ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN PIRIOU

Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 4 (1988), p. 173-187

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_173_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 4 (1988), 173-187.

CALCUL SYMBOLIQUE NON LINÉAIRE POUR UNE ONDE CONORMALE SIMPLE

par Alain PIRIOU

1. Notations, rappels et résultats.

Soit X une variété C^∞ de dimension n, et Σ une hypersurface C^∞ fermée de X ; pour $\mu \in \mathbb{R}$, on désigne I^μ_Σ l'espace des distributions dans X, conormales par rapport à Σ, de degré $\mu - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ (c'est l'espace noté $I^{\mu-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}(X,\Sigma)$ dans [3]) Rappelons qu'une distribution u est dans I^μ_Σ si et seulement si : u est C^∞ dans $X \backslash \Sigma$ et, au voisinage de chaque point de Σ, pour des coordonnées locales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telles que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, u est de la forme :

$$(1.1) \qquad u(x) = \int e^{ix_1\xi_1} a(x',\xi_1) d\xi_1, \qquad \text{où} \qquad x' = (x_2, \ldots, x_n)$$

et où $a \in S^\mu(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ est un symbole de degré μ avec variable de fréquence $\xi_1 \in \mathbb{R}$.

On note $N(\Sigma)$ le fibré conormal à Σ privé de sa section nulle, et on rappelle (voir [3]) que le symbole principal de $u \in I^\mu_\Sigma$ est dans $S^{\mu+1/2}(N(\Sigma), \Omega^{1/2})/S^{\mu+1/2}(N(\Sigma), \Omega^{1/2})$ où $\Omega^{1/2}$ est le fibré des demi-densités sur $N(\Sigma)$.

Lorsque $u_1, \ldots, u_r \in I^\mu_\Sigma$ avec $\mu < -1$, on sait que $f(x,u_1, \ldots, u_r) \in I^\mu_\Sigma$ si f est une fonction C^∞.

Pour $\mu < -1$, définissons $k(\mu) \in \mathbb{N}$ par

$$(1.2) \qquad -k(\mu) - 2 \leqslant \mu < -k(\mu) - 1 .$$

Mots-clés : Équation aux dérivées partielles hyberboliques non linéaires - Onde conormale, conormale classique - Symbole principal - Équations de transport.

Alors pour $u \in I_\Sigma^\mu$, on a évidemment $u \in C^{k(\mu)}(X)$ et $(Lu)_{|\Sigma} \in C^\infty(\Sigma)$ pour tout opérateur différentiel L d'ordre $\leqslant k(\mu)$.

Pour $d \in \mathbb{C}$, notons QH^d l'espace des fonctions dans $\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \neq 0\}$ qui sont quasi-homogènes de degré d par rapport à x_1, c'est-à-dire de la forme

$$u(x) = |x_1|^d \Pi^\pm (x', \mathrm{Log}\,|x_1|) \qquad \text{pour} \qquad \pm\, x_1 > 0,$$

où $\Pi^\pm$ est polynomial en Log $|x_1|$ à coefficients C^∞ en x' (voir [4], [7]). Lorsque Re $d > 0$, la transformée de Fourier partielle par rapport à ξ_1 d'une telle fonction u (u étant considérée comme fonction dans $\mathbb{R}^n$) est quasi-homogène de degré $-1-d$ par rapport à ξ_1, donc

$$QH^d \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} I_\Sigma^{\mu+\varepsilon}, \qquad \text{où} \qquad \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\}.$$

Réciproquement, si un symbole $a(x', \xi_1)$ coïncide pour $|\xi_1|$ grand avec une fonction de QH^h ($h \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, h < -1$), alors la fonction u définie par (1.1) est dans QH^d modulo C^∞, où $d = -1-h$.

Il est évident que si $u_j \in QH^{d_j}$ ($j = 1, 2$; Re $d_j > 0$), alors $u_1 u_2 \in QH^{d_1+d_2}$ est plus régulier que chacun des facteurs u_1, u_2. Pour généraliser cette propriété, nous introduisons un espace de distributions conormales « plates » sur Σ :

DÉFINITION 1.3. — *Pour* $\mu < -1$, *on désigne par* $\mathring{I}_\Sigma^\mu$ *l'idéal de* I_Σ^μ *constitué par les* $u \in I_\Sigma^\mu$ *qui s'annulent à l'ordre* $k(\mu) + 1$ *sur* Σ *(c'est-à-dire telles que* $Lu = 0$ *sur* Σ *pour tout opérateur différentiel* L *d'ordre* $\leqslant k(\mu)$, *où* $k(\mu)$ *est défini en* (1.2).

Nous démontrons alors que :

$$u_j \in \mathring{I}_\Sigma^{\mu_j} (j = 1,2; \mu_j < -1) \Rightarrow u_1 u_2 \in \mathring{I}_\Sigma^{\mu_1+\mu_2+1} \text{ si } \mu_j \notin \mathbb{Z}.$$

Nous déduisons de cette propriété une formule de linéarisation de $f(x, u_1, \ldots, u_r)$ lorsque f est C^∞ et $u_j \in I_\Sigma^\mu$ avec $\mu < -1$, formule faisant apparaître un reste dans $\mathring{I}_\Sigma^{2\mu+1}$ si $\mu \in \mathbb{Z}$.

Si $u \in I_\Sigma^\mu$ est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, scalaire réelle (l'étude des systèmes est analogue), d'ordre m :

$$f(x, u, \ldots, \partial^\alpha u, \ldots)_{|\alpha| \leqslant m} = 0$$

avec :

$\mu < -m-2$ (ou $\mu < -m$ dans le cas semi-linéaire) et

Σ simplement caractéristique pour l'opérateur linéarisé P de f en u, on montre essentiellement que le symbole principal de u vérifie l'équation de transport (linéaire) standard sur $N(\Sigma)$ correspondant à P, mais avec une erreur plus grossière que dans le cas linéaire : alors que la chute de degré est 1 dans le cas linéaire, elle ne vaut ici que min $(1, -\mu-m-2)$, ou min $(1, -\mu-m)$ dans le cas semi-linéaire. En étudiant de la même façon les équations de transport successives, on établit des résultats de propagation de propriétés du type « u est conormale classique dans le passé », résultats déjà obtenus par J. Rauch et M. Reed [7] dans le cas de systèmes semi-linéaires du premier ordre.

2. Calcul symbolique et linéarisation.

L'objet principal de ce paragraphe est d'établir le

THÉORÈME 2.1. – *Soient* $u_j \in \mathring{I}^{\mu_j}_{\Sigma}$ $(j = 1,2\,;\ \mu_j < -1)$. *Alors* $u_1 u_2 \in \mathring{I}^{\mu_1+\mu_2+1}_{\Sigma}$ *si* $\mu_j \notin \mathbb{Z}$.

Tout d'abord, il est immédiat qu'on a la

PROPOSITION 2.2. – *Soit* $u \in I^{\mu}_{\Sigma}$ *avec* $-2 \leqslant \mu < -1$. *Alors* u *est localement hölderienne d'exposant* α *pour* $0 < \alpha < -\mu - 1$.

D'autre part, on a la

PROPOSITION 2.3. – *Soient* $u \in \mathring{I}^{\mu}_{\Sigma}$ *et* $f \in C^{\infty}$ *nulle à l'ordre* p *sur* Σ. *Alors* $fu \in \mathring{I}^{\mu-p}_{\Sigma}$.

Démonstration. – On raisonne localement, avec u de la forme (1.1), et on pose $k(\mu) = k$, de sorte que $-k-2 \leqslant \mu < -k-1$. En notant $v(x) = x_1^p u(x)$, et en sous-entendant la variable x', on obtient :

$$v(x_1) = (-i)^p \int e^{ix_1\xi_1}\, \partial^p_{\xi_1} a(\xi_1)\, d\xi_1, \qquad \text{donc} \qquad v \in I^{\mu-p}_{\Sigma}.$$

Pour $0 \leqslant \ell \leqslant k+p$, il vient $v^{(\ell)}(0) = \text{cste} \int \xi_1^{\ell}\, \partial^p_{\xi_1} a(\xi_1)\, d\xi_1$. Par intégrations par parties, on obtient

$$v^{(\ell)}(0) = \text{cste} \int \partial^{p-\ell}_{\xi_1} a(\xi_1)\, d\xi_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant \ell < p,$$

et

$$v^{(\ell)}(0) = \text{cste} \int \xi_1^{\ell-p} a(\xi_1)\, d\xi_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \leqslant \ell \leqslant k+p.$$

PROPOSITION 2.4. — *$\mathring{I}^{\mu}_{\Sigma}$ est exactement l'espace de fonctions u de la forme $u = fv$ où $f \in C^{\infty}$ est nulle à l'ordre $k(\mu)$ sur Σ et où $v \in \mathring{I}^{\mu+k(\mu)}_{\Sigma}$.*

Démonstration. — Considérons $v \in I^{\mu}_{\Sigma}$, et posons $k(\mu) = k$. En raisonnant localement comme ci-dessus, la formule de Taylor donne :

$$u(x_1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_1^j}{j!} u^{(j)}(0) + \frac{x_1^k}{k!} v(x_1), \tag{2.4.1}$$

avec

$$v(x_1) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} u^{(k)}(tx_1)\, dt, \qquad v(0) = u^{(k)}(0).$$

Montrons d'abord que $v \in I^{\mu+k}_{\Sigma}$; on peut évidemment supposer que le symbole $a(\xi_1)$ de u s'annule pour $|\xi_1| \leqslant 1$, et on obtient alors

$$v(x_1) = \int e^{ix_1\xi_1} b(\xi_1)\, d\xi_1$$

avec

$$b(\xi_1) = \text{cste} \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{k-1} s^k \xi_1^k a(s\xi_1) \frac{ds}{s}.$$

En dérivant j fois par rapport à ξ_1 sous le signe somme, la fonction intégrée est majorée en module par cste $|\xi_1|^{\mu+k-j} s^{\mu+k-1}$, donc b est C^{∞} pour $\xi_1 \neq 0$ et $|b^{(j)}(\xi_1)| \leqslant \text{cste}\, |\xi_1|^{\mu+k-j}$ car $\mu + k - 1 < -1$.

D'autre part, pour $|\xi_1| \leqslant 1$, il vient :

$$\begin{aligned} |b(\xi_1)| &\leqslant \text{cste} \int_{1/|\xi_1|}^{+\infty} (s|\xi_1|)^k (1 + s|\xi|)^{\mu} |\xi_1|\, ds \\ &\leqslant C \int_1^{+\infty} t^k (1+t)^{\mu}\, dt < +\infty \end{aligned}$$

car $\mu + k < -1$. Donc $b \in S^{\mu+k}$ modulo $\mathscr{E}'$, et $v \in I^{\mu+k}_{\Sigma}$. Enfin, si $u \in \mathring{I}^{\mu}_{\Sigma}$, la formule (2.4.1) montre qu'on a bien $u = fv$ avec $f \in C^{\infty}$ nulle à l'ordre k sur Σ, et $v \in \mathring{I}^{\mu+k}_{\Sigma}$ puisque $v_{|\Sigma} = 0$. Compte tenu de la proposition 2.3, la proposition 2.4 est démontrée.

Revenons à la démonstration du théorème 2.1. Les propositions 2.3 et 2.4 permettent de se ramener au cas $-2 \leqslant \mu_1, \mu_2 < -1$. On raisonne encore localement, en sous-entendant x', et en écrivant $x_1 = x$, $\xi_1 = \xi$. En posant $u_1 u_2 = u$, on aura $u_1 = \hat{a}_1$, $u_2 = \hat{a}_2$, $u = \hat{a}$ avec

$a_1 \in S^{\mu_1}$, $a_2 \in S^{\mu_2}$, $a = a_1 * a_2$, $\int a_1(\xi)\, d\xi = 0$, $\int a_2(\xi)\, d\xi = 0$, et donc

$$a(\xi) = \int [a_1(\xi-\eta) - a_1(\xi)] a_2(\eta)\, d\eta. \tag{2.4.2}$$

1) *Étude de la contribution* $I_1(\xi)$ *de* $\{|\eta| \leqslant \alpha|\xi|\}$ *dans* (2.4.2), *avec* $0 < \alpha < 1$.

La formule des accroissements finis donne

$$|a_1(\xi-\eta) - a_1(\xi)| \leqslant C|\eta|(1+|\xi|)^{\mu_1-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} |I_1(\xi)| &\leqslant C(1+|\xi|)^{\mu_1-1} \int_{|\eta|\leqslant\alpha|\xi|} |\eta|\,|a_2(\eta)|\, d\eta \\ &\leqslant C'(1+|\xi|)^{\mu_1-1} \int_{|\eta|\leqslant\alpha|\xi|} (1+|\eta|)^{\mu_2+1}\, d\eta \\ &\qquad = C''(1+|\xi|)^{\mu_1-1}[(1+|\eta|)^{\mu_2+2}]_0^{\alpha\xi} \end{aligned}$$

car $\mu_2 + 2 \geqslant 0$, d'où $|I_1(\xi)| \leqslant C''(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2+1}$.

2) *Étude de la contribution* $I_2(\xi)$ *de* $\{|\eta| \geqslant \beta|\xi|\}$ *dans* (2.4.2), *avec* $\beta > 1$.

On obtient $|a_1(\xi-\eta)| \leqslant C(1+|\eta|)^{\mu_1} \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu_1}$, et aussi

$$|a_1(\xi) \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu_1},$$

d'où

$$|I_2(\xi)| \leqslant C'(1+|\xi|)^{\mu_1} \int_{|\eta|\geqslant\beta|\xi|} (1+|\eta|)^{\mu_2}\, d\eta = C''(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2+1}$$

car $\mu_2 + 1 < 0$.

3) *Étude de la contribution* $I_3(\xi)$ *de* $\{\alpha|\xi| \leqslant |\eta| \leqslant \beta|\xi|\}$ *dans* (2.4.2).

On suppose par exemple $\xi > 0$; pour $\eta < 0$, on raisonne comme au 1). Pour $\eta > 0$, on aura $(1-\varepsilon)\xi \leqslant \eta \leqslant (1+\varepsilon)\xi$, avec $0 < \varepsilon < 1$. La contribution de $a_1(\xi)$ dans $I_3(\xi)$ est majorée en module par :

$$|a_1(\xi)| \int_{\eta \geqslant (1-\varepsilon)\xi} |a_2(\eta)|\, d\eta, \text{ qui se majore comme au 2).}$$

La contribution de $a_1(\xi-\eta)$ dans $I_3(\xi)$ s'écrit, en posant $Z = \xi - \eta$:

$$\tilde{I}_3(\xi) = \int_{|Z|\leqslant\varepsilon\xi} a_2(Z) a_2(\xi - Z)\, dZ = J_3 + K_3,$$

où on a posé $a_2(\xi-Z) = a_2(\xi) + ZS(\xi,Z)$

$$J_3 = \int_{Z \leqslant \varepsilon\xi} a_1(Z)a_2(\xi)\,dZ, \qquad K_3 = \int_{|Z|\leqslant\varepsilon\xi} Za_1(Z)S(\xi,Z)\,dZ.$$

Puisque $\int a_1(Z)\,dZ = 0$, on a $-J_3 = a_2(\xi)\int_{|Z|\geqslant\varepsilon\xi} a_1(Z)\,dZ$

$$|J_3| \leqslant C'(1+|\xi|)^{\mu_2}\int_{|Z|\geqslant\varepsilon\xi}(1+|Z|)^{\mu_1}\,dZ \leqslant C''(1+|\xi|)^{\mu_2+\mu_1+1}$$

car $\mu_1 + 1 \leqslant 0$. D'autre part, on a $|S(\xi,Z) \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu_2-1}$ pour $Z| \leqslant \varepsilon\xi$ donc $|K_3| \leqslant C'(1+|\xi|)^{\mu_2-1}\int_{|Z|\leqslant\varepsilon\xi}|Z|\,|a_1(Z)|\,dZ$, et comme à la fin du 1) on obtient

$$|K_3| \leqslant C''(1+|\xi|)^{\mu_2+\mu_1+1} \qquad \text{car} \qquad \mu_1 + 2 \geqslant 0.$$

On a ainsi montré que $|a(\xi)| \leqslant \text{cste}\,(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2+1}$; pour prouver que

$$|a^{(j)}(\xi)| \leqslant \text{cste}\,(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2+1-j},$$

avec

$$a^{(j)}(\xi) = \int a_1(\xi-Z)a_2^{(j)}(Z)\,dZ,$$

on ne peut reprendre exactement les calculs précédents (avec μ_2 remplacée par μ_2-j) car l'hypothèse $(\mu_2-j) + 2 \geqslant 0$ n'est plus satisfaite. Il convient de remplacer (2.4.2) par

$$a^{(j)}(\xi) = \int\left[a_1(\xi-\eta) - \sum_{\ell\leqslant j} a_j^{(\ell)}(\xi)\frac{(-\eta)^\ell}{\ell\,!}\right]a_2^{(j)}(\eta)\,d\eta$$

$\left(\text{noter que } \int \eta^\ell a_2^{(j)}(\eta)\,d\eta = \text{cste}\int a_2^{(j-\ell)}(\eta)\,d\eta = 0 \text{ pour } 0 \leqslant \ell \leqslant j\right)$.

Les majorations du 1) deviennent alors

$$\begin{aligned}|I_1(\xi)| &\leqslant C(1+|\xi|)^{\mu_1-j-1}\int_{|\eta|\leqslant\alpha\,\xi|}|\eta|^{j+1}|a_2^{(j)}(\eta)|\,d\eta \\ &\leqslant C''(1+|\xi|)^{\mu_1-j+\mu_2+1} \quad \text{car} \quad \mu_2 + 2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Pour le 2), la seule différence provient de la contribution des termes

$a_1^{(\ell)}(\xi)(-\eta)^\ell/\ell\,!$; ces termes conduisent à des majorations par

$$C'(1+|\xi|)^{\mu_1-\ell}\int_{|\eta|\geqslant\beta|\xi|}(1+|\eta|)^{\mu_2-j+\ell}\,d\eta = C''(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2-j+1}$$

car $\mu_2 - j + \ell + 1 < 0$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant j$.

Pour le 3), la seule différence provient encore des termes $a_1^{(\ell)}(\xi)(-\eta)^\ell/\ell\,!$, et on procède comme au 2).

Ainsi $a \in S^{\mu_1+\mu_2+1}$, $u \in I_\Sigma^{\mu_1+\mu_2+1}$, et il reste à voir que $u \in \mathring{I}_\Sigma^{\mu_1+\mu_2+1}$.

C'est évident lorsque $\mu_1 + \mu_2 + 1 \geqslant -2$, puisque

$$u(0) = u_1(0)u_2(0) = 0.$$

Dans le cas $\mu_1 + \mu_2 + 1 < -2$, on sait que $u \in C^1$, et il s'agit de montrer que $u'(0) = 0$.

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $-\mu_1 - \mu_2 - 2 - 2\varepsilon > 1$.

La proposition 2.1 donne :

$$\begin{aligned}|u(x)| &= |u_1(x)|\,|u_2(x)| \leqslant \text{cste}\,|x|^{-\mu_1-1-\varepsilon}|x|^{-\mu_2-1-\varepsilon}\\ &= \text{cste}\,|x|^{-\mu_1-\mu_2-2-2\varepsilon},\ \text{donc } u'(0) = 0.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.5 (Linéarisation). — *Pour* $j = 1, \ldots, r$, *soient des fonctions* u_j *de la forme* $u_j = \varphi_j + v_j + w_j$, *avec* $\varphi_j \in C^\infty$, $v_j \in \mathring{I}_\Sigma^\mu$, $w_j \in \mathring{I}_\Sigma^\nu$, *toutes réelles, et* $\nu \leqslant \mu < -1$. *Soit une fonction* C^∞ *réelle* $f(x, U_1, \ldots, U_r)$. *Alors*

$$f(x,u_1,\ldots,u_r) \equiv f(x,\varphi_1+v_1,\ldots,\varphi_r+v_r) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial U_j}(x,\varphi_1,\ldots,\varphi_r)w_j$$

modulo $\mathring{I}_\Sigma^{\mu+\nu+1}$ *si* $\mu, \nu \notin \mathbb{Z}$.

Démonstration. — La formule de Taylor permet d'écrire

$$\begin{aligned}f(x,u_1,\ldots,u_r) = f(x,\varphi_1+v_1,\ldots,\varphi_r+v_r)&\\ + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial U_j}(x,\varphi_1+v_1,\ldots)w_j&\\ + \sum_{j,\ell=1}^r w_j w_\ell S_{j,\ell}(x,\varphi_1+v_1,\ldots,w_1,\ldots)&\end{aligned}$$

où les fonctions $S_{j,\ell}$ sont C^∞. On a

$$S_{j,\ell}(x, \varphi_1 + v_1, \ldots, w_1, \ldots) \in I^\mu_\Sigma,$$

donc son produit par w_ℓ est dans $\mathring{I}^\mu_\Sigma$ puisque $w_l \in \mathring{I}^\nu_\Sigma \subset \mathring{I}^\mu_\Sigma$.

Le théorème 2.1 donne $w_j w_\ell S_{j,\ell}(x, \varphi_1 + v_1, \ldots, w_1, \ldots) \in \mathring{I}^{\mu+\nu+1}_\Sigma$.

D'autre part, la même décomposition appliquée avec f remplacée par $\dfrac{\partial f}{\partial U_j}$, v_j par 0, w_j par v_j et avec $\nu = \mu$ montre que

$$\frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1 + v_1, \ldots) \equiv \frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1, \ldots) + \sum_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial U_j \partial U_\ell}(x, \varphi_1, \ldots) v_\ell \quad \text{modulo } \mathring{I}^{2\mu-1}_\Sigma.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1 + v_1, \ldots) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1, \ldots)$ modulo $\mathring{I}^\mu_\Sigma$, et le théorème 2.1 donne encore

$$\frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1 + v_1, \ldots) w_j = \frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1, \ldots) w_j \quad \text{modulo } \mathring{I}^{\mu+\nu+1}_\Sigma,$$

ce qui achève la démonstration.

3. Application aux équations non linéaires.

Pour alléger la présentation, on suppose que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais les énoncés sont valables lorsque X est une variété C^∞, avec des démonstrations analogues. On considère une équation scalaire d'ordre m

$$f(x, u, \ldots, \partial^\alpha u, \ldots)_{|\alpha| \leqslant m} = 0 \tag{3.1}$$

où la fonction $f(x, U, \ldots, U^\alpha, \ldots)_{|\alpha| \leqslant m}$ est C^∞ réelle.

Pour $u \in C^m(X, \mathbb{R})$ on note $F(x, U)$ le premier membre de (3.1), et on considère l'opérateur P linéarisé de F en u :

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial f}{\partial U_\alpha}(x, u, \ldots)\, \partial^\alpha.$$

Suivant J. Rauch et M. Reed [7] on considère une famille H de degrés telle que

(3.2) (i) $H \subset \{h \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} h < -m-2\}$

(ii) $H - \mathbb{N} \subset H$

(iii) $H + H + m + 2 \subset H$

(iv) Pour tout M réel, l'ensemble $\{h \in \mathrm{H} \mid \operatorname{Re} h \geqslant M\}$ est fini.

Il sera commode d'ordonner l'ensemble Re H en une suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$, avec (μ_j) strictement décroissante et tendant vers $-\infty$.

Proposition 3.3. — *Soit $u \in I_\Sigma^{\mu_0}$, réelle. On suppose que Σ est caractéristique pour l'opérateur linéarisé P. Si*

$$u = \varphi + \sum_{j=0}^{\ell} u_j \qquad \textit{avec} \qquad \varphi \in C^\infty,$$

$u_j \in \mathring{I}_\Sigma^{\mu_j}$ toutes réelles, et si on appelle φ_ℓ le symbole principal de u_ℓ dans $S^{\mu_\ell - 1/2}/S^{\mu_\ell - 1 + 1/2}$ (voir 1), alors

$$F(x,u) - F(x, \varphi + u_0 + \cdots u_{\ell-1}) \in I_\Sigma^{m-1+\mu_\ell},$$

et son symbole principal (dans $S^{m-1+\mu_\ell+1/2}/S^{m-1+\mu_\ell+1+1/2}$) est $(i^{-1}\mathscr{L}_{H_p} + C)\sigma_\ell$, où p est le symbole principal de P, C le symbole sous-principal de P, $\mathscr{L}_{H_p}$ la dérivée de Lie selon le champ hamiltonien H_p de p. On suppose ici μ_0, $\mu_\ell \notin \mathbb{Z}$.

Démonstration. — La proposition 2.5 montre que

$$F(x,u) \equiv F(x, \varphi + u_0 + \ldots + u_{\ell-1}) + Qu_\ell \quad \text{modulo } \mathring{I}_\Sigma^{\mu_0 + m + \mu_\ell + m + 1},$$

où

$$Q = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial f}{\partial U_\alpha}(x, \varphi, \ldots, \partial^\alpha \varphi, \ldots)\partial^\alpha.$$

Or $u - \varphi \in \mathring{I}_\Sigma^{\mu_0}$ avec $\mu_0 < -m-2$, donc $u - \varphi$ est nulle à l'ordre $m+2$ sur Σ, et les coefficients homologues des opérateurs P, Q sont égaux à l'ordre 2 sur Σ. Il en résulte que P, Q ont même champ hamiltonien et même symbole sous-principal sur $N(\Sigma)$. Donc, Σ étant caractéristique pour Q, on a $Qu_\ell \in I_\Sigma^{m-1+\mu_\ell}$, et même $Qu_\ell \in \mathring{I}_\Sigma^{m-1+\mu_\ell}$ d'après la proposition 2.3.

De plus, il est bien connu (voir [3]) que le symbole principal de Qu_ℓ (dans $S^{m-1+\mu_\ell+1/2}/S^{m-1+\mu_\ell-1+1/2}$) est donné par $(i^{-1}\mathscr{L}_{H_p} + C)\sigma_\ell$.

On conclut en remarquant que les conditions (2.2) (ii) et (iii) donnent respectivement :

$$\mu_\ell - 1 \leqslant \mu_{\ell-1} \quad \text{et} \quad \mu_0 + \mu_\ell + 2m + 1 \leqslant m - 1 + \mu_{\ell+1}$$

puisque $\mu_0 + \mu_\ell + m + 2 \in \operatorname{Re} H$ et $\mu_0 + \mu_\ell + m + 2 < \mu_\ell$ d'après (3.2) (i).

Il est utile pour la suite de donner l'expression du symbole principal de Qu_ℓ pour des coordonnées locales $x = (x_1, x')$ telles que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, toutes les hypersurfaces $\{x_1 = \text{cste}\}$ sont caractéristiques pour Q :

on pose

$$u_\ell(x) = \int e^{ix_1\xi_1} a_\ell(x', \xi_1)\, d\xi_1, \quad a_\ell \in S^{\mu_\ell}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

$$Q = \sum_{j=2}^{n} A_j(x)\, \partial_{x_1}^{m-1}\, \partial_{x_j} + B(x)\, \partial_{x_1}^{m-1} + \cdots,$$

et on obtient

$$Qu_\ell(x) \equiv \int e^{ix_1\xi_1} b_\ell(x', \xi_1)\, d\xi_1 \quad \text{modulo } I_\Sigma^{m-2+\mu_\ell}$$

avec

$$(3.3.1) \quad b_\ell = (i\xi_1)^{m-1} \left[\sum_{j=2}^{n} A_j(0, x') \frac{\partial}{\partial xj} + B(0, x') \right] a_\ell .$$

Remarque 3.4 : *Cas d'une équation semi-linéaire.* — Dans ce cas, on a

$$F(x, u) = \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x)\, \partial^\alpha u + g(x, u, \ldots, \partial^\beta u, \ldots)_{|\beta| \leqslant m-1}$$

et il est immédiat qu'on peut affaiblir les conditions (i), (iii) de (3.2) en :

$$H \subset \{h \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} h < -m\}$$
$$H + H + m \subset H .$$

Définition 3.5 (voir [4], [7]). — *Soit H une famille de degrés vérifiant les conditions* (3.2), *éventuellement affaiblies comme ci-dessus dans le cas semi-linéaire. On dit qu'une distribution u dans X est conormale classique de type H par rapport à l'hypersurface Σ si u est C^∞ dans $X \backslash \Sigma$ et si, au voisinage de chaque point de Σ, pour des coordonnées locales telles que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, u admet un développement asymptotique $u \sim \sum_{h \in H} u_h$, avec u_h quasi-homogène de degré $-1-h$ par rapport à x_1* (voir 1). *On note I_Σ^H l'espace de ces distributions.*

Le développement asymptotique précédent signifie (par exemple) que : pour tout entier positif N, la fonction $u - \sum_{\mathrm{Re}\, h \geqslant -N-1} u_h$ est de classe C^N.

Il est facile de voir que l'existence d'un tel développement asymptotique équivaut à la possibilité d'écrire u sous la forme $u(x) = \int e^{ix_1\xi_1} a(x',\xi_1)\, d\xi_1$, avec un symbole $a(x',\xi_1)$ classique de type H, en ce sens qu'il admet un développement asymptotique

$$(3.5.1) \qquad a(x',\xi_1) \sim \sum_h a_h(x',\xi_1) \qquad \text{pour} \qquad |\xi_1| \text{ grand,}$$

où $a_h(x',\xi_1)$ est quasi homogène de degré h par rapport à ξ_1.

On a donc $I_\Sigma^H \subset \bigcap_{\varepsilon<0} I_\Sigma^{\mu_0+\varepsilon}$.

THÉORÈME 3.6. — *Soit* $u \in \bigcap_{\varepsilon>0} I_\Sigma^{\mu_0+\varepsilon}$ *réelle, solution de l'équation* (3.1) :

$$f(x,u,\ldots,\partial^\alpha u,\ldots)_{|\alpha|\leqslant m} = 0\,.$$

On suppose que Σ *est simplement caractéristique pour l'opérateur linéarisé* P *de* f *en* u *(c'est-à-dire* $p=0$, $\frac{\partial p}{\partial \xi} \neq 0$ *sur* $N(\Sigma)$*).*

Si u *est conormale classique de type* H *au voisinage d'un pont* x_0 *de* Σ, *alors* u *est conormale classique de type* H *au voisinage de toute la courbe bicaractéristique* γ *de* P *tracée sur* Σ *à partir de* x_0. *Il est de même quand on remplace la propriété « u est conormale classique de type H » par « u est conormale classique de type H et* C^∞ *jusqu'au bord d'un certain côté de* Σ *».*

Démonstration. — Supposons $u \in I_\Sigma^H$ au voisinage de $x_0 \in \Sigma$; en posant $\Delta = \{x \in \gamma \,|\, u \in I_\Sigma^H$ au voisinage de $x\}$, il s'agit de montrer que Δ est fermé dans γ. Soit $\bar{x}$ dans l'adhérence de Δ dans γ. Puisque Σ est simplement caractéristique pour P, les coefficients $A_j(0,\bar{x}')$ de la formule (3.3.1) sont non tous nuls, donc après un changement de coordonnées locales x' on se ramène au voisinage de $\bar{x}$ à :

$$\frac{1}{i}\mathscr{L}_{H_p} + C = D^{-1}(x')\xi_1^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_2}D(x')$$

sur

$$N(\Sigma), \qquad \Sigma = \{x_1=0\}, \qquad \bar{x} = (0,\bar{x}_2,0), \qquad \bar{x}_2 > 0\,,$$

où la fonction D est C^∞ et ne s'annule pas, avec u définie par un symbole classique de type H si $x_2 < 0$. Il s'agit de trouver des fonctions $u_h \in QH^{-1-h}$ (pour tout x_2) telles que $u \sim \sum_{h \in H} u_h$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Supposons trouvées des fonctions $u_h \in QH^{-1-h}$ (pour tout x_2) lorsque $h \in H$, $\operatorname{Re} h \geqslant \mu_{\ell-1}$ avec

$$(3.6.1) \quad u = \varphi + \sum_{\operatorname{Re} h \geqslant \mu_{\ell-1}} u_h + v; \qquad \varphi \in C^\infty, \qquad v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathring{I}_\Sigma^{\mu_\ell + \varepsilon}$$

φ et v réelles (avec la convention que, pour $\ell = 0$, il n'y a pas de fonctions u_h).

Posons $F_\ell = F\left(x, \varphi + \sum_{\operatorname{Re} h \geqslant \mu_{\ell-1}} u_h\right)$, où on rappelle que $F(x,u) = f(x,u,\ldots,\partial^\alpha u,\ldots)_{|\alpha| \leqslant m}$.

La formule de Taylor montre que F_ℓ admet un développement asymptotique $F_\ell \sim \sum_{h \in H} V_h$, $V_h \in QH^{-1-h-m}$ mais d'autre part la proposition 3.3 donne $F_\ell \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathring{I}_\Sigma^{m-1+\mu_\ell+\varepsilon}$. Or on a le lemme élémentaire suivant :

LEMME 3.6.2. — *Soit* $\mu \in \mathbb{R}$ *et des symboles* $a_j(x',\xi_1) \in QH^{h_j}(j = 1, \ldots, N$; $h_j \in \mathbb{C}$ *deux à deux distincts,* $\operatorname{Re} h_j = \mu)$; *on pose* $a(x',\xi_1) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x',\xi_1)$.

Si $a \in S^{\mu'}$ *pour* $|\xi_1|$ *grand avec* $\mu' < \mu$, *alors* $a_j = 0$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant N$.

On en déduit que les composantes quasi-homogènes V_h de F_ℓ sont nulles si $\operatorname{Re} h > \mu_\ell - 1$, et donc de

$$F_\ell \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_\ell - 1} V_\ell \quad \text{modulo} \ \bigcap_{\varepsilon > 0} I_\Sigma^{m-1+\mu_{\ell+1}+\varepsilon}.$$

Si on désigne par $\Phi_\ell(x',\xi_1)$ le produit par $D^{-1}(X')\xi_1^{-m+1}$ de l'amplitude de la fonction F_ℓ, on obtient

$$\Phi_\ell \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_\ell} s_h(x',\xi_1) \quad \text{modulo} \ \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{\ell+1}+\varepsilon},$$

avec $s_h(x',\xi_1) \in QH^h$ (pour $\ell = 0$, on convient de poser $s_h = 0$).

Revenons à (3.6.1), en posant

$$v(x) = \int e^{ix_1\xi_1} D^{-1}(x')\sigma(x',\xi_1)\, d\xi_1, \qquad \text{où} \qquad \sigma \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\mu_\ell+\varepsilon}.$$

D'après la proposition 3.3, on a l'équation de transport :

$$\text{(3.6.3)} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x_2} + \sum_{\operatorname{Re} h=\mu_\ell} s_h \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\mu_\ell+1+\varepsilon}.$$

D'autre part on sait que v est classique pour $x_2 < 0$, donc

$$\sigma(x',\xi_1) \equiv \sum_{\operatorname{Re} h=\mu_\ell} \sigma_h(x',\xi_1) \quad \text{modulo} \bigcap_{\varepsilon<0} S^{\mu_\ell+1+\varepsilon}, \qquad \text{où} \qquad \sigma_h \in QH^h$$

et le lemme 3.6.2 montre que

(3.6.4) Pour $x_2 < 0$, l'équation (3.6.3) équivaut à $\dfrac{\partial\sigma_h}{\partial x_2} + s_h = 0$ pour $\operatorname{Re} h = \mu_\ell$.

Si on pose, en supposant par exemple $\xi_1 > 0$:

$$s_h(x',\xi_1) = \xi_1^h \sum_{j=0}^{K} C_j(x')\,(\operatorname{Log}\xi_1)^j$$

$$\sigma_h(x',\xi_1) = \xi_1^h \sum_{j=0}^{K} C_j^*(x')\,(\operatorname{Log}\xi_1)^j,$$

l'équation dans (3.6.4) équivaut à $\dfrac{\partial C_j^*}{\partial x_2} + C_j = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant K)$.

Donc pour $h \in H$ avec $\operatorname{Re} h = \mu_\ell$, on peut prolonger de façon unique les $\sigma_h(x',\xi_1)$ à x_2 quelconque de sorte que l'équation de transport dans (3.6.4) reste satisfaite. Désignons encore par σ_h ces prolongements, et posons

$$\sigma - \sum_{\operatorname{Re} h=\mu_\ell} \sigma_h = r.$$

On obtient, pour $|\xi_1|$ grand :

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \Psi, \qquad \Psi \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\mu_\ell+1+\varepsilon}$$

$$r \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\mu_\ell+1+\varepsilon} \qquad \text{pour} \qquad x_2 < 0$$

et on en déduit que $r \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\mu_\ell+1+\varepsilon}$ pour x_2 quelconque.

Si on considère $u_h \in QH^{-1-h}$ d'amplitude $D^{-1}(x')\sigma_h(x',\xi_1)$ pour $h \in H$, $\operatorname{Re} h = \mu_\ell$, on obtient

$$v = \sum_{\operatorname{Re} h=\mu_\ell} u_h + w, \qquad w \in \bigcap_{\varepsilon>0} I_\Sigma^{\mu_\ell+1+\varepsilon}$$

d'où

$$u = \tilde{\varphi} + \sum_{\operatorname{Re} h \geqslant \mu_\ell} u_h + \tilde{w} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{\varphi} \in C^\infty, \qquad \tilde{w} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathring{I}_\Sigma^{\mu_\ell+1+\varepsilon}.$$

On a donc construit par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ des fonctions $u_h (h \in H, \operatorname{Re} h = \mu_\ell)$, avec $u_h \in QH^{-1-h}$ et $u \sim \sum_{h \in H} u_h$, ce qui achève la démonstration du premier résultat énoncé dans le théorème 3.6.

Dans le cas de distributions conormales classiques et C^∞ jusqu'au bord d'un certain côté de Σ, on utilise la variante suivante du lemme 18.2.14 de [3].

LEMME 3.6.6. — *On prend* $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ *et on considère* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \cap I_\Sigma^\mu$ *avec* $u(x) = \int e^{ix_1\xi_1} a(x',\xi_1)\, d\xi_1$, $a \sim \sum_{h \in H} a_h$, $a_h \in QH^h$.

Alors $u_{|x_1>0}$ *est dans* $C^\infty(\{x_1 \geqslant 0\})$ *si et seulement si chaque* $a_h(x',\xi_1)$ *est la valeur au bord pour* ξ_1 *réel d'une fonction holomorphe en* $\xi_1 + i\eta_1$ *dans le demi-plan* $\eta_1 > 0$, *c'est-à-dire : si*

$$a_h(x',\xi_1) = \xi_1^h \sum_{j=0}^{K} C_j(x')\,(\operatorname{Log} \xi_1)^j \quad \textit{pour} \quad \xi_1 > 0,$$

alors

$$a_h(x',\xi_1) = |\xi_1|^h e^{i\pi h} \sum_{j=0}^{K} C_j(x')\,(\operatorname{Log} |\xi_1| + i\pi)^j \quad \textit{pour} \quad \xi_1 < 0.$$

En reprenant l'équation de transport (3.6.4), ce lemme montre que si on suppose de plus que u (pour $x_2 < 0$) et les u_h (pour $\operatorname{Re} h \geqslant \mu_\ell - 1$) sont C^∞ jusqu'au bord d'un certain côté de Σ, il en est de même des u_h pour $\operatorname{Re} h = \mu_\ell$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, Évolution d'une onde simple pour des équations non linéaires générales, Current Topics in PDE, Kinckuniya Co., 1985, Japon.

[2] J. M. BONY, Interaction de singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1979-1980, n° 22.

[3] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differentiel Operators, Springer-Verlag, 1985, Vol. III, IV.

[4] R. B. Melrose et N. Ritter, Interaction of Progressing Waves through a Non Linear Potential, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-1984, École Polytechnique, Centre de mathématiques, exposé n° XII.

[5] A. Piriou, Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple, C.R. Acad. Sc. Paris (janvier 1987).

[6] J. Rauch et M. Reed, Discontinuous Progressing Waves for Semilinear Systems, Comm. in Partial Differential Equations, 10 (9) (1985), 1033-1075.

[7] J. Rauch et M. Reed, Classical, Conormal, Semilinear Waves, Séminaire équations aux dérivées partielles 1985-1986, École Polytechnique, centre de mathématiques, exposé n° V.

Manuscrit reçu le 16 septembre 1987.

Alain Piriou,

Université de Nice
I.M.S.P.-Mathématique
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.