

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-YVES ÉTESSE

Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 4 (1988), p. 33-92

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_33_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_33_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RATIONALITÉ ET VALEURS DE FONCTIONS L EN COHOMOLOGIE CRISTALLINE

par Jean-Yves ETESSE

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	35
I. GYSIN ET IMAGE DIRECTE	36
1. Classe de cohomologie associée à un morphisme de cristaux et Gysin	37
1.1. Classe $s_{Y/X}^u$	37
1.2. Formule de transitivité	39
1.3. Fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux ..	39
1.4. Formule de projection	41
2. Morphisme image directe	42
II. RATIONALITÉ DE LA FONCTION L	44
1. Formule des traces de Lefschetz	44
2. Application à la fonction L	49
III. COEFFICIENTS DE LA FONCTION L	57
1. Lefschetz faible et application aux pentes	57
2. Cas d'un F -cristal unité	60
3. Cas d'un F -cristal unité à monodromie finie	61

Mots-clés: Fonctions L - Formule des traces - Cohomologie cristalline - F -Cristaux -
Complexe de De Rham-Witt à coefficients - Cohomologie étale - Groupe fondamental.

IV. VALEURS DE FONCTIONS L	69
1. Résultats de finitude pour les faisceaux $v_n(E, r)$	72
2. Expression de $\chi(X, E, r)$ et de l'action de φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$	78
3. Calculs préliminaires	79
4. Démonstration du théorème 0.1	82
5. Démonstration du théorème 0.2	83
6. Cas où E est à monodromie finie entière	86
BIBLIOGRAPHIE	90

INTRODUCTION

Dans l'exposé Bourbaki 409 ([K 1]), Katz a défini la fonction $L(X, E, t)$ attachée à une variété lisse X sur un corps fini \mathbb{F}_q de caractéristique $p > 0$, et à un F -cristal E localement libre de type fini sur X .

Katz conjecture (*loc. cit.* 6.1.1) que cette fonction L est méromorphe en la variable p -adique t . Dans le cas où X est propre et lisse sur \mathbb{F}_q (ce que nous supposerons désormais), nous résolvons par l'affirmative cette conjecture et nous obtenons même plus : $L(X, E, t)$ est une fonction rationnelle de t et on a l'expression (II, 2.2)

$$(*) \quad L(X, E, t) = \prod_{i \leq 0 \leq 2n} [\det(1 - tF|H_{\text{cris}}^i(X/W, E) \otimes_W K)]^{(-1)^{i+1}},$$

où n est la dimension de X sur \mathbb{F}_q , W l'anneau des vecteurs de Witt de \mathbb{F}_q , K le corps des fractions de W et F le Frobenius. Comme cas particulier on retrouve la rationalité des fonctions L de Grothendieck attachées à un groupe fini. La formule (*) est conséquence d'une formule des traces de Lefschetz en cohomologie cristalline (II, 1.6) : si $\gamma: X \hookrightarrow Z := X \times_{\mathbb{F}_q} X$ est le graphe du Frobenius de X , le point important est de généraliser la classe fondamentale $s_{X/Z}$ de Berthelot ([B 1]) en une classe $s_{X/Z}^u$ attachée au morphisme $u: F^*E \rightarrow E$ donné avec le F -cristal E , cette nouvelle classe ayant les mêmes propriétés de transitivité, projection et fonctorialité (I). En plus d'un théorème de Lefschetz faible, nous étudions dans la 3^e partie les coefficients de cette fonction L : si E est un F -cristal unité, $L(X, E, t)$ est une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{Z}_p .

Si E est un F -cristal unité, Katz donne une description conjecturale (*loc. cit.* 6.1.2) des zéros et pôles de L qui sont des unités p -adiques, ceci en termes de cohomologie étale du \mathbb{Z}_p -faisceau M associé à E . Nous résolvons aussi, affirmativement, cette conjecture si X est propre et lisse sur \mathbb{F}_q , en donnant une interprétation précise des zéros et pôles de L de la forme $q^r u$, où r est un entier et u une unité p -adique : ce sont les valeurs propres du Frobenius géométrique sur les groupes de cohomologie de faisceaux $v(E, r)$ (cf. II, 2.8 pour une formulation

précise). Pour $r = 0$, $v(E, 0)$ est le faisceau étale M associé à E , ce qui résout la conjecture de Katz (*loc. cit.* 6.1.2) (cf. II, 2.9).

Ces faisceaux étales $v(E, r)$ pour un F -cristal unité E jouent un grand rôle : ils permettent notamment des évaluations p -adiques de $L(X, E, t)$ quand $t \rightarrow q^{-r}$ (cf. l'introduction de la 4^e partie pour une formulation précise). Lorsque la dimension n de X est de la forme $n = 2r$, on obtient en outre un équivalent p -adique, quand $t \rightarrow q^{-r}$, du terme médian $\det(1 - tF|H^{2r}(X/W, E) \otimes_w K)$ de la fonction $L(X, E, t)$: l'outil essentiel est un théorème de dualité satisfait par les faisceaux $v(E, r)$ ([E 2]). Les évaluations p -adiques ainsi obtenues sont les prolongements naturels aux fonctions L des résultats de Milne sur « les valeurs des fonctions zêta pour des variétés sur des corps finis » ([M 4]) : ceci s'inscrit dans la ligne de travaux de Birch et Swinnerton-Dyer ([T]), Lichtenbaum ([L 1] à [L 3]), et d'autres ([B-N], [Sch]). Lorsque E est à monodromie finie entière (cf. III, 3) nous pouvons étendre au cas $l \neq p$ nos résultats précédents pour obtenir des équivalents (pour la topologie usuelle sur \mathbb{R}) de $L(X, E, q^{-s})$ et du terme médian quand $s \rightarrow r$ (cf. IV, 6).

Dans cet article l'influence de la thèse de P. Berthelot ([B 1]) apparaîtra clairement au lecteur : elle m'a servi de guide pour démontrer la rationalité de la fonction L . Je tiens à le remercier aussi pour ses conseils et les raccourcis qu'il m'a suggérés.

I. GYSIN ET IMAGE DIRECTE

Pour obtenir la formule des traces de Lefschetz pour les F -cristaux on est amené à construire d'abord, via la dualité de Poincaré, une classe de cohomologie $f_*(u)$ et celle-ci doit vérifier les propriétés habituelles de transitivité, projection et fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux. Cette dernière propriété s'établit directement sur la classe $s_{Y/X}^u$ que l'on construit au § 1 ; on montre ensuite au § 2 que $s_{Y/X}^u$ coïncide avec $f_*(u)$.

Tous les Ext^i cristallins que nous utiliserons dans cet article seront calculés sur le topos cristallin *restreint* (cf. [B 1], p. 418).

On suppose p localement nilpotent sur les schémas considérés.

1. Classe de cohomologie associée à un morphisme de cristaux et Gysin.

1.1. Classe $s_{Y/X}^u$.

1.1.0. Soient (S, I, γ) un PD -schéma, I_0 un sous PD -idéal quasi-cohérent de I , S_0 le sous-schéma fermé de S défini par I_0 , X un S_0 -schéma lisse, Y un sous-schéma fermé de X , lisse sur S_0 et de codimension d dans X , i l'immersion de Y dans X .

1.1.1. Donnons-nous d'autre part un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre F . Dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules sur le site cristallin restreint $R_{\text{cris}}(X/S)$ on dispose, comme F est plat, du morphisme

$$(1.1.1.1) \quad G_{Y/X}^F := G_{Y/X} \otimes \text{Id} : i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{Y/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F \rightarrow \mathcal{O}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F[2d]$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F) & F[2d] \end{array}$$

où $G_{Y/X}$ est le morphisme de Gysin de ([B 1], VI, (3.3.8), p. 483); $G_{Y/X}^F$ est appelé *morphisme de Gysin relatif à l'immersion i et au faisceau F* . Le morphisme $G_{Y/X}^F$ définit une classe $s_{Y/X}^F \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F), F)$ appelée *classe de cohomologie de Y dans X relativement au faisceau F* . En appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma(X/S, -)$ à $G_{Y/X}^F$ on obtient un morphisme encore noté $G_{Y/X}^F$, ou i_* :

$$(1.1.1.2) \quad i_* : \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(F)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d],$$

et appelé aussi morphisme de Gysin relatif à l'immersion i et au faisceau F (ou *image directe*).

1.1.2. Soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre), et $u : E \rightarrow i_{\text{cris}}^*(F)$ un morphisme de cristaux. L'image du couple $(i_{\text{cris}*}(u), s_{Y/X}^F)$ par l'accouplement canonique

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*}(E), i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F)) \times \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(F), F) \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*}(E), F) \end{aligned}$$

sera notée $s_{Y/X}^u$: cette classe de cohomologie fournit un morphisme dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules

$$(1.1.2.1) \quad G_{Y/X}^u : i_{\text{cris}*}(E) \rightarrow F[2d].$$

1.1.3. Soient maintenant F (resp. E) un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module (resp. et localement libre de type fini), et $E^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/S}}(E, \mathcal{O}_{X/S})$. Il existe un isomorphisme canonique

$$(1.1.3.1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^j(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(E), F) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^j(i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{Y/S}), E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$

associant à tout morphisme $v: i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(E) \rightarrow F[j]$ de la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules, le composé

$$\begin{array}{ccc} i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{Y/S}) & \xrightarrow{\text{can.}} & i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E) \xrightarrow{\text{Id}_{E^\vee} \otimes v} E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F[j] \\ & & \downarrow \wr \\ & & E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(E). \end{array}$$

Si l'on suppose de plus F localement libre et que u est un morphisme $i_{\text{cris}}^*(E) \rightarrow i_{\text{cris}}^*(F)$, l'image de $s_{Y/X}^u$ par le composé de (1.1.3.1) et du morphisme canonique

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{Y/S}), E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(\mathcal{O}_{Y/S}, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) \simeq H^{2d}(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) \end{aligned}$$

sera encore notée $s_{Y/X}^u$: cette dernière classe n'est autre que l'image par le morphisme image directe

$$i_*: H^0(Y/S, i_{\text{cris}}^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)) \rightarrow H^{2d}(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)$$

de u considéré comme élément de $H^0(Y/S, i_{\text{cris}}^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F))$, i.e.

$$(1.1.3.2) \quad s_{Y/X}^u = i_*(u).$$

1.1.4. Sous les hypothèses de 1.1.0, supposons que $Y = Y_1 \cup Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont des sous-schémas fermés de X , lisses sur S et de codimension d dans X , tels que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ et soit i_α ($\alpha=1,2$) le morphisme composé

$$Y_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} Y \xrightarrow{i} X.$$

PROPOSITION 1.1.5. — (a) Sous les hypothèses 1.1.4 soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre) et u un morphisme $E \rightarrow i_{\text{cris}}^*(F)$; notons

$$u_\alpha = j_{\alpha \text{ cris}}^*(u): j_{\alpha \text{ cris}}^*(E) \rightarrow i_{\alpha \text{ cris}}^*(F), \quad \alpha = 1, 2.$$

Alors

$$s_{Y/X}^u = s_{Y_1/X}^{u_1} + s_{Y_2/X}^{u_2}$$

dans $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*}(E), F)$.

(b) Sous les hypothèses 1.1.4, soient E un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre, u un morphisme $\mathcal{O}_{Y/S} \rightarrow i_{\text{cris}}^*(E)$ et $u_\alpha = j_{\alpha \text{cris}}^*(u)$, $\alpha = 1, 2$; alors

$$i_*(u) = i_{1*}(u_1) + i_{2*}(u_2)$$

dans $H^{2d}(X/S, E)$.

Cela résulte de la définition de $s_{Y/X}^u$ et de la propriété correspondante pour $s_{Y/X} = s_{Y/X}^{\mathcal{O}_{Y/S}}$ ([B 1], VI, 3.3.10). \square

1.2. Formule de transitivité.

1.2.1. Plaçons-nous dans les hypothèses 1.1.0; soient Z un sous-schéma fermé de Y , lisse sur S_0 , et de codimension d' dans Y , j l'immersion de Z dans Y , E un $\mathcal{O}_{Z/S}$ -module, F (resp. G) un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module (resp. $\mathcal{O}_{X/S}$ -module) localement libre, $u: E \rightarrow j_{\text{cris}}^*(F)$ (resp. $v: F \rightarrow i_{\text{cris}}^*(G)$) des morphismes de cristaux et $w = j_{\text{cris}}^*(v)_0 u: E \rightarrow (i_0 j)_{\text{cris}}^*(G)$.

PROPOSITION 1.2.2. — Sous les hypothèses 1.2.1, on a, avec la notation (1.1.2.1) :

$$G_{Z/X}^w = G_{Y/X}^v \circ i_{R \text{cris}}^*(G_{Z/Y}^u).$$

Résulte de la définition (1.1.2.1) et de ([B 1], VI, 4.2.3). \square

COROLLAIRE 1.2.3. — Sous les hypothèses 1.2.1 soient

$$i_*: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(G)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, G)[2d]$$

$$j_*: \mathbb{R}\Gamma(Z/S, j_{\text{cris}}^* i_{\text{cris}}^*(G)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(G))[2d']$$

$$(i \circ j)_*: \mathbb{R}\Gamma(Z/S, j_{\text{cris}}^* i_{\text{cris}}^*(G)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, G)[2d + 2d']$$

les morphismes de Gysin sur la cohomologie. Alors on a :

$$(i \circ j)_* = i_* \circ j_*.$$

1.3. Fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux.

1.3.1. Supposons 1.1.0 vérifié et soit $j: T \hookrightarrow Z$ une immersion fermée de codimension d , entre des schémas lisses sur S_0 , s'insérant

dans un carré cartésien au-dessus de S_0 :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow j & \square & \downarrow i \\ Z & \xrightarrow{f} & X; \end{array}$$

en particulier f est transversal à i .

1.3.2. Soit de plus E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module) localement libre. On définit pour tout entier r un homomorphisme

$$(1.3.3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^r(i_{\text{cris}*}(E), F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_{Z/S}}^r(j_{\text{cris}*}g_{\text{cris}}^*(E), f_{\text{cris}}^*(F)),$$

de la façon suivante. Par adjonction de la flèche canonique

$$i_{\text{cris}*}(E) \rightarrow f_{\text{cris}*}j_{\text{cris}*}g_{\text{cris}}^*(E) \simeq i_{\text{cris}*}g_{\text{cris}*}g_{\text{cris}}^*(E),$$

il existe tout d'abord un morphisme

$$(1.3.4) \quad f_{\text{cris}}^*i_{\text{cris}*}(E) \rightarrow j_{\text{cris}*}g_{\text{cris}}^*(E),$$

et c'est un isomorphisme : E étant localement libre, on se ramène facilement au cas $E = \mathcal{O}_{Y/S}$ ([B 1], VI, 4.3.9). Soit J^\bullet une résolution injective de $f_{\text{cris}}^*(F)$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_{Z/S}$ -modules. D'après ([B 1], IV, (2.5.3)) on a un isomorphisme canonique de complexes

$$(1.3.5) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}^\bullet(i_{\text{cris}*}(E), f_{\text{Rcris}*}(J^\bullet)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Z/S}}^\bullet(f_{\text{cris}}^*i_{\text{cris}*}(E), J^\bullet).$$

Or $L^if_{\text{cris}}^*(i_{\text{cris}*}(E)) = 0$ pour $i \geq 1$, puisque E est localement libre sur $\mathcal{O}_{Y/S}$, et que l'on a ce résultat pour $E = \mathcal{O}_{Y/S}$ ([B 1], VI, 4.3.9) ; $f_{\text{Rcris}}^*(J^\bullet)$ est donc ([B 1], VI, 4.3.6) un complexe à termes acycliques pour le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(i_{\text{cris}*}(E), -)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}^\bullet(i_{\text{cris}*}(E), f_{\text{Rcris}*}(J^\bullet))$ fournit dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules le complexe $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}^\bullet(i_{\text{cris}*}(E), \mathbb{R}f_{\text{Rcris}*}f_{\text{cris}}^*(F))$. En utilisant le morphisme canonique $F \rightarrow f_{\text{Rcris}*}f_{\text{cris}}^*(F)$ et l'isomorphisme (1.3.4) la flèche (1.3.5) donne ainsi sur la cohomologie l'homomorphisme cherché (1.3.3).

THÉOREME 1.3.6. *Supposons 1.3.1 satisfait.*

(a) *Soient E (resp. F) un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module (resp. un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module) localement libre et u un morphisme $E \rightarrow i_{\text{cris}}^*(F)$ induisant $g^*(u)$:*

$g_{\text{cris}}^*(E) \rightarrow g_{\text{cris}}^* i_{\text{cris}}^*(F)$, alors l'homomorphisme (1.3.3)

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*}(E), F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_{Z/S}}^{2d}(j_{\text{cris}*} g_{\text{cris}}^*(E), f_{\text{cris}}^*(F))$$

envoie $s_{Y/X}^u$ sur $s_{T/Z}^{g^*(u)}$.

(b) Soient E et F deux $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules localement libres, avec E de type fini, et $u: i_{\text{cris}}^*(E) \rightarrow i_{\text{cris}}^*(F)$. Alors le carré suivant, où f^* est le morphisme image inverse, est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X/S}}^{2d}(i_{\text{cris}*} i_{\text{cris}}^*(E), F) & \xrightarrow{(1.3.3)} & \text{Ext}_{\mathcal{O}_{Z/S}}^{2d}(j_{\text{cris}*} j_{\text{cris}}^* f_{\text{cris}}^*(E), f_{\text{cris}}^*(F)) \\ \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\ H^{2d}(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) & \xrightarrow{f^*} & H^{2d}(Z/S, f_{\text{cris}}^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} f_{\text{cris}}^*(F)); \end{array}$$

de plus on a $f^*(s_{Y/X}^u) = s_{T/Z}^{g^*(u)}$.

Le théorème résulte de la fonctorialité des accouplements définissant $s_{Y/X}^u$ (cf. 1.1.2) et de la propriété correspondante pour $s_{Y/X}^{\mathcal{O}_{X/S}} = s_{Y/X}^{\mathcal{O}_{X/S}}$ ([B 1], VI, 4.3). \square

1.4. Formule de projection

1.4.1. On reprend ici les hypothèses 1.1.0 en supposant de plus S et $f: X \rightarrow S$ quasi-séparés et quasi-compacts. On se donne également deux $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules localement libres E et F .

PROPOSITION 1.4.2. — Sous les hypothèses 1.4.1, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(E)) \otimes_A^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) & \xrightarrow{i^* \otimes \text{Id}} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \otimes_A^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d] \\ \downarrow \text{Id} \otimes i^* & & \downarrow \sigma_X \\ \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(E)) \otimes_A^L \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(F)) & \xrightarrow{\sigma_Y} \mathbb{R}\Gamma(Y/S, i_{\text{cris}}^*(E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)) & \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}\Gamma(X/S, (E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F)[2d]), \end{array}$$

où σ sont les morphismes de cup-produit et $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. En particulier le morphisme

$$i_* \circ i^*: \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2d]$$

est le cup-produit pour la classe $s_{Y/X} = i_*(1)$ de ([B1], VI, 3.3.6).

Résulte de la définition (1.1.1.2) de i_* par une démonstration analogue à celle de la formule de projection ([B 1], VI, 4.1.4). \square

2. Morphisme image directe.

2.1. Nous ferons les hypothèses suivantes : k est un corps de caractéristique $p > 0$, W un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques, d'indice de ramification absolu $e \leq p - 1$, de corps résiduel k , \mathfrak{m} son idéal maximal, $W_m = W/\mathfrak{m}^{m+1}$ (pour $m \in \mathbb{N}$), muni des puissances divisées définies par les puissances divisées naturelles de \mathfrak{m} , $S = \text{Spec } W_m$, $\mathcal{I} = \mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_S$, γ les puissances divisées de \mathcal{I} , $S_0 = \text{Spec } k$. Tous les schémas considérés seront supposés équidimensionnels. Soient de plus X et Y deux S_0 -schémas propres et lisses, de dimension n et q , $h: Y \rightarrow X$ un S_0 -morphisme et E un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre de type fini. Si l'on note E^\vee le dual de E , le morphisme image inverse $h^*: \mathbb{R}\Gamma(X/E^\vee) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee)$ donne par dualité

$$(h^*)^\vee: \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee), W_m) \rightarrow \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m).$$

Or la dualité de Poincaré ([B 1], VII, 2.1.3) fournit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \varepsilon_X: \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) &\simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n] \\ \text{et } \varepsilon_Y: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E) &\simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee), W_m)[-2q]; \end{aligned}$$

nous définirons le *morphisme image directe*

$$(2.2) \quad h_*: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2n-2q]$$

$$\text{par} \quad h_* = \varepsilon_X^{-1} \circ (h^*)^\vee \circ \varepsilon_Y.$$

2.3. On vérifie sans peine la transitivité du morphisme image directe (2.2) et la formule de projection (avec le diagramme 1.4.2, mais où cette fois X et Y sont propres et lisses sur S_0 et E et F localement libres de type fini sur $\mathcal{O}_{X/S}$). De plus

$$h_* \circ h^*: \mathbb{R}\Gamma(X/S, F) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, F)[2n-2q]$$

est le morphisme de cup-produit par $h_*(1) \in \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n-2q]$. On montre également la compatibilité de l'image directe à l'isomorphisme de Künneth.

Nous allons comparer la définition (2.2) du morphisme image directe à celle de (1.1.1.2).

PROPOSITION 2.4. — *Sous les hypothèses 2.1, supposons que h soit une immersion fermée de codimension $d = n - q$, alors le morphisme h_* de 2.2 est égal au morphisme de Gysin $G_{Y/X}^E$ de (1.1.1.2).*

Notons $f: X \rightarrow S$ et $g: Y \rightarrow S$ les morphismes structuraux et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee) \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E)[-2d] & \xrightarrow{\text{Id} \otimes G_{Y/X}^E} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee) \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \\
 \downarrow h^* \otimes \text{Id} & & \downarrow \sigma_X \\
 \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E^\vee) \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E)[-2d] & & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\epsilon_{X/S}} E) \\
 \downarrow \sigma_Y & \xrightarrow{G_{Y/X}^{E^\vee \otimes E}} & \downarrow \text{can.} \\
 \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*(E^\vee \otimes_{\epsilon_{X/S}} E))[-2d] & & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S}) \\
 \downarrow \text{can.} & \xrightarrow{G_{Y/X}} & \downarrow \text{Tr}_f \\
 \mathbb{R}\Gamma(Y/S, \epsilon_{Y/S})[-2d] & & W_m[-2n] \\
 \downarrow \text{Tr}_g & \xrightarrow{\text{Id}} & \\
 W_m[-2n] & &
 \end{array}$$

Le carré du haut est commutatif d'après la formule de projection (2.3) et celui du bas d'après ([B 1], VII, 2.3.1). Le carré du milieu commute car il est obtenu en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma(X/S, -)$ au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 h_{\text{cris}}^*(\mathcal{O}_{Y/S}) \otimes_{\epsilon_{X/S}} E^\vee \otimes_{\epsilon_{X/S}} E[-2d] & \xrightarrow{G_{Y/X} \otimes \text{Id}_{E^\vee \otimes E}} & \mathcal{O}_{X/S} \otimes_{\epsilon_{X/S}} E^\vee \otimes_{\epsilon_{X/S}} E \\
 \downarrow \text{Id} \otimes \text{can.} & & \downarrow \text{Id}_{\epsilon_{X/S}} \otimes \text{can.} \\
 h_{\text{cris}}^*(\mathcal{O}_{Y/S}) \otimes_{\epsilon_{X/S}} \mathcal{O}_{X/S}[-2d] & \xrightarrow{G_{Y/X} \otimes \text{Id}_{\epsilon_{X/S}}} & \mathcal{O}_{X/S} \otimes_{\epsilon_{X/S}} \mathcal{O}_{X/S}
 \end{array}$$

Par adjonction entre \otimes^L et $\mathbb{R}\text{Hom}^*$, on en déduit la commutativité du triangle

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*(E)) & & \\
 \downarrow G_{Y/X}^E & \searrow (h^*)^\vee \circ \epsilon_Y & \\
 & & \mathbb{R}\text{Hom}_{w_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n+2d] \\
 & \nearrow \epsilon_X & \\
 \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2d] & &
 \end{array}$$

ce qui donne la proposition d'après la définition de h_* (2.2). \square

II. RATIONALITÉ DE LA FONCTION L

Comme en cohomologie étale ([M 3], VI, § 3) nous allons prouver, en cohomologie cristalline cette fois, la rationalité des fonctions L par une formule des traces de Lefschetz.

1. Formule des traces de Lefschetz.

LEMME 1.1. — Soient (S, \mathcal{I}, γ) un PD-schéma quasi-compact, S_0 un sous-schéma fermé de S , défini par un sous PD-idéal quasi-cohérent de \mathcal{I} , $f_0: X \rightarrow S_0$ un morphisme lisse quasi-séparé et quasi-compact, $f: X \xrightarrow{f_0} S_0 \rightarrow S$, $Z = X \times_{S_0} X$, $h: Z \rightarrow S$, $\Delta: X \hookrightarrow Z$ l'immersion diagonale, E et F deux $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules localement libres de type fini. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}f_{X/S^*}(E) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} \mathbb{R}f_{X/S^*}(F) & \xrightarrow{k_{E,F}} & \mathbb{R}h_{Z/S^*}(p_1^*(E) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_2^*(F)) \\ & \searrow \sigma & \swarrow \Delta^* \\ & \mathbb{R}f_{X/S^*}(E \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} F) & \end{array}$$

où σ est le cup-produit, $k_{E,F}$ l'isomorphisme de Künneth, et $f_{X/S}$, $h_{Z/S}$ ont le sens habituel ([B 1], VII, 1.1.1), est commutatif.

Même démonstration que ([B 1], VII, 3.1.1.). □

LEMME 1.2. — Soient A un anneau commutatif, K^\bullet et K'^\bullet deux complexes parfaits de $D^b(A)$, n un entier et $\tau: K^\bullet \otimes_A K'^\bullet \rightarrow A[n]$ un morphisme de $D^b(A)$, définissant par adjonction un morphisme $\varepsilon: K \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(K'^\bullet, A)[n]$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^\bullet \otimes_A K'^\bullet & \xrightarrow{\tau} & A[n] \\ \downarrow \varepsilon \otimes \mathrm{Id} & & \downarrow \mathrm{Id} \\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(K'^\bullet, A) \otimes_A K'^\bullet[n] & \xrightarrow{\tau'} & A[n] \end{array}$$

où τ' est l'accouplement naturel, est commutatif.

Même démonstration que ([B 1], VII, 3.1.2.). □

1.3. Reprenons maintenant jusqu'en 1.6 inclus les hypothèses du (I, 2.1) sur S et S_0 , si bien que $S = \text{Spec } W_m$, $S_0 = \text{Spec } k$. Soient X un S_0 -schéma propre et lisse de dimension n , $f: X \rightarrow S$, et E un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre de type fini. Le lemme 1.2 montre la commutativité du diagramme

(1.3.1)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S}) \xrightarrow{\text{Tr}_f} W_m[-2n] \\ \varepsilon_X \otimes \text{Id} \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m) \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee)[-2n] & \xrightarrow{\sigma'} & W_m[-2n], \end{array}$$

où σ est le cup-produit et σ' l'accouplement naturel.

Supposons donnés de plus un S_0 -schéma propre et lisse Y de dimension q , un S_0 -morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$, un $\mathcal{O}_{Y/S}$ -module F localement libre de type fini et un homomorphisme $u: \varphi^*(F) \rightarrow E$. Nous noterons Φ^* le morphisme de complexes parfaits

$$(1.3.2) \quad \Phi^* = \mathbb{R}\Gamma(u) \circ \varphi^*: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, F) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, E),$$

composé du morphisme image inverse φ^* et de $\mathbb{R}\Gamma(X/S, u)$. Via l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/S}}(\varphi^*(F), E) \simeq \Gamma(X/S, \varphi^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)$$

$$[\text{resp. } \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F)), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E))]$$

$$\simeq \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F))^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)],$$

u [resp. $\mathbb{R}\Gamma(u)$] définit un morphisme $u': W_m \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)$

[resp. $u'': W_m \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F))^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$] s'insérant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes u''} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F)) \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F))^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) & \xrightarrow{\sigma' \otimes \text{Id}} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \\ \text{Id} \downarrow & & & & \downarrow \text{Id} \\ \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes u'} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F)) \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, \varphi^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E) & \xrightarrow{\sigma_X} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \end{array}$$

i.e. ([B 1], VII, démonstration de 3.1.5) :

$$(1.3.3) \quad \mathbb{R}\Gamma(u) = \sigma_X \circ (\text{Id} \otimes u').$$

LEMME 1.4. — Sous les hypothèses 1.3, soient $Z = X \times_{s_0} Y$ de projections p_1 et p_2 sur X et Y , $\gamma: X \rightarrow Z$ le morphisme graphe de φ et $u_\Phi: \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_1^*(E))[2q]$ le morphisme de cup-produit par $\gamma_*(u) \in H^{2q}(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))$, où u est vu comme élément de $\Gamma(X/S, \gamma^*(p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E)))$. Alors on a

$$(1.4.1) \quad \Phi^* = p_{1*} \circ u_\Phi \circ p_2^*.$$

Par définition on a $\Phi^* = p_{1*} \circ \gamma_* \circ \sigma_X \circ (\gamma^* \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes u') \circ p_2^*$, et donc, par la formule de projection (I, 2.3),

$$\Phi^* = p_{1*} \circ \sigma_Z \circ (\text{Id} \otimes \gamma_*) \circ (\text{Id} \otimes u') \circ p_2^*,$$

où σ_Z est le cup-produit

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F)) \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q] \\ \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_1^*(E))[2q]. \end{aligned}$$

Comme la classe de cohomologie $\gamma_*(u)$ définit un morphisme $W_m \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q]$ composé de u' et γ_* , la formule (1.4.1) en résulte. \square

Ce lemme 1.4 et la commutativité de (1.3.1) fournissent alors par la méthode de ([B 1], VII, 3.1.5) le lemme :

LEMME 1.5. — Sous les hypothèses 1.4, la suite d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\text{Hom}_{w_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, F), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\Gamma(Y/S, F)^\vee \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \\ & & \downarrow \wr \varepsilon_Y^{-1} \otimes \text{Id} \\ \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(F^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2q] & \xleftarrow[k_{F^\vee, E}]{\sim} & \mathbb{R}\Gamma(Y/S, F^\vee) \otimes_{w_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2q] \end{array}$$

où $k_{F^\vee, E}$ est l'isomorphisme de Künneth, identifie la classe de Φ^* dans $\mathbb{R}\text{Hom}_{w_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(Y/S, F), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E))$ à $\gamma_*(u)$.

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème suivant, où, pour un corps parfait k' de caractéristique $p > 0$, $W(k')$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt de k' et $W_m(k') = W(k')/p^m W(k')$; nous noterons X^φ le schéma des points fixes de φ et, pour $x \in X^\varphi$, j_x l'inclusion $\text{Spec}(k(x)) \hookrightarrow X$. Lorsque k est parfait, $F = E$ et $x \in X^\varphi$,

nous considérerons le module

$$E_x := (j_{x\text{cris}}^*(E))(\text{Spec}(k(x)), \text{Spec } W_m(k(x))) :$$

c'est un $W_m(k(x))$ -module libre de type fini, et un $W_m(k)$ -module libre de type fini ; dans ce dernier cas nous le noterons \tilde{E}_x et $\tilde{u}_x : \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{E}_x$ désignera l'endomorphisme induit par u .

THÉORÈME 1.6. — Soient S comme en 1.3, X un schéma propre et lisse sur k , de dimension n , $f : X \rightarrow S$, $h : Z = X \times_{S_0} X \rightarrow S$, $\varphi : X \rightarrow X$ un k -endomorphisme de X , de morphisme graphe $\gamma : X \rightarrow Z$, E un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module localement libre de type fini muni d'un morphisme $u : \varphi^*(E) \rightarrow E$. Si $\text{Tr } \Phi^*$ est la trace de l'endomorphisme $\Phi^* = \mathbb{R}\Gamma(u)_0 \varphi^*$ du complexe parfait $\mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$, alors

i) (1.6.1) $\text{Tr } \Phi^* = \text{Tr}_f \circ \alpha \circ \Delta^*(\gamma_*(u))$,
où α est la flèche canonique

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n],$$

et

$$\gamma_*(u) \in H^{2n}(Z/S, p_2^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E)).$$

ii) Supposons de plus que k soit parfait et que le graphe de φ et la diagonale de Z se coupent transversalement ; dans ce cas on a la formule des traces de Lefschetz :

$$(1.6.2) \quad \text{Tr } \Phi^* = \sum_{x \in X^0} \text{Tr } \tilde{u}_x.$$

Par définition ([SGA 6], I, 8.1) la trace de Φ^* est l'image par le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\text{Hom}_{W_m}^*(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E), \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)) \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \xrightarrow{\sigma'} W_m \end{aligned}$$

de la classe de cohomologie définie par Φ^* . Soient c' l'image de celle-ci dans $\mathbb{R}\Gamma(X/S, E)^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$ et Δ l'immersion diagonale de X dans Z . Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)^\vee \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) & \xrightarrow{\sigma'} & W_m \\ \downarrow \varepsilon_X^1 \otimes \text{Id} & & \downarrow \text{Id} \\ \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee) \otimes_{W_m}^L \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2n] & \xrightarrow{\sigma_X} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n] \xrightarrow{\text{Tr}_f} W_m \\ \downarrow k_{E^\vee, E} & \nearrow \Delta^* & \\ \mathbb{R}\Gamma(Z/S, p_2^*(E^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_{Z/S}} p_1^*(E))[2n] & & \end{array}$$

le rectangle du haut est commutatif d'après (1.3.1) et le triangle du bas d'après 1.1. Puisque $k_{EE^\vee, E} \circ (e_X^1 \otimes \text{Id})(c') = \gamma_*(u)$ (cf. 1.5), on a

$$\text{Tr } \Phi^* = \text{Tr}_f \circ \alpha \circ \Delta^*(\gamma_*(u)).$$

Pour ii) considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } k(x) & \xrightarrow{j'_x} & T & \xrightarrow{i'} & X \\ & \searrow j_x & \downarrow j' & \square & \downarrow \Delta \\ & & X & \xrightarrow[\gamma]{} & X \times_{S_0} X = Z, \end{array}$$

où le carré est cartésien et j'_x l'inclusion d'un point de $T = X^\circ$ dans T . Puisque γ et Δ sont transverses, T est formé de points fermés lisses sur S_0 , d'où, d'après (I, 1.3.6 (b) et 2.4)

$$\Delta^*(\gamma_*(u)) = i'_*(j'^*(u));$$

de plus, par l'additivité (I, 1.1.5 (b)) on a

$$i'_*(j'^*(u)) = \sum_{x \in T} j_{x*}(u_x),$$

où $u_x := j_x^*(u) \in \Gamma(\text{Spec}(k(x))/S, j_x^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)) \simeq \text{Hom}_{W_m(k(x))}(E_x, E_x)$.

Soit $f_0: X \rightarrow S_0$ le morphisme structural. Comme $\text{Tr}_f = (f_0)_*$ ([B 1], VII, 2.2.4), que le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma(\text{Spec}(k(x))/S, j_x^*(E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)) & \xrightarrow{j_{x*}} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/S}} E)[2n] \\ \chi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{R}\Gamma(\text{Spec}(k(x))/S, \mathcal{O}_{\text{Spec}(k(x))/S}) & \xrightarrow{j_{x*}} & \mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathcal{O}_{X/S})[2n], \\ \downarrow \wr & & \\ W_m(k(x)) & & \end{array}$$

où χ est la flèche canonique, et que $\chi(u_x)$ est la trace $\text{Tr}(u_x)$ de u_x , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Tr } \Phi^* &= \sum_{x \in T} (f_0)_* \circ (j_x)_*(\text{Tr}(u_x)) \\ &= \sum_{x \in T} \text{Tr}_{W_m(k(x))/W_m(k)}(\text{Tr}(u_x)) \\ &= \sum_{x \in T} \text{Tr}(\tilde{u}_x) \quad ([\text{Bour}], \text{ A III, prop. 6, p. 112}), \end{aligned}$$

car

$$(f_0 \circ j_x)_* : \mathbb{R}\Gamma(\mathrm{Spec}(k(x))/S, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k(x))/S}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(S_0/S, \mathcal{O}_{S_0/S})$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \wr & \\ & W_m(k(x)) & \\ & \downarrow \wr & \\ & W_m(k) & \end{array}$$

est la trace $\mathrm{Tr}_{W_m(k(x))/W_m(k)}$. \square

1.7. Plaçons-nous dans l'hypothèse 1.6 (ii). Pour $x \in X^\circ$, u induit un endomorphisme \tilde{u}_x du W -module libre \tilde{E}_x (notations par analogie avec 1.6 en passant à la limite sur m).

Comme dans ([B1], VII, 3.1.10) il existe un complexe strictement parfait de W -modules L^\bullet et un endomorphisme ψ de L^\bullet tel que, dans l'isomorphisme de $D^b(W_m)$

$$(1.7.1) \quad L_m^\bullet : L^\bullet \otimes_W W_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(X/W_m, E),$$

l'endomorphisme ψ_m de L_m^\bullet , induit par ψ , corresponde à l'endomorphisme Φ_m^* de $\mathbb{R}\Gamma(X/W_m, E)$ défini par φ et u à la manière (1.3.2). On a donc

$$\mathrm{Tr} \psi_m = \mathrm{Tr} \Phi_m^*,$$

d'où, par passage à la limite projective dans (1.6.2) :

COROLLAIRE 1.7.2. — Avec les notations précédentes on a :

$$\mathrm{Tr} \psi = \sum_{x \in X^\circ} \mathrm{Tr} (\tilde{u}_x).$$

2. Application à la fonction L .

Soient X un schéma propre et lisse sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$ à $q = p^a$ éléments, n la dimension de X sur k , $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k , K le corps des fractions de W et E un F -cristal (i.e. un cristal E muni de $u : F^*E \rightarrow E$, où F^*E est l'image inverse de E par le Frobenius absolu F de X , F étant l'identité sur l'espace sous-jacent et la puissance $q^{\text{ième}}$ sur le faisceau \mathcal{O}_X) localement libre de type fini sur X . Le couple (F, u) induit un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$ noté F_E (ou Φ^*), et pour tout entier i un endomorphisme de $H^i(X/W, E)$ noté $F_{i,E}$ (ou F).

On dira que E est un F -cristal non dégénéré de niveau N s'il existe de plus un morphisme $v: E \rightarrow F^*E$ et un entier N tels que $u \circ v = q^N$ et $v \circ u = q^N$; si $N = 0$ on dit que E est un F -cristal unité.

Soit Δ_m l'ensemble des points de X à valeurs dans \mathbb{F}_{q^m} de degré exactement m , i.e.

$$\Delta_m = \{e: \text{Spec}(\mathbb{F}_{q^m}) \rightarrow X/e \text{ d'image } x, \text{ tel que } k(x) \simeq \mathbb{F}_{q^m}\}.$$

Pour $e \in \Delta_m$, posons

$$e^*(E) := \varprojlim_r (e_{\text{cris}}^*(E))(\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^m}), \text{Spec}(W_r(\mathbb{F}_{q^m}))) :$$

c'est un $W(\mathbb{F}_{q^m})$ -module libre de type fini et l'itéré $m^{\text{ième}}$ de u induit un endomorphisme F^m de $e^*(E)$. On définit alors la fonction L associée à E ([K1], 6.0) par la formule

$$(2.1) \quad L(X, E, t) = \prod_{m \geq 1} \prod_{e \in \Delta_m} [\det_{W(\mathbb{F}_{q^m})}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}.$$

THÉORÈME 2.2. — *Si E est un F -cristal localement libre de type fini sur X , on a avec les hypothèses précédentes:*

$$(2.2.1) \quad L(X, E, t) = \prod_{0 \leq i \leq 2n} [\det(1 - tF_i)]^{(-1)^{i+1}},$$

où F_i est l'endomorphisme défini par F sur la partie libre de $H^i(X/W, E)$; les polynômes $\det(1 - tF_i)$ sont à coefficients dans W .

2.2.2. Si l'on suppose de plus le F -cristal E non dégénéré, alors les polynômes $\det(1 - tF_i)$ sont de degré $\beta_i = \text{rg}_W H^i(X/W, E)$.

Ce théorème résout une conjecture de Katz ([K 1], 6.1.1) dans le cas propre et lisse, et se démontre par une formule de traces de Lefschetz: on va d'abord transformer l'expression définissant $L(X, E, t)$ pour la rendre adaptée à une telle formule.

Soit X^0 l'ensemble des points fermés de X ; on a

$$L(X, E, t) = \prod_{m \geq 1} \prod_{\substack{x \in X^0 \\ \deg x = m}} \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_{q^m})}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}.$$

Pour $x \in X^0$ fixé, de degré m , le produit

$$P = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_{q^m})}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m}$$

est invariant par le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, où $\bar{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de \mathbb{F}_q ; donc P est à coefficients dans $W(\mathbb{F}_q)$. Notons $A = W(\mathbb{F}_q)[t^m]$, $B = W(\mathbb{F}_{q^m})[t^m]$ et $N_{B/A}$ la norme; on a

$$P = N_{B/A}(P^{1/m}) = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} N_{B/A} \{ [\det_{W(\mathbb{F}_{q^m})}(1 - t^m F^m | e^*(E))]^{-1/m^2} \}$$

$$P = \prod_{\substack{e \in \Delta_m \\ e \text{ d'image } x}} [\det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^m \tilde{F}^m | \widetilde{e^*(E)})]^{-1/m^2},$$

où $\widetilde{e^*(E)}$ désigne le module $e^*(E)$ vu comme module sur $W(\mathbb{F}_q)$ et \tilde{F}^m est déduit de F^m . Ces $\widetilde{e^*(E)}$ sont tous isomorphes à \tilde{E}_x , avec

$$E_x := \lim_{\substack{\rightarrow \\ r}} (j_{x \text{ cris}}^*(E))(\text{Spec}(k(x)), \text{Spec } W_r(k(x)))$$

où j_x est l'inclusion $\text{Spec}(k(x)) \hookrightarrow X$; on notera \tilde{F}_x^m l'endomorphisme de \tilde{E}_x induit par l'itéré $m^{\text{ième}}$ de u . Avec ces notations on a donc

$$P = \det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^m \tilde{F}_x^m | \tilde{E}_x)^{-1/m}.$$

D'où une nouvelle expression de $L(X, E, t)$:

$$(2.3) \quad L(X, E, t) = \prod_{x \in X^0} \det_{W(\mathbb{F}_q)}(1 - t^{\deg x} \tilde{F}_x^{\deg x} | \tilde{E}_x)^{-1/\deg x}.$$

Lorsque $E = \mathcal{O}_{X/W}$ on retrouve la fonction zêta.

Pour la démonstration du théorème on va appliquer le lemme suivant au K -espace vectoriel de dimension finie $H^i(X/W, E) \otimes_W K$, et pour $x \in X^0$ au W -module libre de type fini \tilde{E}_x .

LEMME 2.4 (de démonstration analogue à ([M 3], V, 2.7)). — Soit α un endomorphisme d'un module libre de type fini V sur un anneau A commutatif unitaire intègre, alors

$$\log [(\det(1 - t\alpha | V))^{-1}] = \sum_{m > 0} \text{Tr}(\alpha^m | V) t^m / m.$$

Soient D_l l'ensemble des points fermés de X de degré exactement l , et X^{F^m} l'ensemble des points fermés de X fixes sous F^m au sens schématique: on a $X^{F^m} = \bigcup_{l|m} D_l$. En appliquant le log à l'expression (2.3)

de $L(X, E, t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 \log(L(X, E, t)) &= \sum_{x \in X^0} \sum_{r > 0} \text{Tr}_W(\tilde{F}_x^{r \deg x} | \tilde{E}_x) t^{r \deg x} / r \deg x \\
 &= \sum_{l > 0} \sum_{x \in D_l} \sum_{r > 0} \text{Tr}_W(\tilde{F}_x^{r \deg x} | \tilde{E}_x) t^{r \deg x} / r \deg x \\
 &= \sum_{m > 0} \sum_{l | m} \sum_{x \in D_l} \text{Tr}_W(\tilde{F}_x^m | \tilde{E}_x) t^m / m \\
 &= \sum_{m > 0} \sum_{x \in X^{F^m}} \text{Tr}_W(\tilde{F}_x^m | \tilde{E}_x) t^m / m.
 \end{aligned}$$

Quant au log de l'expression figurant dans le théorème, il s'écrit :

$$\sum_{m > 0} \sum_{0 \leq i \leq 2n} (-1)^i \text{Tr}(F^m | H^i(X/W, E) \otimes_W K) t^m / m.$$

L'égalité (2.2.1) est donc équivalente à la formule des traces suivante :

THÉOREME 2.5. — *Pour tout entier $m \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in X^{F^m}} \text{Tr}_W(\tilde{F}_x^m | \tilde{E}_x) &= \sum_{0 \leq i \leq 2n} (-1)^i \text{Tr}(F^m | H^i(X/W, E) \otimes_W K) \\
 &=: \text{Tr}(F^m | \mathbb{R}\Gamma(X/W, E)).
 \end{aligned}$$

Ce théorème 2.5 résulte de 1.7.2 puisque le graphe de F^m coupe la diagonale de $X \times_k X$ transversalement.

Pour 2.2.2, supposons E non dégénéré avec $u: F^*E \rightarrow E$ et $v: E \rightarrow F^*E$ tels que $u \circ v = q^N$ et $v \circ u = q^N$; notons $S = \text{Spec}(W_m(k))$, Φ^* le composé $\mathbb{R}\Gamma(u) \circ F^*$

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \xrightarrow{F^*} \mathbb{R}\Gamma(X/S, F^*E) \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma(u)} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E),$$

où F^* est l'image inverse, et Φ_* le composé $F_* \circ \mathbb{R}\Gamma(v)$

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma(v)} \mathbb{R}\Gamma(X/S, F^*E) \xrightarrow{F_*} \mathbb{R}\Gamma(X/S, E),$$

où F_* est le morphisme image directe. L'assertion 2.2.2 signifie que F_i est un isomorphisme modulo torsion : comme dans ([B1], VII, 3.2.3) c'est une conséquence de

PROPOSITION 2.6. — *Sous les hypothèses 2.2 avec E non dégénéré, le morphisme composé*

$$\Phi_* \circ \Phi^*: \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)$$

est la multiplication par q^{q+N} ; et ceci reste vrai en remplaçant S par $\text{Spec } W(k)$.

On a $\Phi_* \circ \Phi^* = F_* \circ \mathbb{R}\Gamma(v \circ u) \circ F^* = q^N F_* \circ F^*$.

D'après (I, 2.3) il suffit de montrer que $F_*(1) = q^n$, ce qui est établi dans la démonstration de ([B1], VII, 3.2.4). L'assertion pour $W(k)$ s'obtient par passage à la limite. \square

2.7. On rappelle que X est propre et lisse sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$; soient E un F -cristal unité sur X et \bar{k} une clôture algébrique de k . On notera $\bar{X} := X \times_k \bar{k}$, $\bar{W} = W(\bar{k})$ l'anneau des vecteurs de Witt de \bar{k} , $\bar{K} = \text{Frac}(\bar{W})$ et \bar{E} le $\mathcal{O}_{\bar{X}/\bar{W}}$ -module image inverse de E .

Nous allons « décrire », pour tout entier r , les zéros et pôles de $L(X, E, t)$ sur les couronnes p -adiques $|t|_p = q^r$, où l'on a normalisé par $|p|_p = 1/p$; la fonction ord_q sera définie par $\text{ord}_q(q^r u) = r$ si $|u|_p = 1$.

On a considéré dans ([E 1], III, 2.1) les faisceaux étales

$$v_m(E, r) = \text{Ker} \{ E_m \otimes W_m \Omega^r \xrightarrow{1-F} E_m \otimes W_m \Omega^r / \nabla V^{m-1}(E_1 \otimes \Omega^{r-1}) \};$$

posons $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) = \varprojlim_m H^{i-r}(\bar{X}_{\text{ét}}, v_m(\bar{E}, r))$ et $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)) = H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$: ce dernier est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie ([E 1], III, 3.2.3).

Soit γ le générateur canonique de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, $x \mapsto x^q$; $\varphi = \gamma^{-1}$ agit sur $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ par $1 \otimes \varphi$ et donc sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$: on notera encore φ cette action.

PROPOSITION 2.8. — *Sous les hypothèses 2.7 on a*

$$\det [1 - \varphi t | H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))] = \prod_{\text{ord}_q(a_{ij})=r} (1 - q^{-r} a_{ij} t)$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(X/W, E) \otimes_w K$.

La proposition résulte de ([M 4], lemme 5.1) et de la suite exacte (cf. ([E 1], III, 3.2.3.2))

$$0 \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)) \rightarrow H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_w \bar{K} \xrightarrow{F - p^r} H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_w \bar{K} \rightarrow 0,$$

où F est le Frobenius absolu sur la cohomologie cristalline de \bar{E} . \square

COROLLAIRE 2.9. — Sous les hypothèses 2.7, soit M (resp. \bar{M}) le \mathbb{Z}_p -faisceau étale lisse associé au F -cristal unité E (resp. \bar{E}), alors

(i) on a $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) = 0$, et q^r n'est pas valeur propre du Frobenius sur $H^i(X/W, E) \otimes_w K$ sous l'une des deux conditions :

(i.1) r est un entier vérifiant $r < 0$ ou $r > \dim X$,

(i.2) $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq \dim X$, et i est un entier vérifiant $i < r$ ou $i > \dim X + r$,

(ii) la fonction

$$L(X, E, t) \times \prod_{r \leq i \leq n+r} [\det(1 - q^r t \varphi | H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r)))]^{(-1)^i}$$

n'a ni zéros ni pôles sur la couronne $|t|_p = q^r$, en particulier la fonction

$$L(X, E, t) \times \prod_{0 \leq i \leq n} [\det(1 - t \varphi | H^i(\bar{X}, \bar{M}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)]^{(-1)^i}$$

n'a ni zéros ni pôles sur la couronne unité $|t|_p = 1$.

La nullité de $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$ est claire sous l'hypothèse (i.1) : sous l'hypothèse (i.2) c'est établi dans ([E 1], III, (3.2.3.1)). Par 2.8 la 2^e assertion du (i) en résulte : dans le cas X projectif et lisse elle se déduit aussi de (III, 1.2.4) ci-après. Le (ii) est alors immédiat.

Remarque 2.10. — La 2^e assertion de (ii) résout affirmativement une conjecture de Katz ([K 1], 6.1.2) dans le cas X propre et lisse sur \mathbb{F}_q . Cette 2^e assertion de (ii) est d'ailleurs obtenue par Crew ([Cr 1]) dans le cas où X est une courbe affine et lisse sur \mathbb{F}_q et E de rang 1.

2.11. Sous les hypothèses du 2 supposons le F -cristal E non dégénéré. On va montrer que la fonction $L(X, E, t)$ satisfait à une équation fonctionnelle faisant intervenir E^\vee . Précisons tout d'abord la structure de F -cristal sur E^\vee . Puisque E est non dégénéré il existe des morphismes $u : F^*E \rightarrow E$ et $v : E \rightarrow F^*E$ tels que $u \circ v = q^N$ et $v \circ u = q^N$, et la structure de F -cristal sur E^\vee sera fournie par le dual de v , soit $'v : F^*E^\vee \rightarrow E^\vee$. On a donc

$$F_{i,E} = R^i \Gamma(u) \circ F^* : H^i(X/W, E) \rightarrow H^i(X/W, E),$$

et

$$F_{j,E^\vee} = R^j \Gamma('v) \circ F^* : H^j(X/W, E^\vee) \rightarrow H^j(X/W, E^\vee),$$

où F^* est le morphisme image inverse.

THÉOREME 2.12. — Soient X un k -schéma propre, lisse et géométriquement connexe de dimension n , et E un F -cristal non dégénéré sur X de niveau N . Soient

$$\chi(X, E) := \sum_{0 \leq i \leq 2n} (-1)^i \operatorname{rg}_W H^i(X/W, E)$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré de (X, E) et

$$\begin{aligned} \varepsilon(E) &:= \det(-F| \mathbb{R}\Gamma(X/W, E))^{-1} : \\ &= \prod_{0 \leq i \leq 2n} [\det(-F| H^i(X/W, E) \otimes_W K)]^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

La fonction $L(X, E, t)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2.12.1) \quad L(X, E, t) = \varepsilon(E) t^{-\chi(X, E)} L(X, E^\vee, 1/q^{n+N}t).$$

Notons $f: X \rightarrow S = \operatorname{Spec} W_m(k)$ le morphisme structural, et montrons que le diagramme suivant commute :

(2.12.2)

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X/S, E) \otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S, E^\vee) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & H^{2n}(X/S) & \xrightarrow{\operatorname{Tr}_f} & W_m \\ \downarrow F^* \otimes F^* & & 1 & F^* = q^n \downarrow & \downarrow q^n \\ H^i(X/S, F^*E) \otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S, F^*E^\vee) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & H^{2n}(X/S) & \xrightarrow{\operatorname{Tr}_f} & W_m \\ \downarrow R^i\Gamma(u) \otimes R^{2n-i}\Gamma(v) & & 2 & q^N \downarrow & \downarrow q^N \\ H^i(X/S, E) \otimes_{W_m} H^{2n-i}(X/S, E^\vee) & \xrightarrow{\langle, \rangle} & H^{2n}(X/S) & \xrightarrow{\operatorname{Tr}_f} & W_m, \end{array}$$

où \langle, \rangle est l'accouplement canonique et $\operatorname{Tr}_f \circ \langle, \rangle$ celui donnant la dualité de Poincaré ([B 1], VII, 2.1.3). Le carré 1 est commutatif par fonctorialité de l'image inverse F^* et le fait que $F^* = q^n$ sur $H^{2n}(X/S)$ ([B 1], VII, démonstration de 3.2.5); comme $v \circ u = q^N$ le carré 2 commute par définition de v . La commutativité du diagramme signifie que pour $x \in H^i(X/S, E)$ et $y \in H^{2n-i}(X/S, E^\vee)$ on a :

$$\langle F_{i,E}(x), F_{2n-i,E^\vee}(y) \rangle = q^{n+N} \langle x, y \rangle ;$$

cette relation demeure vérifiée en passant à la limite sur m : en voyant cette fois $F_{i,E}$ (resp. F_{2n-i,E^\vee}) comme un endomorphisme (en fait

un automorphisme d'après 2.2.2) de $H^i(X/W, E) \otimes_W K$ (resp. $H^{2n-i}(X/W, E^\vee) \otimes_W K$) on a montré que

$${}^t(F_{2n-i, E^\vee}) = q^{n+N}(F_{i, E})^{-1},$$

i.e., si α_j décrit les valeurs propres de $F_{i, E}$, alors les valeurs propres de F_{2n-i, E^\vee} sont les q^{n+N}/α_j . L'équation fonctionnelle (2.12.1) en résulte via (2.2.1). Les calculs précédents fournissent en outre la relation

$$(2.12.3) \quad \varepsilon(E) \cdot \varepsilon(E^\vee) = q^{-(n+N)\chi(X, E)}.$$

Remarque 2.13. — Dans le cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$ l'équation fonctionnelle (2.12.1) pour la fonction L redonne celle de la fonction zêta. En effet E est alors un F -cristal unité ($N=0$) en dualité avec lui-même, si bien que $\varepsilon(E) = \pm q^{-(n/2)\chi(X)}$; on retrouve ainsi l'équation fonctionnelle [B 1], VII, (3.2.8)

$$\begin{aligned} Z(X, 1/q^n t) &= L(X, \mathcal{O}_{X/W}, 1/q^n t) = \pm q^{(n/2)\chi(X)} t^{\chi(X)} L(X, \mathcal{O}_{X/W}, t) \\ &= \pm q^{(n/2)\chi(X)} t^{\chi(X)} Z(X, t). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.14. — Sous les hypothèses du théorème 2.12 soient $q = \text{card } k$ et s un entier $> n + N$, alors

$$|L(X, E, q^{-s})|_p = |\varepsilon(E)|_p q^{-s\chi(X, E)},$$

où $|\cdot|_p$ désigne la valeur absolue p -adique de K normalisée par $|p|_p^{-1} = p$.

D'après 2.2 on a

$$L(X, E^\vee, 1/q^{n+N-s}) = \prod_{0 \leq i \leq 2n} \det(1 - q^{s-n-N} F_{i, E^\vee})^{(-1)^{i+1}},$$

où $\det(1 - tF_{i, E^\vee})$ est à coefficients dans W , d'où, puisque $s - n - N > 0$, $|L(X, E^\vee, 1/q^{n+N-s})|_p = 1$. L'équation fonctionnelle fournit alors le corollaire. \square

Remarque 2.15. — Dans le cas $E = \mathcal{O}_{X/W}$, ce corollaire redonne la proposition (10.4) de [M 4] car $|\varepsilon(\mathcal{O}_{X/W})|_p = q^{(n/2)\chi(X)}$. Nous reviendrons dans la quatrième partie plus longuement sur ces questions de valeurs de fonctions L .

Remarque 2.16. — Supposons 2.11 vérifié; on a noté $F_E = \mathbb{R}\Gamma(u) \circ F^*$ et $F_{E^\vee} = \mathbb{R}\Gamma({}^t v) \circ F^*$. Comme pour (2.12.2) on prouve la commutativité

du carré

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n] \\
 \downarrow F_E & & \downarrow q^{n+N}(F_E^\vee)^\vee \\
 \mathbb{R}\Gamma(X/S, E) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{W_m}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X/S, E^\vee), W_m)[-2n],
 \end{array}$$

où ε_X résulte de la dualité de Poincaré.

Si l'on se donne un autre k -schéma propre et lisse Y , de dimension r sur k et $h: Y \rightarrow X$ un k -morphisme, on définit de même F_{h^*E} et $F_{h^*E^\vee}$. Il est alors immédiat que le morphisme image directe

$$h_*: \mathbb{R}\Gamma(Y/S, h^*E) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(X/S, E)[2n-2r]$$

vérifie la relation

$$(2.16.1) \quad h_* \circ F_{h^*E} = q^{r-n} F_E \circ h_*.$$

III. COEFFICIENTS DE LA FONCTION L

Par l'expression (II, 2.2.1), les valeurs propres du Frobenius sur la cohomologie cristalline fournissent les coefficients de la fonction L : nous établissons donc au paragraphe 1 un théorème de Lefschetz faible duquel nous déduisons des évaluations p -adiques de ces valeurs propres.

Dans le cas d'un F -cristal unité, on montre au paragraphe 2 que la fonction L est à coefficients dans \mathbb{Z}_p .

Enfin, pour un F -cristal unité à monodromie finie (§ 3), les zéros et pôles de L sont des entiers algébriques vérifiant l'hypothèse de Riemann (3.2). Une telle fonction L est également reliée directement aux fonctions L de Grothendieck (3.5).

1. Lefschetz faible et application aux pentes.

1.1. Lefschetz faible avec coefficients.

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k .

THÉOREME 1.1.1 (dit de « Lefschetz faible »). — Soient X un k -schéma projectif et lisse, de dimension n , muni d'un plongement fixé dans un espace projectif \mathbb{P}_k^N et E un F -cristal localement libre de type fini sur X . Nous noterons $E_0 = E/pE$ et $\text{gr}^s E_0 = \mathcal{F}^s E_0 / \mathcal{F}^{s+1} E_0$ où $\mathcal{F}^\bullet E_0$ est la filtration conjuguée de la filtration de Hodge sur E_0 ([0], 1.9). Nous nous placerons dans l'un des deux cas suivants :

- (i) E_0 admet localement une base de sections horizontales (par exemple pour E un F -cristal unité),
- (ii) $\text{gr}^\bullet E_0$ est localement libre.

Alors si $Y \hookrightarrow X$ est une section hyperplane lisse de X , de degré assez élevé, l'homomorphisme canonique

$$j^* : H^i(X/W, E) \rightarrow H^i(Y/W, j_{\text{cris}}^*(E))$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$, et est injectif pour $i = n - 1$. De plus la cohomologie évanescence

$$\mathcal{E}(Y, E) := H^{n-1}(Y/W, j_{\text{cris}}^*(E)) / H^{n-1}(X/W, E)$$

est un W -module libre de type fini.

Comme dans [B 2] le théorème se ramène à montrer que le morphisme canonique

$$(1.1.2) \quad j^* : H^i(X/k, E_0) \rightarrow H^i(Y/k, j^* E_0)$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$ et une injection pour $i = n - 1$.

D'après ([0], 1.6.3) $\text{gr}^s E_0$ est engendré par ses sections horizontales. Dans la suite \mathcal{E} désignera ou bien E_0 , ou bien $\text{gr}^s E_0$: d'après (i) et (ii) \mathcal{E} admet localement des bases de sections horizontales. Nous allons montrer que

$$(1.1.3) \quad \begin{array}{ccc} j^* : H^i(X/k, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i(Y/k, j^* \mathcal{E}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^i(X, \mathcal{E}_{(X, X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet) & & H^i(Y, (j^* \mathcal{E})_{(Y, Y)} \otimes \Omega_{Y/k}^\bullet) \end{array}$$

est un isomorphisme pour $i < n - 1$ et une injection pour $i = n - 1$.

Le théorème sera ainsi démontré pour le cas (i). Pour le cas (ii) on sait d'après ([0], 1.12.3) que le gradué $\text{gr}^s E_0$ commute aux images inverses : puisque la filtration $\mathcal{F}^s E_0$ est séparée, finie et exhaustive

([0], 1.6.4) on est ramené par le lemme des cinq et la suite de cohomologie relative à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}^S E_0 \rightarrow E_0 / \mathcal{F}^{S+1} E_0 \rightarrow E_0 / \mathcal{F}^S E_0 \rightarrow 0,$$

à démontrer l'assertion (1.1.3) pour obtenir le théorème dans le cas (ii).

Pour ce faire on filtre le complexe $\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet$ par les sous-complexes

$$\mathrm{Fil}^j(\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet) = \mathcal{I} \cdot \tau_j(\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet) + \nabla(\mathcal{I} \cdot \tau_j(\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet))$$

où \mathcal{I} est l'idéal de Y dans X , ∇ la différentielle de $\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet$ et $\tau_j(\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet)$ est le complexe égal à $\mathcal{E}_{(X,X)} \otimes \Omega_{X/k}^\bullet$ en degré $\geq j$, et à 0 en degré $< j$. Puisque $\mathcal{E}_{(X,X)}$ admet localement des bases de sections horizontales on conclut comme dans [B 2]. \square

1.2. Application aux pentes du Frobenius sur $H^i(X/W, E)$.

Sous les hypothèses de 1.1.1 supposons maintenant que E soit non dégénéré de niveau N , i.e. est muni de $u: F^*E \rightarrow E$ et $v: E \rightarrow F^*E$ tels que $u \circ v = p^N$ et $v \circ u = p^N$ pour $N \in \mathbb{N}$. Si l'on munit $\mathbb{R}\Gamma(X/W, E)$ des endomorphismes (cf. II, 2.5) $\Phi_E^* = \mathbb{R}\Gamma(u) \circ F^*$ (encore noté Φ^*) et $\Phi_{*E} = F_* \circ \mathbb{R}\Gamma(v)$ (noté Φ_*) on sait (II, 2.5) que

$$(1.2.1) \quad \Phi_* \Phi^* = p^{n+N}.$$

Nous noterons encore Φ_* et Φ^* les endomorphismes induits sur la partie libre $H^*(X/W, E)_i$ de $H^*(X/W, E)$.

La proposition suivante s'établit comme dans ([B 2], 2°).

PROPOSITION 1.2.2. — Soit $0 \leq i \leq n$; alors

$$\Phi_*(H^i(X/W, E)_i) \subset p^{n-i} H^i(X/W, E)_i.$$

COROLLAIRE 1.2.3. — Soit $0 \leq i \leq n$; alors

$$\Phi^*(H^{n+i}(X/W, E)_i) \subset p^i H^{n+i}(X/W, E)_i.$$

En effet $H^{n+i}(X/W, E)_i$ est dual de $H^{n-i}(X/W, E^\vee)_i$ et la dualité trans-forme $\Phi_{*E^\vee} = F_{*E^\vee} \circ \mathbb{R}\Gamma(v_{E^\vee}) = F_{*E^\vee} \circ \mathbb{R}\Gamma((u_E)^\vee)$ en $\Phi_E^* = \mathbb{R}\Gamma(u_E) \circ F_E^*$: le corollaire résulte alors de 1.2.2 appliqué à E^\vee . \square

THÉOREME 1.2.4. — Pour $0 \leq i \leq n$, chaque pente α du F -cristal $(H^i(X/W, E)_b, \Phi^*)$ [resp. $(H^{n+i}(X/W, E)_l, \Phi^*)$] satisfait $0 \leq \alpha \leq i + N$ [resp. $i \leq \alpha \leq n + N$], où N est le niveau du F -cristal E .

Compte tenu de la relation (1.2.1) ce théorème se démontre comme celui de ([B 2], 2). \square

2. Cas d'un F -cristal unité.

On reprend ici les hypothèses et notations de (II, 2) en supposant que E est un F -cristal unité muni de $u: F^*E \xrightarrow{\sim} E$. Nous allons montrer que la fonction $L(X, E, t)$ est quotient de deux polynômes à coefficients dans \mathbb{Z}_p .

Explicitons tout d'abord l'endomorphisme de Frobenius F de

$$H^0(X/W_m, (F^*E)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{X/W_m}} E) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W_m}}(F^*E, E);$$

plus généralement si E_1 est un F -cristal unité et E_2 un F -cristal quelconque, avec $\Phi_1: E_1^\sigma := F^*E_1 \xrightarrow{\sim} E_1$, $\Phi_2: E_2^\sigma \rightarrow E_2$, et $\varphi \in \text{Hom}(E_1, E_2)$ on pose $F(\varphi) = \Phi_2 \circ \varphi^\sigma \circ \Phi_1^{-1}$: dans le cas où $E_2 = E$, $E_1 = E^\sigma$, $\Phi_1 = u^\sigma$, $\Phi_2 = u$, on a alors

$$(2.1) \quad F(u) = u \circ u^\sigma \circ (u^\sigma)^{-1} = u.$$

Pour $x \in X^{F^r}$, soit $g_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural et $j_x: \text{Spec}(k(x)) \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique; la trace de l'endomorphisme F^r de $\mathbb{R}\Gamma(X/W_m, E)$ est fournie par (démonstration de II, (1.6.2)):

$$\text{Tr}(F^r) = \sum_{x \in X^{F^r}} g_{x*}(\text{Tr}(F_x^r)).$$

Nous venons d'établir que $u \in H^0(X/W_m, (F^*E)^\vee \otimes E)$ est fixe sous F ; il en est de même de $F_x^r \in H^0(\text{Spec}(k(x))/W_m, j_{x\text{cris}}^*(E^\vee \otimes E))$ qui est induit par l'itéré de u , et de $\chi(F_x^r) = \text{Tr}(F_x^r) \in W_m(k(x))$ où le morphisme χ est défini dans la démonstration de (II, (1.6.2)); comme g_x est un morphisme entre schémas de dimension 0, la relation (II, (2.16.1)) montre que $\text{Tr} F^r \in W_m(k)$ est fixe par le Frobenius, i.e. $\text{Tr} F^r \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Par passage à la limite projective on déduit de (II, 2.2 et (2.3)) que

$$(2.2) \quad L(X, E, t) \in (1 + t\mathbb{Z}_p[[t]]) \cap K(t);$$

la méthode des déterminants de Hankel ([Bour.], A IV, 4., exercice 1) fournit alors $L(X, E, t) \in (1 + t\mathbb{Z}_p[[t]]) \cap \mathbb{Q}_p(t)$. Or la formule (II, 2.2.1) montre que $L(X, E, t) = R(t)/S(t)$, avec $R, S \in 1 + tW[t]$. Si on choisit $P, Q \in \mathbb{Q}_p[t]$ tels que $L(X, E, t) = P(t)/Q(t)$ avec $(P, Q) = 1$, on a $P|R$, $Q|S$, et donc les racines inverses de P et Q sont de valuations p -adiques ≥ 0 ; d'où $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}_p[t]$. Nous avons établi

PROPOSITION 2.3. — Soient X un schéma propre et lisse de dimension n sur \mathbb{F}_q , et E un F -cristal unité sur X , alors

$$L(X, E, t) = P(t)/Q(t),$$

avec $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}_p[t]$, P et Q premiers entre eux.

3. Cas d'un F -cristal unité à monodromie finie.

3.1. Revêtements étales et cristaux.

Nous ferons pour ce 3.1 les hypothèses suivantes : k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k et K le corps des fractions de W , X est un schéma propre et lisse sur k , G un groupe fini, $f: Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G et E un $\mathcal{O}_{X/W}$ -module localement libre.

PROPOSITION 3.1.1. — Sous les hypothèses précédentes on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} H^i(X/W, E) \otimes_W K &\simeq \{H^i(X/W, f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(E)) \otimes_W K\}^G \\ &\simeq \{H^i(Y/W, f_{\text{cris}}^*(E)) \otimes_W K\}^G. \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme de la proposition est clair car $f_{\text{cris}*}$ est un foncteur exact (f est fini et étale!).

Établissons d'abord le

LEMME 3.1.2. — Sous les hypothèses 3.1 on a

$$(f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(E))^G \simeq E.$$

Comme E est localement libre on a un isomorphisme

$$f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(E) \simeq f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(\mathcal{O}_{X/W}) \otimes_{\mathcal{O}_{X/W}} E,$$

et l'action de G sur le membre de gauche se fait par l'intermédiaire de $f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(\mathcal{O}_{X/W})$ puisque G agit trivialement sur E : on est ramené à prouver le lemme pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$. Soit (U, T) un ouvert du site cristallin zariskien $\text{Cris}(X/W)$: l'image inverse de f sur U est aussi un revêtement fini étale galoisien $Y \times_X U \rightarrow U$ de groupe G , qui se relève de manière unique, par l'équivalence des sites étales de U et T (puisque U et T ont même espace sous-jacent), en $h: T' \rightarrow T$ fini étale galoisien de groupe G ; il s'agit de démontrer que

$$\{f_{\text{cris}*} f_{\text{cris}}^*(\mathcal{O}_{X/W})_{(U, T)}\}^G \simeq \mathcal{O}_T,$$

i.e. $(h_* h^*(\mathcal{O}_T))^G \simeq \mathcal{O}_T$, ce qui est clair car $h^*(\mathcal{O}_T) \simeq \mathcal{O}_{T'}$.

Grâce à 3.1.2 il nous suffit donc de montrer que pour tout $\mathcal{O}_{X/W}[G]$ -module A on a un isomorphisme

$$(3.1.3) \quad (H^i(X/W, A) \otimes_w K)^G \simeq H^i(X/W, A^G) \otimes_w K.$$

Pour cela on va établir l'existence et la dégénérescence de deux suites spectrales de même aboutissement et dont les termes E_2 sont :

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &= H^j(G, H^i(X/W, A) \otimes_w K), \\ E_2^{i,j} &= H^j(X/W, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}^i(\mathcal{O}_{X/W}, A)) \otimes_w K, \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_{X/W}$ étant muni de l'action triviale de G . Compte tenu des isomorphismes

$$\begin{aligned} \Gamma(X/W, A)^G &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W}}(\mathcal{O}_{X/W}, A)^G \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W}, A) \\ &\simeq \Gamma(X/W, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}(\mathcal{O}_{X/W}, A)) \simeq \Gamma(X/W, A^G), \end{aligned}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{X/W}[G]\text{-mod} & \xrightarrow{\mathcal{F}_1 = \Gamma(X/W, -) \otimes_w K} & K[G]\text{-mod.} & \xrightarrow{\mathcal{F}_2 = (-)^G} & K\text{-ev.} \\ \parallel \text{Id} & & & & \parallel \text{Id.} \\ \mathcal{O}_{X/W}[G]\text{-mod} & \xrightarrow{\mathcal{F}_3 = (-)^G} & \mathcal{O}_{X/W}\text{-mod.} & \xrightarrow{\mathcal{F}_4 = \Gamma(X/W, -) \otimes_w K} & K\text{-ev.}, \end{array}$$

où $\mathcal{A}\text{-mod}$ (resp. $K\text{-ev.}$) désigne la catégorie des \mathcal{A} -modules (resp. des K -espaces vectoriels). Les quatre catégories du diagramme sont abéliennes et ont suffisamment d'injectifs; \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 sont des foncteurs exacts à gauche, de même que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_4 car K est plat sur W . On notera $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_4 \circ \mathcal{F}_3$. Pour tout $\mathcal{O}_{X/W}[G]$ -module A , l'ordre de G annule $H^j(G, H^i(X/W, A))$ pour $j \geq 1$ ([Se 1], VIII, § 2, cor. 1 de prop. 4),

donc $E_2^{i,j} = H^j(G, H^i(X/W, A) \otimes_w K) = 0$ pour $j \geq 1$: en particulier \mathcal{F}_1 transforme les injectifs en \mathcal{F}_2 -acycliques, d'où l'existence de la première suite spectrale ([M 3], App. B, th. 1)

$$E_2^{i,j} \Rightarrow R^{i+j}\mathcal{F}(A),$$

et de plus on a

$$R^n \mathcal{F}(A) \simeq E_2^{n,0} = (H^n(X/W, A) \otimes_w K)^G.$$

Pour l'existence de la deuxième suite spectrale et la dégénérescence en E_2 il nous suffit de même de montrer que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X/W}[G]}^i(\mathcal{O}_{X/W}, A)$ est annulé par l'ordre de G pour $i \geq 1$: cela se fait en remplaçant dans les constructions de Serre (*loc. cit.*) l'anneau \mathbb{Z} des entiers par $\mathcal{O}_{X/W}$; d'où un second isomorphisme

$$R^n \mathcal{F}(A) \simeq E_2^{n,0} = H^n(X/W, A^G) \otimes_w K.$$

On a ainsi établi (3.1.3), donc 3.1.1. □

3.2. Représentations p -adiques et F -cristaux à monodromie finie.

On reprend, pour ce 3.2, les hypothèses du 2. Nous noterons $M \simeq (\mathbb{Z}_p)^h$ le \mathbb{Z}_p -module libre de type fini associé à E ([K 1], Rk 5.5) ; le F -cristal E correspond alors à une représentation continue (*loc. cit.*)

$$\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M).$$

DÉFINITION 3.2.1. — *Le F -cristal unité E est dit à monodromie finie (resp. et entière) si l'image de ρ est un groupe fini (resp. s'il existe un \mathbb{Z} -module libre de type fini M' et un isomorphisme $M' \otimes \mathbb{Z}_p \simeq M$ tels que $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ se factorise par $\rho' : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$, d'image finie).*

Un exemple trivial est fourni par le faisceau structural $\mathcal{O}_{X/W}$.

Pour une notion voisine, celle de représentation p -adique à monodromie locale finie, on pourra consulter l'article de Richard Crew ([Cr 2]).

Avant d'étudier les propriétés des F -cristaux à monodromie finie et de fournir des exemples non triviaux, rappelons comment à une représentation continue $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ du π_1 dans un \mathbb{Z}_p -module libre de type fini M on associe un F -cristal unité E (cf. [K 1] ; [K 3], 4.1 ; [Sa], VI, 3.1).

Au \mathbb{Z}_p -module M on associe le système local p -adique $(N_n)_{n \geq 1}$ suivant : N_n est le système local sur X associé au $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module libre de type fini $M/p^n M$ muni d'une action d'un quotient fini G_n de $\pi_1(X)$ (puisque l'action de p est continue). En particulier, pour chaque entier n , N_n se trivialisait sur un revêtement fini étale galoisien de groupe G_n ; de plus, dire que E est à monodromie finie signifie que le groupe $\varprojlim_n G_n$

est fini, i.e. que le système de tous les N_n est trivialisé sur un même revêtement fini étale galoisien de X de groupe le groupe fini $\varprojlim_n G_n$. Le

cristal E s'obtient comme suit : soit (U, T) un objet du site cristallin zariskien $\text{Cris}(X/W)$; comme p est nilpotent sur T , il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p^n \mathcal{O}_T = 0$, d'où un homomorphisme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_T$ et on pose

$$E_{(U, T)} = (N_n^T)_{\text{zar}} \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_T,$$

(où $(N_n^T)_{\text{zar}}$ est le faisceau zariskien sur T déduit du faisceau étale N_n sur T relevant $N_{n|U}$ (les sites étales sur T et U sont équivalents). Pour décrire l'action du Frobenius sur E nous supposons dans la suite que T est lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$; la puissance $p^{\text{ième}}$ sur U se relève, puisque U est affine, en un endomorphisme (pas nécessairement unique !) φ_T de T et on définit le Frobenius F_T sur $E_{(U, T)}$ par

$$F_T(x \otimes t) = x \otimes \varphi_T(t).$$

En fait, $(E_{(U, T)}, F_T)$ s'obtient par descente via l'action de $\pi_1(X)$: voici comment. Soit $U_n \rightarrow U$ un revêtement fini étale galoisien de groupe $G_n = \text{Aut}(T_n/T)$ tel que la représentation

$$\pi_1(X) \xrightarrow{p} \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M) \xrightarrow{\text{can.}} \text{Aut}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(M/p^n M)$$

se factorise par G_n et soit $h : T_n \rightarrow T$ le relèvement de $U_n \rightarrow U$. Alors $h^*(N_n^T)$ est le faisceau constant $M/p^n M$ et on a

$$E_{(U_n, T_n)} \simeq (M/p^n M) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T_n}.$$

Puisque $T_n \rightarrow T$ est étale, φ_T se relève de manière unique en φ_{T_n} sur T_n : par l'unicité, φ_{T_n} commute avec $\text{Aut}(T_n/T)$. Le Frobenius F_{T_n} sur $E_{(U_n, T_n)}$ est défini par l'endomorphisme φ_{T_n} -linéaire

$$F_{T_n}(x \otimes t) = x \otimes \varphi_{T_n}(t).$$

L'action de $g \in G_n = \text{Aut}(T_n/T)$ sur $E_{(U_n, T_n)}$ est donnée par

$$g(x \otimes t) = (\rho(g))(x) \otimes (g^{-1})^*(t),$$

où $(g^{-1})^*: \mathcal{O}_{T_n} \rightarrow \mathcal{O}_{T_n}$ est associé à $g^{-1}: T_n \xrightarrow{\sim} T_n$. Par descente, $(E_{(U, T)}, F_T)$ est l'unique objet sur T dont l'image inverse sur T_n est $\text{Aut}(T_n/T)$ -isomorphe à $(E_{(U_n, T_n)}, F_{T_n})$; en particulier on a un isomorphisme de faisceaux

$$(3.2.2) \quad E_{(U, T)} \xrightarrow{\sim} \{h_* h^*(E_{(U, T)})\}^{G_n}.$$

Pour la construction inverse, qui à un F -cristal unité E associe la représentation ρ on consultera l'exposé de Katz ([K 3], 4.1).

Nous supposons désormais, dans ce paragraphe 3.2, que le F -cristal unité E est à monodromie finie, et nous allons étudier les propriétés de sa fonction L . La représentation ρ associée à E se factorise donc en

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M),$$

où G est un groupe fini qui s'identifie, avec les notations de 3.2, à $\varprojlim_n G_n$. Par suite il existe un revêtement $f: Y \rightarrow X$ fini étale galoisien

de groupe G qui trivialisait le système local p -adique $(N_n)_{n \geq 1}$, i.e. qui trivialisait $E: f_{\text{cris}}^*(E) \simeq (\mathcal{O}_{Y/W})^h$; on notera au passage que (3.2.2) refournit ici l'isomorphisme 3.1.2

$$E \simeq \{f_{\text{cris},*} f_{\text{cris}}^*(E)\}^G.$$

D'après 3.1.1 on a donc

$$H^i(X/W, E) \otimes_w K \simeq \{H^i(Y/W, f_{\text{cris}}^*(E)) \otimes_w K\}^G \simeq \{H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^G.$$

Par conséquent le polynôme caractéristique de F sur

$$H^i(X/W, E) \otimes_w K \subset H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

divise $\det(1 - tF | H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^{\text{rg}(M)}$. Compte tenu de [K-M] ceci prouve la 1^{re} assertion de

PROPOSITION 3.2.3. — Soient X un schéma projectif, lisse, géométriquement connexe de dimension n sur \mathbb{F}_q et E un F -cristal unité à monodromie finie sur X , alors

(3.2.3.1) les valeurs propres de F sur $H^i(X/W, E) \otimes_w K$ sont des entiers algébriques de valeurs absolues (archimédiennes) égales à $(\sqrt{q})^i$,

(3.2.3.2) la seule valeur propre possible de F sur $H^0(X/W, E) \otimes_w K$ (resp. sur $H^{2n}(X/W, E) \otimes_w K$) est 1 (resp. q^n),

(3.2.3.3) $\det(1 - tF|H^i(X/W, E) \otimes_w K) \in 1 + t\mathbb{Z}_p[t]$.

La 2^e assertion résulte des égalités

$$\det(1 - tF|H^0(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = 1 - t$$

et

$$\det(1 - tF|H^{2n}(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = 1 - q^n t.$$

La 3^e assertion s'établit facilement, compte tenu de la 1^{re} et de 2.3, en paraphrasant une argumentation de Deligne ([D], preuve de (1.7) \Rightarrow (1.6)). \square

Compte tenu de (II, 2.2) on a aussi montré que

$$(3.2.4) \quad L(X, E, t) = \prod_{0 \leq i \leq 2n} [\det\{1 - tF|(H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^{G_i}\}]^{(-1)^{i+1}}.$$

Comme on définit la fonction L de Grothendieck attachée à une représentation ρ d'un groupe fini G agissant sur un \mathbb{F}_q -schéma Y propre et lisse à fibres géométriquement connexes ([M 3], V, § 2, exercice 2.21 ; et [K 2] p. 170) par

$$(3.2.5) \quad L^{\text{Groth}}(Y, \rho, t) := \exp \left(\sum_{n \geq 1} t^n / n \cdot (1 / \# G) \sum_{g \in G} \text{Tr}(\rho(g)) \cdot \#(Y(\mathbb{F}_q)^{F_Y^n \circ g}) \right),$$

où \mathbb{F}_q est une clôture algébrique de \mathbb{F}_q , et F_Y le Frobenius géométrique de Y , on a aussi établi, via (3.2.4) et ([K 2], p. 171) la proposition :

PROPOSITION 3.2.6. — Soient X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe de dimension n sur \mathbb{F}_q , E un F -cristal unité sur X à monodromie finie de groupe G , $\rho : \pi_1(X) \rightarrow G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ la représentation attachée à E et $Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G , alors

$$L(X, E, t) = L^{\text{Groth}}(Y, \rho, t).$$

Cette proposition fournit par (II, 2.2) une autre démonstration de la rationalité des fonctions L de Grothendieck associées à une représentation p -adique d'un groupe fini, dans le cas propre et lisse.

COROLLAIRE 3.2.7. — Sous les hypothèses de 3.2.3, et en supposant E à monodromie finie entière on a, pour tout entier i :

$$\det(1 - tF|H^i(X/W, E) \otimes_w K) \in 1 + t\mathbb{Z}[t].$$

Par 3.2.6 on sait que $L(X, E, t) = L^{\text{Groth}}(Y, \rho, t) \in 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$, d'où, par les déterminants de Hankel, $L(X, E, t) \in \mathbb{Q}(t)$; comme les racines et pôles de $L(X, E, t)$ sont les inverses d'entiers algébriques, on en déduit, par la même méthode que pour la fonction zêta ([M 3], VI, § 13, 12.5 (c)), que $L(X, E, t) = P(t)/Q(t)$ avec $P, Q \in 1 + t\mathbb{Z}[t]$. On conclut alors, par l'argument de Deligne (démonstration de (3.2.3.3)). \square

3.3. Exemples liés à la représentation régulière.

Soient G un groupe fini d'ordre d premier à p , X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe sur \mathbb{F}_q et $f: Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G : nous allons donner un exemple non trivial de F -cristal unité à monodromie finie attaché à cette situation.

Soit M un \mathbb{Z} -module libre de rang d , ayant une base $(e_i)_{i \in G}$ indexée par les éléments de G ; la représentation régulière $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ est donnée par $\rho(s)(e_i) = e_{si}$. Posons $v_1 = \sum_{i \in G} e_i$, $V_1 = \mathbb{Z}_p v_1$ et choisissons

une bijection $\phi: \{1, \dots, d\} \rightarrow G$: soit V_2 le \mathbb{Z}_p -module libre de base $(e_{\phi(i)} - e_{\phi(i+1)})_{i=1, \dots, d-1}$. Puisque ρ est à coefficients dans \mathbb{Z} , on peut la considérer comme une représentation à coefficients dans \mathbb{Z}_p , $\rho': G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(M \otimes \mathbb{Z}_p)$, où $M \otimes \mathbb{Z}_p \simeq V_1 \oplus V_2$ car $p \nmid d$; V_1 est clairement stable par G et V_2 aussi, en effet:

$$\text{pour } s \in G, \rho(s)(e_{\phi(i)} - e_{\phi(i+1)}) = e_{s\phi(i)} - e_{s\phi(i+1)} = e_{\phi(j)} - e_{\phi(h)}$$

et si $h > j$ on a

$$e_{\phi(j)} - e_{\phi(h)} = (e_{\phi(j)} - e_{\phi(j+1)}) + (e_{\phi(j+1)} - e_{\phi(j+2)}) + \dots + (e_{\phi(h-1)} - e_{\phi(h)});$$

raisonnement analogue si $h < j$. La représentation ρ' se décompose donc en $\rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$, où $\rho_1: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(V_1)$ est la représentation triviale et $\rho_2: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(V_2)$ est la restriction de ρ' à V_2 . A chaque ρ_i ($i = 1, 2$) on peut associer un F -cristal unité à monodromie finie E_i sur X . D'après la description 3.2 du F -cristal unité associé à une représentation, il est clair que $E_1 = \mathcal{O}_{X/W}$, et donc par 3.2.6 que la fonction $L^{\text{Groth}}(Y, \rho_1, t)$ est la fonction zêta de X , $Z(X, t)$. Comme la fonction zêta de Y est fournie par la représentation régulière ρ de G ([K 2]) on obtient

$$\text{i.e.} \quad Z(Y, t) = L^{\text{Groth}}(Y, \rho, t) = L^{\text{Groth}}(Y, \rho_1, t) \cdot L^{\text{Groth}}(Y, \rho_2, t),$$

$$(3.3.1) \quad Z(Y, t) = Z(X, t) \cdot L(X, E_2, t).$$

Dans la situation de (3.3.1) on calcule facilement la constante de l'équation fonctionnelle (II, 2.12)

$$\varepsilon(E_2) = \pm q^{n(\chi(X)/2)(1-d)},$$

où $n = \dim X$ et $d = \#G$, et on obtient

$$L(X, E_2^\vee, t) = L(X, E_2, t);$$

il suffit pour cela d'écrire les équations fonctionnelles pour les fonctions L et zêta via (3.3.1).

On aurait pu aussi associer directement à la représentation régulière $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_Z(M)$, un F -cristal unité E à monodromie finie sur X tel que

$$L^{\text{Groth}}(Y, \rho, t) = L(X, E, t);$$

ci-dessus on a obtenu la décomposition $E \simeq E_1 \oplus E_2$.

Particularisons encore la situation pour exhiber un exemple où le facteur $L(X, E_2, t)$ de (3.3.1) n'est pas trivial, i.e. tel que $L(X, E_2, t) \neq 1$. Nous supposons pour cela que X est une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur \mathbb{F}_q , et $Y \rightarrow X$ est un revêtement fini étale galoisien de X , de groupe G , par une courbe Y géométriquement connexe. On sait qu'alors

$$Z(X, t) = \frac{P_X(t)}{(1-t)(1-qt)} \quad \left(\text{resp. } Z(Y, t) = \frac{P_Y(t)}{(1-t)(1-qt)} \right)$$

où $P_X(t)$ (resp. $P_Y(t)$) est un polynôme de degré $2g(X)$ (resp. $2g(Y)$). D'après la formule d'Hurwitz on a $g(Y) - 1 = d(g(X) - 1)$. Donc si X est une courbe rationnelle (resp. elliptique), Y l'est aussi et le facteur $L(X, E_2, t)$ est trivial comme on le voit sur les degrés de $P_X(t)$ et $P_Y(t)$.

Par contre si $g(X) > 1$ il existe des revêtements finis étales galoisiens $Y \rightarrow X$ non triviaux, i.e. de groupe $G \neq \{1\}$, donc avec $g(Y) > g(X)$: en effet si \bar{X} désigne l'image inverse de X sur une clôture algébrique de \mathbb{F}_q , la partie première à p , $\pi_1(\bar{X})^{(p)}$, de $\pi_1(\bar{X})$ est un groupe libre à $2g(\bar{X})$ générateurs et une relation. J.-P. Serre fournit également des exemples de tels revêtements non triviaux ([Se 4], prop. 13 et 15). Dans un tel cas $L(X, E_2, t) = P_Y(t)/P_X(t)$ est un polynôme à coefficients entiers (cf. 3.2.7) de degré $2(g(Y) - g(X)) = 2(d-1)(g(X) - 1) > 0$, ce qui fournit un exemple non trivial de F -cristal unité à monodromie finie.

Dans ce cas le signe de $\varepsilon(E_2)$ est bien déterminé :

$$\varepsilon(E_2) = + q^{(d-1)(g(X)-1)},$$

car $L(X, E_2, t) = \det(1 - tF|H^1(X/W, E) \otimes_w K)$ est de degré pair. Si l'on décompose ρ_2 en somme de représentations irréductibles non triviales θ_i de degré d_i et que l'on suppose les θ_i réalisables sur \mathbb{Z}_p (par exemple si les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité $\in \mathbb{Z}_p$, où m est le p.p.c.m. des ordres des éléments de G), on peut leur associer des F -cristaux unité \mathcal{E}_i à monodromie finie et donc factoriser le polynôme

$$L(X, E_2, t) = \prod_i (L(X, \mathcal{E}_i, t))^{d_i},$$

où $L(X, \mathcal{E}_i, t)$ est un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z}_p : si en outre G est commutatif, les \mathcal{E}_i sont de rang 1 ([Se 3], I, 3.1, Théo. 9).

IV. VALEURS DE FONCTIONS L

Soient X un schéma propre et lisse, géométriquement connexe de dimension d sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$ à $q = p^a$ éléments, et E un F -cristal unité sur X . On a montré que

$$L(X, E, t) = \prod_{0 \leq i \leq 2d} (P_i(X, E, t))^{(-1)^{i+1}},$$

avec $P_i(X, E, t) = \det(1 - tF|H^i(X/W, E) \otimes_w K)$. Le but de cette 4^e partie sera de donner un équivalent de la fonction $L(X, E, t)$ de la variable p -adique t lorsque $t \rightarrow q^{-r}$; lorsque $d = 2r$, on donnera également, comme conséquence du théorème de dualité de ([E 2]), un équivalent p -adique de $P_{2r}(X, E, t)$ lorsque $t \rightarrow q^{-r}$.

Dans le cas où X est projectif et E à monodromie finie entière on obtient même plus : on donnera en (IV, 6) des équivalents lorsque $t \rightarrow q^{-r}$ (pour la topologie usuelle sur \mathbb{R}) des deux quantités précédentes, grâce à l'introduction de faisceaux l -adiques (l premier distinct de p).

Pour formuler nos résultats nous reprendrons la plupart des notations de l'introduction de ([M 4]).

L'ordre d'un groupe M est noté $\# M$, et son sous-groupe de torsion, M_{tors} . Pour un morphisme $\alpha: M \rightarrow N$ de groupes abéliens on pose

$$z(\alpha) = \# \text{Ker } \alpha / \# \text{Coker } \alpha,$$

quand les deux ordres sont finis. Supposons que M et N sont des \mathbb{Z}_p -modules de type fini de même rang et que (a_i) (resp. (b_i)) est une base de M (resp. N) mod. torsion: si $\alpha: M \rightarrow N$ est tel que $\alpha(a_i) = \sum_j z_{ij} b_j$ mod-torsion alors ([T], lemma Z. 1) $z(\alpha)$ est défini si et seulement si $\det(z_{ij}) \neq 0$ et dans ce cas on a

$$z(\alpha) = \# M_{\text{tors}} / (\# N_{\text{tors}}) \cdot \det \alpha,$$

où l'on a posé $\det \alpha = |\det(z_{ij})|_p^{-1}$ et $|p|_p^{-1} = p$.

Il existe des applications canoniques

$$\varepsilon^i: H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r)),$$

où les $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ seront définis en 1.4 à la façon de (II, 2.7); on pose alors

$$\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) = z(\varepsilon^{2r}) \cdot \prod_{i \neq 2r, 2r+1} (\# H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)))^{(-1)^i}$$

quand tous les termes sont définis et finis. Soient \bar{k} une clôture algébrique de k , $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, \bar{W} l'anneau des vecteurs de Witt de \bar{k} , $\bar{K} = \text{Frac}(\bar{W})$ et \bar{E} l'image inverse de E sur \bar{X} . Notons H.R. l'hypothèse suivante.

H.R. — q^r n'est pas valeur propre du Frobenius géométrique sur $H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_{\bar{W}\bar{K}}$ pour $i \neq 2r$.

Cette hypothèse H.R. est notamment vérifiée pour X projectif et $E = \mathcal{O}_{X/W}$ d'après l'« hypothèse de Riemann » démontrée par Deligne ([D] et [K-M]), ou pour un F -cristal unité E à monodromie finie (cf. III, 3). Nous montrerons (1.3.2), sous l'hypothèse H.R., que $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ est fini pour $i \neq 2r, 2r+1$. Comme les groupes $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ sont de type fini sur \mathbb{Z}_p (1.1.1), $\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ est défini si et seulement si $\det(\varepsilon^{2r})$ est défini; dans ce cas on a

$$\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) = \prod_{0 \leq i \leq 2d+1} (\# H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}})^{(-1)^i} / \det(\varepsilon^{2r}).$$

Soit $\gamma: x \rightarrow x^q$ le générateur de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$; nous noterons $SS(X, E, r)$ l'hypothèse suivante:

$SS(X, E, r)$: 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$.

Cette hypothèse, qui est en fait une conjecture, est vérifiée pour $E = \mathcal{O}_{X/W}$ dans certains cas (cf. [M 4]).

Fixons les dernières notations avant d'énoncer nos résultats. Sur l'ouvert (\bar{X}, \bar{X}) du site cristallin $\text{Cris}(\bar{X}/\bar{k})$ est associé au cristal \bar{E} un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -module $\bar{E}_{(\bar{X}, \bar{X})}$: on posera

$$h^{ij} = \dim H^j(\bar{X}, \bar{E}_{(\bar{X}, \bar{X})} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \Omega_{\bar{X}}^i)$$

et
$$\chi(X, E, r) = \sum_{0 \leq i \leq r} \sum_{0 \leq j \leq d} (-1)^{i+j} (r-i) h^{ij}.$$

Si M est un Γ -module, soit M^Γ (resp. M_Γ) le noyau (resp. le conoyau) de $\gamma\text{-Id}$: notons

$$\rho_r = \dim_{\mathbb{Q}_p}(H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))^\Gamma).$$

Posons enfin

$$\alpha_r(X, E) = s^{2r+1}(E, r) - s^{2r}(E, r) - s^{2r}(E^\vee, r) + \sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j})),$$

où E^\vee est le dual linéaire de E , $s^i(E, r) := \dim H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ (comme schéma en groupe parfait : cf. 1 et 2), $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,j}, \dots\}$ étant les inverses des racines de $P_i(X, E, t)$ et $\text{ord}_q(q^m u) = m$ si $|u|_p = 1$.

Les deux théorèmes qui suivent généralisent des théorèmes de Milne ([M 4], 0.1 et 0.2) :

THÉORÈME 0.1. — Supposons *H.R.* satisfaite ; alors le nombre $\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ est défini si et seulement si $SS(X, E, r)$ est satisfaite, et dans ce cas on a l'équivalent suivant pour la topologie p -adique :

$$L(X, E, t) \sim c_0 \cdot \chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \cdot q^{\chi(X, E, r)} \cdot (1 - q^r t)^{-\rho_r},$$

quand $t \rightarrow q^{-r}$, avec $c_0 \in \mathbb{Z}_p$, $|c_0|_p = 1$.

THÉORÈME 0.2. — Soit $d = \dim X = 2r$, et supposons *H.R.* et $SS(X, E, r)$ satisfaits. Alors $P_{2r}(X, E, t)$ est équivalent à

$$c_1 \cdot \frac{\# H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}}}{q^{2r(X, E)} \cdot (\# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma) (\# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_{\text{tors}}^\vee)} \cdot \det(\varepsilon^{2r})(1 - q^r t)^{\rho_r}$$

pour la topologie p -adique, quand $t \rightarrow q^{-r}$, avec $c_1 \in W$, $|c_1|_p = 1$.

Remarque. — Ce théorème 0.2 généralise le théorème 0.2 de Milne ([M 4]), dans lequel il faut noter l'expression erronée de $\alpha_r(X)$: il faut y lire

$$\alpha_r(X) = s^{2r+1}(r) - 2s^{2r}(r) + \sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j})),$$

et non pas $-s^{2r}(r)$ à la place du $-2s^{2r}(r)$; Milne a publié des corrections [M 5]. Cette différence provient d'une erreur dans le lemme ([M 4], 6.7) (pour l'énoncé correct voir 5.1 et 5.1.7), erreur due à l'assertion suivante de ([M 4], 6.7) « $H^{2r}(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r)_{\text{tors}})$ est fini », ce qui est faux en général ([I-R], IV, 3), mais vrai quand X est une surface ([I-R], IV, 3.5).

1. Résultats de finitude pour les faisceaux $v_n(E, r)$.

Soient $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^a$ éléments, X un schéma propre et lisse de dimension d sur $S = \text{Spec } k$ et E un F -cristal unité sur X . W (resp. \bar{W}) désigne l'anneau des vecteurs de Witt de k (resp. d'une clôture algébrique \bar{k} de k), $K = \text{Frac}(W)$, $\bar{K} = \text{Frac}(\bar{W})$. On notera \bar{E} l'image inverse de E sur $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, et γ le générateur canonique de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, $x \mapsto x^q$; $\varphi = \gamma^{-1}$ agit sur \bar{X} par $1 \otimes \varphi$ et donc sur (cf. [E 1], III, 2)

$$H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r)) := \varprojlim_n H^i(\bar{X}, v_n(\bar{E}, r)) ;$$

on note encore φ cette action sur $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Si π est le morphisme de topos $(X/S)_{\text{parf}} \rightarrow S_{\text{parf}}$ ([E 1], III) on rappelle que $R^i\pi_*(v_n(E, r))$ est représentable par un S -schéma en groupes parfait algébrique $\mathbf{H}^i(X, v_n(E, r))$ (noté parfois \mathbf{H}_n^i) : on désigne par $\mathbf{U}^i(X, v_n(E, r))$ (ou \mathbf{U}_n^i) la composante neutre de celui-ci et par $\mathbf{D}^i(X, v_n(E, r))$ (ou \mathbf{D}_n^i) le quotient $\mathbf{H}_n^i/\mathbf{U}_n^i$. Nous avons vu ([E 1], III, 3.1) que $H_n^i := H^i(\bar{X}, v_n(\bar{E}, r))$ (resp. $H^i := H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))$) est l'ensemble des \bar{k} -points du groupe quasi-algébrique ([Se 2]) \mathbf{H}_n^i (resp. du groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^i(X, v_n(E, r))$ noté aussi \mathbf{H}^i). On montre comme dans ([I-R], IV, 3.4 p. 193) que le pro-objet des composantes neutres \mathbf{U}^i est essentiellement constant ; on note \mathbf{U}^i le groupe quasi-algébrique $\mathbf{U}^i(X, \hat{v}(E, r)) := \varprojlim_n \mathbf{U}_n^i$, qui est annulé par une puissance de p

puisque unipotent. Notons $D^i = \varprojlim_n D_n^i$; puisque \varprojlim est exact dans la catégorie des groupes pro-algébriques ([Se 2]) on a $D^i = H^i/U^i$.

On désignera par $s^{i+r}(E, r)$ la dimension du schéma en groupes parfait pro-algébrique $\varprojlim_n H^i(X, v_n(E, r))$. On montre comme Milne ([M 4], § 3) que $s^{i+r}(E, r)$ est fini : c'est le nombre de copies de \mathbb{G}_a^{pf} (= perfectisé de \mathbb{G}_a) intervenant dans les quotients d'une suite de composition du groupe quasi-algébrique $U^i(X, \hat{v}(E, r))$.

PROPOSITION 1.1. — Soient i et r deux entiers. Sous les hypothèses précédentes on a :

(1.1.1) $H^i(X, \hat{v}(E, r)) := \varprojlim_n H^i(X, v_n(E, r))$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini, nul pour $i > d + 1$;

(1.1.2) $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini pour $r = 0$ ou $\dim X$, ou pour $i = 0, 1$; de plus $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r)) = 0$ pour $i > d$;

(1.1.3) $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma$, $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma$ sont des p -groupes finis ;

(1.1.4) la suite longue suivante est exacte

$$\dots \rightarrow H^i(X, \hat{v}(E, r)) \rightarrow H^i(X, E \otimes W\Omega^r) \xrightarrow{1-F} H^i(X, E \otimes W\Omega^r) \rightarrow \dots,$$

où l'on a posé $H^i(X, E \otimes W\Omega^r) := \varprojlim_n H^i(X, E_n \otimes W_n\Omega^r)$.

Nous donnerons plus loin (5.1.5) une relation précise entre $\# H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma$ et $\# H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma$.

On a établi (1.1.1) en ([E 2], II, 3.3) et on prouve la 1^{re} assertion de (1.1.2) comme ([I-R], IV, (3.5.3) p. 194) ; la 2^e est établie en ([E 1], III, (3.2.3.1)).

Pour prouver (1.1.3) nous aurons besoin d'un lemme. Puisque $D^i = H^i/U^i$ on a une suite exacte

$$(1.1.5) \quad 0 \rightarrow U^i(\bar{k}) \rightarrow H^i(\bar{k}) \rightarrow D^i(\bar{k}) \rightarrow 0.$$

LEMME 1.1.6. — $D^i(\bar{k})$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini.

Pour ce lemme on notera $D^i = D^i(\bar{k})$, $U^i = U^i(\bar{k})$, $D_n^i = D_n^i(\bar{k})$ et ${}_{p^n}A$ le noyau de la multiplication par p^n sur un groupe A . Comme

H_n^i et D_n^i sont annulés par p^n , le seul élément infiniment p -divisible de H^i et D^i est 0, donc

$$(1.1.7) \quad \varprojlim_n p^n H^i = \varprojlim_n p^n D^i = 0.$$

D'autre part les suites exactes ([E 1], III, 2.8) fournissent la suite exacte

$$(1.1.8) \quad 0 \rightarrow H^i/p^n \rightarrow H_n^i \rightarrow p^n H^{i+1} \rightarrow 0,$$

d'où, via (1.1.7), l'isomorphisme

$$(1.1.9) \quad H^i = \varprojlim_n H_n^i \simeq \varprojlim_n (H^i/p^n).$$

Si $n \gg 0$ on a vu que $p^n U^i = 0$; pour un tel n la multiplication par p^n sur la suite exacte

$$0 \rightarrow U^i \rightarrow H^i \rightarrow D^i \rightarrow 0,$$

fournit, via le lemme du serpent, la suite exacte

$$p^n D^i \rightarrow U^i \rightarrow H^i/p^n \rightarrow D^i/p^n \rightarrow 0;$$

puisque \varprojlim_n est exact dans la catégorie des groupes quasi-algébriques

([Se 2]), il résulte de (1.1.7) et (1.1.9) que

$$D^i \simeq \varprojlim_n (D^i/p^n),$$

et donc que

$$(1.1.10) \quad D^i \simeq \varprojlim_n (D^i/p^n).$$

Comme \mathbb{Z}_p est complet, la relation (1.1.10) montre que D^i est engendré par tout sous-ensemble qui l'engendre mod. p^n . Or si $n \gg 0$ il existe un tel sous-ensemble qui soit fini : en effet si n est tel que $p^n U^i = 0$ on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & U^i & \rightarrow & H^i/p^n & \rightarrow & D^i/p^n \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & U_n^i & \rightarrow & H_n^i & \rightarrow & D_n^i \rightarrow 0, \end{array}$$

où l'injection au milieu est celle de (1.1.8); d'où une injection de D^i/p^n dans le groupe quasi-algébrique fini D_n^i , ce qui fournit une injection de D^i/p^n dans le groupe abstrait fini D_n^i . D'où le lemme.

Établissons à présent (1.1.3). Puisque $p^n U^i = 0$ pour $n \gg 0$, (1.1.5) fournit une suite exacte

$$(1.1.11) \quad 0 \rightarrow U^i \rightarrow H_{\text{tors}}^i \rightarrow D_{\text{tors}}^i \rightarrow U^i \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0.$$

Or $U_\Gamma^i = 0$: en effet U^i admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à \mathbb{G}_a^{pf} ; on peut donc se ramener à $U^i(\bar{k}) = \bar{k}$, et $\gamma - 1$ est surjectif sur \bar{k} . Le lemme du serpent appliqué à (1.1.11) fournit alors l'isomorphisme (où $M := H^i(\bar{k})$)

$$(M_{\text{tors}})_\Gamma \simeq (D^i(\bar{k})_{\text{tors}})_\Gamma$$

et la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & U^i(\bar{k})^\Gamma & \rightarrow & (M_{\text{tors}})_\Gamma & \rightarrow & (D^i(\bar{k})_{\text{tors}})_\Gamma & \rightarrow 0 \\ & \wr & & \wr & & \wr & \\ & U^i(k) & & (M^\Gamma)_{\text{tors}} & & (D^i(\bar{k})^\Gamma)_{\text{tors}}. & \end{array}$$

Par le même argument, on a aussi $M_\Gamma \simeq D^i(\bar{k})_\Gamma$ et $(M_\Gamma)_{\text{tors}} \simeq (D^i(\bar{k})_\Gamma)_{\text{tors}}$. Puisque $U^i(k)$ est fini et que $D^i(\bar{k})$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini, la propriété (1.1.3) en découle.

L'assertion (1.1.4) résulte de la suite exacte ([E 1], III, 2.4.1)

$$0 \rightarrow v_*(E, r) \rightarrow E \otimes W \cdot \Omega^r \xrightarrow{1-F} E \otimes W \cdot \Omega^r \rightarrow 0,$$

en passant à la limite projective dans la suite exacte longue de pro-objets

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(X, v_*(E, r)) \\ \rightarrow H^i(X, E \otimes W \cdot \Omega^r) \xrightarrow{1-F} H^i(X, E \otimes W \cdot \Omega^r) \rightarrow \dots : \end{aligned}$$

un tel passage à la limite est légitime car les $H^i(X, v_n(E, r))$ sont finis et le système projectif $\{H^i(X, E_n \otimes W_n \Omega^r)\}_n$ vérifie la condition de Mittag-Leffler ([E 1]). \square

Résultats de finitude avec l'hypothèse H.R.

1.2. Sous les hypothèses de 1 nous supposons de plus H.R. satisfaite, i.e., d'après (II, 2.8), que 1 n'est pas valeur propre de ϕ agissant sur $H^i(\bar{X}, v(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ pour $i \neq r$.

On note $H^i(X, v_\infty(E, r)) = \varinjlim_n H^i(X, v_n(E, r))$, où les flèches de transition du système inductif sont la multiplication par p .

THÉOREME 1.3. — Sous les hypothèses 1.2 on a :

1.3.1. $H^i(X, v_\infty(E, r))$ est un p -groupe fini pour $i \neq r, r + 1$;

1.3.2. $H^i(X, \hat{v}(E, r))$ est un p -groupe fini pour $i \neq r, r + 1$;

1.3.3. $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_\Gamma$ sont des p -groupes finis pour $i \neq r$.

La démonstration de 1.3.1 est celle de ([C-S-S], théorème 3, p. 782), la seule différence résidant dans le pas n° 9 de *loc. cit.* où l'on remplace l'hypothèse de Riemann par notre hypothèse H.R. (qui est plus faible mais fournit l'argument).

Pour 1.3.2 prouvons d'abord le lemme :

LEMME 1.3.4. — Sous les hypothèses 1.2, et pour $i \neq r$, il existe un entier n tel que $p^n H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))^\Gamma = p^n H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_\Gamma = 0$.

Posons $M = H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))$ et $H = H^i(\bar{X}, \bar{E}_{W(\bar{X})} \otimes W\Omega^r)$. Puisqu'il existe un entier n tel que $p^n H_{\text{tors}} = 0$ ([E 1], II, 4.1.3) la suite exacte ([E 1], III, (3.2.3.1))

$$0 \rightarrow M \rightarrow H \xrightarrow{1-F} H \rightarrow 0$$

fournit l'inclusion

$$M/M_{\text{tors}} \subset \text{Ker} \{1-F: H/H_{\text{tors}} \rightarrow H/H_{\text{tors}}\};$$

H/H_{tors} étant de type fini sur W ([E 1], II, 4.1.3), il résulte de ([I], II, 5.11) que M/M_{tors} est de type fini sur \mathbb{Z}_p . Donc M est somme directe d'un \mathbb{Z}_p -module libre de type fini et d'un \mathbb{Z}_p -module de torsion annulé par une puissance de p . Sous les hypothèses du lemme, 1 n'est pas valeur propre de φ agissant sur le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, ce qui fournit un isomorphisme $1 - \varphi: M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$; donc la suite exacte

$$0 \rightarrow M^\Gamma \rightarrow M \xrightarrow{1-\varphi} M \rightarrow M_\Gamma \rightarrow 0$$

prouve que M^Γ et M_Γ sont de p -torsion, ce qui établit le lemme compte tenu de la description précédente de M .

Revenons à 1.3.2. La dégénérescence de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^i(k, H^j(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, \hat{v}(E, r))$$

fournit des suites exactes

$$(1.3.5) \quad 0 \rightarrow H^{i-1}(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))_\Gamma \rightarrow H^i(X, \hat{v}(E, r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, \hat{v}(\bar{E}, r))^\Gamma \rightarrow 0,$$

ce qui prouve, par le lemme 1.3.4, l'existence d'un entier n tel que $p^n H^i(X, \hat{v}(E, r)) = 0$ pour $i \neq r, r + 1$; l'assertion 1.3.2 en résulte puisque $H^i(X, \hat{v}(E, r))$ est de type fini sur \mathbb{Z}_p (1.1.1).

La propriété 1.3.3 résulte des suites exactes (1.3.5), de (1.1.1) et de 1.3.4. \square

Notation 1.4. — Par analogie avec la cohomologie l -adique ($l \neq p$) nous introduisons les notations suivantes (cf. [M 4], 1) :

$$H^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(E, r)) := H^{i-r}(X, v_n(E, r))$$

$$H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) := \varprojlim_n H^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(E, r)) = H^{i-r}(X, \hat{v}(E, r))$$

$$H^i(X, \mathbb{Q}_p(E, r)) := H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

$$H^i(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(E, r)) := \varinjlim_n H^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(E, r)) = H^{i-r}(X, v_\infty(E, r))$$

$$U^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(E, r)) := U^{i-r}(X, v_n(E, r)),$$

$$D^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}(E, r)) := D^{i-r}(X, v_n(E, r)),$$

et $U^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)), \dots, U^i = U^i(k), D^i = D^i(k).$

Le F -cristal unité E est le cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ ([B-M], 4.1) d'un groupe p -divisible étale G , i.e. le groupe p -divisible correspondant à E par [Sa] est G^\vee défini par les duals de Pontryagin $G^\vee(n)$ de $G(n) := \text{Ker} \{p^n : G \rightarrow G\}$. On a alors les *interprétations suivantes* :

$$(1.4.1) \quad H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, 0)) = H^i(X_{\text{ét}}, M) \\ = \varprojlim_n H^i(X_{\text{ét}}, G^\vee(n)) \quad (\text{cohomologie étale}),$$

où $M = \varprojlim_n G^\vee(n)$ est le \mathbb{Z}_p -faisceau étale lisse associé à E ;

$$(1.4.2) \quad H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, 1)) = \varprojlim_n H^i(X_{\text{ppf}}, G^*(n)) \quad (\text{cohomologie plate}),$$

où $G^*(n)$ est le dual de Cartier de $G(n)$.

Par contre pour $r > 1$ on n'a pas d'interprétation analogue.

Les valeurs propres du Frobenius (resp. du Frobenius géométrique) agissant sur $H^i(X/W, E) \otimes_W K$ (resp. sur $H^i(\bar{X}/\bar{W}, \bar{E}) \otimes_{\bar{W}} \bar{K}$) seront notées a_{ij} et on posera

$$P_i(X, E, t) = \prod_j (1 - a_{ij}t).$$

2. Expression de $\chi(X, E, r)$ et de l'action de φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$.

Avec les hypothèses et notations du 1 on suppose de plus X géométriquement connexe sur $k = \mathbb{F}_q$.

Rappelons que $s^i(E, r)$ désigne la dimension du schéma en groupes parfait pro-algébrique $\mathbf{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$, et que dans l'introduction on a défini le nombre

$$\chi(X, E, r) = \sum_{0 \leq i \leq r} \sum_{0 \leq j \leq d} (-1)^{i+j} (r-i) h^{ij},$$

avec $h^{ij} = \dim H^i(\bar{X}, \bar{E}_{(\bar{X}, \bar{X})} \otimes \Omega_{\bar{X}}^i)$. De la même façon que Milne dans ([M 4], § 3 et 4) on démontre alors la proposition suivante qui relie $\chi(X, E, r)$ aux $s^i(E, r)$:

PROPOSITION 2.1. — *Avec les hypothèses ci-dessus on a la formule*

$$\chi(X, E, r) = \sum_{\text{ord}_q(a_{ij}) \leq r} (-1)^i (r - \text{ord}_q(a_{ij})) - \sum_i (-1)^i s^i(E, r),$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(X/W, E) \otimes_w K$.

En utilisant la notation 1.4, la proposition (II, 2.8) donne l'action de φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$:

PROPOSITION 2.2. — *Avec les hypothèses du 2 on a :*

$$(2.2.1) \quad \det(1 - \varphi t | H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))) = \sum_{\text{ord}_q(a_{ij}) = r} (1 - q^{-r} a_{ij} t).$$

La formule (2.2.1) est à rapprocher du résultat en cohomologie l -adique ($l \neq p$) ([B-N], § 2, p. 41) :

$$(2.2.2) \quad \det(1 - \varphi t | H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(r))) = \prod_j (1 - q^{-r} a'_{ij} t),$$

où les a'_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius géométrique sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$. Si X est projectif sur k et $E = \mathcal{O}_{X/W}$, on a $a'_{ij} = a_{ij}$ ([K-M]).

3. Calculs préliminaires.

3.1. *Remarque liminaire.* — Les calculs qui suivent reprennent le travail de Milne ([M 4], § 6). On aura soin de noter toutefois que Milne y utilise à plusieurs reprises l'assertion selon laquelle « $H^i(\bar{X}, \hat{\mathbb{Z}}(r))_{\text{tor}}$ est fini », ce qui est faux en général, puisque $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}$ n'est pas nécessairement fini ([I-R], IV, 3) : cette erreur n'a pas d'incidence avant le lemme 6.7 de [M 4], dans lequel il faut apporter un terme correcteur (cf. 5.1, 5.1.7 et [M 5]) ; le théorème 0.2 de Milne ([M 4]) s'en trouve modifié comme indiqué dans l'introduction de la 4^e partie.

3.2. Si M est un Γ -module, on désignera par $f : M^\Gamma \rightarrow M_\Gamma$ l'application induite par l'identité de M : plus particulièrement on la notera $f^{i,r}$ pour $M = H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$ et $f^{2r} := f^{2r,r}$. On note (cf. introduction)

$$z(f) = \# \text{Ker } f / \# \text{Coker } f.$$

On a le lemme suivant ([T] lemma Z 4, p. 208).

LEMME 3.3. — Soit M un Γ -module de type fini sur \mathbb{Z}_p . Alors $z(f)$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, auquel cas

$$z(f) = \left| \prod_{a_i \neq 1} (a_i - 1) \right|_p,$$

où $\{a_1, a_2, \dots\}$ sont les valeurs propres de γ sur $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

LEMME 3.4. — Soit $f^{ir} : H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ l'application induite par l'identité. Alors $z(f^{ir})$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$, auquel cas

$$z(f^{ir}) = \left| \prod_{a_{ij} \neq q^r} (1 - q^{-r} a_{ij}) \right|_p \cdot \left| \prod_{\text{ord}_q(a_{ij}) < r} q^r / a_{ij} \right|_p \cdot q^{s^i(E, r)}.$$

Par la démonstration de (1.1.2) on a montré l'existence d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & U^i(\bar{k})^\Gamma & \rightarrow & H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma & \rightarrow & D^i(\bar{k})^\Gamma \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f^r & & \downarrow f^{ir} & & \downarrow f'' \\ & & 0 & \rightarrow & H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma & \xrightarrow{\sim} & D^i(\bar{k})_\Gamma \rightarrow 0, \end{array}$$

f' et f'' étant induites par l'identité. On a

$$z(f') = \# \mathbf{U}^i(\bar{k})^\Gamma = \# \mathbf{U}^i(k) = q^{s^i(E, r)}.$$

Comme $\mathbf{D}^i(\bar{k})$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini (1.1.6) et $\mathbf{D}^i(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$, on lui applique 3.3 : $z(f'')$ est défini si et seulement si 1 n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$ et alors

$$\begin{aligned} z(f'') &= \left| \prod_{\substack{\text{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij} \neq q^r}} (1 - (q^r/a_{ij})) \right|_p \quad (\text{cf. 2.2.1}) \\ &= \left| \prod_{\substack{\text{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij} \neq q^r}} (1 - (q^r/a_{ij})) q^{-r} a_{ij} \right|_p \\ &= \left| \prod_{\substack{\text{ord}_q(a_{ij})=r \\ a_{ij} \neq q^r}} (1 - q^{-r} a_{ij}) \right|_p. \end{aligned}$$

Or, puisque

$$|1 - q^{-r} a_{ij}|_p = \begin{cases} |q^{-r} a_{ij}|_p & \text{si } \text{ord}_q(a_{ij}) < r \\ 1 & \text{si } \text{ord}_q(a_{ij}) > r, \end{cases}$$

on obtient

$$z(f'') = \left| \prod_{a_{ij} \neq q^r} (1 - q^{-r} a_{ij}) \right|_p \times \left| \prod_{\text{ord}_q(a_{ij}) < r} q^r/a_{ij} \right|_p.$$

D'où le résultat par $z(f^{ir}) = z(f')z(f'')$. □

(3.5) Dans toute la suite de cet article on supposera l'hypothèse H.R. de l'introduction satisfaite.

Cette hypothèse H.R. est équivalente par 2.2 à l'hypothèse :

(3.6) 1 n'est pas valeur propre de φ sur $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))$ pour $i \neq 2r$.

On déduit du lemme 3.4 :

PROPOSITION 3.7. — Supposons H.R. satisfaite et soit $f^{ir} : H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ l'application induite par l'identité de $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$. Si $i \neq 2r$, $z(f^{ir})$ est toujours défini, et pour $i = 2r$,

$z(f^{ir})$ est défini si et seulement si $SS(X, E, r)$ est satisfaite. Quand $z(f^{ir})$ est défini on a

$$z(f^{ir}) = \left| \prod_{a_{ij} \neq q^r} (1 - q^{-r} a_{ij}) \right|_p q^e,$$

$$\text{avec } e = s^i(E, r) - \prod_{\text{ord}_q(a_{ij}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{ij})).$$

COROLLAIRE 3.8. — Supposons $H.R.$ satisfaite et $i \neq 2r$; alors $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ sont finis et

$$\# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma = |P_i(X, E, q^{-r})|_p q^e,$$

$$\text{avec } e = s^i(E, r) - \sum_{\text{ord}_q(a_{ij}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{ij})).$$

On applique le lemme Z. 1 de Tate [T] aux groupes finis $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ (1.3.3), d'où

$$z(f^{ir}) = \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma;$$

le corollaire en résulte via 3.7. □

3.9. Définissons ici les applications ε^i de l'introduction.

On a supposé $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^a$ et $\gamma: \bar{k} \rightarrow \bar{k}$, $x \mapsto x^q$ est le générateur canonique de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. On a un isomorphisme $\Gamma \simeq \hat{\mathbb{Z}}$, $\gamma^\alpha \mapsto \alpha$, d'où

$$H^1(k, \hat{\mathbb{Z}}) := H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \hat{\mathbb{Z}}) \simeq H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Gal}(\bar{k}/k));$$

or l'identité de Γ est un cocycle, et la classe de ce cocycle définit un élément θ_0

$$\theta_0 \in H^1(\Gamma, \Gamma) \simeq H^1(k, \hat{\mathbb{Z}}) = H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } k, \hat{\mathbb{Z}}).$$

Par image inverse θ_0 fournit un élément θ

$$\theta \in H^1(X, \hat{\mathbb{Z}}) := \prod_l H^1(X, \mathbb{Z}_l),$$

et la composante $\theta_p \in H^1(X, \mathbb{Z}_p)$ de θ définit par cup-produit une application

$$(3.9.1) \quad \varepsilon^i: H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$$

$$x \mapsto \theta_p \cup x.$$

En particulier l'application ε^{2r} s'insère, d'après ([M 4], 6.5) dans le carré commutatif

$$(3.9.2) \quad \begin{array}{ccc} H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) & \xrightarrow{\varepsilon^{2r}} & H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \\ i \downarrow & & \uparrow j \\ H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma & \xrightarrow{f^{2r}} & H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma, \end{array}$$

où i et j sont donnés par (1.3.5). Comme $z(\varepsilon^{2r}) = z(j)z(f^{2r})z(i)$ ([T], lemma Z. 2), on en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.10. — *Supposons H.R. satisfaite. Alors le déterminant de $\varepsilon^{2r} : H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \rightarrow H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ est défini si et seulement si $SS(X, E, r)$ est vrai. Dans ce cas $z(\varepsilon^{2r})$ est défini et l'on a*

$$\begin{aligned} z(f^{2r}) &= z(\varepsilon^{2r}) \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \\ &= [1/\det(\varepsilon^{2r})] \times [\# H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}} / \# H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}}] \\ &\quad \times [\# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma] \end{aligned}$$

où $f^{2r} : H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma \rightarrow H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ est induite par l'identité.

4. Démonstration du théorème 0.1.

4.1. On suppose donc H.R. satisfaite. Il résulte de 3.10 et 1.3.2 que $\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ est défini si et seulement si $SS(X, E, r)$ est satisfaite. Dans ce cas les suites exactes (1.3.5)

$$0 \rightarrow H^{i-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma \rightarrow 0$$

montrent que

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) &= \left[\prod_{i \neq 2r} (\# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma)^{(-1)^i} \right] \\ &\quad \times [\# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^\Gamma / \# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma] \times z(\varepsilon^{2r}) \\ &= \left[\prod_{i \neq 2r} (|P_i(X, E, q^{-r})|_p)^{(-1)^i} \right] z(f^{2r}) q^\delta \quad (\text{cf. 3.10, 3.8}), \end{aligned}$$

avec

$$\delta = \sum_{i \neq 2r} (-1)^i s^i(E, r) + \sum_{i \neq 2r} (-1)^{i+1} \sum_{\text{ord}_q(a_{ij}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{ij}))$$

$$\delta = - \left[\chi(X, E, r) + s^{2r}(E, r) - \sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) \leq r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j})) \right] \quad (\text{cf. 2.1}).$$

Or

$$z(f^{2r}) = \left| \prod_{a_{2r,j} \neq q^r} (1 - q^{-r} a_{2r,j}) \right|_p \times q^e,$$

avec

$$e = s^{2r}(E, r) - \sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j})).$$

D'où

$$\chi(X, \mathbb{Z}_p(E, r)) = \left\{ \left(\prod_{0 \leq i \leq 2d} P_i(X, E, t)^{(-1)^i} \right) / (1 - q^r t)^{\rho_r} \right\}_{t=q^{-r}} \Big|_p q^{-\chi(X, E, r)}$$

avec $\rho_r = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p(\bar{E}, r))^\Gamma$ (cf. [T], lemma Z.4); c'est le théorème 0.1, car l'appartenance de C_0 à \mathbb{Q}_p vient de ce que $L(X, E, t)$ est élément de $\mathbb{Q}_p(t)$ (III, 2.3). \square

4.2. Soient X un schéma propre, lisse, géométriquement connexe de dimension d sur \mathbb{F}_q , et E un F -cristal unité sur X ; on a noté (II, 2.12)

$$\begin{aligned} \varepsilon(E) &= \det(-F | \mathbb{R}\Gamma(X/W, E))^{-1} \\ &:= \prod_{0 \leq i \leq 2d} [\det(-F | H^i(X/W, E) \otimes_w K)]^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE DU THÉORÈME 0.1. — Avec les hypothèses 4.2 on a, pour tout entier $r > d$

$$|\varepsilon(E)|_p = q^{r\chi(X, E) - \chi(X, E, r)};$$

en particulier $\chi(X, \mathcal{O}_{X/W}, r) = (r - d/2)\chi(X)$ si $r > d$.

Comme $\mathbb{Z}_p(E, r) = 0$ pour $r > d$ il suffit d'appliquer (II, 2.14) et le théorème 0.1 pour obtenir la 1^{re} formule. La 2^e formule résulte de $\varepsilon(\mathcal{O}_{X/W}) = \pm q^{-d\chi/2}$ où $\chi = \chi(X)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré ([B 1], VII, 3.2.5, p. 585). \square

5. Démonstration du théorème 0.2.

On se place dorénavant dans les hypothèses du théorème 0.2: en particulier H.R. est satisfaite et $d = 2r$.

LEMME 5.1. — Sous les hypothèses précédentes on a :

$$\begin{aligned} &[1 / \# H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}}] \times [\# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma / \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma] \\ &= q^{-s^{2r+1}(E, r) + s^{2r}(E^\vee, r)} / [\# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma \times \# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_{\text{tors}}^\Gamma]. \end{aligned}$$

D'après le théorème de dualité ([E 2], II, 3.5)) on a une suite exacte

$$0 \rightarrow U^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r)) \rightarrow H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r)) \rightarrow D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^* \rightarrow 0,$$

où * désigne la dualité de Pontryagin; cette suite reste exacte en passant aux invariants sous Γ car $U^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma = 0$ (cf. la démonstration de (1.1.3)), d'où une suite exacte

$$(5.1.1) \quad 0 \rightarrow U^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E^\vee, r)) \rightarrow H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma \rightarrow (D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma)^* \rightarrow 0.$$

D'autre part, en passant à la limite inductive dans les suites exactes

$$0 \rightarrow H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))/p^n \rightarrow H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}/p^n(\bar{E}, r)) \rightarrow {}_{p^n}H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \rightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte

$$(5.1.2) \quad 0 \rightarrow H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \rightarrow H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}} \rightarrow 0;$$

or $H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$ étant fini (1.3.3), on a

$$(H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_\Gamma \simeq H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$$

ce qui fournit, par (5.1.2), un isomorphisme

$$(5.1.3) \quad \begin{array}{c} H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \simeq (H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}})_\Gamma \\ \downarrow \\ D^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma. \end{array}$$

Mettant (5.1.3) et (5.1.1) ensemble on obtient

$$(5.1.4) \quad \#(H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_{\text{tors}})_\Gamma = q^{-s^{2r+1}(E^\vee, r)} \times \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^\vee, r))_\Gamma.$$

Admettons pour l'instant le lemme suivant :

LEMME 5.1.5. — *Pour tout couple d'entiers (i, r) on a une égalité où tous les termes sont finis :*

$$q^{s^i(E, r)} \times \#(H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}})_\Gamma = \# H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma.$$

La finitude du p -groupe $H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma$, et les suites (1.3.5) fournissent la suite exacte

$$(5.1.6) \quad 0 \rightarrow H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_\Gamma \rightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}} \rightarrow H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^\Gamma \rightarrow 0,$$

d'où l'on déduit

$$\# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\Gamma} / \# H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}} = 1 / \# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^{\Gamma}.$$

D'autre part, on tire de (5.1.4) et 5.1.5 :

$$1 / \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))^{\Gamma} = q^{-s^{2r+1}(E, r) + s^{2r}(E^{\vee}, r)} / \# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^{\vee}, r))_{\text{tors}}^{\Gamma}.$$

Le lemme 5.1 s'obtient en faisant le produit de ces deux égalités.

Prouvons le lemme 5.1.5. — La finitude des termes en présence résulte du 2 et de (1.1.3). Posons $M = H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$, $U^i(\bar{k}) = U^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))$ et $D^i(\bar{k}) = M/U^i(\bar{k})$. On a établi, dans la démonstration de (1.1.3), la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & U^i(\bar{k})^{\Gamma} & \rightarrow & M_{\text{tors}}^{\Gamma} & \rightarrow & D^i(\bar{k})_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & = & U^i(\bar{k})_{\Gamma} & \rightarrow & (M_{\text{tors}})_{\Gamma} & \simeq & (D^i(\bar{k})_{\text{tors}})_{\Gamma} \rightarrow 0, \end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales induites par l'identité. On obtient ainsi

$$\# M_{\text{tors}}^{\Gamma} / \# (M_{\text{tors}})_{\Gamma} = z(f) = z(f') \cdot (f''); \text{ or } z(f') = q^{s^i(E, r)}$$

et

$$z(f'') = \# D^i(\bar{k})_{\text{tors}}^{\Gamma} / \# (D^i(\bar{k})_{\text{tors}})_{\Gamma} = \# D^i(\bar{k})_{\text{tors}} / \# D^i(\bar{k})_{\text{tors}} \text{ car } D^i(\bar{k})_{\text{tors}}$$

est fini, d'où $z(f'') = 1$, ce qui prouve 5.1.5. \square

Remarque 5.1.7. — Le lemme 5.1 fournit le terme correcteur à apporter dans ([M 4], 6.7). La puissance de q qu'il faut lire dans *loc. cit.* est $-s^{2r+1}(r) + s^{2r}(r)$ et non pas $-s^{2r+1}(r)$.

Achevons maintenant la preuve de 0.2. — Notons $e = s^{2r}(E, r)$ — $\sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j}))$. De 3.7, 3.10 et 5.1 on déduit

$$\begin{aligned} \prod_{a_{2r,j} \neq q^r} |1 - q^{-r} a_{2r,j}|_p^{-1} &= z(f^{2r})^{-1} q^e \\ &= [\# H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}} / \# H^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}}] \\ &\quad \times [\# H^{2r-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\Gamma} / \# H^{2r+1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\Gamma}^{\Gamma}] \times \det(\varepsilon^{2r}) \times q^e \\ &= [\# H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(E, r))_{\text{tors}} / \{\# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}, r))_{\text{tors}}^{\Gamma} \\ &\quad \times \# H^{2r}(\bar{X}, \mathbb{Z}_p(\bar{E}^{\vee}, r))_{\text{tors}}^{\Gamma}\}] \times \det(\varepsilon^{2r}) \times q^{e - s^{2r+1}(E, r) + s^{2r}(E^{\vee}, r)} \end{aligned}$$

ce qui est le théorème 0.2, puisque

$$- \alpha_r(X, E) = - s^{2r+1}(E, r) + s^{2r}(E, r) + s^{2r}(E^\vee, r) - \sum_{\text{ord}_q(a_{2r,j}) < r} (r - \text{ord}_q(a_{2r,j})).$$

□

6. Cas où E est à monodromie finie entière.

Soient X un schéma projectif, lisse, géométriquement connexe de dimension d sur \mathbb{F}_q ($q = p^a$) et E un F -cristal unité à monodromie finie entière (III, 3.2.1), i.e. correspondant à une représentation

$$\rho: \pi_1(X) \rightarrow G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M),$$

où G est un groupe fini et M un \mathbb{Z} -module libre de rang fini. On notera encore ρ la représentation

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M),$$

et $\rho_l: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l)$ désignera la composée de ρ avec l'injection $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l)$, où $M_l = M \otimes \mathbb{Z}_l$ (l premier quelconque).

Dans cette situation nous allons donner un équivalent (pour la topologie usuelle sur \mathbb{R}) de la fonction $L(X, E, t) \in \mathbb{Q}(t)$ au voisinage d'un pôle de la forme $t = q^{-r}$, généralisant ainsi les théorèmes 0.1 et 0.2 limités à des équivalents p -adiques. Il va nous falloir pour cela étendre (en les modifiant au besoin) les définitions de l'introduction du IV (cf. [M 4], Intr.) au cas $l \neq p$. Comme d'habitude on notera par une barre les images inverses sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de \mathbb{F}_q , et par Γ le groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, de générateur $\gamma: x \mapsto x^q$.

Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale galoisien de groupe G ; à ce revêtement et à la représentation ρ_l on associe le \mathbb{Z}_l -faisceau lisse \mathcal{F}_l qui provient de la représentation

$$\rho_l: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(M_l).$$

On vérifie alors immédiatement les identités ([Gr]):

$$L(X, E, t) = L^{\text{Groth}}(Y, \rho_l, t) = L(X, \mathcal{F}_l, t)$$

pour tout nombre premier l . Nous savons (III, (3.2.4)) que

$$(6.1) \quad L(X, E, t) = \prod_{0 \leq i \leq 2d} \det(1 - tF|H^i(X/W, E) \otimes_w K)^{(-1)^{i+1}} \\ = \prod_{0 \leq i \leq 2d} \det(1 - tF|\{H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^{\odot})^{(-1)^{i+1}}.$$

Il existe un analogue l -adique ($l \neq p$) de cette formule : puisque Y est projectif, l'égalité ([K 2], p. 170)

$$\det(1 - tF | \{H^i(Y/W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\}^G) = \det(1 - tF | \{H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)\}^G)$$

et l'isomorphisme

$$H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)^G \simeq H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)$$

provenant de la dégénérescence de la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$H^j(G, H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)) \Rightarrow H^{i+j}(\bar{X}, \mathcal{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)$$

en E_2 ([Se 1], VIII, § 2, cor. 1 de prop. 4) fournissent

$$\begin{aligned} (6.2) \quad L(X, E, t) &= \prod_{0 \leq i \leq 2d} \det(1 - tF | \{H^i(\bar{Y}, M_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)\}^G)^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_{0 \leq i \leq 2d} \det(1 - tF | H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l))^{(-1)^{i+1}}; \end{aligned}$$

on retrouve ainsi l'expression l -adique ($l \neq p$) de Grothendieck pour les fonctions L ([Gr]). Ici il est à noter que

$$P_{i,l}(t) = \det(1 - tF | H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_l \otimes \mathbb{Q}_l)) = \det(1 - tF | H^i(X/W, E) \otimes_w K)$$

est à coefficients entiers relatifs indépendants de l : reprendre pour ça la démonstration de (III, 3.2.7) et l'argument de Deligne ([D], preuve de (1.7) \Rightarrow (1.6)).

Pour $l \neq p$ et r un entier, notons

$$\mathcal{F}_l/l^n(r) = \mathcal{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}/l^n(r) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{l,r} = \mathcal{F}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l(r)$$

les twistés à la Tate. La proposition suivante fournit les résultats de finitude analogues à ceux du 1 : ici l'hypothèse H.R. est satisfaite d'après (III, 3.2.3).

PROPOSITION 6.3. — *Sous les hypothèses de 6 avec $l \neq p$ et r un entier on a :*

(6.3.1) *Pour tout entier i , $H^i(X, \mathcal{F}_l(r))$ et $H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_l(r))$ sont des \mathbb{Z}_l -modules de type fini,*

(6.3.2) *Pour tout entier $i \neq 2r, 2r + 1$, $H^i(X, \mathcal{F}_l(r))$ est fini,*

(6.3.3) *Pour tout entier $i \neq 2r + 1$, $H^i(X, \mathcal{F}_l(r))_{\text{tors}} = 0$ pour presque tout l ,*

(6.3.4) Pour tout entier $i \neq 2r$, $H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_i(r))^\Gamma$ et $H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_i(r))_\Gamma$ sont finis,

(6.3.5) Pour tout entier $i \neq 2r$, $2r + 1$, $\lim_n H^i(X, \mathcal{F}_i/l^n(r))$ est fini

et nul pour presque tout l .

La démonstration reprend celle de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé ([C.S.S.], Théo. 2, p. 780) à ceci près que pour prouver (6.3.3) le polynôme

$$(6.3.6) \quad Q_i(t) = \det(1 - \gamma t | H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_i(r)) \otimes \mathbb{Q}_l) \\ = \prod_j (1 - (q^r/a_{ij})t),$$

où les a_{ij} sont les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_i) \otimes \mathbb{Q}_l$ (cf. [M 4], 5.6), est à coefficients rationnels (et non pas entiers) indépendants de l , car on a remarqué que $\det(1 - tF | H^i(\bar{X}, \mathcal{F}_i) \otimes \mathbb{Q}_l)$ est à coefficients entiers relatifs indépendants de l : ceci ne modifie toutefois pas le fait crucial que $|Q_i(1)|_l = 1$ pour presque tout l . On conclut comme dans (*loc. cit.*) grâce à un théorème de Gabber ([Ga]). \square

Pour un morphisme $\alpha: A \rightarrow B$ de groupes abéliens on a noté $z(\alpha) = \# \text{Ker } \alpha / \# \text{Coker } \alpha$. Supposons que A et B sont de type fini sur $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, que $\alpha \otimes 1_{\mathbb{Q}}: A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme

et que $\alpha_l := \alpha \otimes 1_{\mathbb{Z}_l}: A_l = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \rightarrow B_l = B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ est un isomorphisme modulo torsion pour presque tout l : si $(a_i)_i$ (resp. $(b_i)_i$) est une base de A_l (resp. B_l) modulo torsion telle que

$$\alpha_l(a_i) = \sum_j z_{ij}^l b_j^l \text{ mod-torsion,}$$

alors ([T], lemma Z.1) $z(\alpha)$ est défini si et seulement si $\det(z_{ij}^l) \neq 0$ et dans ce cas on a

$$z(\alpha) = \# A_{\text{tors}} / (\# B_{\text{tors}}) \cdot \det \alpha,$$

où l'on a posé

$$\det \alpha = \prod_l |\det(z_{ij}^l)|_l^{-1}.$$

Pour $l \neq p$, $H^i(X, \mathcal{F}_i(r))$ désignera le groupe de cohomologie l -adique et pour $l = p$ ce sera $H^i(X, \mathbb{Z}_p(E, r))$ (cf. 1.4). Posons

$$H^i(X, \hat{\mathcal{F}}(r)) = \prod_l H^i(X, \mathcal{F}_i(r)).$$

L'élément $\theta \in H^1(X, \hat{\mathbb{Z}}) = \prod_l H^1(X, \mathbb{Z}_l)$ de 3.9 définit par cup-produit des applications

$$\varepsilon^i: H^i(X, \hat{\mathcal{F}}(r)) \rightarrow H^{i+1}(X, \hat{\mathcal{F}}(r)),$$

et l'on pose

$$\chi(X, \hat{\mathcal{F}}(r)) = z(\varepsilon^{2r}) \cdot \prod_{\substack{i \neq 2r \\ 2r+1}} (\# H^i(X, \hat{\mathcal{F}}(r)))^{(-1)^i}$$

quand tous les termes sont définis et finis. Il résulte de 6.3 et 1.3 que $H^i(X, \hat{\mathcal{F}}(r))$ est fini pour $i \neq 2r$, $2r+1$ et que $H^{2r}(X, \hat{\mathcal{F}}(r))_{\text{tors}}$ est fini. Puisque les \mathbb{Z}_l -modules $H^i(X, \mathcal{F}_l(r))$ sont de type fini et que $H^{2r}(X, \mathcal{F}_l(r))_{\text{tors}} = 0$ pour presque tout l , l'expression $z(\varepsilon^{2r}) = \prod_l z(\varepsilon_l^{2r})$ est définie (donc $\chi(X, \hat{\mathcal{F}}(r))$ si et seulement si $H^{2r+1}(X, \hat{\mathcal{F}}(r))_{\text{tors}}$ est fini et $\det(\varepsilon^{2r})$ est défini, auquel cas

$$\chi(X, \hat{\mathcal{F}}(r)) = \prod_{0 \leq i \leq 2d+1} (\# H^i(X, \hat{\mathcal{F}}(r))_{\text{tors}})^{(-1)^i} / \det(\varepsilon^{2r}).$$

Notons $SS(X, \mathcal{F}_l, r)$ l'hypothèse

$SS(X, \mathcal{F}_l, r): 1$ n'est pas racine multiple du polynôme minimal de γ agissant sur $H^{2r}(\bar{X}, \mathcal{F}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$.

L'analogie du théorème 0.1 est alors :

THÉORÈME (0.1)'. — *Sous les hypothèses précédentes, le nombre $\chi(X, \hat{\mathcal{F}}(r))$ est défini si et seulement si $SS(X, \mathcal{F}_l, r)$ est vraie pour tout l , et dans ce cas*

$$L(X, E, q^{-s}) \sim \pm \chi(X, \hat{\mathcal{F}}(r)) q^{\chi(X, E, r)} (1 - q^{r-s})^{-\rho_r}$$

quand $s \rightarrow r$, où $\chi(X, E, r)$ et ρ_r ont le même sens qu'en 0.1.

La démonstration reprend celle de Milne ([M 4], 6) compte tenu du 4. □

Pour formuler la généralisation du théorème 0.2 il nous faut, pour tout nombre premier l , définir le groupe $H^i(X, \mathcal{F}_l^\vee(r))$: pour $l \neq p$ c'est celui de la cohomologie l -adique

$$H^i(X, \mathcal{F}_l^\vee(r)) := \varprojlim_n H^i(X, (\mathcal{F}_l/l^n)^\vee(r))$$

$$\text{ou} \quad (\mathcal{F}_l/l^n)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_l/l^n}(\mathcal{F}_l/l^n, \mathbb{Z}_l/l^n),$$

et pour $l = p$

$$H^i(X, \mathcal{F}_p^\vee(r)) := H^i(X, \mathbb{Z}_p(E^\vee, r))$$

où E^\vee est le dual linéaire de E . On pose alors

$$H^i(X, \widehat{\mathcal{F}}^\vee(r)) = \prod_l H^i(X, \mathcal{F}_l^\vee(r)),$$

et de même sur \bar{X} . L'analogie de 0.2 s'énonce ;

THÉORÈME (0.2)'. — *Sous les hypothèses du 6, soit $d = 2r$ et supposons $SS(X, \mathcal{F}_l, r)$ satisfaite pour tout l . Alors $P_{2r}(X, E, q^{-s})$ est équivalent à*

$$\pm \frac{\# H^{2r+1}(X, \widehat{\mathcal{F}}(r))_{\text{tors}}}{q^{\alpha_r(X, E)} \cdot (\# H^{2r}(\bar{X}, \widehat{\mathcal{F}}(r))_{\text{tors}}) \cdot (\# H^{2r}(\bar{X}, \widehat{\mathcal{F}}^\vee(r))_{\text{tors}})} \det(\varepsilon^{2r})(1 - q^{r-s})^{\rho_r}$$

quand $s \rightarrow r$, où $\alpha_r(X, E)$ et ρ_r ont le même sens qu'en 0.2.

La démonstration est tout à fait semblable à celle du théorème 0.2 de Milne ([M 4]), compte tenu de la dualité de Poincaré pour le faisceau \mathcal{F}_l/l^n ($l \neq p$) et du 5. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [B-N] P. BAYER, J. NEUKIRCH, On values of Zeta Functions and l -adic Euler characteristics, *Invent. Math.*, 50 (1978), 35-64.
- [B 1] P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, *Lecture Notes in Math.*, n° 407, Springer Verlag, 1974.
- [B 2] P. BERTHELOT, Sur le « théorème de Lefschetz faible » en cohomologie cristalline, *C.R.A.S. Paris*, t. 277, 12 nov. 1973, série A, p. 955-958.
- [B 3] P. BERTHELOT, Le théorème de dualité plate pour les surfaces, d'après J. S. Milne, dans « Surfaces algébriques », *Lecture Notes in Math.*, n° 868, Springer Verlag, 1981.
- [B-M] P. BERTHELOT, W. MESSING, Théorie de Dieudonné cristalline I, *Astérisque*, 63 (1979), 17-38.
- [B-O 1] P. BERTHELOT, A. OGUS, Notes on Crystalline Cohomology, *Mathematical Notes*, n° 21, Princeton University Press, (1978).
- [B-O 2] P. BERTHELOT, A. OGUS, F -isocrystals and De Rham Cohomology I, *Invent. Math.*, 72 (1983), 159-199.
- [Bour] N. BOURBAKI, *Algèbre et Algèbre commutative*, Hermann.
- [C-E] H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [Cr 1] R. CREW : L -functions of p -adic characters and geometric Iwasawa theory, *Invent. Math.*, 88 (1987), 395-403.
- [Cr 2] R. CREW, F -isocrystals and p -adic representations. *Algebraic geometry-Bowdoin 1985, PSPM*, 46, Part 2 (1987), 111-138.
- [C-S-S] J.-L. COLLIOT-THELENE, J.-J. SANSUC, C. SOULÉ, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. Journal*, vol. 50, n° 3 (sept. 1983).
- [D] P. DELIGNE, La conjecture de Weil I, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 43.

- [E 0] J.-Y. ETESSE, Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un F -cristal unité et dualité plate pour les surfaces. Thèse 3^e cycle, Rennes 1981.
- [E 1] J.-Y. ETESSE, Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal *Compositio Math.*, 66 (1988), 57-120.
- [E 2] J.-Y. ETESSE, Dualité plate pour les surfaces, à coefficients dans un groupe de type multiplicatif. Preprint Rennes. (A paraître au *Bulletin de la SMF.*)
- [EGA] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique, Publ. Math. I.H.E.S. 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32. EGA I, Grundlehren n° 166, Springer-Verlag, 1971.
- [G] M. GROS, Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie logarithmique, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 113, Fasc. 4 (1985).
- [Ga] O. GABBER, Sur la torsion dans la cohomologie l -adique d'une variété, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 297, Série I (1983), 179-182.
- [Gr] A. GROTHENDIECK, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Séminaire Bourbaki n° 279, décembre 1964.
- [I] L. ILLUSIE, Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 12 (1979), 501-661.
- [I-R] L. ILLUSIE, M. RAYNAUD, Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 57.
- [K 1] N. KATZ, Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki n° 409, février 1972. *Lecture Notes in Math.*, n° 383, Springer Verlag.
- [K 2] N. KATZ, Crystalline Cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums, in *Automorphic forms*, Bombay 1979, Springer Verlag, 1981.
- [K 3] N. KATZ, p -adic properties of modular schemes and modular forms, dans « *Modular Functions of one Variable III* », *Lecture Notes in Math.*, n° 350, Springer Verlag (1973).
- [K-M] N. KATZ, W. MESSING, Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields, *Inventiones Math.*, 23 (1974), 73-77.
- [L 1] S. LICHTENBAUM, Values of zeta and L -functions at zero, *Astérisque*, (1975), 24-25.
- [L 2] S. LICHTENBAUM, Zeta functions of varieties over finite fields at $s = 1$, *Arithmetic and Geometry*, *Progress in Math.* 35, Birkhäuser (1983), 173-194.
- [L 3] S. LICHTENBAUM, Values of zeta-functions at non-negative integers, *Journées arithmétiques*, Noordwijkerhout, July 1983.
- [M 1] J.-S. MILNE, On a conjecture of Artin and Tate, *Annals of Math.*, 102 (1975), 517-533.
- [M 2] J.-S. MILNE, Duality in the Flat Cohomology of a Surface, *Ann. Scient. Ec. Norm.*, Sup. 4^e série, t. 9 (1976), 171-202.
- [M 3] J.-S. MILNE, *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [M 4] J.-S. MILNE, Values of Zeta Functions of Varieties over Finite Fields, *Am. Jour. of Math.*, 108 (1986), 297-360.
- [M 5] J.-S. MILNE, Values of Zeta Functions over Finite Fields: Complements and Corrections to, *Amer. J. Math.*, 108 (1986), 297-360 5th May, 1986.
- [O] A. OGUS, F -crystals and Griffiths transversality, *Int. Symposium on Algebraic Geometry*, Kyoto (1977), 15-44.
- [Sa] N. SAAVEDRA, Catégories tanakiennes, *Lecture Notes in Math.*, n° 265, Springer Verlag (1972).

- [Sch] P. SCHNEIDER, On the values of the zeta function of a variety over a finite field, *Compositio Math.*, 46 (1982), 133-143.
- [Se 1] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, 1968.
- [Se 2] J.-P. SERRE, Groupes pro-algébriques, *Publ. Math. I.H.E.S.* n° 7 (1960).
- [Se 3] J.-P. SERRE, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, 1967.
- [Se 4] J.-P. SERRE, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , *Symposium internacional de topologia algebraica*, Mexico (1958), 24-53.
- [SGA 4^{1/2}] Cohomologie étale, *Lecture Notes in Math.*, n° 569, Springer Verlag (1977).
- [SGA 5] Cohomologie l -adique et fonctions L , *Lecture Notes in Math.* n° 589, Springer Verlag (1977).
- [SGA 6] Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, *Lecture Notes in Math.*, n° 225, Springer Verlag (1971).
- [T] J. TATE, On a conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analogue, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam (1968), 189-214.

Manuscrit reçu le 29 septembre 1987.

Jean-Yves ETESSE,
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.