ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD HELFFER
ABDEREMANE MOHAMED

Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 2 (1988), p. 95-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_2_95_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 2 (1988), 95-112

CARACTÉRISATION DU SPECTRE ESSENTIEL DE L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

par B. HELFFER et A. MOHAMED

1. Énoncé des résultats.

On considère sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique $H(\vec{a}) + V$:

$$(1.1) \quad H(\vec{a}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (D_j - a_j(x))^2, \qquad (D_j = i^{-1}\,\partial_{x_j} \text{ et } i = \sqrt{-1}).$$

Le potentiel magnétique $\vec{a}(x)$:

$$(1.2) \qquad \vec{a}(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)),$$

est supposé réel et de classe C^2.

Le potentiel électrique $V(x)$ est supposé réel, continu et semi-borné inférieurement, i.e., il existe une constante C_0 telle que :

$$(1.3) \qquad V(x) \geqslant -C_0.$$

Il est connu (cf. [Sc] ou [AHeSi]) que $H(\vec{a}) + V$ admet une unique réalisation auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, contenant $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans son domaine. Le champ magnétique est identifié à la matrice antisymétrique d'ordre n :

$$(1.4) \qquad B(x) = (\partial_{x_j} a_k(x) - \partial_{x_k} a_j(x))_{1 \leqslant k,j \leqslant n}.$$

Jusqu'à un passé récent, la plupart des auteurs donnant des critères de

Mots-clés : Théorie spectrale - Schrödinger avec champ magnétique - Résolvante compacte - Spectre essentiel.

résolvante compacte pour $H(\vec{a}) + V$ cherchaient à considérer ce problème comme un problème de perturbation du cas $\vec{a} = 0$. On mettait donc des hypothèses assurant le contrôle de la dérivée de B par $|B|$ (cf. [AHeSi], [D]). Toutefois dans le cas où $\vec{a}$ et V sont des polynômes, la théorie développée dans [HeN] fournit toute une série d'exemples. Nous montrons dans le théorème (1.1) et son corollaire qu'on peut donner une condition suffisante très générale sur les dérivées successives de V et de B pour obtenir que $H(\vec{a}) + V$ est à résolvante compacte. Mentionnons également les articles de [C], [F], [I2] et [Si3].

La caractérisation du spectre essentiel de $H(\vec{a})$ n'a été étudiée que dans des cas assez particuliers : perturbation d'un champ nul [Ku] et [S], d'un champ constant [I1] (cas $n=2$) et [M]. A. Mohamed donne cependant dans [M] la borne inférieure du spectre essentiel de $H(\vec{a}) + V$ dans le cas où les dérivées de B et V tendent vers zéro à l'infini.

La caractérisation du spectre essentiel donnée au théorème (1.5), contient les résultats précédents et est à notre connaissance nouvelle même dans le cas sans champ magnétique.

Donnons maintenant les énoncés précis des principaux résultats de cet article.

Dans la suite, le produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ sera noté, $\langle . ; . \rangle$, et la norme associée par, $\|.\|$. La norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$ sera notée : $|.|$. On prendra $V(x)$ sous la forme

$$V(x) = V_0(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} V_j^2(x) \tag{1.5}$$

où les $V_j (j=0,1,\ldots,p)$ sont réels. On notera $B(x)$ par :

$$B(x) = (b_{kj}(x))_{1 \leqslant k,j \leqslant n}.$$

Soit $q_V(\vec{a})$ la forme quadratique :

$$q_V(\vec{a})(u) = \langle (H(\vec{a}) + V)u; u \rangle. \tag{1.6}$$

On note $D(q_V(\vec{a}))$ le domaine de $q_V(\vec{a})$ et $D(H(\vec{a}) + V)$ celui de $H(\vec{a}) + V$.

THÉORÈME (1.1). — *Supposons que l'on ait* (1.5) *et qu'il existe un entier* $r \in \mathbf{N}$ *et une constante* C_1 *tels que l'on ait :*

$$(1.7)\quad \begin{cases} V_j \in C_{r+2}(\mathbf{R}^n); & \forall j = 1, \ldots, p\,; \\ b_{kj} \in C_{r+1}(\mathbf{R}^n); & \forall k \text{ et } j,\ 1 \leqslant k < j \leqslant n\,; \\ V_0 \in C_1(\mathbf{R}^n). \end{cases}$$

$$(1.8)\qquad V_0(x) \geqslant -\mathrm{C}_1$$

et

$$(1.9)\quad \sum_{|\alpha|=1} |\partial_x^\alpha V_0(x)| + \sum_{1\leqslant j\leqslant p}\ \sum_{|\alpha|=r+2} |\partial_x^\alpha V_j(x)| + \sum_{i,j}\ \sum_{|\alpha|=r+1} |\partial_x^\alpha b_{ij}(x)| \leqslant C_1(m(x)+1),$$

où :

$$(1.10)\quad m(x) = |V_0(x)| + \sum_{1\leqslant j\leqslant p}\ \sum_{|\alpha|\leqslant r+1} |\partial_x^\alpha V_j(x)| + \sum_{i,j}\ \sum_{|\alpha|\leqslant r} |\partial_x^\alpha b_{ij}(x)|.$$

Alors il existe une constante C_2 *telle que :*

$$(1.11)\quad \|(m(x))^{1/2^{r+1}}u\|^2 \leqslant C_2[q_V(\vec{a})(u) + \|u\|^2]; \qquad \forall u \in D(q_V(\vec{a})),$$

et

$$(1.12)\quad \|[V(x)+m(x)^{1/2^r}]u\| \leqslant C_2[\|(H(\vec{a}) + V)u\| + \|u\|]; \qquad \forall u \in D(H(\vec{a})+V).$$

COROLLAIRE (1.2). — *Sous les hypothèses du théorème* (1.1) *si on a :*

$$m(x) \xrightarrow[|X|\to+\infty]{} +\infty,$$

alors $H(\vec{a}) + V$ *est à résolvante compacte.*

Remarque (1.3). — Dans le cas où $\vec{a} = 0$ des théorèmes de ce type sont obtenus dans des cas particuliers dans [R] et [S1]. Dans le cas où $\vec{a}$ et les V_j sont des polynômes et $V_0 = 0$, le théorème est une conséquence des résultats de [HeN].

On s'intéresse maintenant au cas où les hypothèses du corollaire (1.2) ne sont plus satisfaites. Avant d'énoncer le théorème, il nous faut préciser les hypothèses en supposant outre (1.5), (1.7) et (1.8) que :

$$(1.13)\qquad b_{ij}(x) \in C^{r+3}(\mathbf{R}^n); \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

On suppose qu'il existe un poids $\varphi(x)$ sur $\mathbf{R}^n$, tempéré et vérifiant :

$$(1.14)\quad \begin{cases} a)\ \varphi(x) \geqslant 1;\ \forall x \in \mathbf{R}^n \\ b)\ \varphi(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} +\infty \\ c)\ \text{Il existe } \rho > 0 \text{ et } C_3 > 0 \text{ tels que :} \\ |x-y| \leqslant \rho.\varphi(x) \Rightarrow C_3^{-1}\varphi(y) \leqslant \varphi(x) \leqslant C_3\varphi(y). \end{cases}$$

On suppose également qu'il existe une constante C_4 telle que :

$$(1.15)\quad \Big(\sum_{|\alpha|=1} |\partial_x^\alpha V_0(x)| + \sum_{|\alpha|=r+2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} |\partial_x^\alpha V_j(x)| + \sum_{r+1 \leqslant |\alpha| \leqslant r+3} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varphi^{|\alpha|-r-1} |\partial_x^\alpha b_{ij}(x)| \Big) \leqslant C_4 \varphi^{-1}(x).$$

On considère alors l'ensemble suivant :

DÉFINITION (1.4). — $\mathscr{B}_\infty$: *On dira que* z_∞ *est un élément de* $\mathscr{B}_\infty$ *si et seulement si :*

$$(1.16)\qquad z_\infty = (v_0, ((v_1^\alpha, \dots, v_p^\alpha))_{|\alpha| \leqslant r+1}, (B^\alpha)_{|\alpha| \leqslant r})$$

avec v_0, $v_i^\alpha \in \mathbf{R}$, B^α *matrice réelle anti-symétrique d'ordre* n.

Il existe une suite de $\mathbf{R}^n$, $(y_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ *telle que*

$$(1.17)\quad \begin{cases} |y_\nu| \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} +\infty ; \quad V_0(y_\nu) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} V_0 \\ \partial_x^\alpha V_j(y_\nu) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} v_j^\alpha ; \quad \forall j = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n ;\ |\alpha| \leqslant r+1 \\ \partial_x^\alpha B(y_\nu) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} B^\alpha ; \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n ;\ |\alpha| \leqslant r. \end{cases}$$

On associe, à tout $z_\infty \in \mathscr{B}_\infty$, le potentiel magnétique sur $\mathbf{R}^n$, $\vec{b}_{z_\infty}(x)$:

$$(1.18)\qquad \vec{b}_{z_\infty}(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} x^\alpha (B^\alpha . x)/(\alpha!(2+|\alpha|)),$$

et le potentiel électrique $V_{z_\infty}(x)$:

$$(1.19)\qquad V_{z_\infty}(x) = v_0 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant r+1} x^\alpha v_i^\alpha / \alpha! \Big)^2 .$$

Soit alors le sous-ensemble de **R** suivant :

$$S_\infty = \bigcup_{z_\infty \in \mathscr{B}_\infty} \sigma(H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty}), \tag{1.20}$$

(Si P est un opérateur, $\sigma(P)$ désigne le spectre de P et $\sigma_{\text{ess}}(P)$ le spectre essentiel de P.)

THÉORÈME (1.5). — *Sous les hypothèses* (1.5), (1.7), (1.8), (1.13) *et* (1.15), *on a :*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V) = \bar{S}_\infty. \tag{1.21}$$

L'énoncé du théorème (1.5) s'inspire des critères d'hypoellipticité (cf. [Ho], [HeN]). Plus précisément, comme dans les théorèmes classiques sur le spectre essentiel pour Schrödinger (cf. [P], [G], et le théorème HVZ de Hunziker-Van Winter-Zhislin rappelé par exemple dans le survey de [S2]), la contribution importante est à l'infini et c'est le comportement lorsque $|y| \to \infty$ de la famille d'opérateurs localisés (cf. [Ho], [HeN]), $H(\vec{b}_y) + V_y$ avec :

$$\vec{b}_y(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} (x^\alpha/(\alpha!(2+|\alpha|)))(\partial_y^\alpha B(y).x), \tag{1.22}$$

et

$$V_y(x) = V_0(y) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant r+1} (x^\alpha/\alpha!)\partial_y^\alpha V_j(y) \right\}^2 \tag{1.23}$$

qui permet de déterminer le spectre esentiel.

Non seulement au niveau des énoncés mais également au niveau des démonstrations, l'analogie avec l'hypoellipticité fournit la clef des démonstrations. Pour le théorème (1.1), c'est la démonstration de J. Kohn [Ko] de l'hypoellipticité des opérateurs de Hörmander, $\sum_j X_j^2$; pour le théorème (1.5), c'est la démonstration de l'hypoellipticité maximale pour des polynômes de champs de vecteurs de Helffer-Nourrigat [HeN] dans un cas relativement simple dit « cas tubulaire » combinée avec des techniques de Avron-Herbst-Simon [AHeSi] qui donne le résultat.

Lorsque $B(x)$ est une perturbation d'un champ constant B, on retrouve les résultats connus (cf. [M]) en calculant explicitement les spectres des opérateurs $H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty}$ qui se décomposent en une intégrale Hilbertienne d'oscillateurs harmoniques.

Dans le cas général, ce mécanisme de décomposition s'interprète grâce à la théorie de Kirillov pour les représentations irréductibles des groupes nilpotents ; dans cet ordre d'idée, on peut établir en utilisant les techniques de [HeN] et [He1], que S_∞ est un fermé quand V_0 est nul, ceci sera démontré ailleurs. C'est ce point de vue de la théorie des groupes que l'on trouve dans [JK1] et [He2].

Nous remercions J. Nourrigat pour d'utiles discussions.

2. Démonstration des résultats.

2.1. *Démonstration du théorème* (1.1).

Nous prendrons la convention suivante : toute constante ne dépendant que des propriétés globales de $\vec{a}$ et de V sera notée C.

Dans la suite, nous aurons besoin de la partition de l'unité suivante :

LEMME (2.1). — *Pour tout* $\tau > 0$, *il existe une partition de l'unité* C^∞ *de* $\mathbf{R}^n$, $(\chi_k)_k$, *et une suite associée de points de* $\mathbf{R}^n$, $(y_k)_k$, *vérifiant :*

i) $\sum_k \chi_k^2(x) = 1$.

ii) supp $(\chi_k) \subset Q(y_k;\tau)$.

iii) *Pour tout* $\alpha \in \mathbf{N}^n$, *il existe* C_α, *indépendant de* τ, *tel que, pour tout* k, *on ait :* $|\partial_x^\alpha \chi_k(x)| \leqslant C_\alpha \tau^{-|\alpha|}$.

On a noté supp(f), le support de f et $Q(y;R)$ la boule centrée en y et de rayon R: $Q(y;R) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x-y| \leqslant R\}$.

Soit τ assez petit vérifiant $0 < \tau \leqslant 1$ et soit $(\chi_k)_k$ la partition de l'unité du lemme (2.1) associée à τ. On considère la fonction poids Ψ :

$$\Psi(x) = \sum_k (m(y_k)+1)\chi_k^2(x), \quad (m(x) \text{ étant défini par } (1.10)). \tag{2.1}$$

Ψ est C^∞ et pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, il existe C_α tel que :

$$|\partial_x^\alpha \Psi(x)| \leqslant C_\alpha \Psi(x). \tag{2.2}$$

L'hypothèse (1.9) permet de voir aisément qu'il existe C tel que :

$$C^{-1}\Psi(x) \leqslant (m(x)+1) \leqslant C\Psi(x). \tag{2.3}$$

Pour établir (1.11), on va faire une démonstration à la Kohn (cf. [Ko]).

Pour tout $s \geqslant 0$, on considère M^s, l'ensemble des fonctions continues, $T(x)$ telles qu'il existe une constante C_s de façon à ce que l'on ait :

$$\|\Psi^{-1+s}Tu\|^2 \leqslant C_s(q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2) ; \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Pour tout $j = 1, \ldots, n+p$, notons L_j l'opérateur :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} L_j = D_j - a_j(x) ; & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant n, \text{ et} \\ L_j = V_{j-n}(x) ; & \text{si } n < j \leqslant n+p. \end{cases}$$

L'estimation (2.3) montre que :

$$(2.5) \qquad V \in M^{1/2}.$$

On va établir les propriétés suivantes :

$$(2.6) \qquad [L_k ; L_j] \in M^{1/2}; \qquad \forall k \text{ et } j \leqslant n+p$$

(on a noté $[A;B]$ le commutateur : $[A;B] = A.B - B.A$).

$$(2.7) \begin{cases} \text{Si } T \in M^s \cap C^2(\mathbf{R}^n) \text{ et s'il existe une constante } C_T \text{ telle que :} \\ |\partial_x^\alpha T(x)| \leqslant C_T \Psi(x) ; \ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n ; \ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \\ \text{alors, si } r \geqslant 1, \text{ on a :} \\ [L_k ; T] \in M^{s/2} ; \ \forall k = 1, \ldots, n+p. \end{cases}$$

Si (2.6) et (2.7) sont vérifiés, on en déduit alors aisément, compte tenu de (1.9) et (2.3), que :

$$(2.8) \begin{cases} \partial_x^\alpha b_{kj}(x) \in M^{2^{-|\alpha|-1}} ; & \forall \alpha \in \mathbf{N}^n ; \ |\alpha| \leqslant r \text{ et } \forall k \text{ et } j \leqslant n ; \\ \partial_x^\alpha V_j(x) \in M^{2^{-|\alpha|}} ; & \forall \alpha \in \mathbf{N}^n ; \ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r+1 \text{ et } \forall j = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

Comme on a les injections : $M^{s_1} \subset M^{s_2}$, si $s_2 \leqslant s_1$, on déduit de (1.10), (2.3), (2.5) et (2.8) que : $\Psi \in M^{2^{-r-1}}$; ce qui signifie qu'il existe une constante C telle que :

$$(2.9) \qquad \|\Psi^{2^{-r-1}}u\|^2 \leqslant C(q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2); \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

On déduit alors (1.11) de (2.7), (2.9) et de la densité de C_0^∞ dans le domaine $D(q_V(\vec{a}))$.

Démonstration de (2.6). — Pour tout u dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et pour tout couple d'indices (k,j) on écrit que :

$$\|\Psi^{-1/2}[L_k;L_j]u\|^2 = \langle L_j u;\Psi^{-1}[L_k;L_j]L_k u\rangle - \langle L_k u;\Psi^{-1}[L_k,L_j]L_j u\rangle + \langle L_j u;[L_k;\Psi^{-1}[L_k;L_j]]u\rangle - \langle L_k u;[L_j;\Psi^{-1}[L_k,L_j]]u\rangle .$$

Comme d'après (1.9), (1.10), (2.2) et (2.3), $\Psi^{-1}[L_k;L_j]$ est borné ainsi que son gradient, on en déduit, compte tenu de (1.5), (1.6), (1.8) et (2.4) que :

$$\|\Psi^{-1/2}[L_k;L_j]u\|^2 \leqslant C(\|L_k u\|^2+\|L_j u\|^2+\|u\|^2)$$

et compte tenu de l'inégalité immédiate :

$$\|L_k u\|^2 + \|L_j u\|^2 \leqslant C(q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2), \tag{2.10}$$

on vérifie que (2.6) est bien satisfaite.

Démonstration de (2.7). — Soit T vérifiant les hypothèses de (2.7). Pour tout indice k, on écrit que :

$$\|\Psi^{-1+s/2}[L_k;T]u\|^2 = \langle\Psi^{-1+s}Tu;\Psi^{-1}[L_k;T]L_k u\rangle - \langle L_k u;\Psi^{-1}[L_k;T]\Psi^{-1+s}Tu\rangle + \langle\Psi^{-1+s}Tu;\Psi^{1-s}[L_k;\Psi^{-2+s}[L_k;T]]u\rangle .$$

Compte tenu des hypothèses sur T et de (2.2), les fonctions $\Psi^{1-s}[L_k;\Psi^{-2+s}[L_k;T]]$ et $\Psi^{-1}[L_k;T]$ sont bornées ; on en déduit aisément que :

$$\|\Psi^{-1+s/2}[L_k;T]u\|^2 \leqslant C(\|\Psi^{-1+s}Tu\|^2+\|L_k u\|^2+\|u\|^2).$$

L'hypothèse sur T permet alors de conclure comme précédemment.

Démonstration de (1.12). — Compte tenu de (1.11), la démonstration est voisine ; on remplace dans (1.11) u par $(|V(x)|+m(x))^{2^{-r-1}}u(x)$.

Démonstration du corollaire (1.2). — Le corollaire (1.2) résulte de (2.9), de [AHeSi] (théorèmes (2.5) et (2.6)) et du fait que $\Psi(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}+\infty$.

2.2. *Démonstration du théorème* (1.5).

On garde les conventions du § 2.1.

Démonstration de $\overline{S}_\infty \subset \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V)$. — Il suffit de montrer $S_\infty \subset \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V)$ car le spectre essentiel est un fermé. Soit donc

$\lambda \in \mathbf{R} \backslash \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V)$ et soit τ_0 la distance de λ à $\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V)$ qui est strictement positive. On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\lambda \in S_\infty$. Il existerait alors $z_\infty \in \mathscr{B}_\infty$ tel que : $\lambda \in \sigma(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty})$, où $\vec{b}_{z_\infty}$ et V_{z_∞} sont introduits en (1.18) et (1.19).

Soit $(y_\nu)_\nu$ une suite de $\mathbf{R}^n$ vérifiant (1.17). Comme $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $D(H(\vec{b}_{\infty})+V_{\infty})$, il existe une fonction $f_\infty \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que :

$$\text{(2.11)} \qquad \|(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty}-\lambda)f_\infty\| \leqslant \tau_0/10; \qquad \text{et} \qquad \|f_\infty\| = 1.$$

Notons :

$$\text{(2.12)} \quad \varepsilon_\nu = |V_0(y_\nu)-v_0| + \sum_{|\alpha|\leqslant r+1} \sum_{1\leqslant j\leqslant p} |\partial_x^\alpha V_j(y_\nu)-v_j^\alpha| + \sum_{|\alpha|\leqslant r} |\partial_x^\alpha B(y_\nu)-B^\alpha|,$$

où $(v_0, ((v_1^\alpha, \ldots, v_p^\alpha))_{|\alpha|\leqslant r+1}, (B^\alpha)_{|\alpha|\leqslant r}) = z_\infty$ et où $(y_\nu)_\nu$ est la suite associée à z_∞ dans la définition de z_∞.

Notre démarche est d'essayer de construire à partir de f_∞ une famille g_ν dans C_0^∞, ortho-normale sur L^2, telle que :

$$\text{(2.13)} \qquad \|(H(\vec{a})+V-\lambda)g_\nu\| \leqslant \tau_0/4.$$

Soit $\rho_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\text{(2.14)} \qquad \operatorname{supp}(f_\infty) \subset Q(0;\rho_0);$$

et soient :

$$\text{(2.15)} \qquad f_\nu(x) = f_\infty(x-y_\nu),$$

$$\text{(2.16)} \qquad V_\nu(x) = V_{z_\infty}(x-y_\nu).$$

On déduit de (2.11), (2.15) et (2.16) que :

$$\text{(2.17)} \quad \|(H(\vec{b}_{z_\infty}(x-y_\nu))+V_{z_\infty}(x-y_\nu)-\lambda)f_\nu\| \leqslant \tau_0/10; \quad \text{et} \quad \|f_\nu\|=1.$$

Toute constante indépendante de la suite (y_ν) sera notée C.

Observons maintenant que d'après (1.15) et (1.23), on a :

$$\text{(2.18)} \quad |V(x)-V_y(x-y)| \leqslant |V_0(x)-V_0(y)| + \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \left|V_j(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant r+1} (x-y)^\alpha \partial_y^\alpha V_j(y)\right| \times \left|V_j(x) + \sum_{|\alpha|\leqslant r+1} (x-y)^\alpha \partial_y^\alpha V_j(y)\right|;$$

d'où, pour tout $x \in Q(y_\nu; \rho_0)$, on a :

$$(2.19) \quad |V(x) - V_{y_\nu}(x - y_\nu)| \leqslant C\rho_0^{r+2}\varphi^{-1}(y_\nu)(\rho_0^{r+1} + \rho_0^{r+2}\varphi^{-1}(y_\nu)),$$

à condition de supposer, ce qui est toujours vrai pour ν est assez grand (cf. $(1.14)_c$, $(1.14)_b$ et (1.17)), que :

$$(2.20) \qquad 1 \leqslant \rho_0 \leqslant \rho\varphi(y_\nu).$$

Pour remplacer $V_{z_\infty}(x - y_\nu)$ par $V(x)$ sur le support de f_ν, nous avons encore, compte tenu de (2.19), à estimer $(V_{y_\nu} - V_{z_\infty})(x - y_\nu)$ qui se majore par :

$$(2.21) \quad |V_{y_\nu}(x - y_\nu) - V_{z_\infty}(x - y_\nu)| \leqslant C\varepsilon_\nu\rho_0^{2r+2}, \qquad \text{pour tout } x \in Q(y_\nu, \rho_0).$$

De (2.17), (2.19) et (2.21), on déduit que :

$$(2.22) \quad \|[H(\vec{b}_{z_\infty}(x - y_\nu)) + V - \lambda]f_\nu\| \leqslant \tau_0/10 + C[\rho_0^{2r+4}\varphi^{-1}(y_\nu) + \varepsilon_\nu\rho_0^{2r+2}].$$

On va maintenant remplacer dans (2.22) $\vec{b}_{z_\infty}$ par $\vec{b}_{y_\nu}$. On a :

$$\|[H(\vec{b}_{z_\infty}(x - y_\nu)) - H(\vec{b}_{y_\nu})]f_\nu\| \leqslant C\varepsilon_\nu\rho_0^{2r+2}$$

(où on a utilisé (2.12), (2.14), (2.15), (2.20), (1.23) et (1.17)).

D'où finalement :

$$(2.23) \quad \|[H(\vec{b}_{y_\nu}(x - y_\nu)) + V - \lambda]f_\nu\| \leqslant \tau_0/10 + C[\rho_0^{2r+4}\varphi^{-1}(y_\nu) + \varepsilon_\nu\rho_0^{2r+2}].$$

On change de jauge. Soit la fonction :

$$\Psi_y(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{y_k}^{x_k} a_k(y_1, \ldots, y_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dt;$$

on a : $e^{i\Psi_y(x)}H(\vec{a}_y) = H(\vec{a})e^{i\Psi_y(x)}$, avec

$$(2.24) \begin{cases} a_1(y; x) = 0; \quad \text{et pour } j = 2, \ldots, n \\ a_j(y; x) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant j-1} \int_{y_k}^{x_k} b_{jk}(y_1, \ldots, y_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dt. \end{cases}$$

On change de nouveau de jauge. Soit la fonction :

$$(2.24)' \qquad \phi_y(x) = \sum_{|\alpha|\leq r+1} \sum_{1\leq j\leq n} x^\alpha x_j \partial_x^\alpha a_j(y;y)/(\alpha!(|\alpha|+1)),$$

considérée dans [HeN] (p. 261) où il est montré que si

$$(2.25) \qquad \vec{c}_y(x) = \sum_{|\alpha|\leq r+1} (x^\alpha/\alpha!)\partial_x^\alpha \vec{a}(y;y),$$

on a la formule :

$$(2.26) \qquad e^{-i\phi_y(x)} H(\vec{c}_y) = \mathrm{H}(\vec{b}_y) e^{-i\phi_y(x)}.$$

Posons :

$$(2.27) \qquad g_\nu(x) = e^{i\phi_{y_\nu}(x-y_\nu)} f_\nu(x).$$

De (2.24)′ et (2.26) on a pour tout f dans $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$(2.28) \qquad \|(H(\vec{c}_{y_\nu}(x-y_\nu)) + V - \lambda) e^{i\phi_{y_\nu}(x-y_\nu)} f\| = \|(H(\vec{b}_{y_\nu}(x-y_\nu)) + V - \lambda) f\|.$$

Il reste à estimer : $\vec{a}(y,x) - \vec{c}_{y_\nu}\ (x - y_v)$ sur le support de g_ν.

Compte tenu de (1.13), (1.15), (2.20), (2.24) et (2.25), on vérifie que :

$$(2.29) \qquad |\vec{a}(y_\nu;x) - \vec{c}_{y_\nu}(x-y_\nu)| \leq C\varphi^{-1}(y_\nu)\rho_0^{r+2}, \qquad \text{pour} \quad x \in Q(y_\nu;\rho_0),$$

et

$$(2.30) \qquad \sum_j |\partial_{x_j}(\vec{a}(y_\nu;x) - \vec{c}_{y_\nu}(x-y_\nu))| \leq C\varphi^{-1}(y_\nu)\rho_0^{r+1}, \qquad \text{pour} \quad x \in Q(y_\nu;\rho_0).$$

On écrit, compte tenu de (2.27) et (2.28) que

$$(2.31) \qquad \|(H(\vec{a}_{y_\nu}) + V - \lambda) g_\nu\| = \|(H(\vec{b}_{y_\nu}(x-y_\nu) + \vec{r}_{y_\nu}(x-y_\nu)) + V - \lambda) f_\nu\|,$$

avec

$$\vec{r}_y(x-y) = \vec{a}(y;x) - \vec{c}_y(x-y).$$

Si (u_ν) est la suite de fonctions : $u_\nu(x) = e^{i\Psi(y_\nu;x)} g_\nu(x)$, regroupant (2.23), (2.29), (2.30) et (2.31), on a finalement construit une suite $(u_\nu)_\nu$ telle que

$$(2.32)\qquad \begin{cases} \|u_\nu\| = 1 \\ \|(H(\vec{a})+V-\lambda)u_\nu\| \leqslant \tau_0/10 + C[\rho_0^{2r+4}\varphi^{-1}(y_\nu)+\varepsilon_\nu\rho_0^{2r+2}], \end{cases}$$

(on a utilisé l'estimation : $|\vec{b}_{y_\nu}(x-y_\nu)| \leqslant C(|x-y_\nu|+1)^{r+1})$.

Comme supp $(u_\nu) \subset Q(y_\nu;\rho_0)$ et que $|y_\nu| \underset{\nu\to+\infty}{\to} \infty$, quitte à extraire une sous-suite, on déduit de (2.32) que (2.13) est bien vérifié, et donc :

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V) \cap [\lambda-\tau_0/2,\lambda+\tau_0/2] \neq \varnothing .$$

On obtient la contradiction avec l'hypothèse faite au départ puisque τ_0 est la distance de λ à $\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V)$.

Démonstration de : $\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a})+V) \subset \overline{S}_\infty$. — Soit $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\overline{S}_\infty$. Notons encore τ_0 la distance de λ à $\overline{S}_\infty$. Soit ε à déterminer, $0 < \varepsilon < 1$, et soit $(\chi_k)_k$ la partition de l'unité donnée au lemme (2.1) avec $\tau = \varepsilon^{-1}$.

Pour tout u dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$(2.33)\qquad \begin{cases} \|(H(\vec{a})+V-\lambda)u\|^2 = \\ \sum_k \|(H(\vec{a})+V-\lambda)\chi_k u\|^2 + \\ \sum_k \|(\Delta\chi_k)u + 2i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (\partial_{x_j}\chi_k)L_j(\vec{a})u\|^2 + \\ 2\operatorname{Re} \sum_k \langle (H(\vec{a})+V-\lambda)\chi_k u;(\Delta\chi_k)u + 2i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (\partial_{x_j}\chi_k)L_j(\vec{a})u\rangle ; \\ \left(-\Delta = \sum_j D_j^2\right). \end{cases}$$

Toute constante indépendante de ε et de la fonction générique u de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ sera notée C.

Compte tenu des propriétés de la partition de l'unité $(\chi_k)_k$, on déduit de (2.33) que :

$$(2.34)\qquad \|(H(\vec{a})+V-\lambda)u\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\sum_k \|(H(\vec{a})+V-\lambda)\chi_k u\|^2 + \varepsilon C q_0(\vec{a})(u) + \varepsilon^3 C\|u\|^2 .$$

Comme V est semi-borné inférieurement, on a :

$$q_0(\vec{a})(u) \leqslant \|(H(\vec{a})+V-\lambda)u\|^2 + C\|u\|^2.$$

On déduit alors de (2.34) que :

$$\text{(2.35)} \quad \|(H(\vec{a})+V-\lambda)u\|^2 \geqslant (1-\varepsilon C)\sum_k \|(H(\vec{a})+V-\lambda)\chi_k u\|^2 - \varepsilon C\|u\|^2.$$

Soit $\hat{\Psi}(x)$ la fonction poids telle que

$$\text{(2.36)} \quad (\hat{\Psi}(x))^2 = V_0^2(x) + \sum_{|\alpha|\leqslant r}\sum_{1\leqslant j\leqslant p}(\partial_x^\alpha V_j(x))^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant r+1}\sum_{1\leqslant l<j\leqslant n}(\partial_x^\alpha b_{lj}(x))^2.$$

Comme les hypothèses du théorème (1.1) sont satisfaites, (1.11) montre que :

$$\text{(2.37)} \quad \|\hat{\psi}^{1/2^{r+1}}v\|^2 \leqslant C(q_V(\vec{a})(v)+\|v\|^2); \qquad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Soient $K_0(\varepsilon)$ et $K_1(\varepsilon)$ les régions suivantes :

$$\text{(2.38)} \quad \begin{cases} K_0(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n; \varphi(x) \geqslant \varepsilon^{-r-3}\}\,; \text{ et} \\ K_1(\varepsilon) = \{x \in K_0(\varepsilon); \hat{\psi}(x) \geqslant \varepsilon^{-2^{r+1}}\}. \end{cases}$$

Soient I_0 et I_1 les ensembles d'indices suivants :

$$\text{(2.39)} \quad \begin{cases} I_0 = \{k \in \mathbf{N}; Q(y_k; \varepsilon^{-1}) \subset K_0(\varepsilon)\}\,; \text{ et} \\ I_1 = \{k \in I_0\, Q(y_k; \varepsilon^{-1}) \subset K_1(\varepsilon)\}. \end{cases}$$

Si ε est choisi assez petit, on déduit aisément de (2.37), (2.38) et (2.39) que :

$$\text{(2.40)} \quad \|(H(\vec{a})+\mathrm{V}-\lambda)\chi_k u\| \geqslant \varepsilon^{-1}C\|\chi_k u\|; \qquad \forall k \in I_1.$$

Montrons maintenant la propriété suivante :

Il existe $N_0 > 0$ tel que pour tout $k \in I_0 \backslash I_1$, $k \geqslant N_0$, on ait :

$$\text{(2.41)} \quad \|(H(\vec{b}_{y_k})+\mathrm{V}_{y_k}-\lambda)v\| \geqslant (\tau_0/2)\|v\|; \qquad \forall v \in H_0^2(\mathrm{Q}(0;\varepsilon^{-1}))$$

($H_0^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev sur Ω d'ordre m et à traces nulles).

On fait une démonstration par l'absurde. On remarque d'abord que (1.14), (1.15), (2.36), (2.38) et (2.39) montrent que :

$$\text{(2.42)} \quad \tilde{\psi}(y_k) \leqslant C\varepsilon^{-r-1}\varepsilon^{-2^{r+1}}; \qquad \forall k \in I_0/I_1.$$

Par conséquent si (2.41) était faux, il existerait une sous-suite $(y_{k(\nu)})_\nu$ de $(y_k)_k$ et une suite associée $(u_{k(\nu)})_\nu$ d'éléments de $H_0^2(Q(0;\varepsilon^{-1})$, vérifiant :

$$(2.43)\quad \begin{cases} \|(H(\vec{b}_{y_{k(\nu)}})+V_{y_{k(\nu)}}-\lambda)u_{k(\nu)}\| \leqslant (\tau_0/2)\|u_{k(\nu)}\|; & \forall\nu\in\mathbf{N}, \\ \|u_{k(\gamma)}\|=1; \quad \text{et} \quad k(\nu)\in I_0\backslash I_1; & \forall\nu\in\mathbf{N}. \end{cases}$$

Mais d'après (2.36), et (2.42), la famille

$$\{(V_0(y_{k(\nu)}),((\partial_x^\alpha V_1(y_{k(\nu)}),\ldots,\partial_x^\alpha V_j(y_{k(\nu)}))_{|\alpha|\leqslant r+1},(\partial_x^\alpha B(y_{k(\nu)}))_{|\alpha|\leqslant r}\}_\nu$$

est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergeant vers un $z_\infty\in\mathscr{B}_\infty$; supposons que cette dernière sous-suite soit la sous-suite initiale. La suite d'opérateurs elliptiques $(H(\vec{b}_{y_{k(\nu)}})+V_{y_{k(\nu)}})_\nu$ a ses coefficients qui convergent uniformément sur tout compact vers ceux de l'opérateur elliptique $H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty}$; on en déduit alors facilement, compte tenu de (2.43), que la suite $(u_{k(\nu)})_\nu$ est dans un borné de $H_0^2(Q(0;\varepsilon^{-1}))$.

Comme $(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty}-H(\vec{b}_{y_{k(\nu)}})-V_{y_{k(\nu)}})_\nu$ est une suite d'opérateurs différentiels d'ordre un et convergeant vers zéro, on déduit aisément de (2.43) qu'il existe $N_1>0$ tel que :

$$(2.44)\quad \|(H(\vec{b}_{z_\infty})+\mathrm{V}_{z_\infty}-\lambda)u_{k(\nu)}\| \leqslant (3/4)\tau_0\|u_{k(\nu)}\|\,; \qquad \forall\nu\geqslant N_1\,.$$

Comme la distance de λ à S_∞ est τ_0, on doit avoir :

$$\|(H(\vec{b}_{z_\infty})+\mathrm{V}_{z_\infty}-\lambda)v\| \geqslant \tau_0\|v\|; \qquad \forall v\in D(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty})\,.$$

Les deux dernières estimations et le fait que $H_0^2(Q(0;\varepsilon^{-1}))$ est inclus dans $D(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty})$ montrent que : $u_{k(\nu)}\equiv 0; \forall\nu\geqslant N_1$.

On a donc une contradiction avec (2.43). Par conséquent (2.41) est bien vérifié.

On peut supposer sans restriction que N_0 est nul dans (2.41).

Pour tout $k\in I_0\backslash I_1$, on change de jauge et on écrit que :

$$(2.45)\quad \|(H(\vec{a})+\mathrm{V}-\lambda)\chi_k u\| = \|(H(\vec{a}_{y_k})+\mathrm{V}-\lambda)e^{-i(\phi(y_k;\,.)+\Psi(y_k;\,.)}\chi_k u\|$$

(ϕ_y et Ψ_y étant ceux définis plus haut).

Notons que le vecteur $\vec{r}_y$ défini dans (2.31) vérifie, compte tenu de (1.15), (2.24) et (2.25) :

$$(2.46)^1 \qquad |\vec{r}_y(x)| \leqslant C|x-y|^{r+2}\varphi^{-1}(y),$$

$$(2.46)^2 \quad |\partial_{x_j}\vec{r}_y(x)| \leqslant C|x-y|^{r+1}\varphi^{-1}(y); \qquad j=1,\ldots,n,$$

ceci pour tout $y\in\mathbf{R}^n$ et pour tout $x\in Q(y;\rho\varphi(y))$.

On en déduit :

$(2.47)^1 \quad |\vec{r}_{y_k}(x)| \leqslant \varepsilon C \; ; \; \forall x \in Q(y_k;\varepsilon^{-1}) \quad$ et $\quad \forall k \in I_0 \backslash I_1 .$

$(2.47)^2 \quad \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\partial_{x_j} \vec{r}_{y_k}(x)| \leqslant \varepsilon C ; \forall x \in Q(y_k;\varepsilon^{-1}) \quad$ et $\quad \forall k \in I_0 \backslash I_1 .$

On écrit, compte tenu de ce qui précède que :

$$(2.48) \quad H(\vec{a}_y) = H(\vec{c}_y(x-y)) - 2\vec{r}_y(x) . \vec{L}(\vec{c}_y(x-y)) + |\vec{r}_y(x)|^2 + i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \partial_{x_j} r_{y,j}(x)$$

où $L(\vec{e}) = (L_1(\vec{e}), \ldots, L_n(\vec{e}))$ désigne l'opérateur : $L_j(\vec{e}) = D_j - e_j(x)$.

On remarque que (1.9), (1.14), (1.15), (1.23), (2.18)', (2.38) et (2.39) montrent qu'on a pour tout $k \in I_0 \backslash I_1$:

$$(2.49) \qquad | V_{y_k}(x-y_k) - V(x) | \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon | V_{y_k}(x-y_k)|^{1/2}); \quad \forall x \in Q(y_k;\varepsilon^{-1}) .$$

On en déduit alors en utilisant (1.8), (1.9), (1.18), (2.28) des estimations du type (2.29) et (2.30), puis (2.38), (2.39) et (2.45)-(2.49) que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et tout $k \in I_0 \backslash I_1$ on a :

$$\begin{aligned} &\|(H(\vec{a}_{y_k}) + V - \lambda) e^{-i\Psi(y_k;\,.)} \chi_k u\|^2 \geqslant \\ &\quad (1-\varepsilon C) \|(H(\vec{b}_{y_k}(x-y_k)) + V_{y_k}(x-y_k) - \lambda) e^{-i(\Psi(y_k;\,.)+\phi(y_k;\,.))} \chi_k u\|^2 - \\ &\quad \varepsilon C q_{V_{y_k}(x-y_k)}(\vec{b}_{y_k}(x-y_k))(e^{-i(\Psi(y_k;\,.)+\phi(y_k;\,.))} \chi_k u) - \varepsilon C \|\chi_k u\|^2 . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité :

$$\begin{aligned} &q_{V_{y_k}(x-y_k)}(\vec{b}_{y_k}(x - y))(\chi_k v) \leqslant \\ &\quad \varepsilon^{1/2} \|(H(\vec{b}_{y_k}(x-y_k)) + V_{y_k}(x-y_k) - \lambda) \chi_k v\|^2 + C\varepsilon^{-1/2} \|\chi_k v\|^2 , \end{aligned}$$

on déduit aisément que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et tout $k \in I_0 \backslash I_1$ on a :

$$\begin{aligned} (2.50) \qquad &\|(H\vec{a}_{y_k}) + V - \lambda) e^{-i\Psi(y_k;\,.)} \chi_k u\|^2 \geqslant \\ &(1-\varepsilon^{1/2} C) \|(H(\vec{b}_{y_k}(x-y_k)) + V_{y_k}(x-y_k) - \lambda) e^{-i(\Psi(y_k;\,.)+\phi(y_k;\,.))} \chi_k u\|^2 - \\ &\varepsilon^{1/2} C \|\chi_k u\|^2 . \end{aligned}$$

Si ε est assez petit, on déduit de (2.41), (2.45) et (2.50) que :

$$(2.51)\quad \|(H(\vec{a})+V-\lambda)\chi_k u\| \geqslant (\tau_0/4)\|\chi_k u\|; \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \text{ et } \forall k \in I_0 \backslash I_1 .$$

Par conséquent (1.14*b*), (2.35), (2.39), (2.40), (2.51) et le fait que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ soit dense dans $D(H(\vec{a}) + V)$ montrent que, si ε est choisi assez petit, il existe $R(\varepsilon) > 0$ tel que l'on ait :

$$\|(\mathrm{H}(\vec{a}) + V-\lambda)u\| \geqslant (\tau_0/8)\|u\|; \qquad \forall u \in D(H(\vec{a})+V)\,;\ \operatorname{supp}(u) \subset \mathbf{R}^n \backslash Q(0; R(\varepsilon) .$$

L'estimation ci-dessus montre classiquement (voir par exemple [M]) que : $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(H(\vec{a}) + V)$.

On a donc prouvé que : $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(\vec{a}) + V) \subset \bar{S}_\infty$. C.Q.F.D.

2.3. *Quelques exemples*

Exemple 1. — On considère sur $L^2(\mathbf{R})$ l'opérateur A :

$$A = -\frac{d^2}{dt^2} + (t^2+1)^{1/2}(\cos(t^2+1)^{1/4})^2.$$

Le théorème (1.5) montre que : $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \left\{\left(\frac{1}{2}+j\right); j \in \mathbf{N}\right\}$.

En effet si on pose : $V_1(t) = (t^2+1)^{1/4}\cos(t^2+1)^{1/4}$, on a : $\frac{d^2}{dt^2} V_1(t) \underset{|t|\to+\infty}{\to} 0$.

Si $(t_\nu)_\nu$ est une suite de points tendant vers l'infini et telle que la suite $(V_1(t_\nu))_\nu$ soit convergente, alors on a :

$$\cos(t_\nu^2+1)^{1/4} \underset{\nu\to+\infty}{\to} 0; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{dt} V_1(t_\nu) \underset{\nu\to+\infty}{\to} \pm\frac{1}{2}\cdot$$

Par conséquent les opérateurs $H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty}$ sont de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} + \left(a_1^0 \pm \frac{1}{2}t\right)^2$$

d'où le résultat annoncé.

Exemple 2. — Soit sur $L^2(\mathbf{R}^2)$ l'opérateur A :

$$A = -\partial_{x_1}^2 - (\partial_{x_2} - i\mu x_1)^2 + \lambda \cos((x_1^2 + x_2^2)^{1/4}),$$

λ et μ étant des constantes données, > 0.

Le théorème (1.5) montre que :

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} [-\lambda + \mu(1+2j), \mu(1+2j) + \lambda].$$

En effet, le gradient du potentiel électrique tend vers zéro à l'infini. Les opérateurs $H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty}$ sont de la forme :

$$-\partial_{x_1}^2 - (\partial_{x_2} - i\mu x_1)^2 + \lambda \cos\theta_{z_\infty}, \quad \theta_{z_\infty} \text{ parcourant } [0, 2\pi].$$

Exemple 3. — Soient sur $L^2(\mathbf{R}^3)$ les opérateurs suivants :

$$A_1 = -(\partial_{x_1} - i\mu x_3^2)^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2 + x_1^2 x_2^2,$$

et

$$A_2 = -(\partial_{x_1} - i\mu x_3^2)^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2 + x_1^2 x_3^2,$$

μ étant une constante réelle.
Le corollaire (1.2) montre que A_1 est à résolvante compacte si $\mu \neq 0$, résultat déjà obtenu dans [HeN] pour cet exemple ; par contre le théorème (1.5) montre que A_2 a du spectre essentiel.

Exemple 4. — Soit sur $L^2(\mathbf{R}^3)$ l'opérateur A :

$$A = -(\partial_{x_1} - i\mu x_1 x_3^2 \cos(r^2+1)^{-1})^2 - (\partial_{x_2} - i\mu x_2 x_1^2 \cos(r^2+1)^{-1})^2 - \partial_{x_3}^2$$

où μ est une constante réelle non nulle et, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le corollaire (1.2) montre que A est à résolvante compacte.

BIBLIOGRAPHIE

[AHeSi] J. Avron, I. Herbst and B. Simon, Schrödinger operator with magnetic field. I. General interactions, Duke Math. J., 45 (1978), 847-883.

[C] Y. Colin de Verdière, L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, Comm. Math. Phys., 105 (1986), 327-335. L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry-Grenoble, 1985-1986, 9-15.

[D] A. Dufresnoy, Un exemple de champ magnétique dans $\mathbf{R}^\nu$, Duke Math. J., 53 (3) (1983), 729-734.

[F] C. Fefferman, The uncertainty principle, Bull. Amer. Math. Soc., 9 (1983), 129-206.

[G] L. Garding, Preprint.