

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES-LOUIS LIONS

E. MAGENES

Problèmes aux limites non homogènes. II

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 137-178

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__137_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__137_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES (II)

par J.L. Lions (Nancy) et E. Magenes (Pavia).

INTRODUCTION

Cet article fait suite à l'article [16], mais nous avons divisé nos résultats de façon que ces deux articles puissent être lus indépendamment. D'autres articles suivront, conformément au programme indiqué dans l'introduction de [16].

Si $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A$ désigne un opérateur elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (dans des articles ultérieurs de cette série, nous étudierons les problèmes analogues relatifs à des opérateurs non elliptiques) on appelle problème aux limites non homogène la recherche de u , situé dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$, vérifiant (*) $Au = f$, f donné dans un autre espace fonctionnel $\mathcal{G}$, avec les conditions aux limites (**) $B_j u = \varphi_j$, $j = 0, \dots, m - 1$, les B_j étant des opérateurs différentiels (convenables) sur la frontière Γ de Ω ; les φ_j doivent être pris dans des espaces fonctionnels convenables, $\mathcal{G}_j$.

Voici grosso modo la méthode suivie :

1) Si l'on prend $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = L^2(\Omega)$ (fonctions de carré sommable sur Ω) la méthode de prolongement des opérateurs non bornés (ou la méthode des projections) conduit naturellement à la résolution de problèmes du type (*), (**), avec $\varphi_j = 0$ (cas homogène), et u étant dans $\mathcal{F}_0$, dont les éléments vérifient en particulier la condition $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p| \leq m$. On passe ensuite au cas non homogène à l'aide de

théorèmes de trace. Puis l'on peut trouver d'autres classes $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{C}\}$ à l'aide de théorèmes de régularité;

2) par transposition, on peut déduire de 1) de nouvelles classes $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_{1,j}\}$ où le problème (*), (**) est bien posé;

3) par utilisation de la théorie de l'interpolation, on en déduit des classes « intermédiaires » $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{C}_{0,j}\}$ où le problème (*), (**) est également bien posé.

Dans les étapes 1), 2) les espaces $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_{j,1,j}$ font intervenir des dérivées fractionnaires; si donc, comme il est raisonnable, on veut considérer les problèmes (*), (**), avec des φ_j donnés dans des classes définies à l'aide des dérivations usuelles, il est utile (si l'on veut obtenir les meilleurs résultats possibles) de considérer l'étape 3), qui fournit (entre autres) des classes $\mathcal{C}_{0,j}$ définies par des propriétés portant sur les dérivées usuelles des φ_j (les classes $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}_0$ faisant alors intervenir des dérivations fractionnaires).

Ainsi, à tout résultat du type 1) correspond une théorie assez générale des problèmes non homogènes; on part ici des résultats de régularité dans les problèmes aux limites elliptiques faisant intervenir toutes les dérivées (alors que dans l'article (I) (cf. [16]) nous partions de résultats de régularité « partielle », par rapport à certaines variables privilégiées). L'étape 2) nécessite la mise au point de théorèmes de traces (Nos 2 à 5), les applications étant faites aux Nos 6 à 8; l'étape 3) occupe les Nos 9 à 11. Le No 12 considère d'autres problèmes aux limites et le No 13 donne une première application à des problèmes non elliptiques. [Cf. aussi [16 bis].]

L'article (III) de cette série paraîtra aux *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*.

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires	140
2. Opérateur γ sur $\mathcal{H}_\lambda^0(\Omega)$	146
3. Opérateur $\tilde{\gamma}_\varphi$ sur $\mathcal{H}_\lambda^0(\Omega)$	149
4. Opérateur S sur $D_\lambda^0(\Omega)$	153
5. Opérateur $\tilde{S}_\varphi$ sur $D_\lambda^0(\Omega)$	156
6. Rappels sur les problèmes de Visik Sobolev	157
7. Application au problème de Dirichlet	158
8. Application au problème de Neumann	162
9. Un résultat d'interpolation	165
10. Applications de l'interpolation : problème de Dirichlet	166
11. Applications de l'interpolation : problème de Neumann	170
12. Exemple des problèmes de dérivée oblique	172
13. Equations différentielles opérationnelles	174
Bibliographie	176

I. — PRÉLIMINAIRES

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de point générique $x = (x_1, \dots, x_n)$. On supposera que Ω est borné, de frontière Γ une variété indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$ (il suffirait pour toute la suite que Γ soit « assez » différentiable), Ω étant d'un seul côté de Γ .

On utilisera les espaces suivants (pour détails on pourra consulter : [24] et [4], [11], [15], [16], [18]). L'espace des fonctions de carré sommable sur Ω (pour $dx = dx_1 \dots dx_n$) étant désigné par $L^2(\Omega)$, on désigne par $H^m(\Omega)$, m entier > 0 , l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour $|p| \leq m$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur l'ouvert Ω (cf. [21]). Muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|p| \leq m} \|D^p u\|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{où} \quad \|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω . On peut caractériser $H_0^m(\Omega)$ comme le sous-espace de $H^m(\Omega)$ formé des fonctions « nulles » sur Γ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m - 1$ [pour un énoncé précis, cf. Proposition 1. 2, (ii)].

A l'aide de systèmes de cartes locales, il n'y a pas de difficulté à définir de façon analogue les espaces $H^m(\Gamma)$ (cf. [19]); si par exemple Ω est l'ouvert $\{x_n > 0\}$, alors $\Gamma = \{x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ et $H^m(\Gamma) \simeq H^m(\mathbb{R}^{n-1})$; on se ramène, dans le cas général, au cas précédent; lorsque Γ est bornée, il n'y a pas de difficulté. Comme Γ est « sans bord », l'espace $\mathcal{D}(\Gamma)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Γ est dense dans $H^m(\Gamma)$; donc $H_0^m(\Gamma) = H^m(\Gamma)$.

Toujours pour m entier > 0 , on définit $H^{-m}(\Omega)$ [resp. $H^{-m}(\Gamma)$] comme le dual fort de $H_0^m(\Omega)$ [resp. de $H^m(\Gamma)$]; c'est un espace de distributions sur Ω (resp. Γ) (ces espaces ont été introduits dans [22]).

On a donc déjà défini $H^s(\Omega)$ et $H^s(\Gamma)$ pour s entier de signe quelconque. On aura besoin dans la suite de ces espaces pour s réel quelconque. On va en donner brièvement une définition utilisant l'interpolation des espaces de Hilbert [15 bis]. Si E et F sont deux espaces de Hilbert, $F \subset E$, F étant dense dans E , l'injection de F dans E étant continue, alors F est le domaine d'un opérateur auto-adjoint (non borné et non unique) strictement positif, soit B ($B = \Lambda^{1/2}$ dans les notations de [16]); on définit alors $F^{1-\theta}E^\theta$ comme le domaine de $B^{1-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$. Donc

$$F^{1-\theta}E^\theta = D(B^{1-\theta}),$$

avec le produit scalaire $(B^{1-\theta}u, B^{1-\theta}v)_E$, ce qui fait de $F^{1-\theta}E^\theta$ un espace de Hilbert; pour $\theta = 0$ (resp. 1) on retrouve F (resp. E). Ces espaces ont la propriété d'interpolation que voici: soit $\{F_1, E_1\}$ un deuxième couple d'espaces de Hilbert ayant des propriétés analogues à celles du couple $\{F, E\}$. Soit M un opérateur linéaire continu de E dans E_1 (soit μ_1 sa norme) et également de F dans F_1 (soit μ_0 sa norme); alors M est un opérateur linéaire continu de $F^{1-\theta}E^\theta$ dans $F_1^{1-\theta}E_1^\theta$ (sa norme μ_θ étant alors $\leq \mu_0^{1-\theta}\mu_1^\theta$), pour chaque $\theta \in]0, 1[$. Cf. [15 bis], et aussi [2], [7], [10]; d'autres espaces (et dans un certain sens « tous ») ayant la propriété précédente, ont été déterminés dans [6].

On pose maintenant la

DÉFINITION 1. 1. — Pour m entier > 0 (et Ω ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$) on pose

$$(1. 1) \quad H^{(1-\theta)m}(\Omega) = (H^m(\Omega))^{1-\theta}(H^0(\Omega))^\theta,$$

ce qui définit $H^s(\Omega)$ pour s réel ≥ 0 ⁽¹⁾.

Cette définition a besoin d'être justifiée pour (au moins) deux raisons: a) pour $(1 - \theta)m = q$ entier $\in [0, m]$, il faut que (1. 1) redonne l'espace $H^q(\Omega)$ introduit précédemment; b) si $\Omega = \mathbb{R}^n$ on définit naturellement $H^s(\mathbb{R}^n)$, pour tout s réel,

(1) Une autre définition équivalente a été donnée par Aronszajn [2], [2 bis].

comme l'espace des distributions u tempérées [21] dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifie

$$(1.2) \quad (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n);$$

alors, dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, (1.1) doit redonner la définition précédente avec $s = (1 - \theta)m$.

La justification est fournie par la

PROPOSITION 1.1. — *L'ouvert Ω étant borné de frontière Γ indéfiniment différentiable, $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ coïncide avec l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n)$ [défini par (1.2) avec $s = (1 - \theta)m$].*

Démonstration. — 1) Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ on vérifie la coïncidence de la définition (1.1) avec (1.2), $s = (1 - \theta)m$, en remontant à la définition de $F^{1-\theta}E^0$. (Cf. [16], Proposition 9.1).

2) Soit r l'opérateur (restriction) qui à une distribution u sur $\mathbb{R}^n$ fait correspondre sa restriction ru à Ω . Alors r est un opérateur linéaire continu de $H^0(\mathbb{R}^n)$ dans $H^0(\Omega)$ et de $H^m(\mathbb{R}^n)$ dans $H^m(\Omega)$ donc d'après le théorème d'interpolation (avec $M = r$), d'après 1), et d'après la définition 1.1, r est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$. Donc $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ est toujours (i.e. quel que soit Ω) contenu dans l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n)$.

3) Montrons maintenant l'inclusion inverse. Sous les hypothèses de la Proposition, il existe [3^{ter}] un opérateur linéaire P (prolongement) continu de $H^q(\Omega)$ dans $H^q(\mathbb{R}^n)$, q entier $\in [0, m]$, tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω pour $u \in H^q(\Omega)$. Appliquant le théorème d'interpolation à $M = P$, on voit que P est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ dans $H^{(1-\theta)m}(\mathbb{R}^n)$ d'où l'inclusion inverse.

Remarque 1.1. — La démonstration précédente montre que la Proposition 1.1 est vraie si Ω a la propriété de m -prolongement, i. e. : il existe un opérateur P ayant la propriété utilisée dans 3). Le résultat de la Proposition 1.1 est inexact sans aucune hypothèse sur Ω : soit en effet Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné, tel que l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ soit compacte, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ n'étant pas compacte (de tels

ouverts existent; Gagliardo, non publié). Or, de façon générale si l'injection de F dans E est compacte, il en est de même de l'injection de $F^{1-\theta}E^\theta$ dans E , pour $\theta < 1$. Donc l'injection de $(H^2(\Omega))^{1/2}(H^0(\Omega))^{1/2}$ dans $H^0(\Omega)$ est compacte, de sorte que cet espace est *strictement* contenu dans $H^1(\Omega)$.

On a donc, sous les hypothèses de la Proposition 1. 1, défini $H^s(\Omega)$ pour s réel > 0 . On définit ensuite $H_0^s(\Omega)$ comme l'adhérence dans $H^s(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, et enfin $H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'$, dual fort de $H_0^s(\Omega)$.

On montre alors la propriété générale que voici :

$$(1. 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (H^\alpha(\Omega))^{1-\theta}(H^\beta(\Omega))^\theta = H^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}(\Omega), \quad \text{pour } \alpha \text{ et } \beta \\ \text{réels quelconques } (\geq 0 \text{ ou } < 0). \end{array} \right.$$

Même chose pour $H^s(\Gamma)$, s réel quelconque. Ceci permet d'énoncer le résultat suivant, fondamental pour la suite (ce résultat a été trouvé par un grand nombre d'auteurs ⁽²⁾; c'est un cas particulier d'un résultat de [23], lui-même cas particulier de [13]). Avant d'énoncer le résultat, rappelons encore que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$) est dense dans $H^n(\Omega)$. Alors

PROPOSITION 1. 2. — Soit m entier > 0 . Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, posons $\gamma_j u = \frac{\partial^j}{\partial n^j} u$ (dérivée normale sur Γ d'ordre j , n désignant le vecteur unitaire normal à Γ et dirigé vers l'intérieur), et $\gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$.

L'application $u \rightarrow \gamma u$ définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée

$u \rightarrow \gamma u$, de $H^m(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. En outre

- (i) l'application $u \rightarrow \gamma u$ est surjective;
- (ii) le noyau de γ est $H_0^m(\Omega)$ ⁽³⁾.

⁽²⁾ Cf. [2 bis], [3 quarto], [11], [19 bis].

⁽³⁾ Par interpolation on en déduit que γ est une application linéaire continue de $H^s(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$, pour $s \geq m$. Cette démonstration est correcte si l'on

démontre le théorème d'interpolation à l'aide des méthodes de fonctions de variable complexe; c'est illusoire si l'on utilise la démonstration de [15 bis] qui repose sur un théorème de traces plus général.

Introduisons maintenant les opérateurs différentiels que nous utiliserons dans la suite. Pour $u, v \in H^n(\Omega)$ on pose

$$(1.4) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} a_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v} dx,$$

où l'on suppose que a_{pq} est indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$ (là aussi on pourrait raffiner!). On définit ainsi une forme sesquilinéaire continue sur $H^n(\Omega)$. Comme dans [16] nous supposons que

$$(1.5) \quad |a(u, u)| \geq c \|u\|_{H^n(\Omega)}^2, \quad c > 0, \quad u \in H_0^n(\Omega) \quad (*)$$

La forme $a(u, v)$ définit l'opérateur différentiel

$$(1.6) \quad A = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q).$$

La forme adjointe $a^*(u, v)$ est définie par

$$(1.7) \quad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)},$$

l'opérateur A^* correspondant étant

$$(1.8) \quad A^* = A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\overline{a_{qp}} D^q).$$

Nous utiliserons les formules de Green que voici : de façon générale, on pose :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Alors, pour $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

$$(1.9) \quad (Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} S_j u \overline{\gamma_j v} d\sigma,$$

$$(1.10) \quad (A^*u, v) = a^*(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} T_j u \overline{\gamma_j v} d\sigma,$$

où les S_j et T_j sont des opérateurs différentiels d'ordre $2m-j-1$, à coefficients indéfiniment différentiables (et $d\sigma$ désignant l'élément d'aire sur Γ). Plus précisément ([3], [20 bis]):

$$(1.11) \quad S_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} S_j^k \gamma_{2m-j-k},$$

(*) Pour d'autres hypothèses, cf. plus bas, la Remarque 10.5.

où b_j et $1/b_j$ sont dans $\mathfrak{D}(\Gamma)$, les S_j^k étant des opérateurs tangentiels à Γ [15], d'ordre $\leq k-1$.

Même résultat pour T_j ⁽⁵⁾.

On peut maintenant énoncer le (cf. aussi [20 bis]) :

LEMME 1. 1. — Soit $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$, avec $\varphi_j \in H^{j+1/2}(\Gamma)$, et $\psi = \{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$, avec $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. Il existe alors $\omega = \omega(\varphi, \psi) \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$(1.12) \quad \gamma_j \omega = \psi_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

$$(1.13) \quad S_j \omega = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

l'application $\{\varphi, \psi\} \in \omega$ étant continue de

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma) \quad \text{dans} \quad H^{2m}(\mathbb{R}^n).$$

Résultat analogue en remplaçant S_j par T_j .

Démonstration. — 1) Supposons que ω vérifie (1.12), et prenons (1.13) avec $j = m-1$; utilisant (1.11), cette équation s'écrit

$$b_{m-1} \gamma_m \omega = \varphi_{m-1} - \sum_{k \geq 2} S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} \omega;$$

comme $\gamma_{m+1-k} \omega = \psi_{m+1-k} \in H^{m-1+k-1/2}(\Gamma)$, et comme S_{m-1}^k est tangentiel, d'ordre $\leq k-1$, $S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} \omega \in H^{m-1/2}(\Gamma)$, donc l'équation (1.13), pour $j = m-1$, équivaut à

$$\gamma_m \omega = \psi_m, \quad \psi_m \text{ donné dans } H^{m-1/2}(\Gamma)$$

(car $1/b_{m-1}$ est dans $\mathfrak{D}(\Gamma)$). On vérifie alors facilement par récurrence que (1.12) (1.13) équivaut à (1.12) et

$$(1.14) \quad \gamma_{m+j} \omega = \psi_{m+j} \in H^{2m-(m+j)-1/2}(\Gamma), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

2) Posant $2m = \mu$, on est donc ramené à la construction de ω dans $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(1.15) \quad \gamma_j \omega = f_j \in H^{\mu-j-1/2}(\Gamma), \quad j = 0, 1, \dots, \mu-1,$$

ω dépendant continûment de f_j (la parité de μ n'intervient

(5) On montre que (1.5) entraîne l'ellipticité de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ dans $\bar{\Omega}$ (et même la forte ellipticité de $\exp(i\theta) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ pour θ convenable) de sorte que les systèmes $\{\gamma, S_j\}$ et $\{\gamma, T_j\}$ sont normaux et des systèmes de Dirichlet, au sens de [3].

pas dans ce qui suit !). On utilise la Proposition 1. 2 : $\varpi \rightarrow \gamma\varpi$ est un isomorphisme de $H^\mu(\Omega)/H_0^\mu(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{\mu-1} H^{\mu-j-1/2}(\Gamma)$; mais

$$H^\mu(\Omega) = H_0^\mu(\Omega) \oplus \mathcal{H}^\mu(\Omega),$$

avec

$$u \in \mathcal{H}^\mu(\Omega) \text{ si et seulement si } \sum_{|p| \leq \mu} (-1)^{|p|} D^{2p} u = 0.$$

Soit donc

$$(1.16) \quad u = \gamma^{-1}(f), \quad f = \{f_0, \dots, f_{\mu-1}\};$$

si P est un opérateur linéaire continu de $H^\mu(\Omega)$ dans $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω (cf. Proposition 1. 1,3), on peut prendre $\varpi = Pu$; les équations (1.15) sont alors vérifiées.

Remarque 1. 2. — On peut opérer un peu différemment dans le choix (1.16) de u . Dans le cas où $\Omega = \{x_n > 0\}$, la démonstration de la Proposition 1. 2 fournit explicitement un élément u de $H^\mu(\Omega)$ dépendant linéairement et continûment de f , avec $\gamma u = f$. Par des cartes locales, on en déduit une construction de u , différente de (1.16). Cette remarque est utile au N° 3.

2. OPÉRATEUR γ SUR $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$.

DÉFINITION 2. 1. — On désigne par $\mathcal{H}_\Lambda^0(\mathcal{H})$ (resp. $D_\Lambda^0(\Omega)$, resp. $Z_\Lambda^0(\Omega)$) l'espace des éléments u de $H^0(\Omega)$ tels que

$$Au \in H^{-m}(\Omega) \quad (\text{resp. } Au \in H^0(\Omega), \quad \text{resp. } Au = 0).$$

Pour $u, v \in \mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av)_{H^{-m}(\Omega)};$$

pour $u, v \in D_\Lambda^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{D_\Lambda^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av);$$

munis de ces produits scalaires les espaces $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$ et $D_\Lambda^0(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

Notons que $Z_\Lambda^0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^0(\Omega)$.

LEMME 2. 1. — *Sous l'hypothèse (1.5) l'espace $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$ est somme directe topologique de $H_0^m(\Omega)$ et de $Z_\Lambda^0(\Omega)$:*

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega) = H_0^m(\Omega) \otimes Z_\Lambda^0(\Omega).$$

Démonstration. — En effet sous l'hypothèse (1.5), A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$ (cf. [22]). Pour u donné dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ soit alors u_0 la solution dans $H_0^m(\Omega)$ de $Au_0 = Au$; la décomposition $u = u_0 + (u - u_0)$ fournit le résultat.

LEMME 2.2. — *L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.*

Démonstration. — En vertu du Lemme 2.1, et $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H_0^m(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $Z_A^0(\Omega)$. Or d'après [9], $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_A^0(\Omega)$ d'où le résultat ⁽⁶⁾.

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable, d'un même côté de Γ . On suppose que (1.5) a lieu. Dans ces conditions, l'application $u \rightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$, définie dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \rightarrow \gamma u$, de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. — 1) Soit $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\}$ donné dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1.1) $\nu(\varphi)$, élément de $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, avec

$$(2.2) \quad \gamma_j \nu(\varphi) = 0, \quad T_j \nu(\varphi) = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

$\nu(\varphi)$ dépendant continûment de φ .

⁽⁶⁾ Dans le cas actuel la démonstration du résultat de [9] est spécialement simple. Considérons A comme opérateur non borné dans $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, de domaine $D_A^0(\Omega)$ et soit A_S la fermeture de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ défini sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Il faut montrer que $A_S = A$; comme évidemment $A_S \subset A$, il suffit de montrer l'inclusion inverse, i.e. en passant aux adjoints : $A_S^* \subset A^*$. Soit donc u dans le domaine de A_S^* ; si $A_S^* u = f$, on a $(u, A\varphi) = (f, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, d'où (*) $\mathcal{A}^* \tilde{u} = \tilde{f}$ (cf. page 148 pour $\mathcal{A}$ et pour $\tilde{f}$ et $\tilde{u}$); on peut toujours s'arranger pour que $\mathcal{A}^*$ soit elliptique au voisinage de $\overline{\Omega}$, donc (*) entraîne que $\tilde{u} \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, et comme $\tilde{u}$ est à support dans $\overline{\Omega}$, $u \in H_0^{2m}(\Omega)$ (appliquer la Proposition 1.2). Comme on voit facilement que $H_0^{2m}(\Omega)$ est contenu dans le domaine de A^* (en fait c'est exactement ce domaine), on obtient l'inclusion désirée.

Soit par ailleurs $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ défini par

$$(2.3) \quad \mathcal{A} = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\mathcal{A}_{pq}(x) D^q),$$

où les fonctions $\mathcal{A}_{pq}$ sont indéfiniment différentiables dans $\mathbb{R}^n$, bornées ainsi que chacune de leurs dérivées, avec $\mathcal{A}_{pq} = a_{pq}$ sur Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est un prolongement indéfiniment différentiable de A . Soit de même $\mathcal{A}^*$ un prolongement indéfiniment différentiable de A^* . Les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ne sont plus nécessairement elliptiques dans tout l'espace, et $\mathcal{A}^*$ n'est pas nécessairement l'adjoint formel de $\mathcal{A}$.

Encore deux notations : si f est dans $H^0(\Omega)$, $\tilde{f}$ désigne le prolongement de f à $\mathbb{R}^n$ par 0 hors de Ω ; si T est une distribution dans $\mathbb{R}^n$, T_Ω désigne sa restriction à Ω .

Tout ceci posé, et u étant donné dans $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$, définissons X_φ^v par

$$(2.4) \quad X_\varphi^v = \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{\nu(\varphi)} \rangle - \langle Au, \overline{\nu(\varphi)_\Omega} \rangle;$$

l'expression (2.4) a un sens, d'après les remarques suivantes :

1) Comme $\tilde{u}$ est dans $H^0(\mathbb{R}^n)$, et grâce aux hypothèses faites sur les $\mathcal{A}_{pq}$, $\mathcal{A}$ étant un opérateur linéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-2m}(\mathbb{R}^n)$ le premier crochet dans (2.4) désigne la dualité entre $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$;

2) comme $\gamma_j \nu(\varphi) = 0$ pour $j = 0, \dots, m-1$, et d'après la Proposition 1.2, (ii), $\nu(\varphi)_\Omega$ est dans $H_0^m(\Omega)$, de sorte que le deuxième crochet dans (2.4) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$.

Naturellement $\nu(\varphi)$ n'est pas unique dans $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ à vérifier (2.2); mais X_φ^v est indépendant du choix de $\nu(\varphi)$; soit en effet ν et ν_1 deux choix, vérifiant tous deux les relations (2.2); alors $(\nu - \nu_1)_\Omega$ est dans $H_0^{2m}(\Omega)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \langle Au, \overline{(\nu - \nu_1)_\Omega} \rangle &= \langle u, \overline{A^*(\nu - \nu_1)_\Omega} \rangle \\ &= \langle u, \overline{\mathcal{A}^*(\nu - \nu_1)} \rangle = \langle \mathcal{A}u, \overline{\nu - \nu_1} \rangle, \end{aligned}$$

donc $X_\varphi^v = X_\varphi^{v_1}$, d'où notre assertion. On écrira : $X_\varphi^v = X_\varphi$.

Comme on a choisi $\nu(\varphi)$ dépendant continûment de φ , on vérifie facilement que la forme semi-linéaire $\varphi \rightarrow X_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$, donc de la forme

$$(2.5) \quad X_\varphi = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \sigma_j u, \overline{\varphi_j} \rangle, \quad \sigma_j u \in H^{-j-1/2}(\Gamma),$$

les applications $u \rightarrow \sigma_j u$ étant continues de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$.

2) Pour achever la démonstration du Théorème il reste seulement (compte tenu du Lemme 2. 2) à vérifier que, pour u dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\sigma_j u = \gamma_j u$.

Prenons φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$. On peut alors choisir $\nu(\varphi)$ dans $\mathcal{D}(R^n)$; posant $\nu(\varphi)_\Omega = \nu$, il vient

$$X_\varphi = (u, A^* \nu) - (Au, \nu),$$

où comme d'ordinaire, (f, g) désigne le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$. Utilisant les formules de Green (1. 9) et (1. 10), on obtient, puisque $\gamma_j \nu = 0$, $j = 0, \dots, m-1$;

$$X_\varphi = \sum_j \langle \gamma_j u, \bar{\varphi}_j \rangle,$$

donc $\langle \gamma_j u, \bar{\varphi}_j \rangle = \langle \sigma_j u, \bar{\varphi}_j \rangle$ pour tout φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$,

donc $\sigma_j u = \gamma_j u$ ce qui achève la démonstration du théorème.

3. — L'OPÉRATEUR $\tilde{\gamma}_\rho$ SUR $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

On introduit une famille Γ_ρ de variétés de dimension $n-1$, contenues dans Ω , $0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$, ces variétés tendant vers Γ lorsque $\rho \rightarrow 0$. De façon précise nous ferons l'hypothèse suivante ⁽⁷⁾ :

Il existe une famille finie d'ouverts $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_v$, dans R^n , tels que $\Gamma_\rho, \Gamma \subset \bigcup \mathcal{O}_i$; pour chaque $\mathcal{O}_i$ on suppose qu'il existe un isomorphisme g_i de $\bar{\mathcal{O}}_i$ sur

$$\bar{Q} = [-1, +1]^n,$$

(3. 1) $(\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ est le point générique de $\bar{Q}$),
tel que

$$\begin{aligned} g_i(\Gamma \cap \mathcal{O}_i) &= \bar{Q} \cap \{\xi_n = 0\}, \\ g_i(\Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i) &= \bar{Q} \cap \{\xi_n = \rho\}; \end{aligned}$$

on suppose que les composantes de g_i et g_i^{-1} sont $2m$ fois continûment différentiables dans $\bar{\mathcal{O}}_i$ et $\bar{Q}$. On fait l'hypothèse habituelle de compatibilité : g_i et g_j coïncident sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

⁽⁷⁾ On suppose dans ce n° que Γ est seulement $2m$ fois continûment différentiable.

On posera $g_i(x) = \{g_{i1}(x), \dots, g_{in}(x)\}$.

A l'aide du système $\{\mathcal{O}_i, g_i\}$ on définit un isomorphisme θ_ρ de Γ_ρ sur Γ par

$$(3.2) \quad \theta_\rho x = g_i^{-1}(g_{i1}(x), \dots, g_{in-1}(x), 0) \quad \text{pour } x \in \Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i$$

(donc $g_{in}(x) = \rho$).

Grâce à (3.1), on a

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_\rho \text{ et } \theta_\rho^{-1} \text{ sont } 2m \text{ fois continûment différentiables} \\ \text{de } \Gamma_\rho \text{ sur } \Gamma \text{ (et } \Gamma \text{ sur } \Gamma_\rho), \text{ leurs dérivées d'ordre} \\ \leq 2m \text{ étant bornées par des constantes indépen-} \\ \text{dantes de } \rho. \end{array} \right.$$

Soit Ω_ρ l'ouvert contenu dans Ω de frontières Γ_ρ ⁽⁸⁾. Pour u dans $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$, on sait (Friedrichs; cf. [18]) que u est localement dans H^m , donc

$$u \in H^m(\Omega_\rho);$$

on peut par conséquent définir

$$\gamma_{j,\rho} u = \frac{\partial^j}{\partial n_\rho^j} u, \quad (n_\rho \text{ normale intérieure à } \Gamma_\rho)$$

élément de $H^{m-j-1/2}(\Gamma_\rho)$ en vertu de la Proposition 1.2 ⁽⁹⁾.

Désignons par $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ l'espace des fonctions $2m$ fois continûment différentiables sur Γ_ρ . On a le

LEMME 3.1. — Pour φ dans $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ on définit $\theta_\rho^* \varphi$ par

$$(3.4) \quad \theta_\rho^* \varphi(x) = \varphi(\theta_\rho^{-1}(x));$$

alors $\theta_\rho^* \varphi$ est dans $\mathcal{D}^{2m}(\Gamma)$ et l'application $\varphi \rightarrow \theta_\rho^* \varphi$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u \rightarrow \theta_\rho^* u$ de $H^2(\Gamma_\rho)$ dans $H^2(\Gamma)$, pour $0 \leq \alpha \leq 2m$; θ_ρ^* est un isomorphisme, dont l'inverse est le prolongement de $(\theta_\rho^*)^{-1}$ défini par

$$(3.5) \quad (\theta_\rho^*)^{-1} \psi(x) = \psi(\theta_\rho x).$$

En outre, $\mathcal{L}(E; F)$ désignant l'espace des applications linéaires continues de E dans F :

$$(3.6) \quad \|\theta_\rho^*\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma_\rho); H^\alpha(\Gamma))} \leq c_1,$$

$$(3.7) \quad \|(\theta_\rho^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma); H^\alpha(\Gamma_\rho))} \leq c_2,$$

les c_i étant des constantes indépendantes de ρ .

⁽⁸⁾ Tout ceci vaut lorsque Γ est composé de plusieurs variétés distinctes.

⁽⁹⁾ Qui est valable si Γ est seulement m fois continûment différentiable.

Démonstration. — 1) Il suffit de montrer le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2m$, le cas $0 < \alpha < 2m$ s'en déduisant ensuite par interpolation.

2) Pour $\alpha = 2m$, on note, en utilisant des cartes locales et (3. 3), que

$$\|\theta_\rho^* \varphi\|_{H^{2m}(\Gamma)} \leq c_1 \|\varphi\|_{H^{2m}(\Gamma_\rho)}, \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho),$$

c_1 étant indépendante de ρ . L'inégalité analogue étant valable pour $(\theta_\rho^*)^{-1}$, et ces inégalités étant immédiates dans le cas $\alpha = 0$, on en déduit le Lemme.

Grâce au Lemme précédent, on peut introduire, pour $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$,

$$(3. 8) \quad \tilde{\gamma}_{j, \rho} u = \theta_\rho^* \gamma_{j, \rho} u;$$

posons

$$(3. 9) \quad \tilde{\gamma}_\rho u = \{\tilde{\gamma}_{0, \rho} u, \tilde{\gamma}_{1, \rho} u, \dots, \tilde{\gamma}_{m-1, \rho} u\};$$

alors

$$(3. 10) \quad \tilde{\gamma}_\rho \in \mathfrak{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)\right).$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3. 1. — *L'hypothèse (3. 1) ayant lieu ainsi que (1. 5), quel que soit u dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_\rho u \rightarrow \gamma u$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ lorsque $\rho \rightarrow 0$.*

Démonstration. — 1) On va d'abord démontrer que $\tilde{\gamma}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de l'espace $\mathfrak{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)\right)$, lorsque $0 \leq \rho \leq \rho_0$. Posant

$$a_\rho(u, \nu) = \sum_{p, q} \int_{\Omega_\rho} a_{pq}(x) D^q u D^p \bar{\nu} dx,$$

on a

$$(3. 11) \quad \int_{\Omega_\rho} A u \bar{\nu} dx = a_\rho(u, \nu) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_\rho} S_{j, \rho} u \gamma_{j, \rho} \bar{\nu} d\sigma,$$

les fonctions u et ν étant, par exemple, $2m$ fois continûment différentiables dans $\bar{\Omega}_\rho$, les $S_{j, \rho}$ ayant des propriétés analogues aux S_j introduits au N° 1. On introduit de même $T_{j, \rho}$.

Notons maintenant ceci: soit

$$\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma_\rho);$$

on peut choisir $\nu_\rho(\varphi) \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(3.12) \quad \gamma_{j,\rho} \nu_\rho(\varphi) = 0, \quad T_{j,\rho} \nu_\rho(\varphi) = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

de façon que

$$(3.13) \quad \|\nu_\rho(\varphi)\|_{H^{2m}(\mathbb{R}^n)} \leq c_3 \|\varphi\|_\rho,$$

où

$$\|\varphi\|_\rho = \left(\sum_j \|\varphi_j\|_{H^{j+1/2}(\Gamma_\rho)}^2 \right)^{1/2}.$$

En effet, d'après la démonstration du Lemme 1.4, on se ramène à construire $\omega_\rho \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$ avec $\gamma_j \omega_\rho = f_j$, $j = 0, \dots, \mu-1$, pour f_j donnée dans $H^{\mu-j-1/2}(\Gamma_\rho)$, la norme de l'application $\{f_j\} \rightarrow \omega_\rho$ étant bornée par une constante indépendante de ρ . Pour cela on utilise la Remarque 1.2; à l'aide de cartes locales (qui dépendent de ρ , mais où les dérivées qui interviennent sont majorées par des constantes indépendantes de ρ), on se ramène au cas du demi-espace et le résultat suit.

Ceci étant posé, on peut écrire d'après (2.5) (et en posant $u_{\Omega_\rho} = u_\rho$)

$$(3.14) \quad \langle A \tilde{u}_\rho, \overline{\nu_\rho(\varphi)} \rangle - \langle A u_\rho, \overline{\nu(\varphi)_{\Omega_\rho}} \rangle = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \gamma_{j,\rho} u, \varphi_j \rangle;$$

le premier crochet dans (3.14) désigne la dualité entre $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$; comme $\tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^0(\mathbb{R}^n)$ $A \tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$; d'après (3.13) ce premier crochet est donc majoré par $c_4 \|\varphi\|_\rho$, c_4 indépendante de ρ ; le deuxième crochet dans (3.14) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega_\rho)$ (et la norme $A u_\rho$ dans $H^{-m}(\Omega_\rho)$) est bornée par une constante indépendante de ρ , puisque $A u \in H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega_\rho)$; d'après (3.13), ce deuxième crochet est majoré par $c_5 \|\varphi\|_\rho$, c_5 étant une constante indépendante de ρ . On déduit donc de (3.14) que

$$(3.15) \quad \sum_j \|\gamma_{j,\rho} u\|_{H^{-j-1/2}(\Gamma_\rho)}^2 \leq c_6, \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq \rho_0.$$

Mais

$$\tilde{\gamma}_{j,\varphi} = \theta_{\varphi}^* \gamma_{j,\varphi},$$

d'où notre assertion en vertu de (3. 6).

2) Le Théorème est alors conséquence de 1) et de la remarque suivante (jointe à la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$):

$$(3. 16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \tilde{\gamma}_{j,\varphi} u \rightarrow \gamma_j u \text{ dans l'espace des fonctions} \\ 2m \text{ fois continûment différentiables dans } \Gamma \\ \text{(pour la topologie de la convergence uniforme} \\ \text{des fonctions et de chacune de leurs dérivées).} \end{array} \right.$$

4. — OPÉRATEUR S SUR $D_A^0(\Omega)$.

Pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on pose

$$(4. 1) \quad Su = \{S_0 u, S_1 u, \dots, S_{m-1} u\},$$

où les S_j sont définis comme dans (1. 8).

THÉORÈME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1, l'application $u \rightarrow Su$ définie dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \rightarrow Su$, de $D_A^0(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.*

Démonstration. — Le principe de la démonstration est analogue à celui de la démonstration du théorème 2. 1. Soit $\psi = \{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$, avec $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1. 1) $\varpi(\psi) \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(4. 2) \quad \gamma_j \varpi(\psi) = \psi_j, \quad T_j \varpi(\psi) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

et $\varpi(\psi)$ dépendant continûment de ψ .

Pour u dans $D_A^0(\Omega)$ on pose

$$(4. 3) \quad Y\psi = \langle A\tilde{u}, \overline{\varpi(\psi)} \rangle - \langle Au, \overline{\varpi(\psi)} \rangle,$$

le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, et le deuxième le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$.

Vérifions maintenant que $Y\psi$ est indépendant du choix de $\varpi(\psi) = \varpi$ avec (4. 2); soient en effet ϖ et ϖ_1 deux éléments de

$H^{2m}(R^n)$ vérifiant (4. 2); alors $(\varpi - \varpi_1)_\Omega$ est dans $H_0^{2m}(\Omega)$, donc

$$\langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{\varpi - \varpi_1} \rangle = \langle \tilde{u}, (\mathcal{A})^*(\overline{\varpi - \varpi_1}) \rangle = \langle u, \overline{A^*(\varpi - \varpi_1)_\Omega} \rangle \\ = \langle Au, \overline{(\varpi - \varpi_1)_\Omega} \rangle^{(10)},$$

d'où $Y_\varphi^w = Y_\psi^w$, et notre assertion. On écrit désormais $Y_\varphi^w = Y_\psi$.

La forme semi-linéaire $\psi \rightarrow Y_\psi$ est continue sur

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$$

donc

$$Y_\psi = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \overline{\psi_j} \rangle, \quad \tau_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma),$$

l'application $u \rightarrow \tau_j u$ étant continue de $D_\Lambda^0(\Omega)$ dans $H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_\Lambda^0(\Omega)$, il reste seulement à démontrer que, pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\tau_j u = S_j u$, ce qui se voit par utilisation des formules de Green.

Remarque 4. 1. — On reprend ici, en la précisant, une remarque de [15].

Désignons par $D_\Lambda^m(\Omega)$ l'espace des $u \in H^m(\Omega)$, tels que $Au \in H^0(\Omega)$. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{D_\Lambda^m(\Omega)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av),$$

c'est un espace de Hilbert.

Pour $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, soit $\nu(\varphi) \in H^m(\Omega)$, avec $\gamma_j \nu(\varphi) = \varphi_j$, $j = 0, \dots, m-1$, et $\nu(\varphi)$ dépendant continûment de φ . Pour u donné dans $D_\Lambda^m(\Omega)$, posons

$$Z_\varphi^\nu = (Au, \nu(\varphi)) - a(u, \nu(\varphi));$$

on vérifie que Z_φ^ν est indépendant du choix de $\nu(\varphi) = \nu$ (car si ν et ν_1 sont deux choix possibles alors $\nu - \nu_1 \in H_0^m(\Omega)$).

On écrira $Z_\varphi^\nu = Z_\varphi$. On note que la forme $\varphi \rightarrow Z_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, donc

$$(Au, \nu(\varphi)) - a(u, \nu(\varphi)) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \nu_j u, \overline{\varphi_j} \rangle, \quad \nu_j u \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma).$$

⁽¹⁰⁾ $(\mathcal{A})^*$, adjoint de $\mathcal{A}$, ne coïncide pas nécessairement avec $\mathcal{A}^*$; on peut aussi choisir $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A})^*$.

Pour u dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on vérifie que $v_j u = S_j u$. Sous réserve de la vérification du

LEMME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1, l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $D_\Lambda^m(\Omega)$, on a alors le*

THÉORÈME 4. 2. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1, l'application $u \rightarrow Su$ définie dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue (encore notée $u \rightarrow Su$) de $D_\Lambda^m(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)$.*

Démonstration du Lemme 4. 1. — Soit u dans $D_\Lambda^m(\Omega)$; comme A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$, il existe ϖ unique dans $H_0^m(\Omega)$ avec $A\varpi = Au$; alors ϖ est dans $D_\Lambda^m(\Omega)$ et $\|\varpi\|_{D_\Lambda^m(\Omega)} \leq c_1 \|Au\|_{H^0(\Omega)}$; soit $\nu = u - \varpi$; on a : $\gamma\nu = \gamma u$, $A\nu = 0$ et comme $\nu \rightarrow \{A\nu, \gamma\nu\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega)$ sur

$$H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma), \text{ on a } \|\nu\|_{H^m(\Omega)} \leq c_2 \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_j u\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}.$$

Considérons alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi_{n,j} \in \mathcal{D}(\Gamma)$, avec $\varphi_n \rightarrow Au$ dans $H^0(\Omega)$ et $\psi_{n,j} \rightarrow \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Soit ϖ_n (resp. ν_n) solution de $A\varpi_n = \varphi_n$ avec $\varpi_n \in H_0^m(\Omega)$ (resp. $A\nu_n = 0$, $\gamma_j \nu_n = \psi_{j,n}$). D'après les majorations précédentes, $\varpi_n \rightarrow \varpi$ et $\nu_n \rightarrow \nu$ dans $D_\Lambda^m(\Omega)$ donc $\nu_n + \varpi_n \rightarrow \nu$ dans $D_\Lambda^m(\Omega)$. Mais d'après la régularité de la solution du problème de Dirichlet [18 bis], ϖ_n et ν_n sont dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, d'où le lemme.

COROLLAIRE 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 4. 2, si u est dans $D_\Lambda^m(\Omega)$ et ν dans $H^m(\Omega)$, on a :*

$$(Au, \nu) - a(u, \nu) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j \nu} \rangle, \\ S_j u \in H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma), \quad \gamma_j \nu \in H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Remarque 4. 2. — De (1. 9) et (1. 10) on déduit, pour u, ν dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$:

$$(4. 4) \quad (u, A^* \nu) - (Au, \nu) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j \nu} \rangle - \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j \nu} \rangle.$$

Cette formule est valable, entre autres, dans les conditions suivantes :

THÉORÈME 4.3. — *Hypothèses du théorème 2.1. Si l'une des hypothèses suivantes a lieu :*

- (i) $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega), \quad \nu \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega);$
- (ii) $u \in D_A^0(\Omega), \quad \nu \in H^{2m}(\Omega);$

alors (4.4) est vraie. Dans le cas (i) la formule s'écrit :

$$(4.5) \quad (u, A^* \nu) = \langle Au, \bar{\nu} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j \nu} \rangle.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les diverses expressions écrites ont un sens. Le résultat suit par prolongement par continuité. Dans le cas (i), $\langle Au, \bar{\nu} \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$. Puis $\gamma_j u$ est dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ (Théorème 2.1) et $T_j \nu \in H^{j+1/2}(\Gamma)$ de sorte que $\langle \gamma_j u, \overline{T_j \nu} \rangle$ a un sens.

Dans le cas (ii), $\langle \gamma_j u, \overline{T_j \nu} \rangle$ a la même signification, et $S_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ (Théorème 4.1) et $\gamma_j \nu \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle S_j u, \overline{\gamma_j \nu} \rangle$ a un sens, d'où le théorème.

5. — OPÉRATEUR $\tilde{S}_\rho$ SUR $D_A^0(\Omega)$.

On se place dans le cadre du n° 3.

Soit u donné dans $D_A^0(\Omega)$; alors d'après le théorème de régularité locale de Friedrichs, u est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$, $\rho > 0$. Par conséquent, (et avec les notations du n° 3) :

$$(5.1) \quad S_{j,\rho} u_\rho \in H^{j+1/2}(F).$$

On introduit ensuite

$$(5.2) \quad \tilde{S}_{j,\rho} u = \theta_\rho^* S_{j,\rho} u_\rho;$$

on définit ainsi un opérateur linéaire continu de $D_A^0(\Omega)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$. Si l'on pose

$$(5.3) \quad \tilde{S}_\rho = \{S_{0,\rho}, S_{1,\rho}, \dots, S_{m-1,\rho}\},$$

alors

$$(5.4) \quad \tilde{S}_\rho \in \mathcal{L}\left(D_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)\right).$$

THÉORÈME 5.1. — *Hypothèses du théorème 3.1. Alors, pour u dans $D_A^0(\Omega)$, $\tilde{S}_\rho u \rightarrow Su$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ lorsque $\rho \rightarrow 0$.*

La démonstration, parallèle à celle du théorème 3.1, n'est pas détaillée ici.

6. — RAPPELS SUR LES PROBLÈMES DE VISIK-SOBOLEV

Pour ce n° on pourra également consulter [26], [14], [11], [18].

De façon générale soit V un sous-espace vectoriel fermé de $H^m(\Omega)$ avec

$$(6.1) \quad H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega).$$

On supposera que

$$(6.2) \quad |a(v, v)| \geq c \|v\|_{H^m(\Omega)}^2, \quad c > 0, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On désigne par $N(V)$ (resp. $N^*(V)$) l'espace des $u \in V$ tels que $Au \in H^0(\Omega)$, (resp. $A^*u \in H^0(\Omega)$), avec

$$(6.3) \quad (Au, v) = a(u, v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

(resp.

$$(6.4) \quad (A^*u, v) = a^*(u, v) \quad \text{pour tout } v \in V).$$

Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{N(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av)$$

(resp. $(u, v)_{N^*(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (A^*u, A^*v)$), c'est un espace de Hilbert.

Sous l'hypothèse (6.2), A (resp. A^*) est un isomorphisme de $N(V)$ (resp. $N^*(V)$) sur $H^0(\Omega)$ (cf. par ex. [11], [18]).

Par transposition on en déduit ceci :

sous l'hypothèse (6.2), si $v \rightarrow L(v)$ est une forme semi linéaire

continue sur $N^*(V)$, il existe un élément u de $H^0(\Omega)$ et un seul tel que

$$(6.5) \quad (u, A^*v) = L(v) \text{ pour tout } v \in N^*(V),$$

l'application $L \rightarrow u$ étant continue, au sens suivant:

$$\|u\|_{H^0(\Omega)} \leq c_1 \|L\|, \quad \text{où} \quad \|L\| = \sup. |L(v)| / \|v\|_{N^*(V)} \quad (11).$$

7. — APPLICATION AU PROBLÈME DE DIRICHLET

On va appliquer les remarques du n° 6 avec $V = H_0^m(\Omega)$, et sous les hypothèses du théorème 2.1. Alors

$$N(V) = N^*(V) = H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega).$$

En effet d'après [18 bis], on sait que dans ces conditions

$$N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega) \quad (\text{et également } N(V) \subset H^{2m}(\Omega))$$

inclusion algébrique et topologique.

Soit alors f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$, pour $j = 0, \dots, m-1$. Pour $v \in N^*(V)$, posons

$$(7.1) \quad L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle;$$

ceci a un sens: le premier crochet désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ (car $V = H_0^m(\Omega)$ et donc $N^*(V) \subset H_0^m(\Omega)$); comme $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ $T_j v$ est dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle g_j, \overline{T_j v} \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ et $H^{j+1/2}(\Gamma)$. Par conséquent (7.1) définit une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$.

Par conséquent, d'après (6.5), il existe un élément u de $H^0(\Omega)$ unique, vérifiant

$$(7.2) \quad \begin{cases} (u, A^*v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle, \\ \text{pour tout } v \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega). \end{cases}$$

On en déduit (en prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$):

$$(7.3) \quad Au = f,$$

donc $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

(11) Sous des hypothèses convenables, on peut transformer (6.5) en une équation où n'interviennent que des distributions sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [11], [14], [18]). Mais ceci n'est pas indispensable pour la suite.

L'équation (7.2) peut maintenant s'écrire :

$$(u, A^* \bar{\nu}) - \langle Au, \bar{\nu} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j \nu} \rangle.$$

D'après (4.5) on en déduit :

$$(7.4) \quad \gamma_i u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1$$

et l'on peut énoncer le

THÉORÈME 7.1. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe u dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ unique, vérifiant (7.3) et (7.4).*

Ou encore :

L'opérateur $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ sur l'espace $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ ⁽¹²⁾.

D'après le théorème 3.1 les conditions aux limites (7.4) ont lieu au sens suivant (sous les hypothèses du théorème 3.1) :

$$(7.5) \quad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \rightarrow g_i \quad \text{dans} \quad H^{-(j+1/2)}(\Gamma) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Le problème (7.3) (7.4) est un problème de Dirichlet non homogène.

Remarque 7.1. — Il résulte du théorème 7.1 que l'on peut apporter le complément suivant au théorème 2.1 :

l'application γ de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Omega)$ est surjective.

Ceci montre que dans le théorème 2.1 l'espace $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ est le meilleur (i.e. le plus petit) possible.

Notons encore que le noyau de γ dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ est $H_0^m(\Omega)$. En effet soit u dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ avec $\gamma u = 0$. Soit u^* la solution dans $H_0^m(\Omega)$ de $Au^* = Au$. Alors $u - u^*$ est dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$, et vérifie $A(u - u^*) = 0$ et $\gamma(u - u^*) = 0$, donc d'après le théorème 7.1, $u - u^* = 0$, d'où le résultat.

Remarque 7.2. — Soit u une distribution sur Ω vérifiant

$$(7.6) \quad Au \in H^{-m}(\Omega),$$

$$(7.7) \quad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \text{ est borné dans } H^{-(j+1/2)}(\Gamma) \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \text{ pour } j = 0, \dots, m-1.$$

⁽¹²⁾ On peut vérifier directement que u vérifiant (7.3) et (7.4) dépend continûment de f et g_j , ou bien appliquer le théorème de Banach sur les isomorphismes.

(Cette condition a un sens, car d'après le théorème de régularité locale, la seule condition (7. 6) implique que $u \in H^m(\Omega_\rho)$ pour tout $\rho > 0$.)

On va montrer que (7. 7) et (7. 7) entraînent (sous les hypothèses des théorèmes 2. 1 et 3. 1) que

$$(7. 8) \quad u \in H^0(\Omega) \quad ((\text{et donc } u \in \mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)).$$

En effet (7. 7) entraîne :

$\gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}$ est borné en norme dans $H_1^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)$ par une constante indépendante de ρ .

Par conséquent u_ρ (restriction de u à Ω_ρ) est la solution du problème de Dirichlet (au sens du théorème 7. 1) :

$$Au_\rho = (Au)_{\Omega_\rho}, \quad \gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}.$$

On en déduit :

$$\|u_\rho\|_{H^0(\Omega_\rho)} \leq c_1(\|Au\|_{H^0(\Omega)} + \sum \|f_{j,\rho}\|_{H^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)}) \leq c_2.$$

où c_1 est indépendante de ρ . Pour cela, il suffit de vérifier que c_1 est indépendante de ρ . Or tout reposant sur le théorème de régularité de Nirenberg ($N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$) et la transposition, il suffit de vérifier ceci :

soit $f \in H^0(\Omega_\rho)$ et ν la solution dans $H_0^m(\Omega_\rho)$ de $A\nu = f$. Alors, ν est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$ et

$$\|\nu\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leq c_3 \|f\|_{H^0(\Omega_\rho)},$$

c_3 étant indépendante de ρ ; ceci résulte de la démonstration du théorème de Nirenberg et des hypothèses du théorème 3. 1.

Comme $\|u\|_{H^0(\Omega_\rho)}$ est borné et fonction croissante de ρ , u est dans $H^0(\Omega)$, d'où notre assertion.

Remarque 7. 3. — Pour arriver au théorème 7. 1 on a pris la forme semi-linéaire particulière (7. 1). Étudions le cas le plus général. On montre (cf. [14], [11], [18]) que la forme semi-linéaire continue la plus générale sur $N^*(V) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ est de la forme suivante :

$$(7. 9) \quad L(\nu) = \langle f, \bar{\nu} \rangle + \langle g, \overline{P\nu} \rangle,$$

où $f \in H^{-m}(\Omega)$ (le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$), et où $g \in H_{\bar{\Omega}}^{-2m}(R^n)$, P désignant un opérateur linéaire continu de $H^{2m}(\Omega)$ dans $H^{2m}(R^n)$ tel que $P\nu = \nu$ p.p.

sur Ω ; alors $\langle g, \overline{P\varphi} \rangle$ désigne le produit scalaire entre $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ et $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, et le résultat est indépendant du choix de P .

Alors, il existe u dans $H^0(\Omega)$ unique, avec

$$(7.10) \quad (u, A^*\varphi) = \langle f, \overline{\varphi} \rangle + \langle g, \overline{P\varphi} \rangle,$$

pour tout $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Interprétons le problème ainsi résolu; soit g_Ω la restriction de g à Ω : $g_\Omega \in H^{-2m}(\Omega)$; on déduit de (7.10):

$$(7.11) \quad Au = f + g_\Omega.$$

Considérons maintenant sur $H_0^{2m}(\Omega)$ le produit scalaire $(A^*u, A^*\varphi)$; grâce au fait que $\|A^*u\| \geq c_1\|u\|_{H^{2m}(\Omega)}$ pour $u \in H_0^{2m}(\Omega)$, on définit ainsi un produit scalaire équivalent à $(u, \varphi)_{H^{2m}(\Omega)}$. Par conséquent il existe u_0 unique dans $H_0^{2m}(\Omega)$ vérifiant $(A^*u_0, A^*\varphi) = \langle g_\Omega, \overline{\varphi} \rangle$ pour tout $\varphi \in H_0^{2m}(\Omega)$, i. e.

$$(7.12) \quad AA^*u_0 = g_\Omega.$$

Alors $\tilde{u}_0$ désignant le prolongement de u_0 à $\mathbb{R}^n$ par 0 hors de Ω ($\tilde{u}_0 \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$), on voit que

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^*\tilde{u}_0 \in H^{-2m}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}\mathcal{B}^*\tilde{u}_0)_\Omega = g_\Omega.$$

Si donc l'on introduit

$$(7.13) \quad h = g - \mathcal{A}\mathcal{B}^*\tilde{u}_0,$$

on a là une distribution de $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$, à support dans Ω , et telle que $h_\Omega = 0$, donc à support dans Γ . Or on montre [9 bis] que toute distribution de $H^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ à support dans Γ peut s'écrire:

$$(7.14) \quad \langle h, \overline{\varphi} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j\varphi} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j^*, \overline{\gamma_j\varphi} \rangle, \quad \varphi \in H^{2m}(\mathbb{R}^n),$$

où

$$(7.15) \quad g_j \in H^{-(j+1/2)}(\Gamma), \quad g_j^* \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma).$$

Finalement (7.10) est équivalent à

$$(7.16) \quad (u, A^*\varphi) = \langle f, \overline{\varphi} \rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{B}^*\tilde{u}_0, \overline{P\varphi} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j\varphi} \rangle,$$

pour $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Mais

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{P\rho} \rangle = \langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*P\rho} \rangle \quad (13).$$

le deuxième crochet désignant le produit scalaire dans $H^0(\mathbb{R}^n)$. Puis, u_0 étant dans $H_0^{2m}(\Omega)$, $A^*\tilde{u}_0 = (A^*u_0)^{\sim}$ et par conséquent $\langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*P\rho} \rangle = \langle A^*u_0, A^*\rho \rangle$, et donc (7.16) équivaut à

$$(7.17) \quad (u - A^*u_0, A^*\rho) = \langle f, \bar{\rho} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j\rho} \rangle, \\ \rho \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega).$$

Conclusion. — On est ramené à l'équation (7.2) avec u remplacé par $u - A^*u_0$.

8. — APPLICATION AU PROBLÈME DE NEUMANN

On applique les remarques du n° 6 avec $V = H^n(\Omega)$. On fait l'hypothèse

$$(8.1) \quad |a(\rho, \rho)| \geq c \|\rho\|_{H^m(\Omega)}^2, \quad c > 0, \quad \text{pour tout } \rho \in H^n(\Omega) \quad (14).$$

Alors (cf. [18 bis]) $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et $N(V) \subset H^{2m}(\Omega)$), inclusion algébrique et topologique.

Nous prenons dans (6.5) $L(\rho)$ donnée par

$$(8.2) \quad L(\rho) = (f, \rho) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\rho} \rangle, \quad \rho \in N^*(V),$$

où f est donnée dans $H^0(\Omega)$ et g_j dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.

Grâce au fait que $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ on définit ainsi une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$. Par conséquent, il existe u unique dans $H^0(\Omega)$ vérifiant

$$(8.3) \quad (u, A^*\rho) = (f, \rho) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\rho} \rangle \quad \text{pour tout } \rho \in N^*(V).$$

On en déduit que

$$(8.4) \quad Au = f,$$

donc $u \in D_A^0(\Omega)$. Alors (8.3) s'écrit

$$(u, A^*\rho) - (Au, \rho) = - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\rho} \rangle.$$

(13) Cf. (10).

(14) Pour d'autres hypothèses, cf. Remarque 11.3

D'après (4. 4) (valable; cf. théorème 4. 3), et notant que $T_j \nu = 0$ puisque $\nu \in N^*(V)$, on voit que

$$(8. 5) \quad S_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 8. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1 et avec (8. 1), il existe u dans $D_A^0(\Omega)$ unique, avec (8. 4) et (8. 5) ⁽¹⁵⁾.*

Ou encore :

L'opérateur $\{A, S\}$ définit un isomorphisme de $D_A^0(\Omega)$ sur l'espace $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ ⁽¹⁶⁾.

Notons que, sous les hypothèses du théorème 3. 1 :

$$(8. 6) \quad \left\{ \tilde{S}_{j,\rho} u \rightarrow g_j \quad \text{dans } H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma), \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0, \right. \\ \left. j = 0, \dots, m-1. \right.$$

On a des remarques analogues aux remarques 7. 1, 7. 2, 7. 3; énonçons-les brièvement :

Remarque 8. 1. — L'application S de $D_A^0(\Omega)$ dans

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$$

est *surjective*, de noyau $N(H^m(\Omega))$.

Remarque 8. 2. — Soit u une distribution sur Ω telle que

$$(8. 7) \quad Au \in H^0(\Omega),$$

$$(8. 8) \quad \tilde{S}_{j,\rho} u \quad \text{est borné dans } H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma) \\ \text{lorsque } \rho \rightarrow 0, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Dans ces conditions, on a

$$(8. 9) \quad u \in H^0(\Omega) \quad (\text{donc } u \in D_A^0(\Omega)).$$

Remarque 8. 3. — Si $\nu \rightarrow L(\nu)$ est une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$, elle peut se prolonger à $H^{2m}(\Omega)$ (d'après le théorème de Hahn Banach) et donc

$$(8. 10) \quad L(\nu) = \langle g, \overline{P\nu} \rangle,$$

g et $P\nu$ étant comme dans (7. 10), $\nu \in H^{2m}(\Omega)$.

⁽¹⁵⁾ Il s'agit du problème de Neumann non homogène *attaché* à $a(u, \nu)$.

⁽¹⁶⁾ Remarque analogue à celle de la note de bas de page ⁽¹²⁾.

Alors il existe u dans $H^0(\Omega)$, unique, avec

$$(8.11) \quad (u, A^*v) = \langle g, \overline{Pv} \rangle, \quad \text{pour tout } v \in N^*(V).$$

Donc

$$(8.12) \quad Av = g_\Omega$$

On introduit encore $u_0 \in H_0^{2m}(\Omega)$, avec $AA^*u_0 = g_\Omega$, et

$$(8.13) \quad h = g - \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0.$$

On peut écrire h comme dans (7.14), (7.15) et (8.11) peut alors s'écrire (en tenant compte du fait que $T_j v = 0$ pour $v \in N^*(V)$):

$$(u, A^*v) = \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{Pv} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j^*, \overline{\gamma_j v} \rangle.$$

On est donc ramené à (8.3) avec g_j remplacé par $-g_j^*$ et u par $u - Au_0^*$.

Remarque 8.4. — Il résulte de (8.1) qu'il existe u dans $H^m(\Omega)$ unique, vérifiant

$$(8.14) \quad a(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \text{pour tout } v \in H^m(\Omega)$$

où $v \rightarrow \mathcal{L}(v)$ est une forme semi-linéaire continue sur $H^m(\Omega)$.

Prenons

$$(8.15) \quad \mathcal{L}(v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$

où

$$(8.16) \quad f \in H^0(\Omega) \quad \text{et} \quad g_j \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$$

(de sorte que $v \rightarrow \mathcal{L}(v)$ est bien continue sur $H^m(\Omega)$). On a alors (8.4) et (8.5), de sorte qu'en combinant avec le théorème 4.2, il vient

THÉORÈME 8.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et avec (8.1), l'opérateur $\{A, S\}$ est un isomorphisme de $D_A^m(\Omega)$ (cf. Remarque 4.1) sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$.*

9. UN RÉSULTAT D'INTERPOLATION

Soient $\{F, E\}$, $\{F_1, E_1\}$ deux couples d'espaces hilbertiens, comme au n° 1.

THÉORÈME 9. 1. — Soient M_ρ , $0 \leq \rho \leq \rho_0$, M , des opérateurs linéaires continus de E dans E_1 et F dans F_1 , tels que, lorsque $\rho \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} (9.1) \quad M_\rho e &\rightarrow Me && \text{dans } E_1 \text{ fort, pour tout } e \in E, \\ (9.2) \quad M_\rho f &\rightarrow Mf && \text{dans } F_1 \text{ fort, pour tout } f \in F. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, pour $0 < \theta < 1$,

$$(9.3) \quad M_\rho g \rightarrow Mg \text{ dans } F_1^{1-\theta} E_1^\theta \text{ fort, pour tout } g \in F^{1-\theta} E^\theta.$$

Démonstration. — Soit g dans $F^{1-\theta} E^\theta$; alors, d'après [15 ter] il existe une fonction $u_g(t) = u(t)$, dépendant linéairement de g , telle que

$$(9.4) \quad \int_0^\infty (\|t^\alpha u(t)\|_F^2 + \|t^\alpha u'(t)\|_E^2) dt \leq c_1 \|g\|_{F^{1-\theta} E^\theta}^2 \quad (17),$$

où $1/2 + \alpha = \theta$, avec

$$(9.5) \quad u(0) = g.$$

On introduit

$$(9.6) \quad \varphi_\rho(t) = M_\rho(u(t)), \quad \varphi(t) = M(u(t));$$

alors

$$\varphi_\rho(0) = M_\rho g, \quad \varphi(0) = Mg,$$

et d'après [15 ter] on aura (9.3) si

$$(9.7) \quad t^\alpha \varphi_\rho \rightarrow t^\alpha \varphi' \text{ dans l'espace } L^2(0, \infty; F) \quad (18),$$

et

$$(9.8) \quad t^\alpha \varphi'_\rho \rightarrow t^\alpha \varphi' \text{ dans } L^2(0, \infty; E),$$

(17) La fonction u définit une distribution sur $]0, \infty[$ (noté $(0, \infty)$ dans [16]), à valeurs dans F [22 bis], donc dans E et u' désigne la dérivée de u en t au sens distributions sur $]0, \infty[$ à valeurs dans E (cf. aussi [16]).

(18) $L^2(0, \infty; X)$, X espace de Bannach, désigne l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $]0, \infty[$ à valeurs dans X .

Mais les opérateurs M_ρ demeurant dans des ensembles bornés de $\mathcal{L}(F; F_1)$ et $\mathcal{L}(E; E_1)$, on a

$$\|t^\alpha \nu_\rho(t)\|_{F_1} \leq c_2 \|t^\alpha u(t)\|_F, \quad \|t \nu'_\rho(t)\|_{E_1} \leq c_3 \|t^\alpha u'(t)\|_E;$$

par ailleurs, d'après (9. 2) et (9. 1), $\nu_\rho(t) \rightarrow \nu(t)$ dans F_1 fort, et $\nu'_\rho(t) \rightarrow \nu'(t)$ dans E_1 fort. D'où (9. 7) et (9. 8) d'après le théorème de Lebesgue.

10. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE DIRICHLET

Introduisons quelques nouveaux espaces.

DÉFINITION 10. 1. — On désigne par $\mathcal{H}_\Lambda^\alpha(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in H^\alpha(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq m$, telles que

$$Au \in H^{-m}(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(10. 1) \quad (u, \nu)_{\mathcal{H}_\Lambda^\alpha(\Omega)} = (u, \nu)_{H^\alpha(\Omega)} + (Au, A\nu)_{H^{-1}(\Omega)},$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $\mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega) = H^m(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

DÉFINITION 10. 2. — On pose

$$(10. 2) \quad h_\Lambda^{(1-\theta)m}(\Omega) = (\mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega))^{1-\theta} (\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega))^\theta.$$

PROPOSITION 10. 1. — *Sous les hypothèses de la proposition 10. 1, on a $h_\Lambda^\alpha(\Omega) \subset \mathcal{H}_\Lambda^\alpha(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq m$, algébriquement et topologiquement⁽¹⁹⁾.*

Démonstration. — Considérons l'application identité : $u \rightarrow u$, qui est linéaire continue de $\mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega) \rightarrow H^m(\Omega)$ et de $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega) \rightarrow H^0(\Omega)$; alors par application du théorème d'interpolation, elle est linéaire continue de $h_\Lambda^{(1-\theta)m}(\Omega)$ dans

$$(H^m(\Omega))^{1-\theta} (H^0(\Omega))^\theta = H^{(1-\theta)m}(\Omega)$$

⁽¹⁹⁾ Une étude plus précise de $h_\Lambda^\alpha(\Omega)$ sera faite dans un des articles ultérieurs de cette série.

(Définition 1. 1). Donc $u \rightarrow u$ est linéaire continue de $h_\Lambda^\alpha(\Omega)$ dans $H^\alpha(\Omega)$.

On considère ensuite l'application linéaire $u \rightarrow Au$, continue de $\mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega)$ et $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$, donc de $h_\Lambda^\alpha(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$ d'où le résultat.

Comme $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, et comme, d'après le théorème 7. 1, $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ on en déduit ⁽²⁰⁾ :

THÉORÈME 10. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1, pour $0 \leq \alpha \leq m$, l'opérateur $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $h_\Lambda^\alpha(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$.*

De même, pour u dans $\mathcal{H}_\Lambda^m(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \rightarrow \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ sous les hypothèses du théorème 3. 1 (immédiat), et pour $u \in \mathcal{H}_\Lambda^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \rightarrow \gamma_j u$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ fort, tout ceci lorsque $\rho \rightarrow 0$ (théorème 3. 1); utilisant alors le théorème 9. 1, il vient :

THÉORÈME 10. 2. — *Sous les hypothèses des théorèmes 2. 1 et 3. 1, pour u donné dans $h_\Lambda^\alpha(\Omega)$, on a*

(10. 3) $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \rightarrow \gamma_j u$ dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$ fort, $j=0, \dots, m-1$, lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Par conséquent, pour f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j donné dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 \leq \alpha \leq m$, il existe u unique dans $H^\alpha(\Omega)$, avec

$$(10. 4) \quad Au = f,$$

$$(10. 5) \quad \gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

et (10. 5) s'interprétant par (10. 3).

Remarque 10. 1. — Prenons dans les théorèmes 10. 1 et 10. 2, $\alpha = m-1/2$. Alors $g_j \in H^{m-j-1}(\Gamma)$ et la solution u est dans $H^{m-1/2}(\Omega)$. Ceci améliore le résultat de [5] (relatif à $m=1$; cf. aussi [18'] où l'ouvert Ω est plus général) et de [17] ($m>1$) où la solution est seulement trouvée dans $H^{m-1}(\Omega)$. Les méthodes sont complètement différentes; on verra dans un

⁽²⁰⁾ Notons que si M est un isomorphisme de E sur E_1 et de F sur F_1 , c'est également un isomorphisme de $F_1^{-\theta} E_1^\theta$ sur $F_1^{1-\theta} E_1^\theta$ (interpoler M et M^{-1}).

article ultérieur de cette série comment obtenir le théorème 10.1 par la méthode de [17] (cf. aussi Remarque 10.3 ci-après).

Il serait peut-être intéressant de compléter le théorème 10.1 en prenant le deuxième membre f dans un espace *plus grand* que $H^{-m}(\Omega)$; il faut en effet noter que dans le cas particulier $\Omega = \{x_n > 0\}$ le théorème 10.2 de [16] est meilleur que le théorème 10.1 actuel. (On doit dans [16] distinguer les variables « tangentielles » de la variable « normale »).

Remarque 10.2. — Soit u distribution sur Ω vérifiant

$$(10.6) \quad Au \in H^{-m}(\Omega)$$

et

$$(10.7) \quad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \text{ borné dans } H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma), j=0, \dots, m-1, \rho \rightarrow 0.$$

Dans ces conditions :

$$(10.8) \quad u \in H^{\alpha}(\Omega).$$

Même démonstration qu'à la Remarque 7.2.

Cette remarque est utile dans l'étude des espaces de Hardy (dans le cas L^2 ; on étudiera cela plus tard, à propos du cas L^p , $1 < p < \infty$).

Remarque 10.3. — Nous ne nous sommes pas intéressés aux hypothèses minima de régularité des coefficients de A sous lesquelles le théorème 10.1 relatif au cas α est vrai. Dans cette direction la méthode d'interpolation n'est pas favorable : pour obtenir le résultat pour $\alpha \in]0, m[$ il faut utiliser le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = m$, donc les hypothèses relatives au cas $\alpha = 0$, plus restrictives que celles relatives au cas $\alpha = m$; c'est dans cette direction notamment que la démonstration directe (sans interpolation) du théorème 10.1 sera utile.

Remarque 10.4. — On sait que $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^s(\Omega)$ sur $H^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ pour s entier $\geq m$ — et, par interpolation, pour s réel $\geq m$. C'est la Proposition 3, p. 87 de [19]. (Où il n'est pas fait usage de l'interpolation.) Le Théorème 10.1 étend, dans un certain sens, ce résultat au cas $0 < s < m$ ⁽²¹⁾.

⁽²¹⁾ On trouvera également dans [19] quelques indications (p. 84) sur le cas $0 < s < m$, $\Omega = \{x_n > 0\}$, A à coefficients constants, $A = 0$.

Remarque 10.5. — Nos résultats sont vrais sous les hypothèses suivantes :

- (i) $\left\{ \begin{array}{l} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A \text{ est un opérateur différentiel à coefficients dans } \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \text{ d'ordre } \leq 2m, \text{ tel que les systèmes } \{\gamma_j, S_j\} \text{ et } \{\gamma_j, T_j\} \text{ soient de Dirichlet;} \end{array} \right.$
- (ii) A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega)$;
- (iii) A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$.

Nous avons supposé que

$$(10.9) \quad |a(\nu, \nu)| \geq c_1 \|\nu\|_{H^m(\Omega)}^2, \quad c_1 > 0, \quad \text{pour tout } \nu \in H_0^m(\Omega),$$

ce qui entraîne (i), (ii), (iii). Du point de vue « algébrique », si l'opérateur A est *fortement elliptique*, alors, d'après [8], (10.9) a lieu pour $a(\nu, \nu) + \lambda \|\nu\|^2$, $\lambda > 0$ assez grand.

Nous allons brièvement donner des conditions algébriques plus générales que l'ellipticité forte, et sous lesquelles (i), (ii) et (iii) sont encore vérifiées (en remplaçant éventuellement A par $A + \lambda$).

Supposons la dimension $n > 2$ (sinon il faut ajouter des hypothèses du type « properly elliptic », cf. par ex. [20], [20 bis]), et supposons $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *elliptique*, i.e.

$$(10.10) \quad \sum_{|p|, |q|=m} a_{pq}(x) \xi^{p+q} \neq 0 \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0.$$

Si (10.10) a lieu, on sait [20] que l'opérateur A de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ est surjectif si A^* est biunivoque sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ et que ([1 ter], n° 12) si A est biunivoque sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$, il en est de même pour A^* . Par conséquent la condition (ii) sera réalisée pour A et A^* si

$$(10.11) \quad A \text{ est biunivoque sur } H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega).$$

Supposons maintenant que (ii) ait lieu pour A^* ; par transposition il en résulte l'existence et l'unicité de u dans $H^0(\Omega)$, vérifiant

$$(10.12) \quad \langle u, \overline{A^* \nu} \rangle = \langle f, \bar{\nu} \rangle \quad \text{pour tout } \nu \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega),$$

pour f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et u dépendant continûment de f . Mais (10.10) ayant lieu, il résulte de (10.12), d'après [1 bis], que u est dans $H^m(\Omega)$. Alors $Au = f$ et $\langle u, \overline{A^* \nu} \rangle = \langle Au, \bar{\nu} \rangle$,

i.e. par (4. 5) $\sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, T_j \nu \rangle = 0$ pour tout $\nu \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$; l'application $\nu \rightarrow \{T_j \nu\}$ de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$ étant surjective, il en résulte que $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, donc

$$(10. 13) \quad u \in H_0^m(\Omega).$$

D'après le Théorème du graphe fermé, l'application : $f \rightarrow u$ est alors continue de $H^{-m}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ et (iii) a lieu. En résumé : *sous les hypothèses (10. 10) et (10. 11) les conditions (i), (ii) et (iii) ont lieu.*

Supposons que A soit faiblement défini positif [1 ter], i.e.

$$(10. 14) \quad \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=m} a_{pq}(x) \xi^{pq} \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega.$$

Alors, d'après le Théorème 12. 8 de [1 ter], $A + \lambda$ et $A^* + \lambda$ sont biunivoques sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ pour $\lambda \geq \lambda_0$, λ_0 assez grand (la démonstration de [1 ter] donne une évaluation de λ_0). On peut donc finalement énoncer le

THÉORÈME 10. 3. — *Sous les hypothèses (10. 10) et (10. 14), la dimension n étant > 2 , l'opérateur $\{A + \lambda, \gamma\}$ est un isomorphisme de $h_{A+\lambda}^\alpha(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 < \alpha < m$, λ positif assez grand.*

Ajoutons qu'en utilisant [4 bis], [1 ter] et [1 bis] on voit de façon analogue que (ii) entraîne (iii) dans les espaces $H^{m,p}(\Omega)$ de Sobolev construits à partir de $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$.

11. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE NEUMANN

DÉFINITION 11. 1. — On désigne par $D_A^\alpha(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 2m$, l'espace des (classes de) fonctions $u \in H^\alpha(\Omega)$ telles que

$$Au \in H^0(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(11. 1) \quad (u, \nu)_{D_A^\alpha(\Omega)} = (u, \nu)_{H^\alpha(\Omega)} + (Au, A\nu),$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $D_A^{2m}(\Omega)$ coïncide avec $H^{2m}(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

DÉFINITION 11. 2. — On pose

$$(11. 2) \quad d_A^{2(1-\theta)m}(\Omega) = (D_A^{2m}(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(M))^{\theta}.$$

PROPOSITION 11. 1. — *On a l'inclusion algébrique et topologique $d_A^{\alpha}(\Omega) \subset D_A^{\alpha}(\Omega)$ ⁽²²⁾.*

La démonstration est identique à celle de la Proposition 10. 1.

Comme l'opérateur $\{A, S\}$ est un isomorphisme de $D_A^{2m}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$ et, par le théorème 8. 1, de $D_A^0(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il vient

THÉORÈME 11. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 8. 1, $\{A, S\}$ est un isomorphisme de $d_A^{\alpha}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$, pour $0 \leq \alpha \leq 2m$.*

En outre

THÉORÈME 11. 2. — *Sous les hypothèses du théorème 8. 1 et du théorème 3. 1, pour u donné dans $d_A^{\alpha}(\Omega)$, $\tilde{S}_{j,\rho} u \rightarrow S_j u$ dans $H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$ lorsque $\rho \rightarrow 0$, $j = 0, \dots, m-1$.*

Remarque 11. 1. — Soit u une distribution sur Ω , telle que

$$(11. 3) \quad Au \in H^0(\Omega),$$

et

$$(11. 4) \quad \left\{ \tilde{S}_{j,\rho} u \text{ soit borné dans } H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma), \text{ lorsque } \rho \rightarrow 0, \right. \\ \left. j = 0, \dots, m-1. \right.$$

Dans ces conditions

$$(11. 5) \quad u \in H^{\alpha}(\Omega).$$

Remarque 11. 2. — En utilisant le Théorème 8. 2, on obtient par la méthode précédente le résultat suivant: $\{A, S\}$ est un isomorphisme de

$$(D_A^m(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(\Omega))^{\theta} \quad \text{sur} \quad H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(1-\theta)m-2\theta m+j+1/2}(\Gamma).$$

⁽²²⁾ Une étude plus précise de $d_A^{\alpha}(\Omega)$ sera faite dans un article ultérieur.

Comparant au théorème 11. 1, avec $\alpha = (1 - \theta)m$, on en déduit

$$(D_A^m(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(\Omega))^\theta = d_A^{(1-\theta)m}(\Omega), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

En particulier ($\theta = 0$) : $d_A^m(\Omega) = D_A^m(\Omega)$.

Remarque 11. 3. — Remarque analogue à la Remarque 10. 5. Tout est valable si

- (j) $\left\{ \begin{array}{l} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ est à coefficients indéfiniment différen-} \\ \text{tiabiles dans } \overline{\Omega}, \text{ d'ordre } 2m, \text{ les systèmes } \{\gamma_j, S_j\} \\ \text{et } \{\gamma_j, T_j\} \text{ étant de Dirichlet;} \end{array} \right.$
- (jj) $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un isomorphisme de } N(H^m(\Omega)) \cap H^{2m}(\Omega) \text{ sur} \\ H^0(\Omega). \end{array} \right.$

Les conditions algébriques sont ici plus compliquées ([1], [1 bis], [20 bis]).

Il y a une légère différence entre les cas « Dirichlet » et « Neuman », l'hypothèse (iii) de la Remarque 10. 5 n'ayant pas d'analogue ici. On peut en fait observer ceci : a) on a vu à la Remarque 10. 5 que (iii) est essentiellement conséquence de (ii); b) dans le cas Dirichlet on « interpole » entre le « transposé de (ii) » et (iii), tandis que dans le cas Neumann, on « interpole » entre le « transposé de (jj) » et (jj); mais dans le cas Dirichlet on pourrait aussi « interpoler » entre le « transposé de (ii) » et (ii) lui-même. On obtient ainsi un résultat un peu moins bon pour le deuxième membre; on bénéficie dans le cas Dirichlet du fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , le dual de V étant alors un espace de distributions sur Ω .

12. — EXEMPLE DES PROBLÈMES DE DÉRIVÉE OBLIQUE

On remplace maintenant la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ définie au N° 1, par la suivante :

$$(12. 1) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} a_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v} dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$

où Λ_j est un opérateur différentiel d'ordre $2m - j - 1$, $m - 1$

fois transversal à Γ (cf. par ex. [15]), à coefficients indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$. Alors

$$(12. 2) \quad \Lambda_j \in \mathcal{L}(H^m(\Omega); H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)),$$

de sorte que (12. 1) définit une forme sesquilinéaire continue sur $H^m(\Omega)$. On suppose que

$$(12. 3) \quad |a(\nu, \nu)| \geq c \|\nu\|_{H^m(\Omega)}^2, \quad c > 0, \quad \nu \in H^m(\Omega);$$

pour l'étude de relations de coercivité de ce type, cf. [1].

Avec les notations du N° 6, et $V = H^m(\Omega)$, on a encore [4], [18]: $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et aussi $N(V) \subset H^{2m}(\Omega)$).

Par conséquent, pour f donné dans $H^0(\Omega)$, et g_j dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il existe $u \in H^0(\Omega)$ unique avec

$$(12. 4) \quad (u, A^*\nu) = (f, \nu) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j \nu} \rangle, \quad \nu \in N^*(V).$$

On en déduit

$$(12. 5) \quad Au = f,$$

donc $u \in D_A^0(\Omega)$, et (12. 4) s'écrit

$$(u, A^*\nu) - (Au, \nu) = - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j \nu} \rangle,$$

d'où avec (4. 4):

$$(12. 6) \quad \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j \nu} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j, \overline{\gamma_j \nu} \rangle, \quad \nu \in N^*(V).$$

Traduisons maintenant le fait que ν est dans $N^*(V)$, i.e. que $(A^*\nu, \varpi) = a^*(\nu, \varpi)$ pour tout ϖ dans $H^m(\Omega)$; utilisant le corollaire 4. 1, on obtient la condition équivalente

$$(12. 7) \quad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j \nu, \overline{\gamma_j \varpi} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j \nu, \overline{\Lambda_j \varpi} \rangle, \quad \varpi \in H^m(\Omega).$$

Notons maintenant que d'après le Théorème 2. 1, Λ_j est un opérateur linéaire continu de $D_A^0(\Omega)$ (et même $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$) dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$; on peut donc déduire de (12. 7) par prolongement par continuité que

$$(12. 8) \quad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j \nu, \overline{\gamma_j u} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j \nu, \overline{\Lambda_j u} \rangle, \quad \nu \in N^*(V).$$

De (12. 6) et (12. 8) on déduit

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j \nu} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j, \overline{\gamma_j \nu} \rangle,$$

pour tout ν dans $N^*(V)$; mais $N^*(V)$ étant dense dans $H^n(\Omega)$ ⁽²³⁾, il en résulte

$$(12. 9) \quad S_j u - \Lambda_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

C'est un problème de dérivées obliques régulier [15]. Posant

$$(12. 10) \quad (S - \Lambda)u = \{(S_0 - \Lambda_0)u, \dots, (S_{m-1} - \Lambda_{m-1})u\},$$

on a

THÉORÈME 12. 1. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1 et (12. 3), l'opérateur $\{A, S - \Lambda\}$ est un isomorphisme de $D_A^0(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.*

Par interpolation on en déduit :

THÉORÈME 12. 2. — *Sous les hypothèses du théorème 2. 1 et (12. 3), l'opérateur $\{A, S - \Lambda\}$ est un isomorphisme de $d_A^\alpha(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 2m$.*

13. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

Avec les notations du N° 6, supposons que

$$(13. 1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} a(\nu, \nu) + \xi_0 \int_{\Omega} |\nu(x)|^2 dx \geq c \|\nu\|_{H^m(\Omega)}^2, & c < 0, \nu \in V, \\ \text{pour } \xi_0 \text{ convenable.} \end{cases}$$

Alors, si $p = \xi + i\eta$, $A + p$ (resp. $A^* + p$) est un isomorphisme de $N(V)$ (resp. $N^*(V)$) sur $H^0(\Omega)$ pour $\xi \geq \xi_0$, et

$$(13. 2) \quad \|(A + p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^0(\Omega); N(V))} \leq \operatorname{pol}(|p|) \quad (24), \quad \xi \geq \xi_0$$

(majoration analogue pour $(A^* + p)^{-1}$).

Par transposition on en déduit ceci : si $\nu \rightarrow L(\nu)$ est une

⁽²³⁾ Si $|a(\nu, \nu)| \geq c \|\nu\|_{H^m(\Omega)}^2$, $N(V)$ (et $N^*(V)$) est dense dans V .

⁽²⁴⁾ $\operatorname{Pol}(|p|)$ désigne un polynôme en $|p|$ (ici de degré 1).

forme semi linéaire continue sur $N^*(V)$, il existe $u(p) = u$ unique dans $H^0(\Omega)$ avec

$$(13.3) \quad (u, (A^* + \bar{p})v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in N^*(V),$$

et

$$(13.4) \quad \|u\| \leq \text{pol}(|p|) \|L\|,$$

où $\|L\| = \sup \cdot |L(V)| \|v\|_{N^*(V)}$.

Appliquons ces remarques au cas $V = H_0^m(\Omega)$ (problème de Dirichlet). Comme au N° 7 nous prenons

$$(13.5) \quad L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \bar{T}_j v \rangle,$$

f donné dans $H^{-m}(\Omega)$, g_j donné dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$; il en résulte (cf. N° 7):

$$(13.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{A + p, \gamma\} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H}_A^0(\Omega) \text{ sur} \\ H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma) \text{ pour } \xi \geq \xi_0, \text{ d'inverse} \\ \text{majoré par un polynôme en } |p|. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_A^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$, d'inverse majoré par un polynôme en p .

Utilisant le Théorème d'interpolation et la majoration des normes ($\mu_0 \leq \mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta$), on en déduit:

pour $\xi \geq \xi_0$, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $h_A^\alpha(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, pour $0 \leq \alpha \leq m$, d'inverse majoré par un polynôme en $|p|$.

On en déduit, par la méthode de la transformation de Laplace (cf. par ex. [12]. Chap XI):

THÉORÈME 13.1. — *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, l'opérateur $\left\{A + \frac{\partial}{\partial t}, \gamma\right\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(h_A^\alpha(\Omega))$ sur $\mathcal{D}'_+(H^{-m}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma))^{(25)}$.*

⁽²⁵⁾ $\mathcal{D}'_+(X)$, X espace de Banach, désigne l'espace des distributions en t à valeurs dans X et à support limité à gauche. Cf. [22 bis].

Autrement dit : si f est une distribution en t à valeurs dans $H^{-m}(\Omega)$ à support limité à gauche et si g_j est une distribution en t à valeurs dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, de support limité à gauche, il existe une distribution u et une seule à valeurs dans $h_{\Lambda}^{\alpha}(\Omega)$, de support limité à gauche, telle que

$$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = f,$$

avec $\gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1$ ⁽²⁶⁾.

Remarque 13. 1. — Sous les hypothèses du théorème 3. 1, on aura

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \rightarrow \gamma_j u \quad \text{dans } \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Remarque 13. 2. — On peut naturellement développer des considérations analogues pour le cas du problème de Neumann, des problèmes de dérivées obliques, etc...

Remarque 13. 3. — On peut étudier de même des opérateurs $A + \partial^2/\partial t^2$, $A + i\partial/\partial t$, etc. Cf. [12].

Remarque 13. 4. — La méthode précédente permet également d'étudier les problèmes de perturbation singulière, à partir des résultats de [25].

La généralisation de la théorie au cas où $A = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est coefficients dépendant de t (cf. [12]) sera faite dans un article ultérieur. (Cf. déjà [16 bis]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON. The coerciveness problem for integro differential forms, *Journal d'Analyse Math. Israel*. Vol. 6 (1958), pp. 183-223.
- [1 bis] S. AGMON. The L_p approach to the Dirichlet problem I, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*. III, 13 (1959) pp. 405-448.
- [1 ter] S. AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG. Estimates near the boundary, *Comm. Pure Applied Math.* Vol. XII (1959), pp. 623-727.
- [2] N. ARONSZAJN. Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems, *Conférence de Berkeley*, 1960, à paraître.

⁽²⁶⁾ Il s'agit en fait de $(I \otimes \gamma_j)u$, où $I \otimes \gamma_j$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}'_+ \widehat{\otimes} h(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'_+ \widehat{\otimes} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$ (produit tensoriel de l'application $I =$ identité dans $\mathcal{D}'_+$, et de γ_j). Cf. [22 bis].

- [2 bis] N. ARONSZAJN. Boundary value of functions with finite Dirichlet integral, *Tech. Report*, n. 14, *Univ. of Kansas*, (1955), pp. 77-94.
- [3] N. ARONSZAJN et A. N. MILGRAM. Differential operators on Riemannian manifolds, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, Vol. 2 (1952), pp. 1-61.
- [3 bis] N. ARONSZAJN et K. T. SMITH. A paraître.
- [3 ter] BABITCH. Le problème du prolongement à la frontière, *Ouspetchi Mat. Nauk*, t. 8 (1953), pp. 111-113.
- [3 quarto] BABITCH-SLOBODETSKY. *Doklady Akad. Nauk*, t. 106 (1956), pp. 604-608.
- [4] F. E. BROWDER. Modern methods in the theory of partial differential equations. A paraître aux *Ergebnisse der Math.*, Springer.
- [4 bis] F. E. BROWDER. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* 45 (1959), pp. 365-372.
- [5] G. CIMMINO. Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet, *Rend. Circo. Mat. Palermo*, 61 (1937), pp. 177-224.
- [6] C. FOIAS et J. L. LIONS. Sur certains théorèmes d'interpolation. A paraître aux *Acta Szeged*.
- [7] E. GAGLIARDO. Interpolation d'espaces de Banach et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (I), (II), (III), Vol. 248 (1959), pp. 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.
- [8] L. GÄRDING. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.* 1, (1953), pp. 55-72.
- [9] L. HÖRMANDER. Définitions of maximal differential operators, *Arkiv for Math.*, t. 3 (1958), p. 510-504.
- [9 bis] L. HÖRMANDER et J. L. LIONS. Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Math. Scand.* 4 (1956), pp. 259-270.
- [10] S. G. KREIN. Un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, *Doklady Akad. Nauk*, t. 130 (1959), pp. 1162-1165.
- [11] J. L. LIONS. Lectures on elliptic differential equations, *Tata Institute of Fundamental Research*. Bombay, 1957.
- [12] J. L. LIONS. Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, *Grundlehren der mathem. Wissenschaften*, t. 111. Springer. A paraître.
- [13] J. L. LIONS. Un théorème de traces; applications, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 249 (1959), pp. 2259-2261.
- [14] J. L. LIONS. Conditions aux limites de Visik Soboleff et problèmes mixtes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 244 (1957), pp. 1126-1128.
- [15] J. L. LIONS. Sur les problèmes aux limites du types dérivée oblique, *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 208-239.
- [15 bis] J. L. LIONS. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie*. 50 (1958), pp. 419-432.
- [15 ter] J. L. LIONS. Théorèmes de trace et d'interpolation. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*. Vol. XIII (1959), pp. 389-403.
- [16] J. L. LIONS et E. MAGENES: Problemi al contorno non omogenei. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, Vol. XIV (1960), pp. 269-308.

- [16 bis] J. L. LIONS et E. MAGENES. Remarque sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1960.
 - [17] E. MAGENES. Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili, *Ann. Mat. Pura ed Appl.* IV, 48, (1959) pp. 257-279.
 - [18] E. MAGENES et G. STAMPACCHIA. I. problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, III, 12 (1958), pp. 247-357.
 - [18'] J. NEČAS. Sur les solutions des équations elliptiques aux dérivées partielles du second ordre avec intégrale de Dirichlet non bornée, *Journal Tchechoslovaque de Math.* t. 10 (85) (1960), pp. 283-298.
 - [18 bis] L. NIRENBERG. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.*, 8 (1955), pp. 648-674.
 - [19] J. PEETRE. Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, *Lund University*, 1959.
 - [19 bis] G. PRODI. Tracce di funzioni con derivata di ordine 1..., *Rend. Sem. Mat. Padova*, 28 (1958), pp. 402-452.
 - [20] M. SCHECHTER. Solution of the Dirichlet problem for systems not necessarily strongly elliptic, *Comm. Pure Applied. Math.*, 12 (1959), pp. 241-247.
 - [20 bis] M. SCHECHTER. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.* XV (1959), pp. 457-486.
 - [21] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, t. I, 1950 (2^e édition, 1957); t. II, 1951.
 - [22] L. SCHWARTZ. Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet, *Séminaire Bourbaki*, mai 1952.
 - [22 bis] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I), (II), *Annales Inst. Fourier*, t. VII (1957), pp. 1-139; t. VIII (1958), pp. 1-209.
 - [23] L. N. SLOBODETSKII. Évaluations dans L^p des solutions de systèmes elliptiques, *Doklady Akad. Nauk.* t. 123 (1958), pp. 616-619.
 - [24] S. L. SOBOLEV. *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique*, Leningrad, 1950.
 - [25] I. M. VISIK et L. A. LUSTERNIK. Solution de certains problèmes de perturbation (I), *Ouspechi Mat. Nauk*, t. 15 (93) (1960), pp. 3-80.
 - [26] I. M. VISIK et S. L. SOBOLEV. Nouvelle formulation générale des problèmes aux limites, *Doklady Akad. Nauk*, t. 111 (1956), pp. 521-523.
-