ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BRUNO CHIARELLOTTO

Sur le théorème de comparaison entre cohomologies de De Rham algébrique et p-adique rigide

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 4 (1988), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 4 (1988), 1-15.

SUR LE THÉORÈME DE COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIES DE DE RHAM ALGÉBRIQUE ET p-ADIQUE RIGIDE

par Bruno CHIARELLOTTO (*)

PLAN

0. Introduction.

Soit

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

un opérateur différentiel à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}}(x)$. Soit 0 un point singulier de L ; l'irrégularité de Fuchs en 0 est le nombre

$$\mathrm{irr}_0(L) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} (v_0(a_n) - n - v_0(a_i) + i).$$

Si on prend maintenant un corps $K \supset \bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}}$ algébriquement clos et complet pour une valuation ultramétrique qui induit sur $\mathbf{Q}$ une valuation

Mots-clés : Courbe algébrique - Espace analytique rigide - Équation différentielle linéaire p-adique - Cohomologie de De Rham - Dualité locale.

(*) Bourse du C.N.R., Italie.

p-adique, l'opérateur L opère sur $\dfrac{K[[x]]}{K\{x\}}$ et Clark [CL] a montré qu'il est toujours injectif. Il est facile de voir [MA] que L est aussi toujours surjectif sur l'espace précédent. D'autre part L opère aussi sur $\dfrac{\mathbf{C}[[x]]}{\mathbf{C}\{x\}}$ sur lequel il est toujours surjectif. Mais le théorème de Malgrange affirme que

$$\mathrm{irr}_0(L) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ker}\left(L, \frac{\mathbf{C}[[x]]}{\mathbf{C}\{x\}}\right).$$

Soit $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ une variété algébrique non-singulière définie sur $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}}$ et $\mathcal{M}_0$ un fibré de type fini à connexion intégrable ; le plongement naturel $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}} \subseteq \mathbf{C}$ fournit par extension des scalaires une $\mathbf{C}$-variété algébrique non-singulière $X_{\mathbf{C}}$ et un fibré à connexion intégrable $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$. A $X_{\mathbf{C}}$ et $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ on peut associer une variété analytique complexe X_{an} et un fibré à connexion holomorphe $\mathcal{M}_{\mathrm{an}}$ et on a un morphisme entre les cohomologies de De Rham :

$$\mathbf{H}^*(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathbf{C}})) \to \mathbf{H}^*(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{an}}))$$

qui n'est pas en général un isomorphisme. Si $\dim X_{\mathbf{C}} = 1$ Deligne a montré que la différence entre les caractéristiques d'Euler-Poincaré des espaces précédents est égale à la somme des irrégularités de $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ aux points à l'infini de $X_{\mathbf{C}}$ [DE].

De la même façon le plongement $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}} \subseteq K$ fournit par extension des scalaires une variété algébrique non-singulière sur K, X_K, et un fibré à connexion intégrable $\mathcal{M}_K$. Comme précédemment on associe à X_K et $\mathcal{M}_K$ une variété analytique rigide X_{rig} et un fibré $\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}$, pour la topologie de Grothendieck, muni d'une connexion intégrable.

On a encore un morphisme entre cohomologies de De Rham :

$$\mathbf{H}^*(X_K, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K)) \to \mathbf{H}^*(X_{\mathrm{rig}}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}))$$

et Baldassarri conjecture que c'est toujours un isomorphisme et il démontre la conjecture si $\dim X_0 = 1$ [BA1]. Sa démonstration utilise la théorie de Turittin p-adique [BA0] et les théorèmes d'indice de Ph. Robba [RO] et de ce fait elle ne semble pas se généraliser en dimension supérieure (en [BA2] et [CH] on trouvera d'autres cas où la conjecture est démontrée).

Dans le cas complexe le théorème de dualité locale pour D_X-modules holonomes de Mebkhout [ME] montre, en particulier, que le théorème de Deligne est équivalent au théorème de Malgrange. Ceci suggère que le théorème de Clark est équivalent au théorème de Baldassarri dans le cas p-adique. Le but de ce travail est de montrer que tel est bien le cas. En plus du fait que cela fournit une démonstration particulièrement simple du théorème de Baldassarri, on a ici une méthode pour attaquer le problème en dimension supérieure. Le principal obstacle réside pour l'instant dans le manque d'une bonne théorie de la dualité pour les $\mathscr{D}_X$-modules dans le cas p-adique : c'est ce que nous allons étudier ultérieurement.

Dans le § 3 on trouvera quelques résultats d'analyse fonctionnelle pour K-espaces vectoriels topologiques convexes que nous utiliserons pendant le § 2. Cette note généralise [VT], [MS], [MO].

Je remercie M. le Professeur Zoghman Mebkhout de m'avoir suggéré l'idée de ce travail et de m'avoir aidé à mettre au point la démonstration. Ce travail a été développé pendant mon séjour à l'Université de Paris VII. Je remercie M. le Professeur Lê Dũng Tráng de m'avoir accepté dans son équipe (L.A. 212 du C.N.R.S.).

1. Conjecture locale.

Commençons par énoncer la conjecture de nature locale que nous pensons être la vraie conjecture à démontrer (1.3) et dont la conjecture de Baldassarri ([BA1], (1.1), (1.2)) est un corollaire. Dans le § 2 nous démontrerons (1.3) pour une courbe.

Soit X_0 une variété algébrique irréductible et non-singulière définie sur le corps $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}} = K_0$ et soit $\mathscr{M}_0$ un fibré de rang fini muni d'une connexion intégrable ([KA], [DE]) :

$$\nabla_0 : \mathscr{M}_0 \to \mathscr{M}_0 \otimes \Omega^1_{X_0/K_0}.$$

Si nous prenons un corps K, extension de K_0, valué complet pour une valuation ultramétrique et algébriquement clos, on obtient par extension des scalaires une variété algébrique lisse sur K, X_K, et un $\mathscr{M}_K$ fibré à connexion intégrable :

$$\nabla_K : \mathscr{M}_K \to \mathscr{M}_K \otimes \Omega^1_{X_K/K}.$$

Soit :

$$\mathscr{DR}(\mathscr{M}_K) := 0 \to \mathscr{M}_K \xrightarrow{\nabla_K} \mathscr{M}_K \otimes \Omega^1_{X_K/K} \to \mathscr{M}_K \otimes \Omega^2_{X_K/K} \to \dots$$

son complexe de De Rham.

Maintenant à X_K on peut associer un espace analytique rigide X_{rig} [KO] et, comme pour le cas classique, à $\mathcal{M}_K$ un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}}$-module localement libre pour la topologie de Grothendieck, $\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}$, muni d'une convexion intégrable :

$$\nabla_{\mathrm{rig}} : \mathcal{M}_{\mathrm{rig}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{rig}} \otimes \Omega^1_{X_{\mathrm{rig}/K}},$$

soit

$$\mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}) := 0 \to \mathcal{M}_{\mathrm{rig}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{rig}} \otimes \Omega^1_{X_{\mathrm{rig}/K}} \to \ldots$$

son complexe de De Rham.

La conjecture de Baldassarri affirme que le morphisme naturel :

$$(1.1) \qquad \mathbf{H}^*(X_K, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_K)) \to \mathbf{H}^*(X_{\mathrm{rig}}, \mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}))$$

est un isomorphisme.

Si

$$j : X_K \hookrightarrow \bar{X}_K$$

est une compactification d'Hironaka et

$$j_{\mathrm{rig}} : X_{\mathrm{rig}} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathrm{rig}}$$

la situation analytique associée :

la conjecture (1.1) *équivaut à démontrer qu'il existe un isomorphisme entre :*

$$(1.2) \qquad \mathbf{H}^*(\bar{X}_{\mathrm{rig}}, (j_*\mathcal{DR}(\mathcal{M}_K))_{\mathrm{rig}}) \to \mathbf{H}^*(\bar{X}_{\mathrm{rig}}, j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}))$$

(cf. [BA1] et GAGA p-adique [KO]).

N.B. – A la différence du cas classique il n'y a pas d'hypothèses sur l'irrégularité de $\mathcal{M}_K$ à l'infini.

Nous pensons que la conjecture à formuler est :

le morphisme naturel de complexes des faisceaux abéliens sur $\bar{X}_{\mathrm{rig}}$:

$$(1.3) \qquad (j_*\mathcal{DR}(\mathcal{M}_K))_{\mathrm{rig}} \to j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{DR}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}})$$

est un quasi-isomorphisme.

On notera que la conjecture (1.2) est simplement un corollaire de (1.3). Kiehl a montré (1.3) pour le fibré trivial $(\mathcal{O}_K, d)$ [KI] qui est l'analogue du théorème de Grothendieck dans le cas complexe ([GRO0], th. 2.1).

2. Démonstration de la conjecture pour une courbe.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer (1.3) quand X_0 est une courbe.

THÉORÈME 2.1. — *La conjecture* (1.3) *est vraie si* X_0 *est une courbe sur* $K_0 = \bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}}$.

Démonstration. — Le faisceau $\mathcal{M}_K$ localement libre peut être étendu à un faisceau $\bar{\mathcal{M}}_K$ sur $\bar{X}_K$ localement libre aussi, tel que :

$$\bar{\mathcal{M}}_K \otimes j_*\mathcal{O}_K \approx j_*\mathcal{M}_K .$$

La topologie de Grothendieck de $\bar{X}_{\mathrm{rig}}$ est plus fine que la topologie de Zariski, donc on peut choisir un recouvrement de $\bar{X}_{\mathrm{rig}}$ affinoïde admissible où sur chaque élément du recouvrement il y a tout au plus un seul point de $Y = \bar{X}_{\mathrm{rig}} \setminus X_{\mathrm{rig}} = \bar{X}_K \setminus X_K$. On peut étudier le morphisme (1.3) sur chaque affinoïde du recouvrement : si l'affinoïde ne rencontre pas le diviseur Y les deux complexes sont exactement les mêmes. Si l'affinoïde contient $a \in \bar{X}_{\mathrm{rig}} \setminus X_{\mathrm{rig}}$ le faisceau quotient :

$$\frac{j_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}})}{(j_*\mathcal{M}_K)_{\mathrm{rig}}} .$$

restreint à l'affinoïde est un faisceau « skyscraper » de support $\{a\}$ pour la topologie de Grothendieck, dont les sections globales sont

$$\frac{j_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{M}_{\mathrm{rig}})_a}{(j_*\mathcal{M}_K)_{\mathrm{rig},a}} .$$

Puisqu'il existe une extension localement libre $\bar{\mathcal{M}}_K$ sur $\bar{X}_K$ de $\mathcal{M}_K$, on a des isomorphismes locaux :

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} (j_*\mathcal{M}_K)_{\mathrm{rig},a} &\approx (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{\mathrm{rig},a} ; \\ (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{M}_{\mathrm{rig}})_a &\approx (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X\mathrm{rig}})^n_a \end{aligned}$$

et donc, pour la démonstration du théorème il suffira que les flèches verticales

$$(2.3)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})^n_a & \xrightarrow{\nabla} & (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})^n_a & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{\mathrm{rig},a} & \xrightarrow{\nabla} & (j_*\mathcal{O}_{X_K})^n_{\mathrm{rig},a} & \to & 0 \end{array}$$

avec $\nabla = \frac{d}{dx} + A$, $A \in M_n((j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},a})$, donnent un quasi-isomorphisme de complexes.

En vertu de Kiehl [KI], on peut choisir un recouvrement admissible affinoïde tel que tout affinoïde B qui rencontre le diviseur Y est isomorphe à $\mathrm{SpK}\langle x\rangle$ et tel que le diviseur $Y \cap B$ est défini dans B par $x = 0$. Dans ce cas-là en utilisant le « paramètre local » x en $a = 0$:

$$(j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X\mathrm{rig}})_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i x^i, \ a_i \in K; \quad \exists \varepsilon > 0, \ \lim_{i \to +\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0; \quad \forall \eta > 0 \\ \lim_{i \to -\infty} |a_i|\eta^i = 0 \end{array} \right\}$$

(séries à singularités essentielles).

$$(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0} = \left\{ \sum_{\substack{i \geqslant -N \\ N < +\infty}} a_i x^i, \ a_i \in K, \quad \exists \varepsilon > 0, \ \lim_{i \to +\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0 \right\}$$

(séries à singularités méromorphes).

De plus l'anneau des germes de fonctions analytiques en $x = 0$ (c.-à-d. en a) est

$$\mathcal{O} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} a_i x^i, \ a_i \in K; \quad \exists \varepsilon > 0, \ \lim_{i \to +\infty} |a_i|\varepsilon^i = 0 \right\}.$$

L'existence du vecteur cyclique [DE], [MA] montre que le quasi-isomorphisme (2.3) est équivalent au quasi-isomorphisme :

$$(2.4) \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0 & \xrightarrow{\tilde{L}} & (j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0 & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0} & \xrightarrow{\tilde{L}} & (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0} & \to & 0 \end{array}$$

où

$$\tilde{L} = \frac{d^n}{dx^n} + b_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + b_0, \qquad b_i \in (j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0}.$$

Avec une multiplication par une puissance de x on peut changer $\tilde{L}$ en L :

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0, \qquad a_i \in \mathcal{O}.$$

Enfin le quasi-isomorphisme en (2.4) est équivalent à l'isomorphisme

$$\frac{(j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0}} \xrightarrow{L} \frac{(j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0}}. \tag{2.5}$$

Définissons maintenant :

$$H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) : = \frac{(j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0}{\mathcal{O}} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{x^i},\ a_i \in K,\ \forall \eta > 0 \lim_{i\to+\infty} \frac{|a_i|}{\eta^i} = 0\right\},$$

$$H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) := \frac{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0}}{\mathcal{O}} = \left\{\sum_{i=1}^{N<+\infty} \frac{a_i}{x^i},\ a_i \in K\right\};$$

par construction L opère sur les deux K-espaces vectoriels précédents et, de plus :

$$\frac{(j_{\mathrm{rig}*}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{rig}}})_0}{(j_*\mathcal{O}_{X_K})_{\mathrm{rig},0}} \approx \frac{H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})}{H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})}.$$

Finalement l'isomorphisme en (2.5) équivaut à quasi-isomorphisme (donné par les flèches verticales) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \xrightarrow{L} & H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \to & 0 := (H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}); L) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \xrightarrow{L} & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \to & 0 := (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}); L).
\end{array} \tag{2.6}$$

Nous allons démontrer (2.6) par dualité locale.

PROPOSITION 2.7. — *Le dual algébrique du K-espace vectoriel $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ est $\hat{\mathcal{O}} = K[[x]]$. Le dual topologique de $\mathcal{O}$ (séries convergentes avec la topologie limite inductive localement convexe* [GR]) *est $H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$.*

La démonstration de la proposition sera donnée dans le § 3.

Soit ${}^tL$ le transposé de L :

$${}^tL = \sum_{i=0}^{n} (-1) \frac{d^i}{dx^i} a_i ;$$

le dual algébrique du complexe $(H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}); L)$ est le complexe :

$$0 \to \hat{\mathcal{O}} \xrightarrow{{}^tL} \hat{\mathcal{O}} \to 0 : = (\hat{\mathcal{O}}, {}^tL) ; \tag{2.8}$$

et le dual topologique du complexe

$$(2.9) \qquad 0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{{}^tL} \mathcal{O} \to 0 := (\mathcal{O}, {}^tL)$$

est le complexe $(H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})\,;\ L) = (\mathcal{O}';\ L)$ (Prop. 2.7).

Notons

$$(2.10) \qquad 0 \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{L} \mathcal{O}^* \to 0 := (\mathcal{O}^*, L)$$

le complexe dual algébrique du complexe $(\mathcal{O}, {}^tL)$.

On a les morphismes canoniques :

$$i : (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})\,; L) \to (\mathcal{O}^*, L)$$

et

$$j : (\mathcal{O}', L) = (H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})\,; L) \to (\mathcal{O}^*, L)$$

qui avec (2.6) forment le diagramme commutatif de complexes :

$$(2.11) \qquad \begin{tikzcd} & (\mathcal{O}^*, L) & \\ (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})\,; L) \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "(2.6)"] & & (\mathcal{O}', L)\,; \arrow[ul, "j"'] \end{tikzcd}$$

on va démontrer que i, j sont quasi-isomorphismes pour conclure que (2.6) est un quasi-isomorphisme.

Rappelons que nous sommes partis d'une situation définie sur $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{alg}} = K_0$ et, en particulier, L et ${}^tL$ sont définis sur K_0. Le polynôme indiciel de ${}^tL$ a ses racines (exposants) dans K_0, mais chaque élément de K_0 est un nombre p-adiquement non-Liouville ([CL] ; [CHR]) ; alors :

THÉORÈME 2.12 (Clark [CL]). — *Puisque les exposants de* ^{t}L *sont des nombres non-Liouville,*

$${}^tL : \frac{\hat{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \to \frac{\hat{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La surjectivité est un résultat de Malgrange [MA]. Le théorème de Clark affirme que chaque solution formelle, f, d'une équation différentielle

$$Pf = g$$

où g est une série convergente et P est un opérateur différentiel linéaire avec coefficients convergents et avec exposants non-Liouville est convergente. □

N.B. — Implicitement on a obtenu un calcul d'indice pour l'anneau des germes de fonctions analytiques rigides parce que $(\hat{\mathcal{O}}, {}^tL)$ est à indice [MA].

Le théorème 2.12 est équivalent au quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \hat{\mathcal{O}} & \xrightarrow{{}^tL} & \hat{\mathcal{O}} & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{O} & \xrightarrow{{}^tL} & \mathcal{O} & \to & 0. \end{array}$$

Par dualité algébrique on peut conclure que

$$i : (H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}); L) \to (\mathcal{O}^*, L)$$

est un quasi-isomorphisme puisque tous les complexes sont cohomologiquement de dimension finie.

Pour le morphisme j la démonstration est plus compliquée. Comme nous avons vu tout à l'heure, le théorème de Clark (2.12) implique que l'opérateur ${}^tL : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est à indice. On démontrera dans le § 3 que :

(i) $\mathcal{O}$ est un espace topologique de Hausdorff avec la topologie localement convexe limite inductive (au sens ultramétrique [GR], [VT]). L'opérateur ${}^tL$ est continu pour la topologie limite inductive et la limite qui forme $\mathcal{O}$ est une limite dénombrable d'espaces de Banach.

(ii) Pour chaque application continue K-linéaire de $\mathcal{O}$ en soi-même, le théorème du graphe fermé et le théorème de l'application ouverte sont valables. On a alors, en particulier, que, $\mathrm{Im}\,{}^tL$ étant de codimension finie, $\mathrm{Im}\,{}^tL$ est fermé en $\mathcal{O}$. De plus pour chaque $g \in \mathcal{O}$ il existe $\beta \in H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) = \mathcal{O}'$ tel que $\beta(g) \neq 0$.

On peut alors appliquer dans notre cas une adaptation d'un théorème de Serre [SE] (toujours dans § 3, Prop. 2). On trouve que les *duaux topologiques des espaces de cohomologie de* $(\mathcal{O}, {}^tL)$ *sont isomorphes aux espaces de cohomologie de la situation duale topologique* $(\mathcal{O}', L)$. Mais les espaces de cohomologie de $(\mathcal{O}, {}^tL)$ sont de dimension finie et séparés : pour ces espaces, donc, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique. Finalement les espaces duaux topologiques des espaces de cohomologie de $(\mathcal{O}, {}^tL)$ sont isomorphes aux espaces de cohomologie de la situation duale algébrique $(\mathcal{O}^*, L)$. On a donc prouvé que

$$j : (\mathcal{O}', L) \rightarrow (\mathcal{O}^*, L)$$

est un quasi-isomorphisme.

A l'aide du diagramme (2.11), on trouve que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \xrightarrow{L} & H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \rightarrow & 0 \\ & & \cup\!\!\uparrow & & \cup\!\!\uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \xrightarrow{L} & H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) & \rightarrow & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

est un quasi-isomorphisme, et le théorème 2.1 est démontré. □

On remarquera que ce raisonnement est calqué sur la démonstration du théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes [ME].

3. Note.

On démontrera d'abord la proposition 2.7.

PROPOSITION 2.7. – *Le dual algébrique de* $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ *est* $\mathcal{O}$. *Le dual topologique de* $\hat{\mathcal{O}}$ *est* $H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$.

Démonstration. – En effet $H^1_{[0]}(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ est limite inductive d'espaces vectoriels de dimension finie, son dual algébrique est la limite projective des espaces duaux : $\hat{\mathcal{O}}$.

Considérons maintenant $\mathcal{O}$. Comme dans [GR], $\mathcal{O}$ est limite inductive d'algèbre de Tate (donc K-espaces de Banach) :

$$\mathcal{O} = \varinjlim_{e \in K^*} A_e, \qquad A_e = K\left\langle \frac{x}{e} \right\rangle$$

(les notations sont comme en [BGR]). Avec la topologie limite inductive localement convexe [VT] (au sens ultramétrique) $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff ([GR] ch. 1 § 8).

Si $\beta = \sum_{i>0} \frac{a_i}{x^i} \in H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$, on peut associer le morphisme

$$\begin{gathered} \lambda_\beta : \mathcal{O} \rightarrow K \\ g = \sum_{i \geqslant 0} b_i x^i \mapsto \sum_{i \geqslant 0} b_i a_{i+1} . \end{gathered}$$

L'application λ_β est bien définie : si g converge en $\{e \in K, |e| < \varepsilon\}$ on trouve, pour e dans le domaine de convergence de g :

$$\lim_{i \to +\infty} |b_i\, a_{i+1}| = \lim_{i \to +\infty} \left| b_i a_{i+1} \frac{e^{i+1}}{e^{i+1}} \right| = 0 .$$

Mais $\lambda_\beta \in \mathcal{O}'$: en effet si pour chaque $e \in K^*$ on considère l'application induite par λ_β en A_e, λ_β^e ; en rappelant que A_e est une K-algèbre de Banach avec la norme :

$$g \in A_e, \qquad \|g\|_e = \sup_{i \geqslant 0} |b_i\, e^i| ,$$

alors

$$|\lambda_\beta^e(g)| = \left| \sum_{i \geqslant 0} b_i a_{i+1} \right| \leqslant \max_i \left| b_i\, a_{i+1} \frac{e^{i+1}}{e^{i+1}} \right|$$
$$\leqslant \|g\|_e \max_i \left| a_{i+1} \frac{e}{e^{i+1}} \right| \leqslant \mathscr{K} \|g\|_e , \qquad \mathscr{K} \in |K|$$

cela implique que λ_β^e est borné pour chaque e, donc continue.

On peut définir ainsi une application :

$$H_0^1(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}) \to \mathcal{O}'$$

qui est injective : si $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$, $\beta \neq 0$, il existe évidemment $f \in \mathcal{O}$, $\lambda_\beta(f) \neq 0$.

Soit maintenant $\eta \in \mathcal{O}'$, nous allons voir qu'il existe $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ tel que $\eta = \lambda_\beta$. En effet pour chaque $g = \sum_{i \geqslant 0} b_i x^i \in \mathcal{O}$ on trouve

$$\eta(g) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \eta(x^i) \right) = \sum_{i \geqslant 0} b_i \eta(x^i) \qquad \text{avec} \qquad \eta(x^i) \in K .$$

On peut écrire :

$$\beta = \sum_{i \geqslant 0} \frac{\eta(x^i)}{x^{i+1}} ,$$

il suffit de voir que $\beta \in H_0^1(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$, parce que alors $\eta = \lambda_\beta$. Pour chaque $e \in K^*$ on peut considérer $g = \Sigma e^i x^i$, $g \in \mathcal{O}$. Comme $\eta(g)$ est défini, on a :

$$\lim_{i \to +\infty} |e^i \eta(x^i)| = 0 ;$$

donc

$$\lim_{i \to +\infty} |e^{i+1}\eta(x^i)| = 0, \qquad \forall e, e \in K^*$$

et $\beta \in H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$. C'est vrai que $\mathcal{O}' = H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$. □

N.B. 1. – Il existe des résultats plus forts si on utilise [MS], [MO]. En particulier on trouve que $\mathcal{O}$ est réflexif et $\mathcal{O}' = H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ est un espace de Fréchet.

N.B. 2. – A l'aide de la proposition 2.7 on a facilement que pour chaque $g \in \mathcal{O}$ il existe $\eta \in \mathcal{O}' = H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ tel que $\eta(g) \neq 0$. Pour une étude du théorème de Hahn-Banach p-adique voir [IN].

Notre but est maintenant d'étudier l'anneau des germes des fonctions holomorphes en $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de l'espace analytique $\mathrm{Sp}K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$: $\mathcal{O}_x$ (les résultats de cette section peuvent être utilisés pour $n = 1$ c'est-à-dire pour le K-espace $\mathcal{O}$ du précédent paragraphe).

Par définition

$$\mathcal{O}_x = \varinjlim_{e \in K^*} A_e$$

où

$$A_e = K\left\langle \frac{x_1}{e}, \ldots, \frac{x_n}{e} \right\rangle = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha,\ a_\alpha \in K,\ \lim_{|\alpha| \to +\infty} |a_\alpha|\, |e|^{|\alpha|} = 0 \right\}$$

sont des espaces de Banach (K-algèbres de Tate). On peut munir $\mathcal{O}_x$ de la topologie limite inductive localement convexe : avec cette topologie $\mathcal{O}_x$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff ([GR], [VT]).

Soit maintenant $c \in K^*$, $|c| < 1$ alors

$$A_i = K\left\langle \frac{x_1}{c^i}, \ldots, \frac{x_n}{c^i} \right\rangle \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

est un système cofinal pour $\mathcal{O}_x$: donc $\mathcal{O}_x$ est limite inductive de dénombrables espaces de Banach. On doit remarquer aussi que les flèches $A_i \to A_{i+1}$ et, ensuite, $A_i \to \mathcal{O}_x$ sont injectives.

Comme dans le cas classique on va noter $(\mathscr{L}\mathscr{B})$ les K-espaces vectoriels localement convexes (au sens ultramétrique) qui sont limite inductive d'une suite de K-espaces de Banach (leurs topologies sont exactement celles qui dérivent de la limite).

Pour les espaces ($\mathscr{LB}$) (et, en particulier, pour $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}$) on a les théorèmes du graphe fermé et de l'application ouverte (les démonstrations classiques restent valables, [GR 01], [GR 02]).

On va appliquer ces faits au cas d'une seule variable : $\mathcal{O}$. Dans ce cas là :

$$\mathcal{O} = \varinjlim_{i \in \mathbf{N}} K\left\langle \frac{x}{c^i} \right\rangle \qquad \text{où} \qquad c \in K^*, |c| < 1$$

et

$$A_i = K\left\langle \frac{x}{c^i} \right\rangle = \left\{ \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i x^i, a_i \in K, \lim_{i \to +\infty} |a_i|\, |c|^i = 0 \right\}.$$

Soit P un opérateur différentiel K-linéaire du type :

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^i}{dx^i}, \qquad b_i \in \mathcal{O}.$$

$$P : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$$

on peut supposer que les exposants de P soient non-Liouville.

PROPOSITION 1. — *Avec les hypothèses précédentes P est continu, P est à indice, P est un homomorphisme sur l'image et* Im P *est fermé en* $\mathcal{O}$.

Démonstration. — Sur chaque A_i la multiplication et la dérivation sont continues, donc P est continu. Comme les exposants de P sont non-Liouville, on peut appliquer le théorème 2.12 de Clark : P est à indice et, en particulier, Im P est de codimension finie : du fait que pour $\mathcal{O}$ on a les théorèmes du graphe fermé et de l'application ouverte on peut conclure. □

L'opérateur ${}^tL$ du § 2 a les mêmes propriétés de P de la proposition 1. Nous savons que le dual topologique $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ est $H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})$ (Proposition 2.7).

PROPOSITION 2 (Serre [SE]). — *Soit P comme ci-dessus. Si*

$$\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}' \xrightarrow{{}^tP} \mathcal{O}' \quad \text{(transposé)}$$

alors

(i) $\left(\dfrac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}\, P}\right)' \approx \mathrm{Ker}\,{}^tP$

(ii) $(\mathrm{Ker}\, P)' \approx \dfrac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}\,{}^tP}$.

N.B. — Si on applique la proposition à notre cas du § 2 avec ${}^tL$ au lieu de P et L au lieu de ${}^tP$ on trouve :

$$(*) \qquad (\mathrm{Ker}\,{}^tL)' \approx \frac{\mathcal{O}'}{\mathrm{Im}\,L} \qquad \left(= \frac{H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})}{LH^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}})}\right)$$

$$(**) \qquad \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}\,{}^tL}\right)' \approx \mathrm{Ker}\,L\,(= \mathrm{Ker}\,L \text{ sur } H^1_0(\mathcal{O}_{\bar{X}_{\mathrm{rig}}}))$$

avec $\mathrm{Ker}\,{}^tL$ et $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathrm{Im}\,{}^tL}$ de dimension finie et séparés.

Démonstration. – La démonstration est une adaptation d'un théorème de Serre pour les espaces de Fréchet : ici la clef c'est la finitude des indices et le fait, aussi, que chaque sous K-espace vectoriel de $\mathcal{O}$ de dimension finie a un supplémentaire topologique. □

BIBLIOGRAPHIE

[BA0] F. Baldassarri, Differential modules and singular points of p-adic differential equations, Adv. in Math., 44 (1982), 155-179.

[BA1] F. Baldassarri, Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel I, Inv. Math., 87 (1987), 83-99.

[BA2] F. Baldassarri, Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel II (singularités régulières), à paraître.

[BGR] S. Bosch, U. Guntzer, R. Remmert, Non archimedean analysis, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 261, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

[BOU] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Herman, Paris, 1966.

[CH] B. Chiarellotto, A comparison theorem in p-adic cohomology, à paraître.

[CHR] G. Christol, Modules différentiels et équations différentielles p-adique, Queen's Paper in Pure & Appl. Math., 66 Queen's Univ. Kingston-Ontario, 1983.

[CL] D. Clark, A note on the p-adic convergence of solution of linear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 262-269.

[DE] P. Deligne, Équations différentielles à points singuliers, Lecture Notes in Math., 163 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[GR] H. Grauert, R. Remmert, Analytische Stellenalgebren. En Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 176, Springer-Verlag, 1971.

[GRO0] A. Grothendieck, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. I.H.E.S., 29 (1966), 95-103.

[GRO1] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of Am. Math. Soc., 16 (1955).

[GRO2] A. GROTHENDIECK, Topological vector spaces, Gordon & Breach Science Publ., New York, London (1973).

[IN] A. W. INGLETON, The Hahn-Banach theorem for non archimedean valued fields, Proc. Cambridge Phil. Soc., 48 (1952), 41-45.

[KA] N. KATZ, Nilpotent connections and the monodromy theorem : application of a result of Turritin, Publ. Math. I.H.E.S., 39 (1970), 355-432.

[KI] R. KIEHL, Die De Rham kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten uber einem bewerteten Körper, Publ. Math. I.H.E.S., 33 (1967), 5-20.

[KO] U. KOPF, Uber eigentliche Familien algebraischer Varietaten über affinoidem Räumen, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Serie 2, Heft 7 (1974).

[MA] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, Ens. Math., 20 (1974), 147-176.

[ME] Z. MEBKHOUT, Théorèmes de bidualité locale pour les D_X-modules holonomes, Ark. Mat., 20 (1981), 111-124.

[MO] Y. MORITA, A p-adic theory of hyperfunctions I, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 17 (1981), 1-24.

[MS] Y. MORITA, W. H. SCHIKHOF, Duality of projective limit spaces and injective limit spaces over a non-spherically complete non-archimedean field, Tohoku Math. Journal, 38 (1986), 387-397.

[RO] Ph. ROBBA, Index of p-adic differential operators III. Applications to twisted exponential sums, Soc. Math. de France, Astérisque, 119-120 (1984), 191-266.

[SE] J.-P. SERRE, Un théorème de dualité, Comm. Math. Helv., 29 (1955), 9-26.

[VT] J. VAN TIEL, Espaces localement K-convexes, I-III, Indag. Math., 27 (1965), 249-258, 259-272, 273-289.

Manuscrit reçu le 17 juin 1987
révisé le 2 décembre 1987.

Bruno CHIARELLOTTO,

Université de Paris VII
UER de Mathématiques
d'Informatique
2, place Jussieu
75251 Paris, Cedex 05
&
Seminario Matematico
Università di Padova
Via Belzoni
35131 Padova (Italie).