ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Étude de l'équation $\frac{1}{2}\Delta u - u\mu = 0$ où μ est une mesure positive

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 3 (1988), p. 199-218

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_3_199_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 3 (1988), 199-218

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $1/2\ \Delta u - u\mu = 0$ OÙ μ EST UNE MESURE POSITIVE

par D. FEYEL & A. de LA PRADELLE

Introduction.

L'opérateur $Lu = 1/2\Delta u - \phi u\sigma$ (dit aussi opérateur de Schrödinger stationnaire) où σ est la mesure de Lebesgue a été étudié par de nombreux auteurs ([1], [2], [4],[8], [11], [16], [17]). Dernièrement, Aizenman et Simon ([1]) ont considéré le cas où ϕ appartient à la classe de Kato. Cela entraîne que sur toute boule suffisamment petite, le potentiel de Green de la mesure $|\phi|\sigma$ est fini continu.

A la suite de notre note ([10]), nous nous proposons ici de remplacer la mesure $\phi\sigma$ par une mesure de Radon positive ne chargeant pas les polaires. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la continuité des potentiels de Green de la mesure μ. Il s'ensuit naturellement que les fonctions L-harmoniques ne peuvent pas être continues en tout point.

On connaît le rôle des fonctions finement continues apparaissant dans les travaux de B. Fuglede ([14]). Dans notre étude présente, l'emploi de la continuité fine est obligatoire même sur les ouverts ordinaires.

Cependant, à l'aide de méthodes puissantes de la théorie moderne du potentiel (principe de domination fin, résolvantes), de l'analyse fonctionnelle (théorèmes de Banach, espaces de Hilbert) et du calcul différentiel stochastique (théorème d'Itô, formule de Feynman-Kac), on obtient même dans le cas discontinu et avec un minimum de calculs d'ailleurs classiques,

Mots-clés : Fonctions harmoniques - Equation de Schrödinger - Processus - Martingales - Perturbations - Opérateurs différentiels.

tous les résultats importants que l'on attend habituellement d'une théorie de fonctions harmoniques continues.

On obtient notamment l'inégalité de Harnack bilatérale pour les ouverts de $\mathbf{R}^m$ en supposant seulement que les potentiels locaux de μ sont localement bornés, et l'inégalité de Harnack unilatérale pour ceux de $\mathbf{R}^2$ en supposant seulement que les potentiels locaux de μ sont finis.

On établit aussi l'existence de la L-fonction de Green, et du L-potentiel d'une mesure $\rho \geq 0$ chargeant ou non les polaires.

Bien entendu, la solution du problème de Dirichlet est donnée par la formule de Feynman-Kac adaptée au cas considéré.

Notons que ces méthodes permettent d'étudier aussi le cas où μ est une mesure réelle ou complexe ne chargeant pas les polaires, ce qui paraîtra dans un article ultérieur.

Il faut enfin remarquer que l'un des intérêts de cette étude est de fournir un exemple naturel et non trivial de processus "standard" non fellérien qu'il est d'ailleurs inutile d'expliciter.

1. Généralités.

Dans tout ce travail, la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^m$ sera notée σ. Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^m$ ne chargeant pas les polaires de la théorie classique du potentiel associée au laplacien Δ . On note L l'opérateur différentiel défini par $Lu = 1/2\Delta u - u\mu$ au sens des distributions. Il est clair que Lu a un sens dès que u est localement $(\sigma + \mu)$ -intégrable.

1. Définition. — *Soit u une fonction $(\sigma + \mu)$-localement intégrable dans un ouvert U. La fonction u est dite quasi-L -harmonique si elle est quasi-continue ([6], [7], [9]) et vérifie $Lu = 0$ dans U. Si de plus u est finement continue, on dit que u est L-harmonique.*

Notons que la continuité fine entraîne que u est borélienne de première classe.

2. Proposition. — *Toute fonction u quasi-L-harmonique appartient à l'espace de Sobolev $W^2_{\rm loc}(U)$ et est égale quasi-partout à une fonction L-harmonique. Toute fonction L-harmonique est localement bornée.*

Démonstration. — Rappelons d'abord que $W^2_{\mathrm{loc}}(U)$ est l'espace des $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\sigma)$ ainsi que leur gradient f' au sens des distributions. Il est maintenant classique ([7]) que tout élément de $W^2_{\mathrm{loc}}(U)$ est égal σ-presque partout à une fonction quasi-continue. De plus, toute fonction Δ-sousharmonique localement bornée dans U appartient à $W^2_{\mathrm{loc}}(U)$.

Soit u^+ la partie ≥ 0 de u . Nous allons montrer que u^+ est Δ-quasi-sousharmonique. Les fonctions u et u^+ sont localement quasi-partout dans U des différences de fonctions Δ-surharmoniques régulières puisque la mesure $u\mu$ ne charge pas les polaires. Soit B une boule fermée contenue dans U. On peut écrire $u^+ = h + p - q$ quasi-partout où h est Δ-harmonique ≥ 0 dans B, et p et q deux Δ-potentiels de Green étrangers dans B . La mesure $1/2\ \Delta u^+$ ne charge pas les polaires et induit $u\mu$ sur le quasi-ouvert $\{u\}0$. On a donc $1/2\ \Delta p = 0$ dans ce quasi-ouvert, par suite $q - h \geq p$ $1/2\Delta p$-presque partout dans B . A fortiori $q \geq p$ $1/2\Delta p$ presque partout. Le principe de domination (cf. [3], [13]) entraîne $q \geq p$ partout dans B, d'où il suit $u^+ \leq h$ quasi-partout dans B . Cela montre que u^+ est quasi-Δ-sousharmonique dans U . De la même manière u^- est quasi-Δ-sousharmonique dans U . On peut alors modifier u sur un ensemble au plus polaire de manière que u^+ et u^- soient de vraies fonctions Δ -sousharmoniques ≥ 0 dans U , donc finement continues et localement bornées. Alors la différence $u = u^+ - u^-$ a les mêmes propriétés.

Remarquons maintenant que la restriction de μ à toute boule B possède un potentiel de Green $G\mu$ dans cette boule, i.e. vérifiant $1/2\Delta G\mu = -\mu$ dans B . Nous dirons que μ est potentiellement finie (resp. bornée, resp. continue) en un point $a \in \mathbf{R}^m$ si pour une boule B contenant a, le potentiel $G\mu$ dans B est fini en a (resp. borné au voisinage de a, resp. continu en a). Ces notions sont évidemment indépendantes de B , et sont des propriétés locales de la mesure μ .

Notons que les points où μ est potentiellement infinie forment un G_δ polaire, que si μ est potentiellement finie dans un ouvert U , alors les points où μ est potentiellement bornée forment un sous-ouvert partout dense de U , et que les points où μ est potentiellement continue forment un G_δ partout dense dans U (théorème de Baire).

3. Corollaire. — *Soit a un point où μ est potentiellement continue. Toute fonction L-harmonique au voisinage de a est continue en a .*

Démonstration. — Soit B une boule suffisamment petite centrée en

a , soit G l'opérateur de Green dans B , la fonction $u+G(u\mu)$ est Δ-harmonique dans B . $G(u\mu)$ est fini continu en a car u est bornée dans B , de sorte que u est elle-même continue en a .

4. THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{L}(U)$ l'espace des fonctions L-harmoniques dans U . $\mathcal{L}(U)$ est complet en topologie de la convergence uniforme locale. De plus, cette topologie coïncide sur $\mathcal{L}(U)$ avec la topologie induite par $W^2_{\text{loc}}(U)$ ou par $L^1_{\text{loc}}(\sigma, U)$.*

Démonstration. — Soient u et v deux fonctions L -harmoniques dans U , $|u-v|$ est Δ-sousharmonique dans U , de sorte que tous compacts H et K tels que $H \subset K^\circ$ $K \subset U$, on a :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in H} |u(x) - v(x)| \leq c \int_K |u-v| d\sigma$$

où c est une constante ne dépendant que de H et K . On en déduit l'identité des topologies de convergence uniforme locale et de convergence dans $L^1_{\text{loc}}(\sigma, U)$.

Montrons que $\mathcal{L}(U)$ est complet : si u_n est une suite de Cauchy uniforme locale de limite u , u est évidemment finement continue, localement bornée et quasi-continue, et le théorème de Lebesgue montre que $Lu = 0$.

Comme $W^2_{\text{loc}}(U)$ est inclus dans $L^1_{\text{loc}}(\sigma, U)$, $\mathcal{L}(U)$ est aussi fermé dans $W^2_{\text{loc}}(U)$.

Le théorème du graphe fermé montre alors immédiatement que les trois topologies coïncident sur $\mathcal{L}(U)$.

5. THÉORÈME. — *Tout ensemble borné dans $\mathcal{L}(U)$ est relativement compact (propriété de Montel).*

Démonstration. — L'injection naturelle de $W^2_{\text{loc}}(U)$ dans $L^1_{\text{loc}}(\sigma, u)$ est compacte, donc aussi l'identité de $\mathcal{L}(U)$ d'après le théorème 4, ce qui est précisément l'énoncé cherché.

Introduisons maintenant l'espace de Dirichlet ([6]) convenant à l'étude de l'opérateur L . Si U est ouvert, nous noterons $H_{\text{loc}}(U)$ le sous-espace des u appartenant à $W^2_{\text{loc}}(U)$ qui sont quasi-continus et appartiennent à $L^2_{\text{loc}}(\mu, U)$. Considérons la forme bilinéaire symétrique :

$$a(u,v) = \int u'v'd\sigma + \int uvd\mu ,$$

$a(u,v)$ est défini dès que u et v sont dans $H_{\text{loc}}(U)$, l'une d'elles étant à support compact. Si K est compact inclus dans U , et H_K l'espace des

$u \in H_{\mathrm{loc}}(U)$ à support dans K , la forme bilinéaire a restreinte à H_K donne à H_K une structure d'espace hilbertien réel (modulo le sous-espace des éléments nuls quasi-partout).

Nous allons en déduire l'existence de nombreuses fonctions L-harmoniques. Soit G un ouvert relativement compact dans U , soit $f \in H_{\mathrm{loc}}(U)$, il existe une unique u définie aux polaires près, $u \in H_{\mathrm{loc}}(U)$, u valant f quasi-partout dans $U \setminus G$, et quasi-L-harmonique dans G . En effet u est nécessairement la a -projection de f sur le sous-espace affine $f - H_G$ de $H_{\mathrm{loc}}(U)$. De manière précise u est l'élément qui minimise la quantité :

$$Q_G(v) = \int_G v'^2 d\sigma + \int_G v^2 d\mu$$

parmi toutes les v appartenant à $f - H_G$. De plus, si f est ≥ 0 , la fonction u est ≥ 0 (quasi-partout). D'après la proposition 2, u admet une modification en fonction L-harmonique dans B, que nous noterons H_f^G .

Pour $x \in G$, la forme linéaire $f \to H_f^G(x)$ est positive et continue sur $H_{\mathrm{loc}}(U)$, et définit donc une mesure ρ_x portée par $U \setminus G$. C'est la mesure L-harmonique de x dans G . Pour $f \geq 0$, H_f^G est Δ-sousharmonique de sorte que la mesure ρ_x minore la mesure Δ-harmonique usuelle de x dans G . On en déduit que ρ_x est portée par δG (et même par la frontière fine), et que ρ_x est continue pour la topologie de $W^2_{\mathrm{loc}}(U)$. Enfin, il est clair que ρ_x ne dépend pas de U mais seulement du triplet (μ, x, G) .

On voit par récurrence borélienne et grâce au théorème 4 que pour f borélienne bornée sur δG , la fonction $H_f^G(x) = \rho_x(f)$ est L-harmonique dans G .

6. Proposition. — *Toute fonction L-harmonique u dans un ouvert U appartient à $H_{\mathrm{loc}}(U)$.*

Démonstration. — On sait que u appartient à $W^2_{\mathrm{loc}}(U)$ et est localement bornée. Elle est donc aussi dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ et par suite dans $H_{\mathrm{loc}}(U)$.

On en déduit que sur $\mathcal{L}(U)$, la topologie de la convergence uniforme locale coïncide avec la topologie induite par $H_{\mathrm{loc}}(U)$.

Par suite, $\rho_x(u) = u(x)$ pour tout couple (x, G) , et pour toute u L-harmonique au voisinage de l'adhérence de G .

Soit $\Omega = C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^m)$ l'espace des trajectoires continues, nous noterons X_t la coordonnée d'indice t , et E^x la mesure de Wiener en $x \in \mathbf{R}^m$. Enfin A_t désignera la fonctionnelle additive associée à la mesure μ (cf. [5]).

7. THÉORÈME. — *On suppose que μ est potentiellement finie en tout point d'un ouvert U . Soit u une fonction L-harmonique dans U . Alors pour tout $x \in U$, $u(X_t)\exp(-A_t)$ est une martingale locale sur l'intervalle stochastique $[0,T[$ (T = début du complémentaire de U).*

Démonstration. — On peut supposer que u est ≥ 0 puisque u est localement la différence de fonctions L-harmoniques ≥ 0 . Alors u est Δ-sousharmonique ≥ 0 , donc $u(X_t)$ est une sous-martingale locale. Ensuite, $\int_0^t u(X_s)dA_s$ est la fonctionnelle additive associée à la mesure $u\mu$, l'équation $1/2\Delta\ u = u\mu$ entraîne alors ([5], [20]) que $u(X_t) - \int_0^t u(X_s)dA_s$ est une martingale locale. Par ailleurs, $u(X_t)\exp(-A_t)$ est une semi-martingale comme produit de semi-martingales, et on peut calculer sa différentielle stochastique, on trouve $\exp(-A_t)[du(X_t) - u(X_t)dA_t]$ qui est une différentielle de martingale locale.

8. COROLLAIRE. — *Si u est L-harmonique dans un ouvert U, on a la formule*

$$u(x) = E^x[\exp(-A_T)\ u(X_T)]$$

pour tout ouvert G relativement compact dans U, et tout $x \in G$, T désignant le début du complémentaire de G .

9. THÉORÈME. — *Supposons que μ soit potentiellement finie au voisinage de l'adhérence de G , et soit f borélienne bornée sur δG , on a pour tout $x \in G$*

$$\rho_x(f) = E^x[\exp(-A_T)f(X_T)]\ . \tag{1}$$

Démonstration. — Notons $\theta_x(f)$ le second membre de (1). θ_x est une mesure majorée par la mesure Δ-harmonique, de sorte qu'elle opère sur $W^2_{\text{loc}}(U)$ pour U ouvert contenant l'adhérence de G , et qu'en particulier $\theta_x(f) = \theta_x(H^G_f)$ pour toute $f \in H_{\text{loc}}(U)$. Soit G_n une suite fortement croissante d'ouverts relativement compacts dans G et recouvrant G . La suite T_n correspondante converge E^x-presque sûrement vert T , d'où il suit que pour f continue sur U, $\theta^n_x(f)$ converge vers $\theta_x(f)$: la suite θ^u_x converge vaguement vers θ_x . Mais chaque θ^n_x est majorée par la mesure Δ-harmonique correspondante; ces formes linéaires sont équicontinues sur $W^2_{\text{loc}}(U)$, et par suite θ^n_x converge vers θ_x faiblement sur $W^2_{\text{loc}}(U)$. Alors pour toute f lipschitzienne dans U, on a :

$$\theta_x(f) = \theta_x(H^G_f) = \operatorname*{Lim}_n \theta^n_x(H^G_f) = \operatorname*{Lim}_n H^G_f(x) = \rho_x(f), \text{donc } \theta_x = \rho_x.$$

10. *Remarque.* — En récapitulant, si μ est potentiellement finie, on a les équivalences suivantes pour toute fonction u universellement mesurable et localement bornée dans U :

a) u est L-harmonique

b) $u(X_t)\exp(-A_t)$ est une martingale locale sur $[0,T[$

c) u vérifie les formules (1) pour des ouverts G relativement compacts recouvrant U .

On pourrait montrer de manière assez analogue, mais sans supposer cette fois que μ est potentiellement finie, les équivalences suivantes pour toute fonction u appartenant à $H_{\text{loc}}(U)$:

a') u est quasi L-harmonique

b') pour toute mesure initiale θ à support compact et ne chargeant pas les polaires, $u(X_t)\exp(-A_t)$ est une martingale locale par rapport à la mesure E^θ .

c') u vérifie les formules (1) avec E^θ au lieu de x (θ à support dans G) .

11. Proposition. — *Soient D un ouvert relativement compact, f borélienne bornée ≥ 0 sur δD , $u = H_f^D$, u_0 la fonction Δ-harmonique dans D analogue à u, on a l'inégalité*

$$(2) \qquad u(x) \geq u_0(x)\exp[-G(u_0\mu)(x)/u_0(x)]$$

pour tout $x \in D$, où G désigne l'opérateur de Green de D .

Démonstration. — Supposons d'abord que μ soit potentiellement continue sur $\mathbf{R}^m$, et posons pour $\lambda \geq 0$:

$$u_\lambda(x) = E^x[f(X_T)\exp(-\lambda A_T)]$$

pour tout $x \in D$, T étant le début de $\mathbf{R}^m \setminus D$.

La fonction $\lambda \to \phi(\lambda) = u_\lambda(x)$ est logarithmiquement convexe sur $[0,+\infty[$, de sorte que l'on a l'inégalité $\phi(1) \geq \phi(0)\exp[\phi'(0)/\phi(0)]$ où $\phi'(0)$ est la dérivée à droite de 0. La fonction $u_\lambda + \lambda G(u_\lambda\mu)$ est Δ-harmonique dans D (continuité fine) et coïncide avec u_0 lorsque f est la trace d'une fonction lipschitzienne, et donc aussi lorsque f est quelconque (récurrence borélienne). La dérivée à droite de 0 vaut donc $\phi'(0) = -G(u_0\mu)$, ce qui démontre (2).

Reste le cas général : on écrit que μ est la limite croissante d'une suite de mesures μ_n potentiellement continues partout, on note u^n la suite correspondante qui converge en décroissant vers une fonction $v \geq u$. La différence $v - u$ est quasi-Δ-sousharmonique majorée par $u_0 - u$ qui est un Δ-potentiel (récurrence borélienne sur f), donc $v = u$ quasi-partout, ce qui prouve (2) en quasi tout point, et l'on termine en remarquant que les deux membres sont finement continus.

12. THÉORÈME. — *Supposons que μ soit potentiellement finie dans un ouvert connexe U, et soit u une fonction L-harmonique ≥ 0 dans U :*

a) (ellipticité) u est identiquement nulle ou partout > 0 ,

b) si de plus μ est potentiellement bornée en tout point, et si u n'est pas identiquement nulle, la fonction $1/u$ est localement bornée dans U .

Démonstration. — a) Soit $a \in U$ tel que $u(a) = 0$, on prend un ouvert D connexe relativement compact dans U , et contenant a : l'inégalité (2) appliquée à la trace f de u sur δD implique $u_0(a) = 0$ sinon l'exponentielle s'annulerait (contraire à l'hypothèse faite sur u), par suite u_0 s'annule identiquement dans D , et $u \leq u_0$ aussi; en faisant varier D on trouve que u est nulle sur U .

b) Supposons $u(a) > 0$, et soit D comme ci-dessus : le potentiel $G(u_0\mu)$ est borné car u_0 est bornée, de sorte que le second membre de (2) est borné inférieurement au voisinage de a par une constante > 0 .

Remarque. — En faisant converger l'ouvert D vers le point a dans l'inégalité (2), on montrerait que l'oscillation relative $\omega(u,a)/u(a)$ de u au point a est comprise entre $\omega/(\omega+1)$ et $1-\exp(-\omega)$ où $\omega = \omega(\mu, a)$ désigne l'oscillation en a de toute fonction s Δ -surharmonique au voisinage de a telle que $1/2\Delta s = -\mu$.

2. Potentiels et fonction de Green.

On suppose que μ est potentiellement finie en tout point de U .

13. DÉFINITION. — *Une fonction $f \geq 0$ dans l'ouvert U est dite L-excessive si le processus $\exp(-A_t)f(X_t)$ est une surmartingale à trajectoires continues sur l'intervalle stochastique $[0,T[$ (T est le début de $\mathbf{R}^m \setminus U$) .*

Il est clair que les fonctions Δ-excessives sont L-excessives, que l'enveloppe inférieure de deux L-excessives est une L-excessive.

On définit maintenant le L-potentiel d'une mesure ρ sur U négligeant les polaires :

$$(3) \qquad U\rho(x) = E^x \int_0^T \exp(-A_t)dB_t$$

où B_t désigne la fonctionnelle additive associée à ρ sur l'intervalle $[0, T[$.

14. THÉORÈME. — *Supposons que ρ soit potentiellement finie dans U. Alors $U\rho$ est L-excessive.*

Démonstration. — Supposons d'abord que ρ soit à support compact dans U. On a

$$\exp(-A_t)\ U_\rho(X_t) = \exp\ (-A_t)E_t \int_0^\infty M_u \circ \theta_t \exp(-A_u \circ \theta_t)dB_{u+t}$$

grâce à la propriété de Markov, où M_t désigne l'indicatrice de $[0, T[$, et E_t l'opérateur d'espérance conditionnelle :

$$\exp(-A_t)U\rho(X_t) + \int_0^t \exp(-A_u)dB_u = H_t = E_t \int_0^T \exp(-A_t)dB_t$$

pour $t < T$, de sorte que $U\rho$ est bien L-excessive dans U . Le cas général s'obtient par sommation $\rho = \sum \rho_n$: $\exp(-A_t)U\rho(X_t) + \int_0^t \exp(-A_u)dB_u$ reste une martingale locale dans $[0, T[$, car les trajectoires sont continues.

On définit maintenant le noyau *perturbant* P de la manière suivante (cf. [17], [18]) :

$$(4) \qquad Pf(x) = E^x \int_0^T \exp(-A_t)f(X_t)dA_t\ .$$

15. PROPOSITION. — *Posons $Sf = G(f\mu)$. On a $S = P + PS = P + SP$. Si f est ≥ 0 et bornée, Pf est L-excessive, et $LPf = -f\mu$.*

Démonstration. — Observons d'abord que le noyau P est sous-markovien. Comme on a $Sf(x) = E^x \int_0^T f(X_t)dA_t$, les deux égalités entre noyaux s'obtiennent comme plus haut à l'aide de la propriété de Markov et du théorème de Fubini (calculs standards). On a alors les propriétés successives suivantes :

a) si f est bornée, $Pf = S(f - Pf)$ est finement continue,

b) $1/2\Delta Pf = -(f - Pf)\mu$, donc $LPf = -f\mu$,

c) Si $f \geq 0$ et bornée, $Pf = U(f\mu)$, donc Pf est L-excessive,

d) P est un noyau symétrique par rapport à μ : en effet, S est évidemment un noyau symétrique, donc $I + S = (I - P)^{-1}$ l'est aussi.

On arrive alors à :

16. THÉORÈME. — *Si $G\rho$ est fini, on a les relations :*

(5) $$G\rho = U\rho + PG\rho$$

(6) $$PG\rho = G(U\rho \cdot \mu) = U(G\rho \cdot \mu)$$

(7) $$LU\rho \text{ existe et vaut } -\rho\ .$$

Démonstration. — Comme $B_t + G\rho(X_t)$ est une martingale uniformément intégrable sur $[0, T[$, on a par le théorème d'Itô :

$$\begin{aligned} U\rho(x) &= -E^x \int_0^T \exp(-A_t) dG\rho(X_t) \\ &= G\rho(x) - E^x \int_0^T G\rho(X_t) \exp(-A_t) dA_t \\ &= G\rho(x) - PG\rho(x)\ . \end{aligned}$$

On voit que $U\rho$ est finement continue.

Si $G\rho$ est borné, on peut calculer $LU\rho = -\rho - G\rho \cdot \mu + G\rho \cdot \mu = -\rho$. On a aussi $1/2\Delta PG\rho = -G\rho \cdot \mu + PG\rho \cdot \mu = -U\rho \cdot \mu$, de sorte que la mesure $U\rho \cdot \mu$ a un Δ-potentiel, soit $G(U\rho \cdot \mu)$, nécessairement égal à $PG\rho$ puisque ce dernier est majoré par $G\rho$.

Supposons seulement $G\rho$ fini, et soit $G\rho_n$ une suite croissante convergeant vers $G\rho$, $PG\rho_n$ converge en croissant vers $PG\rho$, de sorte que le théorème de Lebesgue montre que $1/2\Delta PG\rho_n = -U\rho_n \cdot \mu$ converge vaguement vers $-U\rho \cdot \mu$, qui est donc une mesure de Radon, et $1/2\Delta PG\rho = -U\rho \cdot \mu$. On en déduit encore $PG\rho = G(U\rho \cdot \mu)$.

Considérons alors $U(G\rho \cdot \mu)$ qui a un sens lorsque $G\rho$ est borné. On trouve $1/2\Delta U(G\rho \cdot \mu) = -U\rho \cdot \mu$, par suite $U(G\rho \cdot \mu) = G(U\rho \cdot \mu)$ car $U(G\rho \cdot \mu)$ est a priori une différence de Δ-potentiels. Cette relation s'étend à un potentiel $G\rho$ quelconque par convergence monotone.

La relation $1/2\Delta PG\rho = -U\rho \cdot \mu$ entraîne immédiatement que $LU\rho$ existe et vaut $-\rho$.

17. THÉORÈME. — *Soit f une fonction L-excessive. Alors f est finement continue. Si f est localement $(\sigma + \mu)$-intégrable, Lf est une mesure négative.*
Si f est majorée par un potentiel $G\theta$ fini, f est de la forme $U\rho$ pour une mesure ρ convenable.

Démonstration. — Supposons d'abord que f soit majorée par $U\mu$. On a alors $f + G(f\mu) \leq G\mu$. Considérons la fonction $g = f + G(f\mu) = f + Sf$, et montrons que $g(X_t)$ est une surmartingale. C'est a priori une semi-martingale, on va calculer sa différentielle stochastique. On applique d'abord le théorème de décomposition de Doob-Meyer à la surmartingale $\exp(-A_t)f(X_t)$; il existe un processus croissant C_t à trajectoires continues tel que $\exp(-A_t)f(X_t)+C_t$ soit une martingale L_t . D'autre part, $Sf(X_t)+\int_0^t f(X_u)dA_u$ est une martingale H_t . On différentie ces deux relations, et l'on trouve :

$$\mathrm{dg}(X_t) = \exp(A_t)[dL_t - dC_t + (L_t - C_t)dA_t] + dH_t - f(X_t)dA_t$$

soit à une différentielle de martingale locale près : $\mathrm{dg}(X_t) = -\exp(A_t)dC_t$.

On en déduit que le processus $g(X_t) + \int_0^t \exp(A_u)dC_u$ est une martingale locale. Mais $B_t = \int_0^t \exp(A_u)dA_u$ est croissant à trajectoires continues, et $g(X_t) \leq G\mu(X_t)$ est uniformément intégrable sur $[0,T[$, donc $g(X_t)$ est une surmartingale à trajectoires continues, d'où il suit que g est Δ-surharmonique dans U, et même un Δ-potentiel $G\rho \leq G\mu$.

Mais alors, la mesure ρ néglige les polaires, on voit maintenant que sa fonctionnelle additive n'est autre que $B_t = \int_0^t \exp(A_u)dC_u$, ce qui entraîne que le processus $\exp(-A_t)f(X_t) + \int_0^t \exp(-A_u)dB_u$ est une martingale, de sorte qu'en posant $h = f - U\rho$, on trouve que $\exp(-A_t)h(X_t)$ est une martingale uniformément intégrable. On en déduit que $|h(X_t)|$ est une sous-martingale majorée par $G\mu(X_t)$ donc nulle. Alors h est nulle, et $f = U\rho$.

Dans le cas général, on peut supposer que U est connexe et μ non nulle dans U (sinon il n'y a plus rien à démontrer), cela entraîne que $U\mu$ est > 0 en tout point de U, sans quoi on aurait $0 = U\mu = G[(1 - U\mu)\mu]$, donc $U\mu = 1$ μ-presque partout, donc $\mu = 0$. Cela étant, chaque $f_n = \mathrm{Inf}(f, nU\mu)$ est finement continue, et f elle-même l'est aussi.

Supposons maintenant que f soit localement $(\sigma + \mu)$-intégrable, soit $f_n = U\rho_n$ la suite définie ci-dessus. Le théorème de Lebesgue montre que $1/2\Delta f_n = -\rho_n + f_n\mu$ converge vers $1/2\Delta f$, et que $f_n\mu$ converge vaguement vers $f\mu$. On en déduit que ρ_n converge vaguement vers une mesure $\rho \geq 0$, et par suite $1/2\Delta f = -\rho + f\mu$, soit $Lf = -\rho$.

Si de plus f est majorée par $U\theta \leq G\theta < +\infty$, on a $f_n + Pf_n \leq U\theta + PG\theta = G\theta$, on obtient par semi-continuité inférieure $G\rho \leq f + Pf \leq G\theta$, de sorte que ρ néglige les polaires et engendre un L-potentiel $U\rho$. La fonction $h = f - U_\rho$ est L-harmonique majorée en module par $G\theta$, donc nulle par le raisonnement habituel.

On définit une famille résolvante sous-markovienne de noyaux de la manière suivante :

$$W_\lambda f(x) = E^x \int_0^T \exp(-\lambda t - A_t) f(X_t) dt \; . \tag{8}$$

A l'aide de la propriété de Markov et du théorème de Fubini, il est facile de vérifier que c'est bien une famille résolvante.

18. Proposition. — *Les fonctions (W_λ)-excessives coïncident avec les fonctions L-excessives.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $Wf = W_0 f = U(f\sigma)$. On déduit de la démonstration précédente que toute fonction (W_λ)-excessive est L-excessive. Inversement, toute fonction L-excessive est la borne supérieure d'une suite croissante de fonctions de la forme $U\rho_n$, de sorte qu'il suffit de montrer que les U_ρ sont (W_λ)-excessives.

Toute fonction de la forme $U\rho$ est (W_λ)-excessive car on obtient à l'aide de la propriété de Markov et du théorème de Fubini

$$U\rho(x) = \lambda W_\lambda U\rho(x) + E^x \int_0^T \exp(-\lambda t - A_t) dB_t$$

et le théorème de Lebesgue permet de conclure.

On définit maintenant la L-fonction de Green. Si a est un point de U, on note U^a la fonction $G^a - PG^a$ sur $U \setminus \{a\}$. On prolonge U^a au point a en lui donnant la valeur de sa limite fine en a .

On pose enfin $U(x,y) = U^x(y)$.

19. Théorème. — *La fonction $U(x,y)$ a les propriétés suivantes :*

a) pour tout $a \in U$, U^a est L-excessive (donc finement continue). $LU^a = -\varepsilon_a$,

b) U est symétrique,

c) U est borélienne du couple (x,y) ,

d) si $G\rho$ est un Δ-potentiel fini, on a la formule

$$U\rho(x) = \int U(x,y) d\rho(x) \; , \tag{9}$$

e) U est finement continue hors de la diagonale et finement s.c.i. partout,

f) U est > 0 partout.

Démonstration. — a) La relation $\lambda W_\lambda Wf \leq Wf$ s'écrit aussi $\lambda W_\lambda G(f\sigma)+PG(f\sigma) \leq G(f\sigma)+\lambda W_\lambda PG(f\sigma)$. Il existe une suite croissante $G(f_n\sigma)$ qui converge vers G^a, de sorte que l'on obtient $\lambda W_\lambda G^a + PG^a \leq G^a+\lambda W_\lambda PG^a$, soit $\lambda W_\lambda U^a \leq U^a$ sauf peut-être en a . Le noyau W_λ néglige les points (il est de base σ), donc $\lambda W_\lambda U^a$ converge en croissant quand λ tend vers $+\infty$ vers une fonction L-excessive ϕ finement continue. On a $\phi = U^a\sigma$-presque partout, donc partout sur $U \setminus \{a\}$, et même au point a vu la définition de U^a . Ainsi U^a est finement continue et L-excessive. On peut calculer $1/2\Delta U^a = -\varepsilon_a + U^a\mu$. Comme les conditions d'intégrabilité sont réunies, on voit que U^a est L-surharmonique, et $LU^a = -\varepsilon_a$.

b) PG^a et $G(U^a\cdot\mu)$ sont deux Δ-potentiels ayant le même laplacien, et sont donc égaux. On a $PG^a(b) = G(U^a\mu)(b) = \int G^bU^a d\mu = \int G^bPG^a d\mu$. Mais P est un noyau symétrique par rapport à μ, donc $PG^a(b) = PG^b(a)$. Alors $U^a(b) = U^b(a)$ pour $a \neq b$.

c)Comme on a $U(x,y) = G(x,y) - \int G(x,z)P(y,dz)$, le théorème de Fubini montre que U est borélienne hors de la diagonale. Mais on écrit alors que $U(x,y)$ vaut $\sup\limits_{\lambda>0} \lambda \displaystyle\int U_1(x,z)W_\lambda(y,dz)$, où l'on a pris U_1 borélienne égale à U hors de la diagonale, de sorte que le théorème de Fubini montre cette fois que U est borélienne aussi sur la diagonale.

d) Notons V_ρ le second membre de (9). Le théorème de Fubini montre aussitôt la relation $G\rho = V\rho + PG\rho$, de sorte que $V\rho = U\rho$ dès que $G\rho$ est fini.

e) On a en particulier $Wf(x) = \int U^x f d\sigma$, et c'est une fonction finement continue. Si une famille ultrafiltrée (x_i, y_i) converge finement vers un point (x,y), avec $x \neq y$, cette famille converge aussi au sens ordinaire, de sorte que l'on peut supposer qu'elle est portée par le produit de deux voisinages compacts disjoints de x et y . Cela étant, $Wf(x_i)$ converge vers $Wf(x)$, donc U^{x_i} converge vers U^x faiblement dans $L^1_{\text{loc}}(\sigma, U)$. Remarquons maintenant que les U^{x_i} sont dominés par les G^{x_i} qui sont également bornés sur tout compact de $U \setminus \{x\}$, et appliquons le théorème (5) : U^{x_i} converge vers U^x uniformément sur tout compact de $U \setminus \{x\}$. Alors $U(x_i, y_i) - U(x, y_i)$ converge vers 0, ainsi que $U(x,y_i) - U(x,y)$.

f) Si U^a s'annule en un point $b \neq a$, U^a s'annule identiquement sur $U \setminus \{a\}$ en vertu du théorème 12. Si maintenant $U^a(a) = 0$, on a a fortiori $\lambda W_\lambda U^a(a) = 0$. Mais alors la mesure $\varepsilon_a W_\lambda$ doit être proportionnelle à ε_a donc nulle puisque diffuse (absolument continue par rapport à σ), et cela entraîne que U^a est nulle car (W_λ)-excessive, en contradiction avec le a).

Soit ρ une mesure ≥ 0 arbitraire, on définit le L-potentiel

$$U\rho(x) = \int U(x,y)d\rho(y) .$$

20. THÉORÈME. — *U_ρ est L-excessive (donc finement continue). Si $U\rho$ est localement σ-intégrable, elle est L-excessive, localement μ-intégrable, et $LU\rho = -\rho$.*

Démonstration. — On peut supposer que U est connexe. Le théorème de Fubini montre que $U\rho$ est borélienne, et que $\lambda W_\lambda U\rho$ converge en croissant vers $U\rho$ quand λ tend vers $= +\infty$. On en déduit que $U\rho$ est L-excessive et finement continue.

Supposons d'abord que ρ intègre la fonction $G\mu$, donc μ intègre $G\rho$, par suite $U\rho(\leq G\rho)$ est localement $(\sigma+\mu)$-intégrable. Comme $U\rho$ est L-excessive, il existe une suite croissante Wf_n convergeant vers $U\rho$, et le théorème de Lebesgue montre que la suite $f_n\sigma$ converge vaguement vers ρ . Alors $LU\rho = -\rho$.

Si $U\rho$ est seulement localement σ-intégrable, on écrit que ρ est la borne supérieure d'une suite croissante de mesures ρ_n intégrant $G\mu$. La suite $U\rho_n$ converge en croissant vers $U\rho$, donc dans l'espace $L^1_{\mathrm{loc}}(\sigma, U)$, et le théorème de Lebesgue montre que $1/2\Delta U\rho_n$ converge au sens faible vers $1/2\Delta U\rho$. Il est clair que la suite ρ_n converge vaguement vers ρ . Alors la suite $U\rho_n\cdot\mu = \rho_n + 1/2\Delta U\rho_n$ converge au sens faible vers $\rho + 1/2\Delta U\rho$. On en déduit que pour toute fonction $\phi \geq 0$ de classe C^2 à support compact, $\int \phi U\rho_n d\mu$ converge vers une limite finie. Mais elle converge évidemment vers $\int \phi U\rho d\mu$ (convergence monotone), de sorte que U_ρ est localement μ-intégrable, et la conclusion s'obtient comme plus haut.

Remarque. — On peut montrer que $PG\rho = G(U\rho\cdot\mu) = U(G\rho\cdot\mu)$.

21. THÉORÈME. — *Si f est L-excessive, on a la propriété de Riesz : $f = h + U\rho$, où h est L-harmonique, et cette décomposition est unique. La fonction h est la plus grande minorante L-harmonique de f.*

Démonstration. — Soit $\rho = -Lf$. Si G est un ouvert relativement compact inclus dans U, le Δ-potentiel de ρ dans G est σ-intégrable car ρ est bornée dans G, cela entraîne que le L-potentiel $U_G\rho$ de ρ dans G est σ-intégrable. Mais alors la fonction $h_G = f - U_G\rho$ est L-harmonique dans G, et h_G majore $-U_G\rho$ qui est une différence de Δ-potentiels. On en déduit que h_G est ≥ 0 . Quand G tend vers U selon une suite croissante, $U_G\rho$ croît vers $U\rho$ et h_G décroît vers une fonction h L-harmonique de sorte que l'on obtient $f = h + U\rho$. Soit h' une autre minorante L-harmonique de f dans U, la fonction $(h' - h)^+$ est Δ-sousharmonique et est majorée par $U\rho$ qui est une différence de Δ-potentiels, $(h' - h)^+$ est donc nulle, et $h' \leq h$.

3. Inégalités de Harnack.

Soit U un ouvert connexe et borné. On suppose dans ce paragraphe que μ est potentiellement bornée en tout point de U .

Si a est un point de U et H un compact inclus dans $U \setminus \{a\}$, U^a est minoré par une constante > 0 sur H d'après la proposition 12. Soit σ_H la restriction de la mesure de Lebesgue σ au compact H . Alors il existe une constante $k > 0$ telle que $U\sigma_H \leq G\sigma_H \leq kU\varepsilon_a$ sur H . Le principe de domination permet d'étendre cette inégalité quasi-partout sur U .

On en déduit la majoration :

$$\int U\rho \, d\sigma_H \leq kU\rho(a)$$

pour tout potentiel $U\rho$ tel que $G\rho(a) < +\infty$. Cette inégalité s'étend par convergence monotone à toute fonction L-excessive f :

$$\int f d\sigma_H \leq kf(a) \,. \tag{10}$$

En particulier, si u est L-harmonique ≥ 0 dans U :

$$\int u d\sigma_H \leq ku(a) \,.$$

Appliquons maintenant le théorème 4 : si K est un compact non vide intérieur à H, il existe une constante c ayant la propriété suivante :

$$\operatorname*{Sup}_K u \leq cu(a) \tag{11}$$

pour toute fonction u L-harmonique ≥ 0 sur U .

Cela permet d'énoncer :

22. THÉORÈME. — *Soit U un ouvert connexe. On suppose que μ est potentiellement bornée en tout point de U. Alors pour tout compact K inclus dans U, il existe une constante c ayant la propriété suivante :*

$$u(x) \leq cu(y) \tag{12}$$

pour toute fonction u L-harmonique ≥ 0 dans U, et tout couple $(x,y) \in K \times K$.

Démonstration. — On peut par restriction supposer que U est un ouvert borné. Fixons un point a appartenant à $U \setminus K$, et un ouvert D connexe relativement compact dans U et contenant $K \cup \{a\}$. Soit u une fonction L-harmonique > 0 dans U, et soit f sa restriction à δD . On va appliquer l'inégalité (2). Pour $x \in D$, on a la majoration $G(u_0\mu)(x) \leq \|u_0\|_{\delta D}\, M$ où M est un majorant de $G\mu$, potentiel de Green dans D de la restriction de μ à D . On a $\|u_0\|_{\delta D} = \|u\|_{\delta D}$ par le principe du maximum, puis $\|u\|_{\delta D} \leq ku(a)$ où k est une constante indépendante de u d'après l'inégalité (11), puis $ku(a) \leq ku_0(a)$ (évident). On obtient ainsi : $u(x) \geq u_0(x) \exp[-kM\, u_0(a)/u_0(x)]$ pour tout $x \in D$. Maintenant, l'inégalité de Harnack pour les fonctions Δ- harmoniques dans D implique l'existence d'une constante k_1 majorant le rapport $u_0(a)/u_0(x)$ pour tout $x \in K$. Alors $u(x) \geq k_2 u_0(x)$ où la constante k_2 est indépendante de u . On obtient ensuite : $u(x) \geq k_2 u_0(a)/k_1 \geq k_2 u(a)/k_1 \geq k' k_2/k_1\; u(y)$ pour tout $y \in K$ d'après l'inégalité (11). La constante $c = k_1/k_2 k'$ est indépendante de u .

23. THÉORÈME. — *Supposons U connexe, et soit f une fonction L-excessive. Alors f est identiquement infinie ou bien localement σ - intégrable. En ce dernier cas, f est aussi localement μ-intégrable. De plus, si f est non nulle, la fonction $1/f$ est localement bornée dans u .*

Démonstration. — Soit a un point tel que $f(a) < +\infty$. L'inégalité (10) prouve la première assertion. Les théorèmes 20 et 21 prouvent la seconde assertion.

Comme on a $f = h + U\rho$ (théorème 21), et peut-être $h = 0$, il suffit de montrer que $1/U\rho$ est localement bornée. On raisonne comme en proposition 12, si $G\rho$ est un Δ-potentiel fini, on introduit la fonction

$$\phi(\lambda) = u_\lambda(x) = E^x \int_0^T \exp(-\lambda A_t) dB_t$$

où B_t est la fonctionnelle additive associée à ρ . $\phi(\lambda)$ est logarithmiquement convexe, donc $\phi(1)/\phi(0) \geq \exp(\phi'(0)/\phi(0))$. On a $u_\lambda + \lambda G(u_\lambda \mu) = G\rho$ (observer que u_λ est le $(1/2\Delta - \lambda\mu)$-potentiel de ρ, et appliquer les formules (5) et (6).

On en déduit $\phi'(0) = -G(G\rho \cdot \mu)$, et la formule

$$U\rho/G\rho \geq \exp(-G(G\rho, \mu)/G\rho) \ . \tag{13}$$

Si $G\rho$ est borné, $G(G\rho, \mu)$ est localement borné, de sorte que le rapport $G\rho/U\rho$ est localement borné, donc aussi $1/U\rho$ puisque $1/G\rho$ est toujours localement borné.

Dans le cas général, on choisit un Δ-potentiel borné $G\theta$, et l'on remplace $U\rho$ par $U\tau = \mathrm{Inf}(U\rho, U\theta)$. On a $G\tau = U\tau + G(U\tau \cdot \mu) \leq U\theta + G(U\theta \cdot \mu) = G\theta$, on peut appliquer la formule (13) à $U\rho$, donc $1/U\rho \leq 1/U\tau$ est localement borné.

4. Extensions et compléments.

A. Sur la mesure μ.

On suppose que U est un ouvert connexe, mais que μ peut être potentiellement infinie en certains points de U (formant nécessairement un ensemble polaire Z).

La fonctionnelle additive A_t peut être définie par sommation, ses trajectoires ont alors au plus une discontinuité à partir de laquelle elle vaut $+\infty$. Comme on a toujours $G\mu(x) = E^x(A_\tau)$, on constate que les formules (3) et (4) ne gardent un sens que pour $x \in U \setminus Z$, ou bien si l'on remplace la mesure de Wiener issue de x par la mesure de Wiener issue d'une mesure θ intégrant $G\mu$.

Contentons-nous d'indiquer sommairement les résultats :

La formule (1) explicitant la mesure harmonique passe à la limite (propriété des espaces de Dirichlet).

La formule (2) passe ainsi à la limite, mais si u est une fonction L-harmonique ≥ 0, la formule (2) montre seulement que u est identiquement nulle ou ne s'annule qu'en des points de Z . Si u non identiquement nulle s'annule en un point $a \in Z$ et si ρ_a est la mesure harmonique de a relative à un ouvert G contenant a et relativement compact dans U, on a $\rho_a(u) = 0$, mais u est > 0 quasi-partout et ρ_a néglige les polaires, cela entraîne que ρ_a est nulle. Il s'ensuit que toutes les fonctions L-harmoniques dans U s'annulent en a .

La formule (4) passe à la limite pour $x \in U \setminus Z$, ainsi $Pf(x)$ n'est défini pour l'instant que sur $U \setminus Z$, ce qui n'est pas très grave car les polaires sont P-négligeables.

La formule (5)) passe à la limite et définit $U\rho$.

On a toujours $G\rho = U_n\rho + P_n G\rho$, où l'indice n est relatif à une suite μ_n convergeant en croissant vers μ, de sorte que $U_n\rho$ converge en décroissant vers U_ρ, alors $P_n G\rho$ converge en croissant vers $PG\rho$ qui peut donc être défini même aux points de Z . On peut alors montrer par récurrence borélienne que Pf est prolongeable en fonction finement continue sur U, et que ledit prolongement définit un noyau, mais ce n'est pas très important.

Cela étant, les résultats du paragraphe 2 s'étendent à condition de les comprendre seulement aux points de $U \setminus Z$.

B. Sur l'ouvert U .

Supposons U connexe, et considérons une suite croissante d'ouverts bornés recouvrant U . Il est clair que la L-résolvante de Green (W_λ) augmente en un sens évident. De même la L-fonction de Green U^n augmente. On dira que U est un ouvert de Green pour l'opérateur L s'il existe un couple (a, b), $a \neq b$, $a \in U \setminus Z$, tel que $U^n(a, b)$ ne tende pas vers $+\infty$. On laisse au lecteur le soin d'imaginer les résultats dans le cas général, dans le cas où μ est potentiellement finie, et dans le cas où μ est potentiellement bornée en tout point.

Remarquons que $\mathbf{R}^2$ peut fort bien devenir un ouvert de Green, c'est le cas lorsque l'on prend $\mu = \sigma$.

C. Propriété de Harnack dans le cas spécial de $\mathbf{R}^2$.

24. Théorème. — *On suppose seulement que μ est potentiellement finie dans un ouvert connexe U . Alors subsiste l'inégalité de Harnack unilatérale*

$$\sup_K u \leq cu(a) \tag{14}$$

avec une constante c indépendante de u .

Démonstration. — On peut évidemment supposer U borné. Soit b un point arbitraire dans U . Comme $U(a, b)$ est > 0, et que U^a est finement continue, l'ensemble E des points x où $U^a(x)$ minore $\mathrm{Inf}(1, 1/2\ U^a(b))$ est effilé en b . Il existe alors des boules D centrées en b aussi petites que l'on veut dont la frontière δD ne rencontre pas E . Choisissons une telle boule δD, et soit ρ la mesure circulaire normalisée sur δD . Il existe une constante $k > 0$ telle que l'on ait sur δD l'inégalité $U\rho \leq G\rho \leq kU^a$. Le principe de domination entraîne $U\rho \leq kU^a$ partout. On en déduit comme plus haut :

$$\int u d\rho \leq ku(a)$$

pour toute u L-harmonique ≥ 0 dans U .

Mais u est Δ-sousharmonique, on a donc $\int u d\tau \leq \int u d\rho \leq k u(a)$, où τ désigne la médiation spatiale sur D . On peut maintenant appliquer le théorème 4 à la boule B centrée en b et deux fois plus petite que D : on obtient une constante k' indépendante de u telle que vale l'inégalité $\operatorname*{Sup}_B u \leq k' u(a)$. Il ne reste plus qu'à raisonner par recouvrements finis pour obtenir l'inégalité (14).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AIZENMAN, B. SIMON. — Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 209-273.

[2] A. BOUKRICHA, W. HANSEN, H. HUEBER. — Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbations of harmonic spaces, Research center Bielefeld-Bochum stochastics, Bielefeld University, 1985.

[3] M. BRELOT. — Eléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U., 4ème édition, 1969.

[4] K.L. CHUNG, M. RAO. — Feynman-Kac functionnal and the Schrödinger equation, Seminar on Stochastic Processes, Birkhaüser, Boston, 1981.

[5] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER. — Probabilités et potentiel, A.S.I., 1417, Paris, Hermann, 1987.

[6] J. DENY. — Cours de Stresa, 1965. Méthodes hilbertiennes en théorie du Potentiel, C.I.M.E., Stresa, 121-201, Ed. Cremonese, 1970.

[7] J. DENY, J.L. LIONS. — Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 5(1953/54), 305-370.

[8] N. FALKNER. — Feynman-Kac functionnals and positive solutions of $1/2\Delta u + qu = 0$, Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie, 65(1983), 19-31.

[9] D. FEYEL. — Espaces de Banach adaptés, quasi-topologie et balayage, Séminaire de théorie du potentiel, Paris, Lecture Notes, n°681, Springer, (1978).

[10] D. FEYEL, A. DE LA PRADELLE. — Sur l'équation $1/2\ \Delta u - u\mu = 0$ où μ est une mesure, C.R.A.S., Paris, série I, 303, n°1 (1986),5.

[11] D. FEYEL, A. DE LA PRADELLE. — Nouvelle démonstration de l'inégalité de Harnack pour un opérateur elliptique à coefficients discontinus, C.R.A.S., Paris, série A, 281 (1975), 159.

[12] D. FEYEL, A. DE LA PRADELLE. — Cônes en dualité, application aux fonctions de Green, Séminaire de théorie du potentiel, Paris, n°2, Lecture Notes in Math., 563, Springer, (1976).

[13] D. FEYEL, A. DE LA PRADELLE. — Cours de théorie du potentiel, 3ème cycle, Année 1977-78, Université Paris VI.

[14] B. FUGLEDE. — Finely harmonic functions (III), Lecture Notes in Math., Springer, vol. 289 (1972).

[15] R.M. HERVÉ. — Représentation d'un espace harmonique de M. Brelot. Recherche d'une bijection entre potentiels et potentiels perturbés, Publ. Math. Univ. P. & M. Curie, n°75 (1986).

[16] A. DE LA PRADELLE. — Sur les perturbations d'espaces harmoniques, à paraître.

[17] A. DE LA PRADELLE. — Sur la subordination des résolvantes, Séminaire Théorie du Potentiel, Paris, n°6, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 1235 (erratum et addendum..., à paraître dans Sém. n°9).

[18] A. DE LA PRADELLE. — Sur certaines perturbations de résolvantes, à paraître.

[19] P.A. MEYER. — Processus de Markov, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 26 (1967).

[20] P. PRIOURET. — Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, cours d'été de Saint-Flour, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 390 (1973).

Manuscrit reçu le 2 juillet 1987.

D. FEYEL & A. de LA PRADELLE,
Laboratoire d'Analyse
Tour 46-0, 4ème étage
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS Cedex 05.