Annales de l'institut Fourier

Éliane Salem

Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 2 (1988), p. 185-200

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_2_185_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 2 (1988), 185-200.

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE MYERS-STEENROD AUX PSEUDOGROUPES D'ISOMÉTRIES

par Éliane SALEM

INTRODUCTION.

Le but de cet article est de généraliser au cas des pseudogroupes d'isométries locales, le théorème démontré par S. Myers et N. Steenrod dans [Mye-Ste] :

Tout groupe d'isométries d'une variété riemannienne T de classe $C^r(r \geqslant 2)$, fermé pour la topologie compacte-ouverte, est un groupe de Lie de transformations C^r de T.

On considère un pseudogroupe $\mathcal{G}$ de difféomorphismes locaux d'une variété T. On suppose pour simplifier que la classe de différentiabilité est C^∞, les résultats restant vrais dans le cas $C^r(r \geqslant 2)$.

DÉFINITION. — *$\mathcal{G}$ est complet si étant donné deux points x et y de T, il existe des voisinages ouverts U et V de x et y dans T, tels que tout germe d'un élément de $\mathcal{G}$ de source dans U et but dans V est le germe d'un élément de $\mathcal{G}$ défini sur U tout entier.*

Le résultat que nous obtenons est le

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{G}$ un pseudogroupe d'isométries locales d'une variété riemannienne T, fermé pour la topologie C^1 et complet, alors $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe de Lie au sens suivant :*

Il existe un faisceau localement constant $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ en algèbres de Lie de dimension finie de germes de champs de Killing de T, tel que les éléments de $\mathcal{G}$ proches de l'identité sont ceux de la forme $\exp \xi$ *où ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ proche de* 0.

Mots-clés : Pseudogroupe - Isométrie - Feuilletage riemannien.

Corollaire. — *Soit $\mathcal{G}$ un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales de T, alors les orbites de $\mathcal{G}$ sont des sous-variétés fermées de T.*

La démonstration du théorème se fait en deux temps :

— Dans la 1re partie, on définit pour tout pseudogroupe $\mathcal{G}$ de difféomorphismes locaux de T, le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ de ses transformations infinitésimales. C'est un sous-faisceau du faisceau des germes de champs de vecteurs sur T, ayant la propriété suivante : si ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ définie sur un voisinage suffisamment petit, et proche de 0, alors $\exp \xi \in \mathcal{G}$. Pour un pseudogroupe $\mathcal{G}$ complet d'isométries locales, le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est localement constant.

— Dans la 2e partie, on montre que si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales, alors $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est un faisceau en algèbres de Lie. De plus, les éléments de $\mathcal{G}$ suffisamment proches de l'identité sont ceux de la forme $\exp \xi$ où ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ proche de 0.

Ce théorème est un analogue pour le cas des pseudogroupes, du théorème de P. Molino sur les feuilletages riemanniens [Mol] : le pseudogroupe d'holonomie $\mathcal{G}$ d'un feuilletage à métrique bundle-like sur une variété complète X est un pseudogroupe complet d'isométries locales agissant sur une variété totale transverse au feuilletage. Le faisceau en algèbres de Lie de Molino s'interprète comme le pull-back sur X du faisceau des germes de transformations infinitésimales de $\overline{\mathcal{G}}$ (adhérence de $\mathcal{G}$ pour la topologie C^1).

1. PSEUDOGROUPES COMPLETS D'ISOMÉTRIES LOCALES

1.1. Définition et propriétés générales.

Soit $\mathcal{G}$ un pseudogroupe complet de difféomorphismes locaux de T. Alors, pour tout élément x de T, il existe un voisinage ouvert U de x dans T tel que tout germe d'un élément de $\mathcal{G}$ de source et but dans U, est le germe d'un élément de $\mathcal{G}$ défini sur U tout entier.

Définition. — *Un tel ouvert U de $\mathcal{G}$ est dit ouvert de complétude pour $\mathcal{G}$.*

Remarque. — Si U est un ouvert de complétude pour $\mathcal{G}$ et $U' \subset U$ est un ouvert de T, alors U' est un ouvert de complétude pour $\mathcal{G}$.

La motivation essentielle pour l'étude des pseudogroupes complets d'isométries locales provient de la

PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage à métrique bundle-like sur une variété complète, alors le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ est un pseudogroupe complet d'isométries locales.*

Démonstration. — Elle se déduit des résultats de B. Reinhart [Rei]. On trouvera une démonstration de la proposition dans [Sal].

Un autre exemple important est celui d'un pseudogroupe $\mathcal{G}$ engendré par un groupe de Lie G agissant proprement sur une variété différentiable paracompacte T. On a sur T une métrique G-invariante, et $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe complet d'isométries locales de T.

1.2. Faisceau des transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$.

On associe à tout pseudogroupe $\mathcal{G}$ de difféomorphismes locaux de T, le *faisceau* $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ *de ses transformations infinitésimales* :

Pour tout ouvert U de T, on définit l'ensemble $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}(U)$ des champs de vecteurs ξ sur U tels que :

Pour tout élément x de U, il existe un voisinage ouvert V_x de x et $\varepsilon > 0$, tels que $\exp t\xi$ est défini sur V_x pour $|t| < \varepsilon$, et $\exp t\xi \in \mathcal{G}$. Les ensembles $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}(U)$ sont les espaces des sections au-dessus de U d'un faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ sur lequel $\mathcal{G}$ agit par automorphismes :

$$h \in \mathcal{G}, \qquad \xi \in \underset{\sim}{\mathfrak{g}}(U), \qquad h_*\xi = \frac{d}{dt}(h \circ \exp t\xi \circ h^{-1})|_{t=0}.$$

Par un argument similaire au cas des groupes de transformations ([Kob] pp. 13-14) on montre que si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe d'isométries locales de T, alors $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est un faisceau en algèbres de Lie.

PROPOSITION. — *Si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe complet d'isométries locales, alors le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est localement constant.*

Démonstration. — Soit U un ouvert connexe de complétude pour $\mathcal{G}$. Alors tout germe en $y \in U$ d'une section de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ suffisamment proche de 0 se prolonge de façon unique en une section de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ au-dessus de U : Si ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ définie au voisinage de y, alors pour t suffisamment petit $\exp t\xi \in \mathcal{G}$ est défini sur un voisinage ouvert de y, de source et but dans U. Donc $\exp t\xi$ admet un unique prolongement en un élément de $\mathcal{G}$ défini sur U tout entier. Ceci montre que le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}|_U$ est constant : si $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}_x$ désigne la fibre de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ en $x \in U$, on a un isomorphisme

$$\underset{\sim}{\mathfrak{g}}|_U \to \underset{\sim}{\mathfrak{g}}_x \times U$$
$$\text{germe de } \xi \text{ en } y \in U \mapsto (\text{germe de } \xi \text{ en } x,\ y).$$

Remarque. — La proposition reste vraie pour tout pseudogroupe complet $\mathcal{G}$ de transformations tel que :

Si h est un élément de $\mathcal{G}$ défini sur un ouvert U connexe, et si le germe de h en $x \in U$ est l'identité, alors h est l'identité.

Exemple. — Si $\mathcal{G}$ est engendré par un groupe de Lie G agissant proprement sur une variété riemannienne T, le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est le faisceau dont les sections sont les transformations infinitésimales de G (i.e. les champs de vecteurs de la forme $x \to \dfrac{d}{dt}(\exp t\xi.x)_{|t=0}$ où ξ est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G). Le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est isomorphe au faisceau constant sur T de fibre $\mathfrak{g}$, sur lequel G agit par la représentation adjointe.

1.3. Groupes locaux associés à $\mathcal{G}$.

Soient $\mathcal{G}$ un pseudogroupe complet d'isométries locales de T, et U un ouvert connexe de complétude pour $\mathcal{G}$. Pour $x \in U$, on définit l'ensemble $G_x(U)$ des 1-jets $j_x^1(h)$ au point x d'éléments $h \in \mathcal{G}$ avec $h(x) \in U$. On munit $G_x(U)$ de la topologie des 1-jets.

Remarque. — Si h est une isométrie locale définie sur un voisinage connexe de $x \in T$, alors h est déterminée par son 1-jet $j_x^1(h)$.

Pour les paires $j_x^1(h)$, $j_x^1(h')$ d'éléments $G_x(U)$ avec $h \circ h'(x) \in U$, on définit le composé $j_x^1(h).j_x^1(h')$ par $j_x^1(h \circ h')$.

PROPOSITION 1. — *Pour cette loi de composition, les $G_x(U)$ sont des groupes locaux.*

Démonstration. — Elle se déduit facilement de la définition d'un groupe local.

On rappelle les définitions de groupe local et d'isomorphisme local entre groupes locaux ([Pon] pp. 137-138).

DÉFINITION. — *Un espace topologique G est un groupe local, si pour certaines paires a, b d'éléments de G, on a un produit $ab \in G$ avec les propriétés :*

— *si les produits ab, bc, $(ab)c$ et $a(bc)$ sont définis, alors $a(bc) = (ab)c$;*

— *si le produit ab est défini, alors pour tout voisinage W de ab, il existe des voisinages U et V de a et b, tels que si $x \in U$ et $y \in V$, alors xy est défini et $xy \in W$;*

— *il existe un élément e de G tel que ea est défini pour tout $a \in G$, et $ea = a$;*

— *si l'inverse à gauche a^{-1} de a est défini, alors pour tout voisinage V de a^{-1} il existe un voisinage U de a tel que tout élément y de U a un inverse à gauche $y^{-1} \in V$.*

DÉFINITION. — *Soient G et G' des groupes locaux. Une application f est un isomorphisme local de G sur G' si f est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert W de e dans G sur un voisinage ouvert W' de e' dans G' tel que*

— *si a, $b \in W$, et si ab est défini et appartient à W, alors $f(a)f(b)$ est défini dans W' et $f(a)f(b) = f(ab)$;*

— *$f(e) = e'$;*

— *f^{-1} vérifie les mêmes conditions que f.*

PROPOSITION 2. — *Pour tout $x' \in U$, et pour tout voisinage ouvert connexe U' de x' avec $U' \subset U$, on a un isomorphisme local entre $G_x(U)$ et $G_{x'}(U')$.*

Démonstration. — Soit W le voisinage ouvert de e dans $G_x(U)$ formé des $j_x^1(h)$ avec $h(x) \in U$ et $h(x') \in U'$. Et soit W' le voisinage ouvert de e dans $G_{x'}(U')$ formé des $j_{x'}^1(h)$ avec $h(x') \in U'$ et $h(x) \in U$. Alors l'application de W dans W' qui associe à tout jet $j_x^1(h)$ de W, l'élément $j_{x'}^1(h)$ de W' est un homéomorphisme et définit un isomorphisme local entre $G_x(U)$ et $G_{x'}(U')$.

1.4. Pseudogroupes fermés complets.

Soit $\mathcal{G}$ un pseudogroupe complet d'isométries locales de T. On note $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ le groupoïde topologique des germes d'éléments de $\mathcal{G}$ avec la topologie des germes et $J^1(T)$ le groupoïde différentiable des 1-jets de difféomorphismes locaux de T. Alors l'application $j^1 : \underset{\sim}{\mathcal{G}} \to J^1(T)$, qui à un germe en x d'un élément de $\mathcal{G}$ associe son 1-jet en x, est un homomorphisme continu injectif entre groupoïdes topologiques.

PROPOSITION 1. — *Il existe un unique pseudogroupe $\overline{\mathcal{G}}$ d'isométries locales de T, tel que l'image de $\underset{\sim}{\overline{\mathcal{G}}}$ dans $J^1(T)$ est l'adhérence de $j^1(\underset{\sim}{\mathcal{G}})$. Le pseudogroupe $\overline{\mathcal{G}}$ est complet. Les orbites de $\overline{\mathcal{G}}$ sont les adhérences des orbites de $\mathcal{G}$, elles forment une partition de T, et l'espace des orbites de $\overline{\mathcal{G}}$ est séparé.*

Démonstration. — Les éléments de $\overline{\mathcal{G}}$ sont localement les limites pour la topologie C^1, des suites d'éléments de $\mathcal{G}$. Soit $\underset{\sim}{h}_n$ une suite d'éléments de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ telle que la suite $j^1(\underset{\sim}{h}_n)$ converge vers un élément de $J^1(T)$ de source x et but y. Comme le pseudogroupe $\mathcal{G}$ est complet, il existe des voisinages ouverts U (resp. V) de x (resp. y) dans T, tels que tout élément de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ de source dans U et but dans V, soit le germe d'un élément de $\mathcal{G}$ défini sur U tout entier. Pour n suffisamment grand, $\underset{\sim}{h}_n$ est donc le germe d'un élément h_n de $\mathcal{G}$ défini sur U. La limite h des h_n existe, c'est une isométrie de U sur $h(U)$, et son 1-jet en x est la limite des $j^1(\underset{\sim}{h}_n)$.

Comme tout élément de $\overline{\mathcal{G}}$ peut être obtenu de cette façon, on en déduit que le pseudogroupe $\overline{\mathcal{G}}$ est complet et qu'il est unique.

Les orbites de $\overline{\mathcal{G}}$ forment une partition de T : en effet, si x est dans la $\overline{\mathcal{G}}$-orbite d'un point y de T, alors il existe une suite d'éléments h_n de $\mathcal{G}$, définis au voisinage de y, tels que $h_n(y)$ converge vers x. Comme $\mathcal{G}$ est complet, l'élément h_n^{-1} de $\mathcal{G}$ qui est défini au voisinage de $h_n(y)$ est aussi défini en x, et la suite $h_n^{-1}(x)$ converge vers y. Par conséquent y est dans la $\overline{\mathcal{G}}$-orbite de x.

Si tout voisinage ouvert de l'orbite $\overline{\mathcal{G}}x$ rencontrait tout voisinage ouvert de l'orbite $\overline{\mathcal{G}}y$, alors il existerait une suite de points x_n de T convergeant vers x, et une suite d'éléments h_n de $\mathcal{G}$ telle que $h_n(x_n)$ converge vers y. Pour n suffisamment grand, les éléments h_n sont définis au voisinage de x, et la suite $h_n(x)$ converge vers y, donc $y \in \overline{\mathcal{G}}x$ et $\overline{\mathcal{G}}x = \overline{\mathcal{G}}y$.

Exemple. – Soit G un groupe d'isométries d'une variété riemannienne T connexe, et soit $\bar{G}$ l'adhérence de G pour la topologie compacte-ouverte. On voit facilement que l'adhérence du pseudogroupe engendré par G, est le pseudogroupe engendré par $\bar{G}$. Réciproquement, si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe engendré par un groupe fermé G d'isométries de T, alors tout pseudogroupe complet $\mathcal{G}_0$ d'adhérence $\mathcal{G}$ est engendré par l'action d'un sous-groupe dense de G.

Nous utiliserons par la suite la

PROPOSITION 2. – *Soit G un groupe de Lie* 1-*connexe, V un ouvert contenu dans G, et $\mathcal{G}$ le pseudogroupe fermé complet agissant sur V dont les éléments sont les restrictions à V d'éléments de G agissant par translation à gauche. Alors tout pseudogroupe complet $\mathcal{G}_0$, d'adhérence $\mathcal{G}$ est formé des restrictions à V des éléments d'un sous-groupe dense Λ de G.*

Démonstration. – On dénote par $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ (resp. $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$) le groupoïde des germes aux points de V, d'éléments de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}_0$). Soit $\hat{V} = \underset{\sim}{\mathcal{G}}/\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ le quotient de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ par l'action de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ à droite (les éléments $\underset{\sim}{h}$ et $\underset{\sim}{h}'$ de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ sont équivalents si il existe $\underset{\sim}{h}_0 \in \underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ tel que $\underset{\sim}{h}' = \underset{\sim}{h}\underset{\sim}{h}_0$). L'application but $\underset{\sim}{\mathcal{G}} \to V$ fournit une application étale $p : \hat{V} \to V$, qui est un revêtement sur lequel $\mathcal{G}$ agit à gauche par composition. En effet, soit U un ouvert connexe de complétude pour $\mathcal{G}_0$, et $\underset{\sim}{h}$ un élément de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ de but y dans U. Comme les éléments de $\mathcal{G}$ sont localement les limites pour la topologie C^1 d'éléments de $\mathcal{G}_0$ définis sur un voisinage fixe de la source, on voit qu'il existe $\underset{\sim}{h}_0 \in \underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ tel que $\underset{\sim}{h}\underset{\sim}{h}_0$ est défini de source et but dans U. On construit alors une section continue de p au-dessus de U qui associe à tout $z \in U$, la classe modulo $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ du germe en $(hh_0)^{-1}(z)$ de hh_0. La valeur en $y \in U$ de cette section est la classe de $\underset{\sim}{h}$ modulo $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$. Si deux sections coïncident en un point, elles sont égales, donc p est un revêtement. Le pseudogroupe $\mathcal{G}$ agit sur ce revêtement par composition à gauche. On remarque que les éléments de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ correspondent aux éléments de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ qui stabilisent la section canonique de p (associant à tout $z \in V$, la classe modulo $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_0$ du germe en z de l'identité).

Nous allons construire au-dessus de G, un revêtement $q : \hat{G} \to G$, sur lequel G opère par translation à gauche, et qui prolonge le revêtement $p : \hat{V} \to V$. Pour tout $g \in G$, notons V_g le translaté à gauche de V par g. L'application $L_{g^{-1}} : V_g \to V$ de translation à gauche par $g^{-1} \in G$, permet de définir par pull-back un revêtement $\hat{V}_g$ de V_g :

$$\hat{V}_g = \{(z,v) \in V_g x \hat{V} ; g^{-1}(z) = p(v)\}.$$

Si z est un élément de $V_g \cap V_{g'}$, où g et g' appartiennent à G, on identifie $(z,v) \in \hat{V}_{g'}$ à $(z,v') \in \hat{V}_{g'}$, où v' est l'image de $v \in \hat{V}$ par la restriction à V de $g'^{-1} g$.

On obtient ainsi par recollement des revêtements $\hat{V}_g \to V_g$, où $g \in G$, un revêtement $q: \hat{G} \to G$ qui prolonge le revêtement $p: \hat{V} \to V$. Le groupe G opère sur $\hat{G}$ par translation à gauche: pour tout $h \in G$, l'action de h sur $(z,v) \in \hat{V}_g$ est donnée par $(hz,v) \in \hat{V}_{hg}$. Elle est compatible avec l'opération de recollement définie plus haut, et donne par restriction à $\hat{V}$ l'action de $\mathscr{G}$.

Comme G est 1-connexe, le revêtement q est trivial. On considère la composante de $\hat{G}$ qui contient la section canonique de $p: \hat{V} \to V$. Les éléments de G qui la stabilisent forment un sous-groupe Λ de G. On vérifie que tout élément de $\mathscr{G}_0$ est la restriction à V d'un élément de Λ, et que réciproquement, la restriction à V d'un élément de Λ est un élément de $\mathscr{G}_0$.

Remarque. — Dans le cas où $\mathscr{G}$ est fermé complet, et U est un ouvert connexe de complétude pour $\mathscr{G}$, les groupes locaux $G_x(U)$ sont localement fermés dans $J^1(T)$. On observe en effet que $G_x(U) = j_x^1(\underset{\sim}{\mathscr{G}}) \cap t^{-1}(U)$ où $t: J^1(T) \to T$ est la projection but.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Il nous reste à montrer que si $\mathscr{G}$ est un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales de T, alors le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est un faisceau en algèbres de Lie, et les éléments de $\mathscr{G}$ suffisamment proches de l'identité sont ceux de la forme $\exp \xi$ où ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ proche de 0.

La démonstration suit une suggestion de P. Molino : dans un premier temps, on se ramène par passage au fibré des repères orthonormés de T, au cas où $\mathscr{G}$ préserve un parallélisme. On montre alors que les groupes locaux $G_x(U)$ sont des sous-groupes localement fermés de groupes de Lie. Par un théorème classique ([Pon], p. 304), on en déduit que les $G_x(U)$ sont des groupes locaux de Lie, d'algèbre de Lie la fibre au-dessus de x du faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$. Comme les $G_x(U)$ sont localement isomorphes entre eux, on a le résultat.

2.1. Passage au fibré des repères.

LEMME. — *Soit $\mathscr{G}$ un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales de T. On considère le fibré $\pi : \hat{T} \to T$ des repères orthonormés au-dessus de T. Alors le prolongement naturel $\hat{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ à $\hat{T}$, est un pseudogroupe fermé complet de transformations qui préservent le parallélisme canonique sur $\hat{T}$.*

Ce lemme permet de ramener la démonstration du théorème au cas d'un pseudogroupe fermé complet de transformations qui préservent un parallélisme. En effet :

Soit $\underset{\sim}{g}$ (resp. $\hat{\underset{\sim}{g}}$) le faisceau des transformations infinitésimales du pseudogroupe fermé complet $\mathscr{G}$ (resp. de son prolongement $\hat{\mathscr{G}}$). Si $\xi \in \underset{\sim}{g}(U)$ est une section locale de $\underset{\sim}{g}$ au-dessus d'un ouvert U et T, son prolongement $\hat{\xi}$ est la section locale de $\hat{\underset{\sim}{g}}$ au-dessus de $\pi^{-1}(U)$ définie par $\hat{\xi}(\hat{x}) = \frac{d}{dt} \widehat{\exp t\xi}(\hat{x})|_{t=0}$, où $\hat{x} \in \pi^{-1}(U)$. L'application de prolongement ainsi définie est une bijection de $\underset{\sim}{g}(U)$ sur $\hat{\underset{\sim}{g}}(\pi^{-1}(U))$. On remarque que

— si $\hat{\underset{\sim}{g}}$ est un faisceau en algèbres de Lie, alors $\underset{\sim}{g}$ aussi, et l'on a $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = \widehat{[\xi, \eta]}$ pour $\xi, \eta \in \underset{\sim}{g}(U)$,

— si tout élément $\hat{h}$ de $\hat{\mathscr{G}}$ suffisamment proche de l'identité est de la forme $\exp \hat{\xi}$, avec $\hat{\xi}$ section locale de $\hat{\underset{\sim}{g}}$ proche de 0, alors tout élément h de $\mathscr{G}$ proche de l'identité se prolonge en un élément $\hat{h} = \exp \hat{\xi}$ de $\hat{\mathscr{G}}$, et donc $h = \exp \xi$ où ξ est une section locale de $\underset{\sim}{g}$ proche de 0. En effet, tout germe d'une section locale de $\hat{\underset{\sim}{g}}$ est le prolongement d'un unique germe d'une section locale de $\underset{\sim}{g}$.

2.2. Démonstration du théorème.

Soit $\mathscr{G}$ un pseudogroupe fermé complet de transformations qui préservent un parallélisme de T. Soit U un ouvert connexe de complétude pour $\mathscr{G}$. On note $C^\infty(U)_{\text{inv}}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur U, de classe C^∞, et $\mathscr{G}$-invariantes :

$f \in C^\infty(U)_{\text{inv}}$ si on a $f(h(x)) = f(x)$, pour tous $x \in U$ et $h \in \mathscr{G}$ tels que $h(x) \in U$.

On considère pour chaque $x \in U$, et chaque voisinage ouvert V de x, le nombre maximal $q(V)$ de différentielles de fonctions de $C^{\infty}(V)_{\text{inv}}$ qui sont linéairement indépendantes sur V. Soit $x_0 \in U$ tel que la fonction $q(x) = \max\{q(V)\ ;\ V$ voisinage ouvert de $x\}$, admette un maximum q en x_0. Alors il existe un voisinage U_0 de x_0 dans U, et des fonctions $f_1, \ldots, f_q \in C^{\infty}(U_0)_{\text{inv}}$ telles que les différentielles de $f_1, \ldots, f_q$ soient linéairement indépendantes sur $U_0 \subset U$.

On se place sur un ouvert connexe $U_1 \subset U_0$ tel que la submersion $f = (f_1, \ldots, f_q)$ de U_1 sur un ouvert de $\mathbf{R}^q$ soit à fibres connexes.

PROPOSITION 1. — *Les fonctions de $C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$ sont les fonctions de $C^{\infty}(U_1)$ qui sont constantes sur les fibres de f.*

Démonstration. — Soit $\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$. Si φ n'était pas constante sur les fibres de f, il existerait un point x de U_1, et un vecteur v tangent à la fibre F_x de f en x, tels que $d\varphi_x(v) \neq 0$. Or $d\varphi_x = \sum_{i=1}^{q} a_i\, df_{i_x}$ avec $a_i \in \mathbf{R}$, et $df_{i_x}(v) = 0$ pour $i = 1, \ldots, q$.

Réciproquement : soit $\varphi \in C^{\infty}(U_1)$ constante sur les fibres de f. Alors φ est une fonction des $f_1, \ldots, f_q$ qui sont $\mathscr{G}$-invariantes, et donc $\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$.

Notons $\chi(U_1)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U_1, et $\chi(U_1)_{\text{inv}}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U_1 qui sont $\mathscr{G}$-invariants :

$X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$ si on a $dh\, X_x = X_{h(x)}$, pour tous $x \in U_1$ et $h \in \mathscr{G}$ tels que $h(x) \in U_1$.

DÉFINITIONS. —

$X \in \chi(U_1)$ est tangent aux fibres de f si $X\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$.

$X \in \chi(U_1)$ est projetable pour f si pour tout champ Y tangent aux fibres de f, $[X, Y]$ est tangent aux fibres de f.

LEMME 1. — Si $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$ *et* $\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$, *alors* $X\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$.

Preuve. — Soient $x \in U_1$, et $h \in \mathscr{G}$ avec $h(x) \in U_1$. Alors pour $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$ et $\varphi \in C^{\infty}(U_1)_{\text{inv}}$, on a $dh\, X_x = X_{h(x)}$ et $\varphi \circ h$ a le même germe que φ en x, donc

$$X\varphi(h(x)) = X_{h(x)}\varphi = dh\, X_x\varphi = X_x(\varphi \circ h) = X_x\varphi = X\varphi(x).$$

LEMME 2. — *Si $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$, alors X est projetable pour f.*

Preuve. — Soit $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$, et $Y \in \chi(U_1)$ tangent aux fibres de f. On montre que $[X, Y]\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty(U_1)_{\text{inv}}$. En effet, par le Lemme 1, $X\varphi \in C^\infty(U_1)_{\text{inv}}$ et donc $[X, Y]\varphi = XY\varphi - YX\varphi = 0$.

LEMME 3. — *Si $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$ est tangent en $x \in U_1$ à la fibre F_x de f en x, alors X est tangent en tout point $y \in F_x$ à la fibre F_x.*

Preuve. — Si $X \in \chi(U_1)_{\text{inv}}$, alors par le Lemme 1 on a $X\varphi \in C^\infty(U_1)_{\text{inv}}$ pour tout $\varphi \in C^\infty(U_1)_{\text{inv}}$. Par la Proposition 1, on en déduit que $X\varphi$ est constante sur les fibres de f. Comme $X\varphi(x) = 0$, on a $X\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in F_x$.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un parallélisme sur T, invariant par $\mathscr{G}$ tel que les $(n - q)$ champs $X_{q+1}, \ldots, X_n$ soient tangents en $x \in U_1$ à la fibre F_x. Alors par le Lemme 3, les champs $X_{q+1} \ldots X_n$ sont tangents en tout point à F_x.

On considère les crochets de Lie :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k \qquad \text{où} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Ils définissent des fonctions $c_{ij}^k \in C^\infty(U_1)_{\text{inv}}$. De plus, pour $i, j = q + 1, \ldots, n$ on a

$$[X_i, X_j](y) = \sum_{k=q+1}^{n} c_{ij}^k(y) X_k(y) \qquad \text{pour tout} \qquad y \in F_x.$$

Les fonctions c_{ij}^k sont $\mathscr{G}$-invariantes, donc constantes sur les fibres de f. Les nombres $c_{ij}^k(x)$ sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

PROPOSITION 2. — *Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et soient $Y_{q+1}, \ldots, Y_n$ des champs invariants à gauche sur H, tels que*

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=q+1}^{n} c_{ij}^k(x) Y_k \qquad \textit{où} \qquad i, j = q + 1, \ldots, n.$$

Il existe un difféormorphisme ϕ d'un voisinage ouvert V de x dans F_x, sur un voisinage ouvert W de e dans H, tel que

(1) $\phi(x) = e$,

(2) $d\phi(X_i) = Y_i$ *pour* $i = q + 1, \ldots, n$,

(3) $d\phi([X_i, X_j]) = [Y_i, Y_j]$ *pour* $i, j = q + 1, \ldots, n$.

Démonstration. — Le champ de plans sur $F_x \times H$ engendré par les (X_i, Y_i) pour $i = q + 1, \ldots, n$ est intégrable :

$$[(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)] = ([X_i, X_j], [Y_i, Y_j]) = \left(\sum_{k=q+1}^{n} c_{ij}^k(x) X_k, \sum_{k=q+1}^{n} c_{ij}^k(x) Y_k\right).$$

Une variété intégrale de ce champ, passant par (x, e) est le graphe d'un difféomorphisme ϕ défini d'un voisinage ouvert connexe de x dans F_x sur un voisinage ouvert W de e dans H.

Remarque. — Par cette carte ϕ, les éléments de $\mathcal{G}$ sont envoyés sur des restrictions de translations à gauche par des éléments de H. Si $h \in \mathcal{G}$ est défini sur un voisinage connexe de x dans V et $h(x) \in V$, alors $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$ est la restriction d'une translation à gauche par un élément de W, et l'on a

$$\phi \circ h \circ \phi^{-1} = L_{\phi(h(x))}.$$

Soit U' un ouvert connexe de U_1 avec $U' \cap F_x = V$. On considère le groupe local $G_x(U') = \{j_x^1(h) ; h(x) \in U'\}$. Pour les éléments $j_x^1(h)$ de $G_x(U')$, on a $h(x) \in U' \cap F_x$ (les fibres de f sont invariantes par $\mathcal{G}$), et on définit l'application $\hat{\phi} : G_x(U') \to H$ qui associe au 1-jet $j_x^1(h)$ de $G_x(U')$ l'élément $\phi(h(x))$ de H.

Soit $G \subset H$ l'image par $\hat{\phi}$ de $G_x(U')$.

PROPOSITION 3. — *G est un sous-groupe local de H, et l'application $\hat{\phi} : G_x(U') \to G$ est un isomorphisme local de groupes locaux.*

Démonstration. — Par la remarque précédente, on a que $\phi(h(x)).\phi(h'(x))$ est défini dans G si et seulement si $h \circ h'(x) \in U'$, et qu'alors $\phi(h(x)).\phi(h'(x)) = \phi(h \circ h'(x))$. Ceci montre que G est un sous-groupe local de H (c'est-à-dire un groupe local pour les opérations de H restreintes à G).

L'application $\hat{\phi} : G_x(U') \to G$ est un homéomorphisme et un isomorphisme local de groupes locaux :

$$\begin{aligned} j_x^1(h).j_x^1(h') \text{ est défini dans } G_x(U') &\Leftrightarrow h \circ h'(x) \in U' \\ &\Leftrightarrow \phi(h(x)).\phi(h(x)) \text{ est défini dans } G. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que les groupes locaux $G_x(U')$ sont des groupes locaux de Lie. On utilise le résultat classique suivant :

THÉORÈME [Pon]. — *Tout sous-groupe localement fermé G d'un groupe local de Lie H, est un groupe local de Lie. En particulier, tout élément de G proche de l'identité appartient à un sous-groupe à 1-paramètre.*

Comme G est un sous-groupe local, localement fermé du groupe de Lie H, on a que G (et donc $G_x(U')$) est un groupe local de Lie. On sait d'autre part (prop. 2 de 1.3) que si U est un ouvert connexe de complétude pour $\mathcal{G}$, contenant U', et si $y \in U$, alors les groupes locaux $G_x(U')$ et $G_y(U)$ sont localement isomorphes entre eux. Donc $G_y(U)$ est un groupe local de Lie, pour tout $y \in U$. Si $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ est le faisceau des transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$, alors pour tout $y \in U$, la fibre $\mathfrak{g}_y$ de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ au-dessus de y s'identifie à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur $G_y(U)$.

Il nous reste à montrer que les éléments de $\mathcal{G}$ proches de l'identité sont ceux de la forme $\exp \xi$, où ξ est une section locale de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ proche de 0 :

Soit $y \in T$, et soit U un voisinage ouvert connexe de y dans T qui est un ouvert de complétude pour $\mathcal{G}$, alors tout jet $j_y^1 h$ d'un élément de $\mathcal{G}$ défini sur un ouvert suffisamment petit et proche de l'identité, est dans le groupe local $G_y(U)$. Comme $G_y(U)$ est un groupe local de Lie, $j_y^1(h)$ est sur un sous-groupe à 1-paramètre de $G_y(U)$.

2.3. Remarques.

— La démonstration permet de retrouver pour le cas d'un pseudogroupe $\mathcal{G}$ fermé complet d'isométries locales de T, le résultat donné sans démonstration en 1.2 :

Le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ des transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$ est un faisceau en algèbres de Lie de germes de champs de vecteurs de Killing.

— Si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales de T, tel que l'espace des orbites est connexe, alors les fibres de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ en tout point sont isomorphes à une algèbre de Lie de dimension finie (algèbre de Lie structurale).

On déduit du théorème les corollaires suivants :

Corollaire 1. — *On suppose que* $\mathcal{G}$ *est un pseudogroupe fermé complet de transformations locales de* T *qui préservent un parallélisme. Soit* x *un point de* T, *soit* $\mathfrak{g}$ *la fibre de* $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ *au-dessus de* x *et soit* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *On pose* $\dim T = n$, *et* $\dim \mathfrak{g} = m$.

Alors il existe un difféomorphisme θ *d'un voisinage ouvert* U *de* x *dans* T, *sur un voisinage ouvert* V *de* $(0, e)$ *dans* $\mathbf{R}^{n-m} \times G$, *tel que l'application* $h \to \theta \circ h \circ \theta^{-1}$ *donne un isomorphisme de la restriction de* $\mathcal{G}$ *à* U, *sur la restriction à* V *du pseudogroupe engendré par les translations à gauche des éléments de* G.

Démonstration. — Soit U_0 un voisinage ouvert connexe de x dans T, qui est un ouvert de complétude pour $\mathcal{G}$. Alors le faisceau $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ restreint à U_0, est constant de fibre $\mathfrak{g}$. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_m$ une base de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}(U_0)$. Le champ de m-plans engendré en chaque point $y \in U_0$ par les vecteurs $\xi_1(y), \ldots, \xi_m(y)$ est intégrable. Il définit un feuilletage de U_0 de dimension m. Soit S une sous-variété de U_0 transverse au feuilletage, et passant par x. Alors on montre comme dans la proposition 2 de 2.2 qu'il existe un difféomorphisme θ de U_0 sur un voisinage ouvert V_0 de $(0, e)$ dans $\mathbf{R}^{n-m} \times G$, tel que

— S est envoyé sur $V_0 \cap (\mathbf{R}^{n-m} \times \{e\})$,

— les champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_m$ définis sur U_0 et tangents aux feuilles, sont envoyés sur les champs $\eta_1, \ldots, \eta_m$ de V_0 invariants à droite par G.

Pour un voisinage ouvert U de x dans U_0 suffisamment petit, tous les éléments $h \in \mathcal{G}$ avec source et but dans U sont de la forme $\exp \xi$ (où $\xi \in \underset{\sim}{\mathfrak{g}}(U)$), donc correspondent dans $\theta(U) = V$ à des restrictions de translations à gauche $\exp \eta \in G$ (où η appartient à l'algèbre de Lie de G).

Corollaire 2. — *Si* $\mathcal{G}$ *est un pseudogroupe fermé complet d'isométries locales de* T, *alors les orbites de* $\mathcal{G}$ *sont des sous-variétés fermées de* T.

Démonstration. — Dans le cas où $\mathcal{G}$ préserve un parallélisme de T, cela se déduit du corollaire précédent. Le cas général s'obtient en prolongeant le pseudogroupe $\mathcal{G}$ au fibré $\hat{T}$ des repères orthonormés sur T. Le pseudogroupe $\hat{\mathcal{G}}$ ainsi obtenu préserve le parallélisme canonique sur $\hat{T}$, il est fermé et complet (voir 2.1). Soient $\pi : \hat{T} \to T$ la projection,

$x \in T$ et $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, alors l'orbite $\hat{\mathcal{G}}\hat{x}$ est une sous-variété fermée de $\hat{T}$ qui se projette sur $\mathcal{G}x$. Le groupe de stabilité $K = \{j_x^1(h) \; ; \; h(x) = x\}$ de x, est un groupe compact dans $J_x^1(T)$. Il opère à droite sur $\hat{\mathcal{G}}\hat{x}$, et la restriction de la projection π à $\hat{\mathcal{G}}\hat{x}$ est une fibration principale de fibre K. L'orbite $\mathcal{G}x$ admet donc une structure de variété différentiable, et l'inclusion $\mathcal{G}x \to T$ est une immersion injective propre.

COROLLAIRE 3. — *Les orbites d'un pseudogroupe complet $\mathcal{G}$ (non nécessairement fermé) d'isométries locales de T, sont des sous-variétés immergées de T.*

Démonstration. — Dans le cas où $\mathcal{G}$ préserve un parallélisme de T, son adhérence $\bar{\mathcal{G}}$ peut être décrit localement par un groupe de Lie 1-connexe G (Corollaire 1). Pour tout point x de T, il existe un difféormorphisme θ d'un voisinage ouvert U de x dans $\bar{\mathcal{G}}x$ sur un voisinage ouvert V de e dans G, qui fait correspondre aux restrictions à U d'éléments de $\bar{\mathcal{G}}$, les restrictions à V de translations par G. Par cette carte θ, les restrictions à U d'éléments de $\mathcal{G}$, correspondent aux restrictions à V de translations par un sous-groupe dense Λ de G (on utilise la proposition 2 de 1.4). On déduit d'un résultat classique ([Yam]) que la composante connexe par arcs de l'identité de Λ est un groupe de Lie, ce qui permet de munir les $\mathcal{G}$-orbites des points de T, d'une structure de sous-variété immergée dans T. Le cas général d'un pseudogroupe complet d'isométries de T, s'obtient comme dans la démonstration du Corollaire 2, par prolongement au fibré des repères orthonormés de T.

Remarque. — A. Haefliger a poursuivi l'étude des pseudogroupes complets d'isométries locales, et a donné un modèle pour la restriction du pseudogroupe à un voisinage tubulaire saturé de l'adhérence d'une orbite ([Hae-1]) et [Hae-2]).

BIBLIOGRAPHIE

[Hae-1] A. HAEFLIGER, Pseudogroups of local isometries, Colloque de Géométrie Différentielle de St-Jacques-de-Compostelle, Sept. 1984, Research Notes 131, Pitman (1985), 174-197.

[Hae-2] A. HAEFLIGER, Leaf closures in riemannian foliations (à paraître).

[Kob] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Ergebnisse der Mathematik 70, Springer (1972).

[Mol] P. Molino, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, Proc. Kon. Nederland Akad, Série A1, 85 (1982), 45-76.

[Mye-Ste] S. Myers et N. Steenrod, The group of isometries of a riemannian manifold, Ann. of Math., 40 (1939), 400-416.

[Pon] L. Pontryagin, Topological groups, 2nd edition, Gordon and Breach, Science Publishers NY.

[Rei] B. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math., 69 (1959), 119-132.

[Sal] E. Salem, Feuilletages riemanniens et pseudogroupes d'isométries dans Riemannian Foliations de P. Molino. Progress in Mathematics, Vol. 73, Birkhaüser, p. 265-296.

[Yam] H. Yamabe, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math. Journal, Vol. 2, n° 1 (1950), 13-14.

Manuscrit reçu le 3 avril 1987.

Éliane Salem,
Section de mathématiques,
Université de Genève
2-4, rue du Lièvre,
1211 Genève 24 (Suisse).