partout de rang  $\geq 1$ , et est exactement de rang un si et seulement si les formes linéaires  $\beta(z')$  et  $\beta(z'')$  sont liées, ce qui revient à dire que  $(z', z'') \cap \text{Ker } \beta \neq \{0\}$ . Ceci est équivalent à  $s \in \Sigma$  et  $x$  appartient à la droite de saut d'ordre 2 de  $\mathcal{F}_s$ , définie par le noyau de  $\beta$ . Ceci démontre l'assertion (1). Pour vérifier (2), on remarque que le fibré  $p^*(B)$  s'identifiant au fibré trivial de fibre  $H$  sur  $\mathcal{M}$ , le morphisme  $p^*(b)$  peut être vu comme un morphisme  $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \text{Hom}(H \otimes \Lambda^2 Q_x^*, Q_x^*)$ . Pour  $x$  fixé, la fonction  $(\alpha, \beta) \mapsto b_{(s,x)}: \mathcal{M} \rightarrow L(H \otimes \Lambda^2 Q_x^*, Q_x^*)$  se calcule en composant la projection  $(\alpha, \beta) \rightarrow \beta$  avec le morphisme d'évaluation

$$L(V^*, H^*) \cong \text{Hom}(H \otimes \Lambda^2 Q_x^*, Q_x^*) \rightarrow L(H \otimes \Lambda^2 Q_x^*, Q_x^*).$$

Compte tenu du lemme 1.5. et du fait que  $Q$  est engendré par ses sections, on voit que sa différentielle est surjective, et par suite il en est de même de la différentielle induite  $T_{(\alpha, \beta)} \mathcal{M} \rightarrow L(\text{ker } b_{(s,x)}, \text{coker } b_{(s,x)})$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_{(\alpha, \beta)} \mathcal{M} & \searrow & L(\text{ker } b_{(s,x)}, \text{coker } b_{(s,x)}) \\ \downarrow & & \nearrow d_1 b_{(s,x)} \\ T_s M & & \end{array}$$

montre que  $d_1 b_{(s,x)}$  est surjectif, ce qui achève la démonstration.  $\square$

LEMME 1.7. — *Le morphisme  $b^*$  est transverse à la section nulle. Son schéma des zéros  $Y^*$  se plonge par  $\text{pr}_1$  dans  $M$ .*

*Démonstration.* — Par le même argument que dans le lemme 1.6, on voit qu'en un point  $(s, \ell) \in M \times \mathbb{P}_2^*$  où  $b^*$  s'annule la différentielle partielle  $d_1 b^*(s, \ell): T_s M \rightarrow L(B_s, C_s)$  est surjective, ce qui entraîne la transversalité et par suite la lissité du schéma des zéros  $Y^*$  de  $b^*$ . Considérons la projection  $Y^* \rightarrow M$  induite par  $\text{pr}_1$ ; pour  $x$  fixé, la fibre  $Y_s^*$  de  $Y^*$  au-dessus de  $s$  est ou vide, ou réduite à un point lisse. En effet, si  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}$  est un représentant de  $s$ , l'application linéaire  $\beta: V^* \rightarrow H^*$  associée à  $\beta$  est de rang 2 ou 3; il en résulte que le schéma des zéros du morphisme composé sur  $\mathbb{P}_2^*$ :  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \otimes H^*$  est ou vide si le rang est 3, ou réduit à un point lisse si le rang est 2. Mais ce schéma coïncide avec le fibre  $Y_s^*$ . D'où le lemme.  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition 1.4.* — (1) Au voisinage d'un point  $(s, x) \in Y$ , le morphisme  $b$  est quasi-isomorphe à un morphisme  $\mathcal{O}^2 \rightarrow \mathcal{O}$  transverse à la section nulle d'après le lemme 1.6. Il en résulte la lissité de  $Y$ .

(2) La lissité de  $Y^*$  et le fait que le morphisme  $Y^* \rightarrow M$  induit par la projection  $\text{pr}_1$  soit un plongement résulte du lemme 1.7. De plus, si  $z \in V^*$  est une équation pour la droite  $\ell$ , l'application linéaire  $b_{(s, \ell)}^*$  est conjuguée à la multiplication  $H^1(\mathcal{F}_s(-1)) \xrightarrow{z} H^1(\mathcal{F}_s)$ , dont le conoyau est  $H^1(\mathcal{F}_s|_\ell)$ . Ainsi,  $(s, \ell) \in Y^*$  si et seulement si  $\ell$  est une droite de saut d'ordre 2 pour le faisceau  $\mathcal{F}_s$ . D'après le lemme 1.2, l'image de  $Y^*$  dans  $M$  est le fermé  $\Sigma$  des points  $s$  tels que  $h^1(\mathcal{F}_s \otimes Q) \neq 0$ , fermé qui est donc une hypersurface lisse.

(3) L'inverse de l'isomorphisme  $Y^* \rightarrow \Sigma$  fournit un morphisme  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  auquel correspond un sous-fibré vectoriel  $W$  de rang 2 du fibré trivial  $\Sigma \times V$ , qui n'est autre que l'orthogonal, dans la dualité, du sous-fibré de rang un de  $\Sigma \times V^*$  associé à  $\pi$ . Le projectif associé à  $W$  est une sous-variété lisse de  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$  notée  $(Y^*)^\perp$ . Il résulte de l'assertion (1) du lemme 1.6 que l'on a au moins ensemblistement  $(Y^*)^\perp = Y$ . Cette égalité a lieu en fait au sens des schémas puisque les deux membres sont lisses. La variété  $(Y^*)^\perp$  est exactement le produit fibré  $\Sigma \times_{\mathbb{P}_2} D$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2. Identification de $M$ avec $\widehat{\text{Gr}}$ .

Dans ce qui suit, le faisceau universel  $\mathcal{F}$  est choisi de sorte que le faisceau  $C = R^1\text{pr}_{1*}(\mathcal{F})$  soit trivial. La description donnée dans le lemme 1.3 permet d'associer à tout point  $s \in M \setminus \Sigma$  un réseau de coniques de  $\mathbb{P}_2$ , ce qui fournit un morphisme  $M \setminus \Sigma \rightarrow \text{Gr}$ . On se propose de montrer comment étendre ce morphisme à  $M$ .

### 2.1. Le morphisme $v$ .

On considère les morphismes sur  $M \times \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned} B \boxtimes \Lambda^2 Q^* &\xrightarrow{b} \mathcal{O} \boxtimes Q^* \\ A \boxtimes \mathcal{O} &\xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{F}(1). \end{aligned}$$

D'après la suite spectrale de Beilinson pour  $\mathcal{F}(1)$ , le noyau du morphisme  $b$  s'identifie, via le morphisme  $d_2 : \text{Ker } b \rightarrow A \boxtimes \mathcal{O}$ , au noyau

du morphisme d'évaluation  $ev$  ; d'autre part, le conoyau  $\mathcal{G}$  de  $ev$  est isomorphe au conoyau de  $b$ .

Le noyau  $\text{Ker } b$  est évidemment un faisceau réflexif de rang un, donc inversible ; il s'écrit donc sous la forme  $\text{Ker } b = L \boxtimes \mathcal{O}(-2)$ . Par application du foncteur  $\text{Hom}_{\text{pr}_1}(\cdot, L)$  à  $d_2$ , on obtient un morphisme de fibrés vectoriels sur  $M$

$$v : L \otimes A^* \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(\mathcal{O}(2)).$$

PROPOSITION 2.1. — *Le morphisme de fibrés vectoriels  $v$  est injectif.*

Remarquons d'abord que la suite spectrale de Beilinson appliquée à  $\mathcal{F}$  permet d'obtenir  $\mathcal{F}$  comme cohomologie d'une monade

$$(1) \quad 0 \rightarrow B' \boxtimes \Lambda^2 Q^* \rightarrow B \boxtimes Q^* \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

où  $B' = R^1 \text{pr}_1(\mathcal{F}(-2))$ . Ceci permet d'obtenir le résultat suivant

$$\text{Ext}_{\text{pr}_1}^q(\mathcal{F}(1), L) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 1 \\ B'^* \otimes L & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

ce qui montre en particulier que  $\text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{F}(1), L)$  est un faisceau localement libre de rang 3. Si on applique le foncteur  $\text{Hom}_{\text{pr}_1}(\cdot, L)$  à la résolution de  $\mathcal{G}$  donnée par le complexe  $0 \rightarrow L \boxtimes \mathcal{O}(-2) \rightarrow A \boxtimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(1) \rightarrow 0$ , on obtient une suite exacte de faisceaux sur  $M$

$$0 \rightarrow \ker v \rightarrow \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{G}, L) \rightarrow \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{F}(1), L) \rightarrow \text{coker } v \rightarrow \text{Ext}_{\text{pr}_1}^2(\mathcal{G}, L) \rightarrow 0.$$

On est ramené à étudier  $\mathcal{G}$ . D'après la proposition 1.4, c'est évidemment un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang un. Il en résulte que  $\text{Ext}_{\text{pr}_1}^q(\mathcal{G}, L) = 0$  pour  $q \leq 1$ , et que  $\text{Ext}_{\text{pr}_1}^2(\mathcal{G}, L)$  est un faisceau porté par  $\Sigma$ . Sur l'ouvert  $M \setminus \Sigma$ , on obtient la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow L \otimes A^* \xrightarrow{v} \mathcal{O} \otimes \Gamma(\mathcal{O}(2)) \rightarrow \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{F}(1), L) \rightarrow 0$$

d'où il découle que  $v$  est injectif, comme morphisme de fibrés vectoriels, en dehors de  $\Sigma$ . Nous montrerons au § 2.4 que  $v$  reste injective sur  $\Sigma$ . En premier lieu, nous donnons une description plus précise du conoyau  $\mathcal{G}$ , qui nous sera utile dans toute la suite, et qui s'appuie sur la résolution,

due à Eagon et Northcott, de la variété des mineurs maximaux, et sur la proposition 1.4.

2.2. Complexes d'Eagon et Northcott.

Rappelons quelques généralités. On considère sur une variété lisse  $X$  des fibrés vectoriels  $E$  et  $F$  de rang  $n + 1$  et  $n$  respectivement, et  $f: E \rightarrow F$  un morphisme. On suppose que la variété  $Y$  des mineurs maximaux de  $f$  est de codimension 2. On a alors la résolution de  $\mathcal{O}_Y(\Lambda^n F)$ , dite de Eagon et Northcott

$$0 \rightarrow \Lambda^{n+1}E \otimes F^* \xrightarrow{j} \Lambda^n E \xrightarrow{\Lambda^n f} \Lambda^n F \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{O}_Y(\Lambda^n F)$$

où la flèche  $j$  est définie au-dessus du point  $x \in X$  par

$$\xi_0 \wedge \dots \wedge \xi_n \otimes \eta \mapsto \sum_i (-1)^i \langle f(\xi_i), \eta \rangle \xi_0 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \xi_n$$

pour  $\xi_i \in E_x$  et  $\eta \in F_x^*$ . En tensorisant ce complexe par  $\Lambda^{n+1}E^*$ , on obtient la résolution de  $\mathcal{O}_Y(\Lambda^{n+1}E^* \otimes \Lambda^n F)$ :

$$0 \rightarrow F^* \xrightarrow{t_f} E^* \rightarrow \Lambda^{n+1}E^* \otimes \Lambda^n F \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{O}_Y(\Lambda^{n+1}E^* \otimes \Lambda^n F)$$

Le noyau de  $f$  est un faisceau réflexif de rang un, donc inversible, qui n'est autre que  $\Lambda^{n+1}E \otimes \Lambda^n F^*$ . Considérons le complexe

$$0 \rightarrow \Lambda^{n+1}E \otimes \Lambda^n F^* \rightarrow E \xrightarrow{f} F \rightarrow 0$$

et désignons par  $G$  le conoyau de  $f$ : ce complexe est exactement le transposé du précédent; on obtient ainsi  $Ext^q(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}) = 0$  et  $Ext^q(G, \mathcal{O}) = 0$  si  $q \neq 2$ , et pour  $q = 2$ :

$$G = Ext^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}) \otimes \Lambda^{n+1}E \otimes \Lambda^n F^*$$

$$\mathcal{O}_Y = Ext^2(G, \Lambda^{n+1}E \otimes \Lambda^n F^*).$$

2.3. Description de  $\mathcal{G}$ .

Désignons par  $\mathcal{O}_\Sigma(1)$  le fibré image réciproque de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  par la projection  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ , par  $\mathcal{O}(i, j)$  le faisceau sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$  défini par

$\mathcal{O}_\Sigma(i) \boxtimes \mathcal{O}(j)$  par  $\mathcal{O}_Y(i,j)$  sa restriction à  $Y$ . Dans  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$ , la sous-variété  $Y$  est une hypersurface lisse obtenue comme lieu des zéros d'une section  $\sigma$  de  $\mathcal{O}(1,1)$ . Ceci va nous permettre de décrire  $\mathcal{G}$  :

LEMME 2.2. — (1) *Le fibré inversible  $L_\Sigma$  associé à  $\Sigma$  est donné par*

$$L_\Sigma = L^* = \det B^* .$$

(2) *On a  $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y(1, -1)$ .*

*Démonstration.* — (1) D'après le § 2.2, appliqué au morphisme  $b$ , on a  $\mathcal{O}_Y = \text{Ext}^2(\mathcal{G}, L \boxtimes \mathcal{O}(-2))$ , et par suite

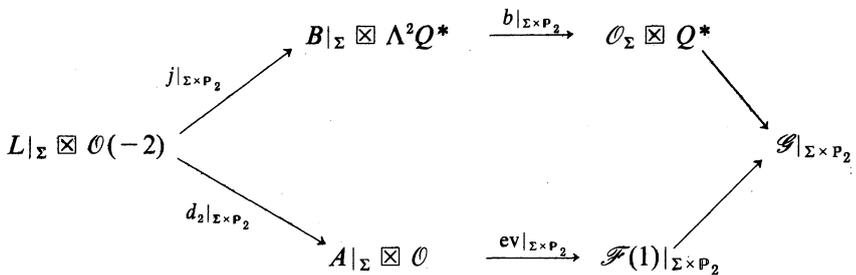
$$\mathcal{O}_\Sigma = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_Y) = \text{Ext}_{\text{pr}_1}^2(\mathcal{G}, L \boxtimes \mathcal{O}(-2)) .$$

La résolution de  $\mathcal{G} : 0 \rightarrow L \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{j} B \boxtimes \Lambda^2 Q^* \xrightarrow{b} \mathcal{O} \boxtimes Q^* \rightarrow 0$  conduit par image directe à une suite exacte  $0 \rightarrow L \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow 0$ ; par suite,  $L_\Sigma \cong L^*$ . Puisque  $Y$  est de codimension 2 dans  $M \times \mathbb{P}_2$ , la même résolution fournit l'isomorphisme  $L \cong \det B$ .

(2) Soit  $N_Y$  le fibré normal de  $Y$  dans  $M \times \mathbb{P}_2$ . On a évidemment  $\det N_Y = \text{Ext}^2(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O})$ . D'après ce qui précède,  $\det N_Y = \mathcal{O}_Y(1, 1) \otimes L^*$ . Du § 2.2, il découle  $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y(1, -1)$ . □

2.4. *Factorisation de  $d_2|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  et démonstration de la proposition 2.1.*

Considérons le diagramme commutatif de 0-suites sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$  :



Ce diagramme ne coïncide pas avec le diagramme obtenu à partir de la suite spectrale de Beilinson de  $\mathcal{F}(1)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$ . Cependant, il existe une relation entre ces deux diagrammes. Considérons le morphisme d'inclusion  $j : L \boxtimes \mathcal{O}(-2) \rightarrow B \boxtimes \Lambda^2 Q^*$ . D'après le § 2.2,  $\text{coker } j = \text{Ext}^2(\mathcal{G}, \mathcal{O})$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_Y(L^* \boxtimes \mathcal{O}(2))$ , et par suite, le schéma des zéros de  $j$

est exactement  $Y$ . Il en résulte que le morphisme  $j|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  se factorise suivant le diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} & & B|_{\Sigma} \boxtimes \Lambda^2 Q^* \\ & \nearrow j|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} & \uparrow j' \\ L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\sigma} & L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(1, -1) \end{array}$$

Le morphisme  $b|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  s'annule sur l'image de  $j'$ . En fait, le noyau  $\mathcal{N} = \text{Ker } b|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  est un sous-faisceau réflexif de rang un, donc un faisceau inversible, contenant l'image de  $j'$ . Au-dessus de chaque point  $s \in \Sigma$ ,  $\mathcal{N}_s$  est de classe de Chern  $c_1 = -1$ . Il en résulte que  $j'$  induit un isomorphisme  $L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(1, -1) \simeq \mathcal{N}$ . La functorialité de la suite spectrale de Beilinson fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{j|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}} & \text{Ker}(b|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}) = \text{Im } j' \\ \wr \downarrow d_2|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} & & \wr \downarrow d'_2 \\ (\text{Ker } \text{ev})|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} & \longrightarrow & \text{Ker}(\text{ev}|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}) \hookrightarrow A|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \end{array}$$

où la flèche  $d'_2$  est la flèche qui provient de la suite spectrale de Beilinson de  $\mathcal{F}(1)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$ . Par suite, on obtient une factorisation

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\sigma} & L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(1, -1) \\ & \searrow d_2|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} & \downarrow \tau \\ & & A|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \end{array}$$

Considérons la suite exacte sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$  :

$$0 \rightarrow L|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O}(1, -1) \xrightarrow{\tau} A|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \xrightarrow{\text{ev}|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}} \mathcal{F}(1)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{G}|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} \rightarrow 0.$$

Puisque le faisceau  $\mathcal{G}|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  est plat au-dessus de  $\Sigma$ , ainsi que  $\mathcal{F}(1)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2}$  cette suite exacte se restreint à chaque fibre  $\mathbb{P}_2$  en une suite exacte. Le conoyau  $\mathcal{K} = \text{coker } \tau$ , isomorphe à  $\text{Im}(\text{ev}|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2})$  définit une famille plate de faisceau sans torsion de classes de Chern  $c_1 = 1, c_2 = 1$ ; pour chaque  $s \in \Sigma$  la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{K}_s \rightarrow \mathcal{F}_s(1) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_s}(-1) \rightarrow 0$  montre que  $\mathcal{K}_s$  est  $\mu$ -stable (cf. lemme 1.2) et par suite isomorphe à  $Q$ . Par suite,  $\mathcal{K} \cong \Lambda \boxtimes Q$ , où  $\Lambda$  est un faisceau inversible convenable sur  $\Sigma$ .

On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow L|_{\Sigma} \otimes \mathcal{O}_{\Sigma}(1, -1) \xrightarrow{\tau} A|_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \rightarrow \Lambda \boxtimes Q \rightarrow 0$$

d'où découle un isomorphisme  $L \otimes A^*|_{\Sigma} \cong \Gamma(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma}(-1)$  induit par  $\tau$ . Par application du foncteur  $Hom_{\mathbb{P}^1}(\cdot, L)$  au diagramme (3) on obtient un diagramme commutatif

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} L \otimes A^*|_{\Sigma} & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma}(-1) \\ & \searrow v|_{\Sigma} & \downarrow \sigma \\ & & \Gamma(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma} \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale, induite par  $\sigma$ , est évidemment injective. Par suite  $v|_{\Sigma}$  l'est aussi, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1. □

2.5. Les morphismes  $\phi$  et  $\hat{\phi}$ .

Au sous-fibré  $L \otimes A^*$  du fibré trivial  $M \times \Gamma(\mathcal{O}(2))$  est associé un morphisme  $\phi : M \rightarrow Gr$  de  $M$  dans la grassmannienne  $Gr = grass_3(\Gamma(\mathcal{O}(2)))$  des sous-espaces vectoriels de dimension 3 de  $\Gamma(\mathcal{O}(2))$ , tel que l'image réciproque du sous-fibré universel  $S$  soit exactement  $L \otimes A^*$ . Considérons le plongement  $i : \mathbb{P}_2^* \rightarrow Gr$  défini par le sous-fibré  $\Gamma(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$  : à chaque droite  $\ell \in \mathbb{P}_2^*$  d'équation  $z = 0$ , il associe la réseau de coniques défini par le sous-espace  $z\Gamma(\mathcal{O}(1)) \subset \Gamma(\mathcal{O}(2))$ . D'après ce qu'on a vu au paragraphe 2.4, l'image réciproque par  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  de ce sous-fibré coïncide avec le sous-fibré  $L \otimes A^*|_{\Sigma}$  du fibré trivial de fibre  $\Gamma(\mathcal{O}(2))$  (cf. diagramme (4)). Par suite, on obtient une factorisation

$$\phi|_{\Sigma} = i \circ \pi.$$

PROPOSITION 2.3. — Par le morphisme  $\phi$  l'image réciproque de  $\mathbb{P}_2^*$  (au sens des schémas) coïncide avec l'hypersurface  $\Sigma \subset M$ .

Démonstration. — D'après ce qu'on vient de voir, on a évidemment  $\Sigma \subset \phi^{-1}(\mathbb{P}_2^*)$ . Considérons le sous-schéma  $\Sigma' = \phi^{-1}(\mathbb{P}_2^*)$  et désignons par  $\pi' : \Sigma' \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  le morphisme induit par  $\phi$ , par  $\mathcal{O}_{\Sigma'}(1)$  l'image réciproque de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1)$  et posons  $\mathcal{O}_{\Sigma'}(i, j) = \mathcal{O}_{\Sigma'}(i) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(j)$ . Sur  $\Sigma' \times \mathbb{P}_2$ , le fibré  $\mathcal{O}_{\Sigma'}(1, 1)$  possède une section canonique  $\sigma'$  dont le schéma des zéros est  $Y' = \Sigma' \times_{\mathbb{P}_2} D$ . On a évidemment  $Y \subset Y'$ ; nous montrerons l'inclusion

$Y' \subset Y$ , ce qui impliquera  $\Sigma' = \Sigma$ . Considérons la suite exacte sur  $M \times \mathbb{P}_2$ :

$$(5) \quad 0 \rightarrow L \boxtimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{d_2} A \boxtimes \mathcal{O} \xrightarrow{ev} \mathcal{F}(1) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Le morphisme  $d_2$  se reconstruit à partir de  $v$  de la manière suivante : par composition avec le morphisme d'évaluation  $\mathcal{O} \otimes \Gamma(\mathcal{O}(2)) \rightarrow \mathcal{O}(2)$ , on obtient un morphisme  $L \boxtimes A^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$  qui conduit au morphisme annoncé par transposition et tensorisation par  $L$ . Par définition,  $\phi|_{\Sigma'}$  se factorise par  $\mathbb{P}_2^*$ , ce qui entraîne que  $v|_{\Sigma'}$ , se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L \otimes A^*|_{\Sigma'} & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'}(-1) \\ & \searrow v|_{\Sigma'} & \downarrow \sigma' \\ & & \Gamma(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'} \end{array}$$

Par suite, on obtient pour  $d_2|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2}$  une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} L|_{\Sigma'} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\sigma'} & L|_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'}(1, -1) \\ & \searrow d_2|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2} & \downarrow \tau' \\ & & A|_{\Sigma'} \boxtimes \mathcal{O} \end{array}$$

LEMME 2.4. — On a  $\text{Im } \tau' \subset \text{Ker}(ev|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2})$ .

*Démonstration.* — Il s'agit de prouver que la flèche composée  $ev|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2} \circ \tau'$  est nulle. Il suffit de vérifier que le morphisme induit par  $\sigma'$

$$\text{Hom}(L|_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'}(1, -1), \mathcal{F}(1)|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2}) \rightarrow \text{Hom}(L|_{\Sigma'} \boxtimes \mathcal{O}(-2), \mathcal{F}(1)|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2})$$

est injectif. Le premier membre n'est autre que l'espace vectoriel des sections du faisceau  $L^* \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'}(-1) \otimes \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(2)|_{\Sigma'})$ . On a  $R^q \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(2)) = 0$  pour  $q \geq 1$ , et par suite (cf. § 2.7)

$$\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(2)|_{\Sigma'}) = \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(2))|_{\Sigma'};$$

de plus, le théorème de semi-continuité appliqué sur la variété lisse  $M$  montre que le faisceau  $\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(2))$  est localement libre de rang 9. De

même, l'espace vectoriel  $\text{Hom}(L|_{\Sigma'} \boxtimes \mathcal{O}(-2), \mathcal{F}(1)|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2})$  est l'espace des sections du faisceau sur  $\Sigma'$ ,  $L^*|_{\Sigma'} \otimes \text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(3)|_{\Sigma'})$ , et le même argument que ci-dessus prouve que le faisceau  $\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(3)|_{\Sigma'})$  est la restriction à  $\Sigma'$  du fibré vectoriel  $\text{pr}_{1*}(\mathcal{F}(3))$ .

On est donc ramené à voir que le morphisme de faisceaux induit par  $\sigma' : \mathcal{O}_{\Sigma'}(-1, -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma'}$  est injectif. Mais on a la suite exacte de faisceaux sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2 : 0 \rightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$ , et  $D$  est plat sur  $\mathbb{P}_2^*$ . Par le changement de base  $\pi' : \Sigma' \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ , cette suite exacte se relève en une suite exacte.  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition 2.3.* — La suite spectrale de Beilinson appliquée aux familles  $\mathcal{F}(1)$  et  $\mathcal{F}(1)|_{\Sigma'}$  fournit par fonctorialité un diagramme commutatif sur  $\Sigma' \times \mathbb{P}_2$

$$\begin{array}{ccc}
 L|_{\Sigma'} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{j|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2}} & \text{Ker}(b|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2}) \hookrightarrow B|_{\Sigma'} \boxtimes \Lambda^2 Q^* \\
 \downarrow d_2|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2} \wr & & \downarrow \wr d'_2 \\
 \text{Ker ev}|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2} & \xrightarrow{k} & \text{Ker}(\text{ev}|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2})
 \end{array}$$

D'après le lemme 2.4, le morphisme  $k$  se factorise à travers  $L|_{\Sigma'} \otimes \mathcal{O}_{\Sigma'}(1, -1)$  par  $\sigma'$ ; il en est donc de même de  $j|_{\Sigma' \times \mathbb{P}_2}$ . Puisque le schéma des zéros de  $j$  est  $Y$ , ceci montre l'inclusion  $Y' \subset Y$  au sens des schémas, c'est-à-dire que pour les idéaux  $\mathcal{I}_{Y'}$  et  $\mathcal{I}_Y$  qu'ils définissent,  $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{I}_{Y'}$ . Par suite,  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y'}$ . Par image directe par  $\text{pr}_1$ , ceci conduit à l'égalité  $\mathcal{O}_\Sigma = \mathcal{O}_{\Sigma'}$ , et par suite  $\Sigma = \Sigma'$ . D'où la proposition.

Désignons par  $\widehat{\text{Gr}}$  l'éclaté du plan  $\mathbb{P}_2^*$  dans la grassmannienne  $\text{Gr}$ . Par la propriété universelle de l'éclatement ([6], proposition 7.14), on obtient

COROLLAIRE 2.5. — *Le morphisme  $\phi$  se factorise suivant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \widehat{\text{Gr}} \\
 & \searrow \phi & \downarrow \\
 & & \text{Gr}
 \end{array}$$

2.6 L'inverse de  $\hat{\phi}$ .

On construit une famille plate  $\mathcal{F}_0$  de faisceaux stables de rang 2, de classes de Chern (0,3), sur  $\mathbb{P}_2$ , paramétrée par  $\widehat{\text{Gr}}$ . On prend pour

modèle la suite exacte (5) qui donne le faisceau universel  $\mathcal{F}(1)$  à partir du morphisme d'évaluation, suite exacte dont tous les termes se déduisent de la géométrie sous-jacente à  $\widehat{\text{Gr}}$  par image réciproque par le morphisme  $\hat{\phi}$ .

On désigne par  $\Sigma_0 \subset \widehat{\text{Gr}}$  l'hypersurface exceptionnelle, par  $L_0$  le fibré inversible associé, par  $\pi_0: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  la projection canonique, par  $\mathcal{O}_{\Sigma_0}(1)$  l'image réciproque de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$  par  $\pi_0$ . L'image réciproque de  $\Sigma_0$  par  $\phi$  est  $\Sigma$ .

Soit  $S$  le sous-fibré universel du fibré trivial de fibre  $\Gamma(\mathcal{O}(2))$  sur la grassmannienne  $\text{Gr}$ ; on garde la même notation pour son image réciproque sur  $\widehat{\text{Gr}}$ , et on pose  $A_0 = S^* \otimes L_0^{-1}$ . Sur  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$ , le morphisme canonique  $S \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$  fournit par transposition et tensorisation par  $L_0^{-1}$  une inclusion de faisceaux

$$L_0^{-1} \boxtimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{d_0} A_0 \boxtimes \mathcal{O}$$

dont on désigne le conoyau par  $\mathcal{A}$ .

Soit  $Y_0$  le produit fibré  $\Sigma_0 \times_{\mathbb{P}_2^*} D$ : c'est une sous-variété lisse de codimension 2 de  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$ . On pose  $\mathcal{O}_{\Sigma_0}(i, j) = \mathcal{O}_{\Sigma_0}(i) \boxtimes \mathcal{O}(j)$ ; c'est un faisceau sur  $\Sigma_0 \times \mathbb{P}_2$  dont la restriction à  $Y_0$  sera noté  $\mathcal{O}_{Y_0}(i, j)$ . On désigne enfin par  $\mathcal{G}_0$  le prolongement par 0 de  $\mathcal{O}_{Y_0}(1, -1)$  à  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$ . Le déterminant du fibré normal  $N_{Y_0}$  de  $Y_0$  de  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$  est donné par

$$\det N_{Y_0} = L_0 \otimes \mathcal{O}_{Y_0}(1, 1).$$

LEMME 2.6. — On a un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}_0, \mathcal{A}) \cong \mathbb{C}.$$

*Démonstration.* — Il est clair que  $\text{Ext}^q(\mathcal{G}_0, \mathcal{L}) = 0$  pour  $q \leq 1$ , et tout faisceau localement libre  $\mathcal{L}$  sur  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$ . La suite exacte qui définit  $\mathcal{A}: 0 \rightarrow L_0^{-1} \boxtimes \mathcal{O}(-2) \rightarrow A_0 \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0$  conduit à la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{G}_0, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{G}_0, L_0^{-1} \boxtimes \mathcal{O}(-2)) \xrightarrow{d_0^*} \text{Ext}^2(\mathcal{G}_0, A_0 \boxtimes \mathcal{O}).$$

Puisque  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{O}_{Y_0}(1, -1)$  et que  $Y_0$  est une sous-variété lisse de codimension 2, on a  $\text{Ext}^2(\mathcal{G}_0, \mathcal{O}) = \det N_{Y_0} \otimes_{Y_0} \mathcal{G}_0^* = L_0 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)|_{Y_0}$ . Il

en résulte que

$$\begin{aligned} \text{Ext}^2(\mathcal{G}_0, L_0^{-1} \boxtimes \mathcal{O}(-2)) &\cong \Gamma(\mathcal{O}_{Y_0}) = \mathbb{C} \\ \text{Ext}^2(\mathcal{G}_0, A_0 \boxtimes \mathcal{O}) &\cong \Gamma(L_0 \otimes A_0 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)|_{Y_0}) \\ &\cong \Gamma(S^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_0}(2)|_{Y_0}). \end{aligned}$$

On est ramené à prouver que l'application linéaire  $d_0^*$  induite par  $d_0$  est nulle. Sur le plan  $\mathbb{P}_2^* \subset \text{Gr}$ , le sous-fibré  $S$  coïncide, via la section canonique  $\sigma$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2}(1,1)$ , avec le sous-fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \otimes \Gamma(\mathcal{O}(1))$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \otimes \Gamma(\mathcal{O}(1)) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \otimes \Gamma(\mathcal{O}(2)) \\ \downarrow \wr & \nearrow & \\ S|_{\mathbb{P}_2^*} & & \end{array}$$

Par composition avec le morphisme d'évaluation et transposition, ceci conduit sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  à une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*} \boxtimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & S^*|_{\mathbb{P}_2^*} \boxtimes \mathcal{O} \\ \searrow \sigma & & \nearrow \\ & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2}(1, -1) & \end{array}$$

En remontant ce diagramme à  $\Sigma_0 \times \mathbb{P}_2$ , et en tensorisant par  $L_0^{-1}$ , on voit que le morphisme  $d_0$  est nul sur  $Y_0$ . Par suite le morphisme  $\mathcal{O}_{Y_0} \rightarrow S^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)|_{Y_0}$  qui permet le calcul de  $d_0^*$  est nul, et donc  $d_0^*$  est nul. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Le générateur de  $\text{Ext}^1(\mathcal{G}_0, \mathcal{A})$  fournit une suite exacte de faisceaux sur  $\widehat{\text{Gr}} \times \mathbb{P}_2$ :

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}_0(1) \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow 0.$$

L'énoncé suivant donne une version plus précise du théorème 0.2 de l'introduction :

**THÉORÈME 2.7.** — (1) *Le faisceau  $\mathcal{F}_0$  est  $\widehat{\text{Gr}}$ -plat, et définit une famille de faisceaux stables de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur  $\mathbb{P}_2$ .*

(2) *Le morphisme  $\psi : \widehat{\text{Gr}} \rightarrow M$  induit par  $\mathcal{F}_0$  est l'inverse de  $\hat{\phi}$ .*

**LEMME 2.8.** — *On a  $(\hat{\phi} \times \text{id})^*(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* — Par construction de  $\hat{\phi}$ , le sous-fibré  $L \otimes A^*$  est l'image réciproque sur  $M$  du sous-fibré  $L_0^{-1} \otimes A_0^* = S$ ; d'autre part,

$\hat{\phi}^{-1}(\Sigma_0) = \Sigma$ , ce qui entraîne, compte tenu du lemme 2.2,  $L \cong \hat{\phi}^*(L_0^{-1})$ , et par suite  $A = \hat{\phi}^*(A_0)$ ; de plus, le morphisme  $d_2$ , qui se construit à partir du morphisme d'inclusion  $v : L \otimes A^* \rightarrow \mathcal{O} \otimes \Gamma(\mathcal{O}(2))$ , s'identifie à  $(\hat{\phi} \times \text{id})^*(d_0)$ . Par suite,  $\text{coker } d_2 \cong \hat{\phi}^*(\mathcal{A})$ .

D'autre part,  $(\hat{\phi} \times \text{id})^*(Y_0) = Y$ , et  $\hat{\phi}$  est transverse à  $Y_0$ , c'est-à-dire  $\text{Tor}_q^{\mathcal{O}_{\widehat{\text{Gr}}}}(\mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{O}_M) = 0$  pour  $q > 0$ . Le théorème du changement base (cf. § 2.7) peut alors s'appliquer à  $\text{Ext}^1(\mathcal{G}_0, \mathcal{A}) \cong \mathcal{O}_{Y_0}$ . Compte tenu des isomorphismes  $\mathcal{G} \cong \hat{\phi}^*(\mathcal{G}_0)$  et  $\text{coker } d_2 \cong \hat{\phi}^*(\mathcal{A})$  ceci conduit à un isomorphisme image réciproque  $\text{Ext}^1(\mathcal{G}_0, \mathcal{A}) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{G}, \text{coker } d_2)$ . Par image réciproque, la suite exacte (6) fournit alors une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{coker } d_2 \rightarrow (\hat{\phi} \times \text{id})^*(\mathcal{F}_0(1)) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

qui n'est pas scindée. Il en est de même de la suite exacte associée au morphisme d'évaluation (cf. § 2.1)  $0 \rightarrow \text{coker } d_2 \rightarrow \mathcal{F}(1) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  puisque  $\mathcal{F}$  est sans torsion. Compte tenu du lemme 2.6, ceci donne un isomorphisme  $(\hat{\phi} \times \text{id})^*(\mathcal{F}_0) \cong \mathcal{F}$ . □

Désignons provisoirement par  $\Omega$  le plus grand ouvert de  $\widehat{\text{Gr}}$  sur lequel  $\mathcal{F}_0$  est plat, et tel que tout  $s \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}_{0_s}$  soit stable. Le faisceau universel  $\mathcal{F}$  est plat sur  $M$ , et pour tout  $s \in M$ ,  $\mathcal{F}_s$  est stable; le morphisme  $\hat{\phi}$  prend donc ses valeurs dans  $\Omega$ . La propriété de module de  $M$  fournit un morphisme associé à sa famille  $\mathcal{F}_0$ :

$$\psi : \Omega \rightarrow M.$$

LEMME 2.9. — On a  $\psi \circ \hat{\phi} = \text{id}_M$ .

*Démonstration.* — Par functorialité, le morphisme  $M \rightarrow M$  associé à la famille  $(\hat{\phi} \times \text{id})^*(\mathcal{F}_0)$  n'est autre que  $\psi \circ \hat{\phi}$ . D'après le lemme 2.8, ce faisceau coïncide avec le faisceau universel  $\mathcal{F}$ , donc  $\psi \circ \hat{\phi} = \text{id}_M$ . □

*Fin de la démonstration du théorème 2.7* — Le lemme 2.9 montre que  $\hat{\phi}$  est un plongement propre de  $M$  sur une sous-variété de  $\widehat{\text{Gr}}$ . Puisque  $M$  et  $\widehat{\text{Gr}}$  sont de dimension 9, et que  $\widehat{\text{Gr}}$  est irréductible,  $\hat{\phi}$  est un isomorphisme. L'ouvert  $\Omega$  qui contient l'image de  $\phi$  est égal en fait à  $\widehat{\text{Gr}}$ , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.10 (S. A. Strømme). — On a  $\text{Pic } M \cong \mathbb{Z}^2$ .

2.7. *Appendice : théorème de changement de base.*

Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X & - F \\ & \downarrow f & \\ Y' & \rightarrow & Y \end{array}$$

où  $f$  est un morphisme propre de variétés algébriques,  $F$  un module cohérent transverse à  $Y'$ . Soient  $X' = X \times_Y Y'$ ,  $F' = F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ ,  $f' : X' \rightarrow Y'$  le morphisme obtenu à partir de  $f$  par changement de base. Il existe une suite spectrale d'aboutissement  $R^n f'_*(F')$ , de terme  $E_2$

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{-p}^{\mathcal{O}_Y} (R^q f'_*(F'), \mathcal{O}_{Y'}).$$

### 3. Le plongement $M \rightarrow \text{Gr} \times \mathbb{P}_9$ .

Dans ce qui suit, l'espace de modules  $M$  est identifié avec l'éclaté  $\widehat{\text{Gr}}$  de  $\mathbb{P}_2^*$  dans  $\text{Gr}$ ; le morphisme  $\phi : M \rightarrow \text{Gr}$  devient la projection canonique et sa restriction au diviseur exceptionnel est la projection  $\pi$  définie au paragraphe 1.3.

3.1. *Le fibré normal de  $\mathbb{P}_2^*$  dans  $\text{Gr}$ .*

Soit  $N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}}$  le fibré normal de  $\mathbb{P}_2^*$  dans  $\text{Gr}$ . La suite exacte sur  $\mathbb{P}_2^*$   $0 \rightarrow T\mathbb{P}_2^* \rightarrow T\text{Gr}|_{\mathbb{P}_2^*} \rightarrow N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}} \rightarrow 0$  et le fait que  $S|_{\mathbb{P}_2} \cong (\mathcal{O}|_{\mathbb{P}_2}(-1))^3$  montrent que ce fibré normal est de rang 7, de classe de Chern  $c_1 = 15$ . Il existe plusieurs descriptions possibles pour préciser ce fibré normal, dont nous retenons la plus remarquable.

PROPOSITION 3.1. — Soit  $J^1\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$  le fibré des jets d'ordre 1 du fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$  sur  $\mathbb{P}_2^*$ . Alors le fibré  $N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}}(-3)$  est isomorphe au noyau de l'épimorphisme canonique

$$j^1 : \mathbb{P}_2^* \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)) \rightarrow J^1\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$$

qui au couple  $(\ell, q)$  associe le jet  $j_\ell^1 q$  de  $q$  au point  $\ell$ .

*Démonstration.* — Pour donner la description du fibré normal, on utilise le fait que le projectif associé s'identifie au diviseur exceptionnel  $\Sigma$ .

Rappelons d'abord que l'on a une suite exacte sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$  (cf. § 2.4)

$$(7) \quad 0 \rightarrow \Lambda \boxtimes Q \rightarrow \mathcal{F}(1)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{O}_Y(1, -1) \rightarrow 0$$

où  $\Lambda \in \text{Pic } \Sigma$  ; ce fibré  $\Lambda$  peut s'identifier en prenant les images directes par  $\text{pr}_1$  :  $\Lambda^3 \cong A|_{\Sigma} \cong S^* \otimes L_{\Sigma}^{-1}|_{\Sigma}$  ; par suite  $\Lambda \cong \mathcal{O}_{\Sigma}(1) \otimes L_{\Sigma}^{-1}|_{\Sigma}$ . A cette suite exacte est associé un élément  $\omega$  de

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_Y(1, -1), \Lambda \boxtimes Q) \cong \text{Hom}(L_{\Sigma}, \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{O}_Y(0, -1), \text{pr}_2^*(Q)))$$

partout non nul sur  $\Sigma$ . Le faisceau  $\text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{O}_Y(0, -1), \text{pr}_2^*(Q))$  s'obtient par le changement de base  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$  à partir du faisceau

$$N = \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\mathcal{O}_D(0, -1), \text{pr}_2^*(Q))$$

où  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  sont les projections canoniques qui figurent dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{P}_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^* & & \end{array}$$

LEMME 3.2. — *Le faisceau  $N$  est un faisceau localement libre de rang 7 de classes de Chern (15,105) isomorphe à  $N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}}$ .*

*Démonstration.* — Ce faisceau est localement libre puisqu'homogène. On a évidemment  $N \cong \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_D(1,2))$ , où  $\mathcal{O}_D = \text{pr}_2^*(Q)|_D$ . La résolution de  $\mathcal{O}_D : 0 \rightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$  conduit à la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O} \otimes \Gamma(Q(1)) & \rightarrow & \mathcal{O}(1) \otimes \Gamma(Q(2)) & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\ & & \wr \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ & & \mathcal{O}^8 & & \mathcal{O}(1)^{15} & & \end{array}$$

ce qui donne les classes de Chern de  $N$ . D'autre part, le sous-fibré  $L_{\Sigma} \subset \pi^*(N)$  définit un morphisme au-dessus de  $\mathbb{P}_2^* : \Sigma \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}(N)$ . Sur l'ouvert de  $\mathbb{P}(N)$  correspondant aux extensions stables, on en construit trivialement un inverse à gauche, ce qui prouve que  $\iota$  est un plongement ; comme  $\dim \Sigma = \dim \mathbb{P}(N) = 8$ , c'est un isomorphisme. Alors, puisque  $\Sigma$  est le diviseur exceptionnel de  $M$ ,  $N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}} \cong N$  modulo  $\text{Pic}(\mathbb{P}_2^*)$ . Ces deux fibrés ayant le même degré, on a en fait  $N \cong N_{\mathbb{P}_2^*/\text{Gr}}$ , ce qui démontre le lemme. □

Considérons l'épimorphisme canonique sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$

$$\rho : \text{pr}_2^*(Q) \rightarrow \mathcal{O}_D(1, 0)$$

dont le noyau est isomorphe à  $\text{pr}_1^*(Q_{\mathbb{P}_2^*})$ . Considérons d'autre part les projections  $\text{pr}_{13}, \text{pr}_{23} : \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2 \rightrightarrows \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$ . Le morphisme  $\text{pr}_{23}^*(\rho)$  induit un morphisme

$$N \cong \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_3^*(Q)) \\ \xrightarrow{\rho_*} \text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0))).$$

Du fait que  $H^q(Q_{\mathbb{P}_2^*}) = 0$  pour tout  $q$ , il résulte que l'on a pour tout  $q$ ,  $\text{Ext}_{\text{pr}_1}^q(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_3^*(Q_{\mathbb{P}_2^*})) = 0$ , et par suite,  $\rho_*$  est un isomorphisme. Il reste à identifier le faisceau de droite.

LEMME 3.3. — *Le faisceau sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$  défini par*

$$\mathcal{E}_q = \text{Ext}_{\text{pr}_{12}}^q(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0)))$$

est nul pour  $q \neq 1$ , et  $\mathcal{E}_1$  est isomorphe à  $\mathcal{I}_\Delta^2(3, 3)$ , où  $\mathcal{I}_\Delta$  est l'idéal de la diagonale  $\Delta$  de  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$ .

Par image directe par  $\text{pr}_1$ , ceci entraîne évidemment que le faisceau

$$\text{Ext}_{\text{pr}_1}^1(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0)))$$

est isomorphe à  $\text{Ker } j^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ , ce qui, compte tenu du lemme 3.2, démontre la proposition 3.1.  $\square$

*Démonstration du lemme 3.3.* — On relève à  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  par  $\text{pr}_{13}$  la résolution  $0 \rightarrow \mathcal{O}(-1, -2) \rightarrow \mathcal{O}(-1, -1) \rightarrow \mathcal{O}_D(0, -1) \rightarrow 0$ ; les hypersurfaces  $\text{pr}_{13}^{-1}(D)$  et  $\text{pr}_{23}^{-1}(D)$  se coupent en codimension 2, ce qui implique que le faisceau  $\text{Ext}^q(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0)))$  est nul si  $q \neq 1$ , et que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_D(1, 1) \rightarrow \mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}_D(1, 2) \\ \rightarrow \text{Ext}^1(\text{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)), \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0))) \rightarrow 0.$$

Par image directe par  $\text{pr}_{12}$ , on obtient  $\mathcal{E}_q = 0$  si  $q \neq 1$ , et la suite exacte sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{Q}_{\mathbb{P}_2}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \boxtimes S^2 \mathcal{Q}_{\mathbb{P}_2}(1) \otimes \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow 0$$

associée à la section canonique de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}$ , dont le schéma des zéros est exactement la diagonale  $\Delta$  de  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$ . Si on tensorise par le faisceau  $\mathcal{O}(-3, -3)$ , on obtient la résolution standard de l'idéal  $\mathcal{I}_\Delta^2$  associé à la diagonale  $\Delta$ . □

3.2. *Le morphisme  $f: M \rightarrow \mathbb{P}_9$ .*

Considérons la variété  $M \times \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  et posons  $\mathcal{F}_{13} = \text{pr}_{13}^*(\mathcal{F})$ . L'idéal de Fitting des mineurs maximaux pour le faisceau  $R^1\text{pr}_{12*}(\mathcal{F}_{13} \otimes \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)))$  définit une hypersurface de  $M \times \mathbb{P}_2^*$  plate sur  $M$ , de degré relatif 3, et par suite un morphisme  $f: M \rightarrow \mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}(3)))$ . Pour chaque point  $s \in M$ ;  $f(s)$  est la cubique des droites de saut de  $\mathcal{F}_s$ . L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème 0.3, c'est-à-dire que le morphisme

$$(\phi, f): M \rightarrow \text{Gr} \times \mathbb{P}_9$$

est un plongement. Il suffira bien sûr de vérifier que le morphisme induit  $(\pi, f|_\Sigma): \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_9$  est un plongement; nous allons montrer qu'il provient de l'inclusion de fibrés vectoriels

$$N(-3) \rightarrow \mathbb{P}_2^* \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}(3))$$

ce qui, outre le résultat donne la description de l'image de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_9$ : il s'agit des couples  $(\ell, q)$ , où  $\ell$  est un point singulier de la cubique  $q$ .

LEMME 3.4. — *Les faisceaux sur  $M \times \mathbb{P}_2^*$ :*

$$R^1\text{pr}_{12*}(\mathcal{F}_{13} \otimes \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1))) \text{ et } \mathcal{R}_1 = \text{Ext}_{\text{pr}_{12}}^1(\mathcal{F}_{13}, \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)))$$

*ont même idéal de Fitting.*

*Démonstration.* — On utilise le fait que  $\mathcal{F}$  est le faisceau de cohomologie de la monade de Beilinson (1) sur  $M \times \mathbb{P}_2$ . Ceci conduit à la suite exacte

$$(8) \quad 0 \rightarrow B' \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}(-1) \xrightarrow{a} B \boxtimes \mathcal{O} \rightarrow R^1\text{pr}_{12*}(\mathcal{F}_{13} \otimes \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1))) \rightarrow 0.$$

L'hypersurface définie par l'idéal de Fitting est définie par l'équation  $\det a = 0$ . Pour le second faisceau, on obtient la résolution

$$0 \rightarrow B^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^2}(-1) \xrightarrow{a'} B'^* \boxtimes \mathcal{O} \rightarrow \text{Ext}_{\text{pr}_{12}}^1(\mathcal{F}_{13}, \text{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1))) \rightarrow 0$$

et l'on a  $a' = 'a(-1)$ . L'hypersurface d'équation  $\det a' = 0$  coïncide avec la précédente, d'où le lemme.  $\square$

*Démonstration du théorème 0.3.* — Puisque  $\mathcal{F}$  est plat sur  $M$ , le faisceau  $Ext^1_{pr_{12}}(\mathcal{F}_{13}|_{\Sigma}, pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)))$  coïncide avec la restriction du faisceau  $\mathcal{R}_1 = Ext^1_{pr_{12}}(\mathcal{F}_{13}, pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(0, -1)))$  à  $\Sigma \times \mathbb{P}_2$ . Pour le calculer, on relève la suite exacte (7) à  $\Sigma \times \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  et on applique le foncteur  $Hom_{pr_{12}}(\cdot, pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0)))$ . Compte tenu du fait que  $Hom_{pr_{12}}(\Lambda \boxtimes \mathcal{O} \boxtimes Q, pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0))) \cong \Lambda^*$ , on obtient la suite exacte sur  $\Sigma \times \mathbb{P}_2^*$

$$\Lambda^* \boxtimes \mathcal{O} \xrightarrow{\theta} Ext^1_{pr_{12}}(pr_{13}^*(\mathcal{O}_Y(1, -1)), pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0))) \rightarrow \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{O}(1, 0)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2^*} \rightarrow 0.$$

Le faisceau  $\mathcal{O}_Y(1, -1)$  s'obtient à partir de  $\mathcal{O}_D(1, -1)$  par le changement de base  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ , changement de base qui est plat. En vertu du lemme 3.3, cette suite exacte conduit après tensorisation par  $\mathcal{O}(1, 0)$  à la suite exacte

$$L_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \xrightarrow{\theta} (\pi \times id)^*(\mathcal{I}_{\Delta}^2(3, 3)) \rightarrow \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{O}(2, 0)|_{\Sigma \times \mathbb{P}_2^*} \rightarrow 0.$$

Il en résulte que l'hypersurface de  $\Sigma \times \mathbb{P}_2^*$  qui définit  $f|_{\Sigma}$  est le schéma des zéros du morphisme composé

$$L_{\Sigma} \boxtimes \mathcal{O} \xrightarrow{\theta} (\pi \times id)^*(\mathcal{I}_{\Delta}^2(3, 3)) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\Sigma \times \mathbb{P}_2^*}(3, 3).$$

Or, le morphisme de projection  $\rho : pr_2^*(Q) \rightarrow \mathcal{O}_D(1, 0)$  sur  $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Ext^1(\mathcal{O}_Y(1, -1), \Lambda \boxtimes Q) & \xrightarrow{\sim} & Hom(L_{\Sigma}, \pi^*(N)) \\ \lambda \downarrow & & \rho_* \downarrow \\ Ext^1(pr_{13}^*(\mathcal{O}_Y(1, -1)), \Lambda \otimes pr_{23}^*(\mathcal{O}_D(1, 0))) & \xrightarrow{\mu} & Hom(L_{\Sigma}, \pi^* pr_{1*}(\mathcal{I}_{\Delta}^2(3, 3))) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les flèches qui relient  $Ext$  globaux et  $Ext_{pr}$  locaux, compte tenu de la définition de  $N$  et du lemme 3.3 ; les flèches verticales sont induites par  $\rho$ . Par construction,  $\theta$  s'identifie à l'image de la classe canonique

$\omega \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_Y(1, -1), \Lambda \boxtimes Q)$  par le morphisme composé  $\mu \circ \lambda$ . Le morphisme  $\rho_*$  est celui qui provient de l'identification de la proposition 3.1.

Il en résulte que  $f|_\Sigma$  est défini par le sous-fibré de  $\Sigma \times H^0(\mathcal{O}(3))$  associé au morphisme composé sur  $\Sigma$

$$L_\Sigma(-3) \hookrightarrow \pi^*(N(-3)) \hookrightarrow \Sigma \times H^0(\mathcal{O}(3))$$

la première inclusion étant celle qui conduit à l'identification  $\Sigma \cong \mathbb{P}(N)$  (cf. § (3.1)), et la seconde celle qui fournit l'isomorphisme  $N(-3) \cong \text{Ker } j^1$ . Ainsi,  $(\pi, f|_\Sigma) : \Sigma \simeq \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_9$  provient d'un morphisme injectif de fibrés vectoriels sur  $\mathbb{P}_2^*$ . C'est donc un plongement.  $\square$

### 3.3. Le fibré $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1))$ .

Désignons par  $e = |\Sigma|$  la classe fondamentale de  $\Sigma$ , et par  $c_i$  les classes de Chern de l'image réciproque du fibré universel quotient sur  $\text{Gr}$ .

PROPOSITION 3.5. — On a  $c_1(f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1))) = c_1 - e$ .

*Démonstration.* — La suite exacte (8) montre que l'hypersurface de  $M \times \mathbb{P}_2^*$  qui permet la construction de  $f$  est définie par l'équation  $\det a = 0$ , où  $\det a$  est une section du fibré

$$\det B \otimes (\det B')^{-1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(3).$$

Il en résulte que  $f$  est défini par le sous-fibré de  $M \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(3))$  image du dual de  $\det B \otimes (\det B')^{-1}$ . Ainsi

$$f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1)) = \det B \otimes (\det B')^{-1}.$$

On a  $c_1(B) = -e$ , d'après le lemme 2.2; d'autre part, la monade de Beilinson (1) fournit après tensorisation par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$  et image directe par  $\text{pr}_1$  une monade sur  $M$

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \otimes V \rightarrow V^* \rightarrow 0$$

dont le faisceau de cohomologie est  $A = S^* \otimes L_\Sigma^{-1}$ . Par suite  $c_1(B') = 3c_1(B) - c_1(A) = -3e - (c_1 - 3e) = -c_1$ . Il en résulte  $c_1(f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1))) = c_1 - e$ .  $\square$

COROLLAIRE 3.6. — La classe  $2c_1 - e$  est la classe de Chern d'un faisceau inversible très ample.

#### 4. Cohomologie de $M$ et classes de Chern du faisceau universel.

##### 4.1. Cycles de Schubert [1, 4, 5].

Soient  $\text{Gr}(d, \mathbb{C}^n)$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  de  $\mathbb{C}^n$ ,  $Q_{\text{Gr}}$  le fibré universel quotient de rang  $n - d$  sur  $\text{Gr}(d, \mathbb{C}^n)$ , de classes de Chern  $c_i$ . Pour toute suite décroissante d'entiers  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq n - d$ , on pose

$$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} = \det (c_{\lambda_i + j - i})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$$

$$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_d.$$

On sait que  $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$  est un cycle effectif de degré  $2|\lambda|$ : si on pose  $a_i = n - d - \lambda_i + i$ ,  $(a_i)$  est une suite strictement croissante d'entiers tels que  $1 \leq a_i \leq n$ , et le fermé  $Z_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$  défini par les sous-espaces  $h \in \text{Gr}(d, \mathbb{C}^n)$  tels que  $\dim h \cap \mathbb{C}^{a_i} \geq i$  est irréductible, de codimension  $|\lambda|$ , et de classe fondamentale  $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ . Si  $\lambda_\alpha = 0$  pour  $\alpha \geq i + 1$ , ce cycle est noté  $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_i}$ . On a alors les résultats suivants :

(1) Les cycles de Schubert  $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$  constituent une base de  $H(\text{Gr}(d, \mathbb{C}^n), \mathbb{Z})$ .

(2) Les classes de Chern  $c_i$  engendrent l'algèbre de cohomologie entière de  $\text{Gr}(d, \mathbb{C}^n)$ . La structure multiplicative peut se calculer à partir de la formule de Pieri

$$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} c_m = \sum_{\substack{\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i-1} \\ |\lambda| = |\mu| + m}} c_{\mu_1, \dots, \mu_d}.$$

(3) Dualité de Poincaré: si  $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$  et  $c_{\mu_1, \dots, \mu_d}$  sont deux cycles de Schubert tels que  $|\lambda| + |\mu| = d(n - d)$ ,

$$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} c_{\mu_1, \dots, \mu_d} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i + \mu_{d+1-i} = n - d \text{ pour tout } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas  $d = 3$ ,  $n = 6$ , la grassmannienne  $\text{Gr} = \text{Gr}(3, \mathbb{C}^6)$  est de dimension 9. Le tableau suivant décrit dans ce cas les cycles de Schubert et les composantes de  $c_1^m$ , calculées en utilisant successivement la formule de Pieri, qui nous seront utiles pour la suite.

| $m$ | générateurs de $H^{2m}(\text{Gr})$ | $c_1^m$    |
|-----|------------------------------------|------------|
| 0   | 1                                  | 1          |
| 1   | $c_1$                              | 1          |
| 2   | $c_2, c_{11}$                      | (1, 1)     |
| 3   | $c_3, c_{21}, c_{111}$             | (1, 2, 1)  |
| 4   | $c_{31}, c_{22}, c_{211}$          | (3, 2, 3)  |
| 5   | $c_{32}, c_{311}, c_{221}$         | (5, 6, 5)  |
| 6   | $c_{33}, c_{321}, c_{222}$         | (5, 16, 5) |
| 7   | $c_{331}, c_{322}$                 | (21, 21)   |
| 8   | $c_{332}$                          | 42         |
| 9   | $c_{333}$                          | 42         |

4.2. Cohomologie entière de  $M$ .

Rappelons d'abord quelques généralités. Soient  $Y \subset X$  une sous-variété lisse d'une variété algébrique complexe lisse  $X$ , de codimension  $r$ ,  $X'$  l'éclatée de  $X$  suivant  $Y$ ,  $Y'$  le diviseur exceptionnel sur  $X'$ . Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{j} & X' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 Y & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

et désignons par  $N$  le fibré normal de  $Y$  dans  $X$ , et par  $N'$  le fibré universel quotient de rang  $r - 1$  sur  $Y' = \mathbb{P}(N)$ . En cohomologie entière, ce diagramme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q-2}(Y') & \xrightarrow{j_*} & H^q(X') \\
 \alpha \mapsto \pi^*(\alpha)_{c_{r-1}}(N') \uparrow & & \uparrow \phi^* \\
 H^{q-2}(Y') & \xrightarrow{i_*} & H^q(X)
 \end{array}$$

auquel est associé une suite exacte

$$(9) \quad 0 \rightarrow H^{q-2r}(Y) \rightarrow H^{q-2r}(Y') \oplus H^q(X) \rightarrow H^q(X') \rightarrow 0.$$

On peut écrire un résultat semblable quand on remplace les groupes de cohomologie entière par les groupes de Chow [4]. Il en résulte que le morphisme défini par la classe fondamentale  $A(X') \rightarrow H(X')$  de l'anneau de Chow de  $X'$  dans l'algèbre de cohomologie entière est un isomorphisme si c'est le cas pour  $X$  et  $Y$ .

Ceci s'applique en particulier à la situation des chapitres précédents :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{j} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{P}_2^* & \xrightarrow{i} & \text{Gr} \end{array}$$

PROPOSITION 4.1. — (1) *La cohomologie  $H(M)$  est nulle en degré impair, et  $H^p(M)$  est pour tout  $p$  un groupe abélien libre.*

(2) *Le morphisme défini par la classe fondamentale  $A(M) \rightarrow H^{\text{pair}}(M)$  de l'anneau de Chow de  $M$  dans l'anneau de cohomologie entière est un isomorphisme.*

Seule l'absence de torsion reste à vérifier. Pour  $q \leq 12$ , d'après la suite exacte (9) appliquée à notre situation, on a  $H^{q-2}(\Sigma) \oplus H^q(\text{Gr}) \cong H^q(M)$ , ce qui prouve que  $H^q(M)$  est un groupe abélien libre. Pour les autres groupes, ceci résulte du théorème de dualité de Poincaré.  $\square$

Le morphisme image réciproque  $\phi^* : H(\text{Gr}) \rightarrow H(M)$  a pour inverse à gauche le morphisme image directe  $\phi_*$ , par conséquent est injectif. Dans la suite, on identifiera  $H(\text{Gr})$  à son image dans  $H(M)$ . Rappelons que  $e$  désigne la classe fondamentale de  $\Sigma$ . La structure d'algèbre de  $H(\text{Gr})$  étant connue, on se propose de décrire la cohomologie de  $M$  comme  $H(\text{Gr})$ -algèbre, en termes de générateurs et relations.

PROPOSITION 4.2. — (1) *Les classes  $c_1e$  et  $c_{11}e$  sont divisibles par 3, et l'algèbre  $H(M)$  est engendrée, comme  $H(\text{Gr})$ -algèbre, par  $e$ ,  $\frac{1}{3}c_1e$ ,  $\frac{1}{3}c_{11}e$ .*

(2) *On a les relations dans  $H(M)$*

(i)  $(c_2 - 2c_{11})e = 0$

(ii)  $eH^6(\text{Gr}) = 0$

(iii)  $e^7 - 5c_1e^6 + 35c_{11}e^5 = 6c_{331} + 3c_{322}$ .

(3) *Le noyau de l'épimorphisme d'algèbres  $H(\text{Gr})[e, \beta_2, \beta_3] \rightarrow H(M)$  défini par  $\beta_2 \mapsto \frac{1}{3}c_1e$ ,  $\beta_3 \mapsto \frac{1}{3}c_{11}e$ , est l'idéal  $\mathcal{R}$  engendré par les relations  $3\beta_2 - c_1e = 0$ ,  $3\beta_3 - c_{11}e = 0$ ,  $c_1\beta_2 - 3\beta_3 = 0$ , et les relations (i), (ii) et (iii).*

LEMME 4.3. — Dans  $H(\text{Gr})$ , la classe fondamentale du plan  $\mathbb{P}_2^*$  est

$$|\mathbb{P}_2^*| = 6c_{331} + 3c_{322}.$$

*Démonstration.* — On sait que  $S|_{\mathbb{P}_2^*} \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1))^3$ . Si on pose  $\tau = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1))$ , on obtient  $c_1|_{\mathbb{P}_2^*} = 3\tau$ ,  $c_{11}|_{\mathbb{P}_2^*} = 3\tau^2$ , d'où il résulte  $c_2|_{\mathbb{P}_2^*} = 6\tau^2$ . Si on écrit  $|\mathbb{P}_2^*| = \lambda c_{331} + \mu c_{322}$ , la dualité de Poincaré en termes de cycles de Schubert (cf. § 4.1) montre que  $\lambda = |\mathbb{P}_2^*|c_2 = 6$ ,  $\mu = |\mathbb{P}_2^*|c_{11} = 3$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.2.* — On applique le foncteur  $j_*\pi^*$  aux égalités  $c_1|_{\mathbb{P}_2^*} = 3\tau$ ,  $c_{11}|_{\mathbb{P}_2^*} = 3\tau^2$ ; on obtient  $c_1e = 3j_*\pi^*(\tau)$  et  $c_{11}e = 3j_*\pi^*(\tau^2)$ . D'autre part, on sait que dans l'identification  $\Sigma \cong \mathbb{P}(N)$  du § 3.1, le sous-fibré universel de rang un de  $\pi^*(N)$  coïncide avec  $L_\Sigma|_\Sigma$ . Si on pose  $\eta = e|_\Sigma$ , on voit que  $H(\Sigma)$  est engendré par les monômes  $\pi^*(\tau^k)\eta^\ell$ , avec  $0 \leq k \leq 2$ , et  $\ell \leq 6$ . De la suite exacte (9), il découle que

$$H(M) = H(\text{Gr}) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2 \\ 1 \leq \ell \leq 7}} \mathbb{Z} \frac{c_1^k e^\ell}{3^k}.$$

Ainsi  $H(M)$  est engendrée, comme  $H(\text{Gr})$ -algèbre, par  $e$ ,  $\frac{1}{3}c_1e$ ,  $\frac{1}{9}c_1^2e$ .

La relation  $(c_1^2 - 3c_{11})|_{\mathbb{P}_2^*} = 0$  donne, par application du foncteur  $j_*\pi^*$ , la relation  $(c_1^2 - 3c_{11})e = 0$ , ce qui prouve (1) et fournit la relation (i), compte tenu du fait que  $c_1^2 = c_2 + c_{11}$ . Pour  $|\lambda| \geq 3$ , on a aussi  $c_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}|_{\mathbb{P}_2^*} = 0$  pour une question de degré, ce qui conduit à (ii) par application de  $j_*\pi^*$ . Enfin, la 0-suite (9) en degré  $q = 14$  donne l'égalité dans  $H^{14}(M)$

$$|\mathbb{P}_2^*| = j_*(c_6(N'))$$

où  $N^*$  est le fibré universel quotient de rang 6 de  $\pi^*(N)$  sur  $\Sigma = \mathbb{P}(N)$ . Ce fibré a pour classe de Chern totale  $c(N^*) = (1 + \eta)^{-1}\pi^*(c(N))$ , et par suite  $c_6(N') = \eta^6 - \eta^5\pi^*(c_6(N)) + \eta^4\pi^*(c_2(N))$ . D'après le lemme 3.2,  $c_1(N) = 15\tau$ ,  $c_1(N) = 105\tau^2$ . Par image directe par  $j_*$ , on obtient donc la relation (iii).

Pour vérifier (3), il suffit de calculer les nombres de Betti  $b_{2m}(M)$ , en utilisant la suite exacte (9), et de vérifier que chaque composante homogène  $\mathcal{H}^{2m}$  de l'algèbre  $\mathcal{H} = H(\text{Gr})[e, \beta_2, \beta_3]/\mathcal{R}$  (où  $\beta_i$  est de degré  $2i$ ) est un groupe abélien libre de dimension  $b_{2m}(M)$ . Nous le

faisons sous forme de tableau, en exhibant une base :

| $m$ | $b_{2m}(M)$ | base de $\mathcal{H}^{2m}$   |
|-----|-------------|--|
| 0   | 1           | 1  |
| 1   | 2           | $c_1, e$   |
| 2   | 4           | $c_2, c_{11}, \frac{1}{3}c_1e = \beta_2, e_2$                                |
| 3   | 6           | $c_3, c_{21}, c_{111}, \frac{1}{3}c_{11}e = \beta_3, \frac{1}{3}c_1e^2, e^3$ |
| 4   | 6           | $c_{31}, c_{22}, c_{211}, \frac{1}{3}c_{11}e^2, \frac{1}{3}c_1e^3, e^4$      |
| 5   | 6           | $c_{32}, c_{311}, c_{221}, \frac{1}{3}c_{11}e^3, \frac{1}{3}c_1e^4, e^5$     |
| 6   | 6           | $c_{33}, c_{321}, c_{222}, \frac{1}{3}c_{11}e^4, \frac{1}{3}c_1e^5, e^6$     |
| 7   | 4           | $c_{331}, c_{322}, \frac{1}{3}c_{11}e^5, \frac{1}{3}c_1e^6$                  |
| 8   | 2           | $c_{332}, \frac{1}{3}c_{11}e^6$  |
| 9   | 1           | $c_{333}$  |

On verra au § 4.3 que  $e, \frac{1}{3}c_1e$  et  $\frac{1}{3}c_{11}e$  sont les classes de Chern du dual de  $B$ . En particulier, la cohomologie entière de  $M$  est engendrée par les classes de Chern de  $A$  et  $B$  (cf. lemmes 4.5 et 4.6). En utilisant les relations entre les générateurs de  $H(M)$ , la dualité de Poincaré dans  $H(\text{Gr})$ , exprimée en termes de cycles de Schubert, et la formule de Pieri, on peut écrire la matrice d'intersection; nous en extrayons la partie qui nous sera utile dans ce qui suit :

PROPOSITION 4.4. — (1) *La matrice d'intersection  $H^{14}(M) \times H^4(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  est donnée par*

|                        | $c_2$ | $c_{11}$ | $\frac{1}{3}c_1e$ | $e^2$ |
|------------------------|-------|----------|-------------------|-------|
| $c_{331}$              | 1     | 0        | 0                 | 0     |
| $c_{322}$              | 0     | 1        | 0                 | 0     |
| $\frac{1}{3}c_1e^6$    | 0     | 0        | 1                 | 15    |
| $\frac{1}{3}c_{11}e^5$ | 0     | 0        | 0                 | 1     |

(2) La table de multiplication  $H^{14}(M) \times H^2(M) \rightarrow H^{16}(M)$  est donnée par le tableau suivant :

|                          |              |                          |
|--------------------------|--------------|--------------------------|
|                          | $c_1$        | $e$                      |
| $c_{331}$                | $c_{332}$    | 0                        |
| $c_{322}$                | $c_{332}$    | 0                        |
| $\frac{1}{3} c_1 e^6$    | $c_{11} e^6$ | $3c_{322} + 5c_{11} e^6$ |
| $\frac{1}{3} c_{11} e^5$ | 0            | $\frac{1}{3} c_{11} e^6$ |

4.3. Classes de Chern du faisceau universel.

Comme ci-dessus,  $e = |\Sigma|$ ,  $c_i \in H^{2i}(M)$  sont les classes de Chern du fibré universel quotient  $Q_{Gr}$  ou de son image réciproque par la projection  $\phi : M \rightarrow Gr$ ; les cycles de Schubert  $c_1, c_{11}, c_{111}$  sont les classes de Segré duales de  $Q_{Gr}$ , c'est-à-dire les classes de Chern du dual de  $S$ .

LEMME 4.5. — Les classes de Chern  $b_1, b_2, b_3$  de  $B$  sont données par

$$b_1 = -e, \quad b_2 = \frac{1}{3} c_1 e, \quad b_3 = -\frac{1}{3} c_{11} e.$$

Démonstration. — La suite exacte sur  $M \times \mathbb{P}_2$  (cf. § 2.1 et lemme 2.2)

$$0 \rightarrow L \boxtimes \mathcal{O}(-2) \rightarrow B \boxtimes \Lambda^2 Q^* \rightarrow \mathcal{O} \otimes Q^* \rightarrow \mathcal{O}_Y(1, -1) \rightarrow 0$$

conduit par tensorisation par  $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$  et image directe par  $pr_1$  à une suite exacte sur  $M$ :  $0 \rightarrow B \rightarrow \mathcal{O} \otimes V \rightarrow j_*(\mathcal{O}_\Sigma(1)) \rightarrow 0$ , où  $j$ , rappelons-le, est l'inclusion  $\Sigma \hookrightarrow M$ . Puisque la cohomologie de  $M$  est sans torsion, les classes de Chern de  $B$  se calculent à partir du caractère de Chern. De la formule de Riemann-Roch, il découle  $ch j_*(\mathcal{O}_\Sigma(1)) = j_*((td L_\Sigma)^{-1} ch \mathcal{O}_\Sigma(1))$ . D'autre part,  $S^*|_{\mathbb{P}_2} = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))^3$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} ch j_*(\mathcal{O}_\Sigma(1)) &= \frac{1}{3} (1 - \exp(-e)) ch S^* \\ &= \frac{1}{3} \left( e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{6} + \dots \right) \left( 3 + c_1 + \frac{c_1^2}{2} - c_{11} + \dots \right). \end{aligned}$$

En vertu de la suite exacte ci-dessus,  $\text{ch } B = 3 - \text{ch } j_*(\mathcal{O}_{\Sigma}(1))$ . Ceci conduit aux égalités

$$\begin{aligned} b_1 &= -e \\ \frac{e^2}{2} - b_2 &= -\frac{1}{3} \left( c_1 e - 3 \frac{e^2}{2} \right), \quad \text{d'où} \quad b_2 = \frac{1}{3} c_1 e \\ -\frac{e^3}{6} + \frac{1}{6} c_1 e^2 + \frac{1}{2} b_3 &= -\frac{1}{3} \left( \frac{e^3}{2} + e \left( \frac{c_1^2}{2} - c_{11} \right) - c_{12} \frac{e^2}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$b_3 = -\frac{1}{3} e(c_1^2 - 2c_{11}) = -\frac{1}{3} e c_{11}.$$

LEMME 4.6. — *Les classes de Chern  $a_1, a_2, a_3$  de  $A$  sont  $a_1 = c_1 - 3e$ ,  $a_2 = c_{11} - 2c_1 e + 3e^2$ ,  $a_3 = c_{111} - c_{11} e + c_1 e^2 - e^3$ .*

En effet, ces formules résultent des formules donnant les classes de Chern du produit tensoriel  $A = S^* \otimes L_{\Sigma}^{-1}$ .  $\square$

PROPOSITION 4.7. — *Soient  $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ , et  $\mathcal{F}$  le faisceau universel sur  $M \times \mathbb{P}_2$ , normalisé de sorte que  $R^1 \text{pr}_*(\mathcal{F})$  soit trivial. Alors les classes de Chern  $c_i(\mathcal{F})$  sont données pour  $i = 1, 2, 3$  par les formules*

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{F}) &= c_1 - 2e \\ c_2(\mathcal{F}) &= \left( c_{11} - \frac{4}{3} c_1 e + e^2 \right) + (c_1 - e)h + 3h^2 \\ c_3(\mathcal{F}) &= \left( c_{111} - \frac{2}{3} c_{11} e + \frac{1}{3} c_1 e^2 \right) + \left( 2c_{11} - \frac{7}{3} c_1 e + e^2 \right) h + (4c_1 - 5e)h^2. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Il est commode de commencer par le calcul des classes de Chern de  $\mathcal{F}(2)$ . Dans le groupe de Grothendieck  $K(M \times \mathbb{P}_2)$ , on peut écrire, d'après la suite spectrale de Beilinson de  $\mathcal{F}(1)$  (cf. § 2.1)

$$\mathcal{F}(2) = A \boxtimes \mathcal{O}(1) + \mathcal{O} \boxtimes Q - B \boxtimes \mathcal{O}.$$

Il est commode d'introduire les classes de Segré duales  $b_{11} = b_1^2 - b_2$ ,  $b_{111} = b_1^3 - 2b_1 b_2 + b_3$  de  $B$ , qui permettent le calcul de  $c(B)^{-1}$ . On a :

$$c(\mathcal{F}(2)) = c(A \boxtimes \mathcal{O}(1)) c(B)^{-1} (1 + h + h^2).$$

Des formules

$$c(A \boxtimes \mathcal{O}(1)) = 1 + a_1 + 3h + a_2 + 2a_1 h + 3h^2 + a_3 + a_2 h + a_1 h^2,$$

et  $c(B)^{-1} = 1 - b_1 + b_{11} - b_{111}$ , il découle

$$c_1(\mathcal{F}(2)) = a_1 - b_1 + 4h;$$

$$c_2(\mathcal{F}(2)) = a_2 - a_1b_1 + b_{11} + (3a_1 - 4b_1)h + 7h^2$$

$$c_3(\mathcal{F}(2)) = a_3 - a_2b_1 + a_1b_{11} - b_{111} + (2a_2 - 3a_1b_1 + 4b_{11})h + (4a_1 - 7b_1)h^2.$$

Pour obtenir les classes de Chern de  $\mathcal{F}$ , il suffit de remarquer que  $\mathcal{F}$  étant de rang 2, on a les relations  $c_1(\mathcal{F}(2)) = c_1(\mathcal{F}) + 4h$ ,  $c_2(\mathcal{F}(2)) = c_2(\mathcal{F}) + 2c_1(\mathcal{F})h + 4h^2$ ,  $c_3(\mathcal{F}(2)) = c_3(\mathcal{F})$ . Ceci nous permet d'exprimer les classes de Chern de  $\mathcal{F}$  en fonction de celles de  $A$  et  $B$ :

$$c_1(\mathcal{F}) = a_1 - b_1, \quad c_2(\mathcal{F}) = a_2 - a_1b_1 + b_2 + (a_1 - 2b_1)h + 3h^2$$

$$c_3(\mathcal{F}) = a_3 - a_2b_1 + a_1b_{11} - b_{111} + (2a_2 - 3a_1b_1 + 4b_{11})h + (4a_1 - 7b_1)h^2.$$

Pour obtenir ces classes de Chern en fonction de  $e$  et des  $c_i$ , il suffit d'utiliser les lemmes 4.5 et 4.6, d'où découlent les classes de Segré duales de  $B$ :

$$b_{11} = e^2 - \frac{1}{3}c_1e, \quad b_{111} = -e^3 + \frac{2}{3}c_1e^2 - \frac{1}{3}c_{11}e;$$

d'où la proposition 4.7.

**COROLLAIRE 4.8.** — *Les composantes dans  $H(M)$  des classes de Chern  $c_i(\mathcal{F})$  engendrent la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $H(M, \mathbb{Q})$ .*

Il est vraisemblable que ces composantes engendrent  $H(M)$ , mais ceci nécessite le calcul des autres classes de Chern, que nous n'avons pas examinées.

#### 4.4. Lieu singulier de $\mathcal{F}$ .

On sait [14] que  $\mathcal{F}$  est un faisceau réflexif de dimension homologique  $\leq 1$ ; en particulier, le lieu singulier de  $\mathcal{F}$  est de codimension 3; c'est le support du faisceau  $Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ . On note  $|\text{Sing } \mathcal{F}|$  la classe fondamentale du sous-schéma de  $M \times \mathbb{P}_2$  défini par l'idéal de Fitting de  $Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ .

**LEMME 4.9.** — *Dans  $H^6(M \times \mathbb{P}_2)$ , on a  $|\text{Sing } \mathcal{F}| = c_3(\mathcal{F})$ .*

Le faisceau  $\mathcal{F}$  est le faisceau de cohomologie de la monade de Beilinson  $0 \rightarrow B' \boxtimes \Lambda^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} B \boxtimes Q^* \xrightarrow{\beta} \mathcal{O} \rightarrow 0$ , où la flèche  $\beta$  est

surjective. Le noyau  $\text{Ker } \beta$  est donc un fibré vectoriel de rang 5, ce qui fournit la résolution de  $\mathcal{F}$  sur  $M \times \mathbb{P}_2$  :

$$0 \rightarrow B' \boxtimes \Lambda^2 Q^* \xrightarrow{\alpha} \text{Ker } \beta \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Par suite, l'idéal de Fitting de  $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O})$  est la variété des mineurs maximaux de  $\alpha$ . Puisque cette variété a la bonne dimension, on peut appliquer la formule de Porteous [1] pour calculer sa classe fondamentale :

$$|\text{Sing } \mathcal{F}| = c_3(\text{Ker } \beta - B' \boxtimes \Lambda^2 Q^*) = c_3(\mathcal{F}). \quad \square$$

**COROLLAIRE 4.10.** — Soit  $Z \subset M$  une surface complète qui ne rencontre pas  $\partial M$ . Alors, dans la base  $c_{331}, c_{322}, \frac{1}{3}c_1e^6, \frac{1}{3}c_{11}e^5$  de  $H^{14}(M)$ , la classe fondamentale  $|Z|$  de  $Z$  est un multiple entier de  $(29, 46, 20, -252)$ .

*Démonstration.* — La frontière  $\partial M$  correspond aux points  $s \in M$  tels que  $\mathcal{F}_s$  n'est pas localement libre. Comme  $\mathcal{F}$  est plat sur  $M$ , on a

$$\partial M = \text{pr}_1(\text{Sing } \mathcal{F}).$$

Par conséquent dire que  $Z$  ne rencontre pas  $\partial M$  revient à dire que  $Z \times \mathbb{P}_2$  ne rencontre pas  $\text{Sing } \mathcal{F}$ . En particulier, pour les classes fondamentales, on a l'équation dans  $H^{20}(M \times \mathbb{P}_2)$  :

$$\text{pr}_2^* |Z| \cdot |\text{Sing } \mathcal{F}| = 0.$$

Dans la décomposition  $H^{20}(M \times \mathbb{P}_2) = H^{18}(M) \oplus H^{16}(M)$ , cette équation est équivalente au système

$$\begin{aligned} |Z| \left( 2c_{11} - \frac{7}{3}c_1e + e^2 \right) &= 0 \\ |Z|(4c_1 - 5e) &= 0 \quad \text{dans } H^{16}(M) \end{aligned}$$

en vertu de l'expression de  $c_3(\mathcal{F})$ . Désignons par  $(\lambda, \mu, \nu, \delta)$  les composantes de  $|Z|$  dans la base standard ci-dessus de  $H^{14}(M)$ . Compte tenu des tables de multiplication (4.4), on obtient le système

$$\begin{aligned} 2\mu + 8\nu + \delta &= 0 \\ 4\lambda + 4\mu - 15\nu &= 0 \\ 21\nu + \frac{5}{3}\delta &= 0 \end{aligned}$$

système dont la résolution conduit au corollaire. □

*Remarque 4.11.* — On sait qu'en fait le fermé  $\text{Sing } \mathcal{F}$  est irréductible, et que la projection  $\text{Sing } \mathcal{F} \rightarrow \partial M$  est de degré 1 [14]. Il en résulte que  $|\partial M| = 4c_1 - 5e$ ; c'est le résultat qu'avait obtenu Strømme par une méthode voisine. D'autre part, le cycle  $2c_{11} - \frac{7}{3}c_1e + e^2$  est porté par le fermé de codimension 2 des points  $s \in M$  tels que  $\text{Sing } \mathcal{F}_s$  rencontre une droite générale donnée  $\ell \subset \mathbb{P}_2$ . Ceci donne l'interprétation des équations obtenues ci-dessus.

### 5. Les surfaces de $M$ .

L'objet de ce chapitre est de montrer que toute surface complète de  $M$  rencontre la frontière  $\partial M$ . Il s'agit donc de vérifier que les cycles obtenus dans le corollaire 4.10 ne peuvent être réalisés de manière effective.

#### 5.1. Inégalités.

LEMME 5.1. — Soit  $Z$  une surface complète de  $M$ , dont la classe fondamentale  $\omega = |Z|$  a pour composantes  $(\lambda, \mu, \nu, \delta)$  dans la base standard  $c_{331}, c_{322}, \frac{1}{3}c_1e^6, \frac{1}{3}c_{11}e^5$ , de  $H^{14}(M)$ . Alors

- (1)  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu + 9\nu + \delta \geq 0, \lambda + \mu - 3\nu \geq 0$ .
- (2) Si de plus  $Z$  est transverse au diviseur  $\Sigma, \nu \geq 0$  et  $12\nu + \delta \leq 0$ .

Dans cet énoncé,  $Z$  transverse à  $\Sigma$  signifie que les composantes irréductibles de  $Z$  ne sont pas contenues dans  $\Sigma$ .

*Démonstration.* — (1) Les classes de Chern  $c_1$  et  $c_2$  sont les classes de Chern d'un fibré vectoriel engendré par ses sections. Par conséquent, d'après Fulton et Lazarsfeld ([4], exemple 12.1.7), on peut écrire les inégalités  $\omega c_1 \geq 0, \omega c_{11} \geq 0$ . Ceci donne, compte tenu de la table de multiplication 4.4,  $\lambda \geq 0$  et  $\mu \geq 0$ . De même, le fibré  $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1))$ , de classe de Chern  $c_1 - e$ , est engendré par ses sections, donc  $\omega(c_1 - e)^2 \geq 0$ . En vertu de la table 4.4, ceci fournit l'inégalité  $\lambda + \mu + 9\nu + \delta \geq 0$ . L'inégalité  $\lambda + \mu - 3\nu \geq 0$  s'obtient en remarquant que le fibré  $F = \phi^*(\mathcal{O}_{\text{Gr}}(1)) \oplus f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(1))$  est engendré par ses sections, ce qui donne  $\omega c_2(F) = \omega c_1(c_1 - e) \geq 0$ , ce qui démontre (1).

(2) Si la surface  $Z$  est transverse à  $\Sigma, \omega e$  est la classe fondamentale d'une courbe contenue dans  $\Sigma$ . D'autre part,  $c_1$  et  $c_1 - e$  sont les

classes de Chern de fibrés de rang 1 engendrés par leurs sections, par conséquent on a encore les inégalités  $\omega c_1 \geq 0$ ,  $\omega e(c_1 - e) \geq 0$ , ce qui conduit aux inégalités  $v \geq 0$ ,  $12v + \delta \leq 0$ .  $\square$

*Remarque 5.2.* — Si la surface  $Z$  est contenue dans  $\Sigma$ , les deux dernières inégalités ne restent pas vraies. Par exemple,  $e(c_1 - e)^6$  est la classe fondamentale d'une surface contenue dans  $\Sigma$ . En tenant compte des relations dans l'algèbre de cohomologie de  $M$  (cf. proposition 4.2), on a

$$\begin{aligned} e(c_1 - e)^6 &= e^7 - 6c_1e^6 + 15c_1^2e^5 \\ &= 6c_{331} + 3c_{322} - c_1e^6 + 10c_{11}e^5. \end{aligned}$$

### 5.2. Démonstration du théorème 0.1.

Supposons qu'il existe une surface complète, irréductible  $Z$ , qui ne rencontre pas la frontière  $\partial M$ . Alors  $f: Z \rightarrow \mathbb{P}_9$  est un morphisme propre et à fibres finies d'après Barth [2]; c'est donc un morphisme fini dont l'image  $Z' = f(Z)$  est une surface complète et irréductible de  $\mathbb{P}_9$ , dont on peut calculer le degré en appliquant la formule (cf. proposition 3.5)

$$\text{degré } Z' = \frac{1}{d} |Z| (c_1 - e)^2$$

où  $d$  est le degré du morphisme induit  $Z \rightarrow Z'$  par  $f$ . La démonstration du théorème passe par l'étude des composantes irréductibles de  $f^{-1}(Z')$ .

Désignons par  $R \subset \mathbb{P}_9$  le fermé de dimension 7 des cubiques réductibles, et par  $R' \subset R$  le fermé de  $R$  des cubiques réductibles ayant un point double dégénéré ou un point triple; ce fermé est de codimension 3 dans  $\mathbb{P}_9$ . D'après la classification de Barth ([2], § 7.4), l'image de  $M^0 = M \setminus \partial M$  ne rencontre pas  $R'$ , et par suite  $Z' \cap R' = \emptyset$ . Ceci va simplifier énormément le travail pour l'étude de l'image réciproque de  $Z'$ :

LEMME 5.3. — (1) *Le morphisme  $f$  est fini au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{P}_9 \setminus R$ .*

(2) *Au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{P}_9 \setminus R'$ , les fibres de  $f$  sont au plus de dimension 1.*

*Démonstration.* — (1) Observons d'abord avec Strømme [14] que si  $F$  est un faisceau définissant un point de  $\partial M$ , il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow F' \rightarrow T \rightarrow 0$$

où  $T$  est un faisceau de torsion de longueur 1, porté par un point  $x \in \mathbb{P}_2$ , et  $F'$  un faisceau semistable de rang 2, de classes de Chern (0,2). La cubique des droites de saut de  $F$  est alors  $\gamma = \gamma' \cup \ell$ , où  $\gamma'$  est la conique des droites de saut de  $F'$ , et  $\ell$  la droite de  $\mathbb{P}_2^*$  déterminée par le point  $x$ . En particulier,  $\gamma$  est réductible. Ainsi  $f^{-1}(\mathbb{P}_9 \setminus R) \subset M^0$ . D'après Barth [2] les fibres de  $f: M^0 \rightarrow \mathbb{P}_9$  sont finies; par suite,  $f: f^{-1}(\mathbb{P}_9 \setminus R) \rightarrow \mathbb{P}_9 \setminus R$  est propre et à fibres finies, donc fini.

(2) D'après le résultat de Barth que l'on vient de citer, il suffit de vérifier que les fibres de  $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow R$  sont de dimension  $\leq 1$  au-dessus de l'ouvert  $R \setminus R'$ . Soit  $\gamma \in R$  une cubique réductible n'appartenant pas à  $R'$ ; on considère l'ensemble  $\mathcal{C}(\gamma)$  des couples  $(\ell, F')$  formés

- 1) d'une droite  $\ell \subset \gamma$ , à laquelle correspond une conique  $\gamma'$  telle que  $\gamma = \gamma' \cup \ell$ ;
- 2) d'un faisceau semistable  $F'$  de rang 2, de classes de Chern (0,2), de conique de droites de saut  $\gamma'$ .

Si la conique  $\gamma'$  est lisse, le couple  $(\ell, F')$  est uniquement déterminé par  $\gamma$ ; il n'en va plus de même si  $\gamma$  est constitué de 3 droites non concurrentes: l'ensemble  $\mathcal{C}(\gamma)$  a alors 9 éléments. En effet, 3 choix sont possibles pour la droite  $\ell$ ; quand  $\ell$  est choisie, la conique  $\gamma'$  associée est dégénérée en deux droites distinctes de  $\mathbb{P}_2^*$ , auxquelles correspondent deux points distincts  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{P}_2$ . Ceci laisse 3 possibilités pour  $F'$ : (i)  $F' = \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b$ , ou l'une des extensions; (ii)  $0 \rightarrow \mathcal{F}_b \rightarrow F' \rightarrow \mathcal{F}_a \rightarrow 0$ ; (iii)  $0 \rightarrow \mathcal{F}_a \rightarrow F' \rightarrow \mathcal{F}_b \rightarrow 0$ . Du fait que  $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = 1$ , le faisceau  $F'$  déterminé par (ii) est unique à isomorphisme près, et même chose pour (iii).

Soit  $(\ell, F') \in \mathcal{C}(\gamma)$ ; la droite  $\ell$  détermine un point  $x \in \mathbb{P}_2$  non singulier pour  $F'$ . Soient  $T_x$  le faisceau de torsion de longueur 1 associé à  $x$ ,  $\Omega_{\ell, F'}$  l'ouvert de  $\text{Hom}(F', T_x)$  des isomorphismes surjectifs  $p: F' \rightarrow T_x$  tels que le faisceau  $F_p = \text{Ker } p$  soit stable. La famille plate de faisceaux stables  $(F_p)_{p \in \Omega_{\ell, F'}}$  définit un morphisme  $\Omega_{\ell, F'} \rightarrow f^{-1}(\{\gamma\}) \cap \partial M$  qui passe évidemment au quotient par l'action de  $\mathbb{C}^*$ . On obtient ainsi un morphisme

$$\coprod_{(\ell, F') \in \mathcal{C}(\gamma)} \Omega_{\ell, F'} / \mathbb{C}^* \rightarrow f^{-1}(\{\gamma\}) \cap \partial M$$

surjectif d'après la remarque de Strømme. Le quotient  $\Omega_{\ell, F'} / \mathbb{C}^*$  s'identifie à un ouvert de la droite projective  $\mathbb{P}(F'_x)$ . Par suite  $\dim f^{-1}(\{\gamma\}) \leq 1$ . □

LEMME 5.4. — *La surface  $Z'$  rencontre  $R$  suivant un nombre fini de points.*

*Démonstration.* — Pour une question de dimension,  $R$  rencontre  $Z'$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_9$ . Montrons que  $\dim Z' \cap R = 0$ . Sinon,  $Z' \cap R$  contiendrait une courbe complète. Soit  $\mathbb{P}_5$  l'espace projectif des coniques de  $\mathbb{P}_2^*$ ; considérons le morphisme surjectif  $\rho: \mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2 \rightarrow R$  qui au couple  $(\gamma, \ell)$  formé d'une conique et d'une droite de  $\mathbb{P}_2^*$  associe la cubique  $\gamma \cup \ell$ . L'image réciproque  $\rho^{-1}(R')$  est constituée des couples  $(\gamma, \ell)$  tels que  $\gamma \cap \ell$  soit un point double; c'est une hypersurface qui s'obtient comme schéma des zéros d'une section du fibré  $\mathcal{O}(2, 2)$ : ceci traduit le fait que dans un pinceau général de droites de  $\mathbb{P}_2^*$ , il y a 2 droites tangentes à une conique donnée, et dans un pinceau général de coniques, il y a 2 coniques tangentes à une droite générale donnée. Il en résulte que  $\rho^{-1}(R')$  rencontre toute courbe complète, et, par suite,  $R'$  rencontre toute courbe complète de  $R$ . Mais on sait que  $Z'$  ne rencontre pas  $R'$ , ce qui conduit à une contradiction.  $\square$

LEMME 5.5. — *Les composantes de  $f^{-1}(Z')$  sont de dimension 2.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 5.3,  $f$  est fini au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{P}_9 \setminus R$ , par conséquent les composantes de  $f^{-1}(Z' \setminus R)$  sont de dimension 2. Compte tenu du lemme 5.3, on voit que  $f^{-1}(Z')$  est contenu dans une réunion finies de courbes et de surfaces, donc ses composantes sont de dimension  $\leq 2$ . D'autre part,  $f^{-1}(Z')$  est isomorphe à l'image réciproque de la diagonale par le morphisme  $Z' \times M \rightarrow \mathbb{P}_9 \times \mathbb{P}_9: (z, s) \rightarrow (z, f(s))$ ; d'après le lemme de Krull toutes ses composantes sont de dimension  $\geq 2$ , et, par suite, exactement 2. D'où le lemme.  $\square$

LEMME 5.6 — *La surface  $f^{-1}(Z')$  est transverse à  $\Sigma$ .*

*Démonstration.* — Il s'agit de montrer que si  $Z''$  est une composante irréductible de  $f^{-1}(Z')$ ,  $Z''$  n'est pas contenue dans  $\Sigma$ . Supposons  $Z'' \subset \Sigma$ ; alors  $Z''$  est une surface irréductible de l'ouvert  $\Sigma \setminus f^{-1}(R')$ .

Rappelons que d'après la description de  $\Sigma$  et de  $f|_{\Sigma}$  (cf. § 3.2) le morphisme  $f|_{\Sigma}$  a pour image le fermé des cubiques singulières, et que  $f|_{\Sigma}$  est fini au-dessus de  $\mathbb{P}_9 \setminus R'$ . Par  $f|_{\Sigma}$ , le fermé  $R$  a pour image réciproque un fermé irréductible de dimension 7 de  $\Sigma$ . Puisque  $\Sigma$  est lisse de dimension 8, ceci entraîne que  $f^{-1}(R) \cap \Sigma$  est une hypersurface de  $\Sigma$ , définie localement par une équation.

Du fait que  $f|_{\Sigma}$  est fini au-dessus de  $\mathbb{P}_9 \setminus R'$ , on déduit que  $f(Z'')$  est une surface complète, donc  $f(Z'') = Z'$ . Comme  $Z'$  rencontre  $R$ ,  $Z''$  rencontre l'hypersurface  $f^{-1}(R) \cap \Sigma$ ; d'après le lemme de Krull, l'intersection serait de dimension  $\geq 1$ , et son image  $Z' \cap R$  serait aussi de dimension  $\geq 1$ , ce qui contredit le lemme 5.4.

*Fin de la démonstration du théorème 0.1.* — On calcule la classe fondamentale  $|f^{-1}(Z')|$  de  $f^{-1}(Z')$ . Le lemme 5.3 implique que  $f$  est plat au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{P}_9 \setminus R$ . Par suite, pour  $i > 0$ , le support du faisceau  $Tor_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}_9}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{Z'})$  est contenu dans  $f^{-1}(Z' \cap R)$ , donc de dimension  $\leq 1$  d'après les lemmes 5.3 et 5.4. Il en résulte que l'on peut écrire dans  $H^{14}(M)$  (cf. Serre [13])

$$f^*(|Z'|) = |f^{-1}(Z')|.$$

Soit  $h$  le générateur positif de  $H^2(\mathbb{P}_9, \mathbb{Z})$ . D'après le corollaire 4.10 la classe fondamentale  $|Z|$  de  $Z$  s'écrit dans la base standard de  $H^{14}(M)$ :  $|Z| = k(29, 46, 20, -252)$ , où  $k$  est un entier  $> 0$ . Si  $d$  désigne le degré du morphisme induit par  $f: Z \rightarrow Z'$ , on obtient en lisant la table de multiplication 4.4, degré  $Z' = \frac{1}{d} |Z|(c_1 - e)^2 = \frac{3k}{d}$ . Ainsi,  $|Z'| = \frac{3k}{d} h^7$ , et  $|f^{-1}(Z')| = \frac{3k}{d} (c_1 - e)^7$  d'après la proposition 3.5. Or, on a

$$(c_1 - e)^7 = -e^7 + 7c_1 e^6 - 21c_1^2 e^5 + c_1^7.$$

D'après le tableau du § 4.1,  $c_1^7 = 21(c_{331} + c_{322})$ , et d'après les relations dans  $H(M)$ ,  $c_1^2 e^5 = 3c_{11} e^5$ , et  $e^7 = 6c_{331} + 3c_{322} + 5c_1 e^6 - 35c_{11} e^5$ . Par suite,

$$(c_1 - e)^7 = 15c_{331} + 18c_{322} + 2c_1 e^6 - 28c_{11} e^5.$$

Ainsi, dans la base standard de  $H^{14}(M)$ ,  $|f^{-1}(Z')| = \frac{3k}{d} (15, 18, 6, -84)$ . La surface  $f^{-1}(Z')$  étant la réunion de  $Z$  et d'autres éventuelles composantes de dimension 2, on a en vertu des lemmes 5.1 et 5.6

$$\frac{3k}{d} 15 \geq 29k, \quad \text{et donc} \quad d \leq \frac{45}{29}. \quad \text{Ainsi, } d = 1.$$

Mais alors  $|f^{-1}(Z')| - |Z| = k(16, 8, -2, 0)$ . En vertu du lemme 5.1 et du lemme 5.6, les trois premières composantes devraient être  $\geq 0$ , ce qui conduit à une contradiction.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Geometry of algebraic curves*, Springer-Verlag, 1985.
- [2] W. BARTH, Moduli of vector bundles on the projective plane, *Inventiones Math.*, 42 (1977), 63-91.
- [3] J.-M. DREZET et J. LE POTIER, Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur  $\mathbb{P}_2$ , *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 18 (1985), 193-244.
- [4] W. FULTON, *Intersection theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] P. A. GRIFFITHS and J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [6] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [7] A. HIRSCHOWITZ et K. HULEK, Complete families of stable vector bundles over  $\mathbb{P}_2$ . In : *Complex analysis and algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., Springer, 1194 (1986), 19-33.
- [8] K. HULEK and S. A. STRØMME, Appendix to the paper « Complete families of stable vector bundles over  $\mathbb{P}_2$  », *Lecture Notes in Math.*, Springer, 1194 (1986), 34-40.
- [9] J. LE POTIER, Fibrés stables de rang 2 sur  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , *Math. Annalen*, 241 (1979), 217-256.
- [10] J. LE POTIER, Stabilité et amplitude sur  $\mathbb{P}_2$ , *Vector bundles and differential equations*, Progress in Math. 7, Birkhauser, Boston (1980), 145-182.
- [11] J. LE POTIER, Variétés de modules de faisceaux semistables de rang élevé sur  $\mathbb{P}_2$ , *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Algebraic Geometry*, Bowdoin (1985), Volume 46 (2), 87-107.
- [12] M. MARUYAMA, Moduli of stable sheaves, II, *J. Math. Kyoto Univ.*, 18 (1978), 557-614.
- [13] J.-P. SERRE, *Algèbre locale et multiplicités* (rédigé par P. Gabriel), *Lectures Notes in Math.*, Springer, 1965.
- [14] S. A. STROMME, Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane, *Math. Z.*, 187 (1984), 405-423.

Manuscrit reçu le 14 mars 1988.

K. HULEK,  
 Mathematisches Institut  
 Universität Bayreuth  
 Postfach 10 12 51  
 D-8580 Bayreuth (R.F.A.)

&

J. LE POTIER,  
 Université Paris 7 et U.A. 212  
 Aile 45-55  
 2, place Jussieu  
 75251 Paris Cedex 05 (France).