ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

QING LIU

Ouverts analytiques d'une courbe algébrique en géométrie rigide

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 3 (1987), p. 39-64

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_39_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 3 (1987), 39-64

OUVERTS ANALYTIQUES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EN GÉOMÉTRIE RIGIDE

par Qing LIU

PLAN

Introduction.

Le présent travail concerne la description des espaces analytiques, séparés, réguliers de dimension 1 sur un corps valué, complet, ultramétrique et algébriquement clos. Un début de cette étude se trouve dans le livre de L. Gerritzen et M. van der Put intitulé "Schottky groups and Mumford curves" ([7]) dans lequel ils essaient de caractériser les espaces analytiques rigides qui sont ouverts analytiques de la droite projective. Nous souhaitons ici étendre cette étude aux ouverts analytiques de courbes algébriques quelconques.

Au § 1 nous introduisons le genre d'un espace analytique (de dimension 1) que l'on peut définir comme suit : si R est un espace affinoïde, la réduction canonique $\overline{\mathrm{R}}^c$ de R est une variété algébrique affine réduite de dimension 1 sur $\bar{k}$ (le corps résiduel de k), il existe alors une unique variété algébrique projective $\mathrm{Y} \supset \overline{\mathrm{R}}^c$ telle que $\overline{\mathrm{R}}^c$ soit dense dans Y et que $\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{R}}^c$ soit régulier, on dit alors que le genre de R est le genre arithmétique de Y (i.e. $\dim_{\bar{k}} \mathrm{H}^1(\mathrm{Y}, \mathcal{O}_\mathrm{Y})$).

Mots-clés : Corps valué complet – Espace analytique rigide – Ouvert analytique – Courbe algébrique – Espace affinoïde.

Pour un espace analytique X, le genre n'est autre chose que la borne supérieure des genres de ses ouverts affinoïdes. On dit que X est de genre fini si cette borne est finie. En particulier, un ouvert analytique d'une courbe algébrique est de genre fini.

Au § 2 on montre qu'un espace connexe X de genre fini admet une réduction analytique $\overline{X}$ qui est préstable (Théorème 2.1), ceci veut dire que $\overline{X}$ est un schéma réduit, localement de type fini sur $\bar{k}$ dont les composantes irréductibles sont des courbes algébriques régulières et dont les singularités sont des points doubles ordinaires. Il suit de cela qu'un espace analytique X de dimension 1, connexe, de genre fini, qui n'est pas projectif, est réunion d'une suite croissante d'affinoïdes connexes et qu'il est de Stein (Corollaire 2.1.1).

Enfin le § 3 étudie la possibilité de plonger un espace analytique de genre fini dans une courbe algébrique. D'abord un ouvert analytique X de genre g d'une courbe algébrique est ouvert analytique d'une courbe projective de genre g (Théorème 3.1). Si le corps de base k est maximalement complet, un espace analytique de genre fini est ouvert analytique d'une courbe projective de même genre (Théorème 3.2) ; si k n'est pas maximalement complet il existe un espace analytique X (de genre 0) qui n'est pas ouvert analytique d'une courbe projective ([9] § 5.5). Enfin pour un espace analytique connexe X de genre fini on a les équivalences suivantes :

i) L'espace X est ouvert analytique d'une courbe projective C et C − X est compact (pour la topologie ordinaire) ;

ii) les fonctions holomorphes bornées sur X sont les fonctions constantes ;

iii) l'espace X admet une réduction analytique préstable dont les composantes irréductibles sont complètes et telle que le produit des valeurs absolues des angles de chaque demi-droite infinie soit nul (Théorème 3.3) .

Signalons que l'hypothèse X régulier a été retenue afin de simplifier les démonstrations, en fait on obtient des résultats analogues en supposant X seulement irréductible (réduit, séparé, de dimension 1) ([9]).

Je remercie vivement J. Fresnel et M. van der Put pour leur précieuse aide et leurs encouragements.

Dans tout ce travail, k désigne un corps valué complet pour une valeur absolue ultramétrique, k^0 son anneau de valuation, k^{00} l'idéal de valuation et $\overline{k} = k^0/k^{00}$ son corps résiduel. Si A est une k-algèbre affinoïde, on note $\| \ \|_{sp}$ la semi-norme spectrale sur A, $A^0 = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} \leqslant 1\}$, $A^{00} = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} < 1\}$ et $\overline{A} = A^0/A^{00}$. Un k-espace analytique est un espace analytique rigide sur k. Une *variété algébrique* est un schéma noethérien, de type fini sur un corps. Une *courbe algébrique* est une variété algébrique, séparée, intègre de dimension 1. Par *point* d'une variété algébrique on entendra toujours point fermé.

1. Genre d'un espace analytique séparé, régulier, connexe de dimension 1.

PROPRIETE ET DEFINITION 1.1. –*Soient* $(\Omega, \mathcal{O}_\Omega, \mathcal{G})$ *un espace analytique rigide*, X *un ouvert (pour la topologie ordinaire de* Ω) *de* Ω, $\mathcal{G}_X$ *la topologie de Grothendieck sur* X *définie de la façon suivante* :

1) *Un ouvert* $W \subset X$ *est admissible pour* $\mathcal{G}_X$ *si et seulement si* $W = X$ *ou* W *admissible pour* $\mathcal{G}$.

2) *Soit* W *un ouvert* $\mathcal{G}_X$*-admissible de* X, *un recouvrement* $\{W_i\}_i$ *de* W *est admissible pour* $\mathcal{G}_X$ *si et seulement si pour tout* U, $\mathcal{G}_X$*-admissible tel que* $U \subset W$, $U \neq X$, $\{W_i \cap U\}_i$ *est un recouvrement* $\mathcal{G}$*-admissible de* U.

Soit $\mathcal{O}_X$ *le faisceau sur* $(X, \mathcal{G}_X)$ *défini par* : $\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}_\Omega(W)$ *si* W *est* $\mathcal{G}$*-admissible et* $W \neq X$, $\mathcal{O}_X(X) = \varprojlim \mathcal{O}_\Omega(U)$ *où la limite projective est prise sur l'ensemble des* $U \subset X$ *et* $\mathcal{G}$*-admissibles.*

Alors $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X)$ *est un espace analytique rigide.*

On appelle ouvert analytique de Ω, *tout ouvert* X *muni de la structure analytique* $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X)$. *On appelle ouvert affinoïde tout ouvert analytique qui est un espace affinoïde.*

DEFINITION 1.2 ([2] p. 337). – *On dit qu'un espace analytique* X *est connexe s'il n'a pas de recouvrement admissible* $\{X_i\}_{i\in I}$ *tel que* $I = I_1 \cup I_2$ *(réunion disjointe)*, $(\bigcup_{i\in I_1} X_i) \cap (\bigcup_{i\in I_2} X_i) = \emptyset$ *et* $\bigcup_{i\in I_1} X_i \neq \emptyset \neq \bigcup_{i\in I_2} X_i$.

PROPOSITION ET DEFINITION 1.1. — *Soit* X *un espace analytique,* $x \in X$, V_x *la réunion des ouverts analytiques connexes contenant* x. *Alors l'ouvert analytique* V_x *est connexe. La famille* $\{V_x\}_{x \in X}$ *vérifie* $X = \bigcup_x V_x$, $V_x = V_y$ *si* $V_x \cap V_y \neq \phi$ *et tout ouvert analytique connexe* U *est contenu dans un* V_x.

Les V_x *s'appellent les composantes connexes de* X.

PROPOSITION 1.2. — *Soient* Ω *un espace analytique connexe,* X *un ouvert analytique quasi-compact (i.e.* X *admet un recouvrement admissible affinoïde fini) de* Ω. *Alors* X *est contenu dans un ouvert analytique quasi-compact connexe de* Ω.

Preuve. — Voir [9] prop 1.4.

PROPOSITION 1.3. — *Soit* $(X, \mathcal{O}_X, \mathfrak{g})$ *un espace analytique séparé. Alors on a une topologie de Grothendieck* $\mathfrak{g}'$ *sur* X *définie par :*

1) *Un ouvert de* X *est* $\mathfrak{g}'$*-admissible si c'est* X *ou un ouvert affinoïde de* $(X, \mathcal{O}_X, \mathfrak{g})$.

2) *Soit* W *un ouvert* $\mathfrak{g}'$*-admissible, un recouvrement* $\{W_i\}_i$ *de* W *est* $\mathfrak{g}'$*-admissible si les* W_i *sont* $\mathfrak{g}'$*-admissibles et si tout ouvert affinoïde contenu dans* W *est contenu dans une réunion finie de* W_i.

Soit $\mathcal{O}'_X$ *le faisceau défini de façon naturelle sur* $(X, \mathfrak{g}')$ *à partir de* $\mathcal{O}_X$, *alors* $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ *induit un isomorphisme d'espaces analytiques entre* $(X, \mathcal{O}_X, \mathfrak{g})$ *et* $(X, \mathcal{O}'_X, \mathfrak{g}')$.

Preuve. — Evident.

Dans la suite tout espace analytique séparé sera muni de cette topologie de Grothendieck (pour laquelle tout ouvert affinoïde est admissible). On rappelle que tout espace affinoïde est séparé et que l'analytification d'une variété algébrique séparée est un espace analytique séparé ([1] p. 7, [4] p. 282^4).

Nous allons définir maintenant le genre d'un espace analytique.

DEFINITION 1.3. — *Soit* Y *une variété algébrique réduite séparée définie sur un corps algébriquement clos* K. *On suppose que les composantes irréductibles de* Y *sont de dimension* 1. *On appelle complété projectif de* Y *l'unique (à isomorphisme près) variété* *projective* $\hat{Y}$ *contenant* Y *comme ouvert dense et telle que* $\hat{Y} - Y$ *soit régulier. On appelle genre de* Y *et on le note* $g(Y)$ *le genre arithmétique de* $\hat{Y}$, *i.e.* $\dim_K H^1(\hat{Y}, \mathcal{O}_{\hat{Y}})$.

DEFINITION 1.4. — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde régulier de dimension* 1. *On appelle genre de* R *et on le note par* $g(R)$ *le genre de* $\overline{R}^c$, *la réduction canonique de* R.

Cette définition est motivée par les théorèmes suivants :

THEOREME 1.1 (van der Put). — *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde régulier de dimension* 1, *et* $R \xrightarrow{r} \overline{R}$ *la réduction analytique selon un recouvrement pur de* R. *Alors il existe une courbe projective non-singulière* $\hat{R}$ *et une réduction analytique* $\hat{R} \xrightarrow{\hat{r}} \overline{\hat{R}}$ *telles que* R *soit ouvert affinoïde de* $\hat{R}$ *(analytifiée),* $\hat{r}\,|_R = r$ *et* $\overline{\hat{R}} = \hat{\overline{R}}$ *complété projectif de* $\overline{R}$.

Preuve. — Voir [11] Théorème 1.1, on peut aussi consulter [5] § 2.6 Théorème 6 pour un énoncé plus général.

THEOREME 1.2 (Bosch; Gerritzen, van der Put). — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* Z *une variété projective de dimension* 1 *sur* k, Z^{an} *l'analytification de* Z, $Z^{an} \longrightarrow \overline{Z}$ *une réduction selon un recouvrement pur fini de* Z^{an}. *Alors*

$$\dim_k H^1(Z^{an}, \mathcal{O}_{Z^{an}}) = \dim_k H^1(\overline{Z}, \mathcal{O}_{\overline{Z}}).$$

Preuve. — Voir [1] Théorème 2.8 et [7] Théorème p. 139.

Remarque. — D'après le théorème GAGA de Serre, on a $\dim_k H^1(Z^{an}, \mathcal{O}_{Z^{an}}) = \dim_k H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ pour toute variété projective Z sur k ([8], [13]). Donc en vertu des deux théorèmes ci-dessus, tout espace affinoïde régulier de dimension 1 sur k valué complet algébriquement clos est ouvert affinoïde de l'analytification d'une courbe projective non-singulière définie sur k et de genre égal à $g(R)$.

Nous rappelons aussi un théorème de Fresnel et Matignon ([5] § 1.4 Théorème 1) qui sera utilisé à plusieurs reprises.

THEOREME 1.3 (Fresnel, Matignon). — *Soient* k *un corps valué* *complet,* Z *une variété projective réduite sur* k, *pure de dimension* 1 (*i.e. les composantes irréductibles de* Z *sont de dimension* 1), R *un ouvert affinoïde de* Z^{an}. *Alors il existe* $f \in \mathcal{R}(Z)$ *une fonction rationnelle telle que* $R = \{x \in Z \mid f \in \mathcal{O}_{Z,x} \text{ et } |f(x)| \leqslant 1\}$.

Corollaire 1.3.1. — *Soient* k *un corps valué complet,* C *une courbe projective non-singulière sur* k, R *un ouvert affinoïde de* C^{an}. *Alors il existe* R′ *ouvert affinoïde de* C^{an} *tel que* $\{R, R'\}$ *soit un recouvrement pur de* C^{an} *et que* $\overline{R}^c$ *soit dense dans* $\overline{C}$ *la réduction de* C^{an} *selon le recouvrement pur* $\{R, R'\}$.

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{R}(C)$ tel que

$$R = \{x \in C \mid f \in \mathcal{O}_{C,x}, |f(x)| \leqslant 1\}.$$

On pose $R' \doteq \{x \in C \mid f^{-1} \in \mathcal{O}_{C,x}, |f^{-1}(x)| \leqslant 1\}$, alors $\{R, R'\}$ est un recouvrement pur de C^{an} qui répond à la question.

Proposition 1.4. — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* R *un espace affinoïde régulier de dimension* 1 *sur* k. *Alors on a les propriétés suivantes :*

1) *Si* R *est un ouvert affinoïde d'une courbe projective non-singulière* C, *on a* $g(R) \leqslant g(C)$ *où* $g(C)$ *est le genre arithmétique de* C.

2) *Si* W *est ouvert affinoïde de* R, *on a* $g(W) \leqslant g(R)$.

Preuve. — 1) Voir [12] prop. 1.2.6.

2) C'est une conséquence immédiate de 1) et de la remarque qui suit le théorème 1.2.

Definition 1.5. — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* X *un espace analytique régulier séparé de dimension* 1 *sur* k. *On appelle genre de* X *et on le note* $g(X)$ *la borne supérieure de* $\{g(R) \mid R \text{ ouvert affinoïde de } X\}$, *donc* $g(X) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *On dit que* X *est de genre fini si* $g(X) < \infty$.

Remarque. — D'après la prop. 1.4, cette définition coïncide avec la définition 1.4 lorsque X est affinoïde.

Proposition 1.5. — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* C *une courbe projective non singulière sur* k. *Alors*

1) $g(C^{an}) = g(C)$ *le genre arithmétique de* C,

2) *tout ouvert analytique de* C^{an} *est de genre fini.*

Preuve. – C'est une conséquence de la proposition 1.6 et du théorème 1.2.

2. Réduction préstable des espaces de genre fini.

Soient k un corps valué complet algébriquement clos, $\mathbf{P}_k^1$ la droite projective, il existe donc une fonction rationnelle T sur $\mathbf{P}_k^1$ telle que $k(\mathrm{T})$ soit le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}_k^1$. On identifie alors k à l'ouvert de $\mathbf{P}_k^1$ où T est régulier et on note ∞ l'unique pôle de T, pour tout $z \in k$ on a donc $\mathrm{T}(z) = z$ et $\mathrm{T}^{-1}(\infty) = 0$. Soient $a \in k$, $\pi \in k - \{0\}$, on note $\mathrm{B}(a, \pi)$ le disque ouvert, $\{z \in k \mid |z - a| < |\pi|\}$ et $\mathrm{D}(a, \pi)$ le disque fermé, $\{z \in k \mid |z - a| \leqslant |\pi|\}$.

On sait ([3] p. 405, [7] p. 91) que tout ouvert affinoïde connexe de P_k^1 est soit de la forme $\mathbf{P}_k^1 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{B}(a_i, \pi_i)$, soit de la forme $\mathrm{D}(a_0, \pi_0) - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{B}(a_i, \pi_i)$ et que pour

$$\mathrm{R} = \mathbf{P}_k^1 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{B}(a_i, \pi_i),$$

tout $f \in \mathcal{O}(\mathrm{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \alpha_0 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j < \infty} \alpha_{ij} \left(\frac{\pi_i}{\mathrm{T} - a_i}\right)^j,$$

avec $\alpha_0 \in k$, $\alpha_{ij} \in k$, $\lim_{j \to \infty} \alpha_{ij} = 0$ et

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \max\{|\alpha_0|, |\alpha_{ij}| \mid 1 \leqslant i \leqslant n, j \geqslant 1\}.$$

([6] p. 7, [7] p. 78 ~ 79).

PROPOSITION 2.1. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* $\mathrm{R} = \mathbf{P}_k^1 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{B}(a_i, \pi_i)$, $f = \alpha_0 + \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left(\frac{\pi_i}{\mathrm{T} - a_i}\right)^j$ *un élément de* $\mathcal{O}(\mathrm{R})^0$. *Alors l'homomorphisme* $\Psi : k\langle \mathrm{T}\rangle \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{R})$ *défini par* $\Psi(\mathrm{T}) = f$ *induit un morphisme* $\varphi_f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbf{B}_k^1 = \mathrm{Spm}\, k\langle \mathrm{T}\rangle$

dont l'application ensembliste n'est autre que $x \longmapsto f(x)$. *Alors* φ_f *est un isomorphisme de* R *sur un ouvert affinoïde de* $\mathbf{B}^1_k$ *si et seulement s'il existe* $i_0 \leqslant n$ *tel que :*

$$|\alpha_{ij}| \underset{\neq}{<} \begin{cases} |\alpha_{i_0,1}| & si \quad i = i_0 \quad et \quad j \geqslant 2 \\ |\alpha_{i_0,1}| \cdot \left|\dfrac{\pi_i \cdot \pi_{i_0}}{(a_i - a_{i_0})^2}\right| & si \quad i \neq i_0\,,\ j \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Preuve. – Voir [9] prop. 2.3.

DEFINITION 2.1. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde régulier connexe de dimension* 1, *de genre* 0, $x_0 \in \mathrm{R}$. *Une partie* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *de* $\mathcal{O}(\mathrm{R})^0$ *est appelée* x_0*-base de* R *s'il existe un isomorphisme* φ *de* R *sur un ouvert affinoïde de* $\mathbf{P}^1_k$ *de la forme*

$$\mathbf{P}^1_k - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{B}(a_i, \pi_i), \qquad avec \qquad e_i = \varphi^{\#}(\mathrm{R}) \left(\frac{\pi_i}{\mathrm{T} - a_i}\right)$$

pour tout $i \leqslant n$, *et* $\varphi(x_0) = \infty$.

PROPOSITION 2.2. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde, régulier, connexe, de dimension* 1, *de genre* 0, $x_0 \in \mathrm{R}$ *et* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ *deux* x_0*-bases de* R. *Alors il existe une bijection*

$$\tau : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$$

tels que $|\lambda_i| = 1$ *et* $e_i \in \lambda_i e'_{\tau(i)} + \mathcal{O}(\mathrm{R})^{00}$.

Preuve. – C'est en fait un corollaire de la proposition 2.1.

Remarque. – Soient k un corps valué complet algébriquement clos, R un espace affinoïde régulier connexe de dimension 1 sur k, de genre 0. Alors R possède au moins une x_0-base. En effet les théorèmes 1.1 et 1.2 montrent que R est isomorphe à un ouvert affinoïde de $\mathbf{P}^1_k$.

PROPOSITION 2.3. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* X *un espace analytique sur* k, *connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *et non projectif (i.e.* X *n'est pas isomorphe* *à l'analytification d'une variété projective sur k). Alors tout ouvert analytique quasi-compact de X est affinoïde et est contenu dans un ouvert affinoïde connexe de X.*

Preuve. – Soient U un ouvert analytique quasi-compact de X, U_1 une composante connexe de U (voir prop. et déf. 1.1), U_1 est quasi-compact, on sait que U_1 est soit affinoïde soit projectif ([5] § 2.2. prop. 5). Supposons U_1 projectif, alors $U_1 \neq X$, il existe V ouvert analytique, connexe, quasi-compact de X tel que $U_1 \subsetneq V$ (prop. 1.2). On a deux cas :

α) V projectif. Il existe $f \in \mathcal{R}(V) - k$ sans pôle dans U_1, donc $f|_{U_1} \in \mathcal{O}(U_1) = k$, donc pour un certain $\lambda \in k$, $f - \lambda$ a une infinité de zéros. C'est impossible.

β) V affinoïde. Pour tout $f \in \mathcal{O}(V)$, $f|_R = (f|_{U_1})|_R \in k$ pour tout ouvert affinoïde R de U_1, donc $\dim R = 0$, donc $\dim U_1 = 0$. C'est impossible.

Par conséquent U_1 est affinoïde, les composantes connexes de U sont affinoïdes, il en est de même pour U. On a le reste par la prop. 1.2.

PROPOSITION 2.4. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un espace analytique sur k connexe, régulier, séparé, de dimension 1, non projectif et de genre 0. Alors X admet un recouvrement admissible $\{X_n\}_{n \geq 1}$ avec $X_n \subset X_{n+1}$, X_n ouvert affinoïde connexe.*

Preuve. – Voir [9] prop. 3.3.

DEFINITION 2.2. – *Soient X un espace analytique sur k, $r : X \longrightarrow \overline{X}$ une réduction analytique de X. On dit que $\overline{X}$ est préstable si les composantes irréductibles de $\overline{X}$ (qui est un schéma localement de type fini sur $\overline{k}$) sont des courbes algébriques non-singulières, si elles sont en nombre au plus dénombrable et si les seules singularités de $\overline{X}$ sont des points doubles ordinaires.*

PROPOSITION 2.5. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un espace analytique sur k, connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre 0, R_0 un ouvert affinoïde connexe* *de* X. *Alors* X *admet un recouvrement pur* $\{R_n\}_{n \geq 0}$ *tel que la réduction associée soit préstable.*

Preuve. – Dans [7] p. 130 on a une démonstration pour les ouverts analytiques connexes de $\mathbf{P}^1_k$, compte tenu de la prop. 2.4, elle s'adapte sans difficulté à la situation présente.

PROPOSITION 2.6. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* C *une courbe projective non-singulière sur* k, R *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an} *de même genre que* C, $\mathfrak{U}$ *un recouvrement pur de* R *et* $s : R \longrightarrow \overline{R}$ *la réduction associée. Alors* C^{an} *admet une réduction analytique* $\hat{s} : C^{an} \longrightarrow \overline{C}$ *telle que* $\overline{C} = \hat{\overline{R}}$ *le complété projectif de* $\overline{R}$ *et* $\hat{s}|_R = s$. *En particulier* $g(\overline{R}) = g(R)$.

Preuve. – Soit $r : R \longrightarrow \overline{R}^c$ la réduction canonique, d'après le corollaire 1.3.1, on a une réduction analytique $\hat{r} : C^{an} \longrightarrow Z$ de C^{an} selon un recouvrement pur de C^{an} telle que $\hat{r}|_R = r$ et que $\overline{R}^c$ soit dense dans Z.

Soit $\varphi : \overline{R} \longrightarrow \overline{R}^c$ le morphisme induit par le morphisme d'espaces analytiques formels $\mathrm{Id}_R : (R, \mathfrak{U}) \longrightarrow (R, \{R\})$, soit Y' la réunion des composantes irréductibles complètes de $\overline{R}$. Alors $\varphi(Y')$ est fini, $\varphi^{-1}(\varphi(Y')) = Y'$ et $\varphi : \overline{R} - Y' \longrightarrow \overline{R}^c - \varphi(Y')$ est un isomorphisme ([4] Théorème 4, p. 345, [12] prop. 1.1.2). Comme $g(C) = g(R)$, on a $g(Z) = g(\overline{R}^c)$, donc $Z - \overline{R}^c$ est fini et régulier.

Posons $V = \overline{R} - Y'$, c'est un ouvert affine de $\overline{R}$, soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des ouverts affines de $\overline{R}$ tels que $V_i \neq V$ et $\overline{R} = V \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$, soit U ouvert affine de Z tel que $U \cap \overline{R}^c \subseteq \varphi(V)$ et $Z - \overline{R}^c \subseteq U$. Alors le recouvrement

$$\{\hat{r}^{-1}(U), r^{-1}(\varphi(V)), s^{-1}(V_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

est un recouvrement pur de C^{an}. Et il est clair que la réduction $\hat{s} : C^{an} \longrightarrow \overline{C}$ répond à la question.

LEMME 2.1. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* C *une courbe projective non-singulière sur* k, R_0 *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an}, R *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an} *qui rencontre* R_0, $r : R_0 \longrightarrow \overline{R}^c_0$ *la réduction canonique. Alors* *ou bien* R *contient une partie formelle de* R_0 *(i.e.* $R \supset r^{-1}(Z)$, *où* Z *est un ouvert affine de* $\overline{R}_0^c$), *ou bien* R *est contenu dans une fibre formelle de* R_0 *(i.e.* $R \subset r^{-1}(p)$, *où* $p \in \overline{R}_0^c$).

Preuve. – Voir [9] prop. 4.4 et prop. 1.6.

LEMME 2.2. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* C *une courbe projective non-singulière sur* k, $r : C^{an} \longrightarrow \overline{C}$ *la réduction de* C^{an} *selon un recouvrement pur de* C^{an}, p *un point régulier de* $\overline{C}$, R *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an} *tel que* $R \cap r^{-1}(p) \neq \emptyset$ *et* R *non contenu dans* $r^{-1}(p)$. *Alors pour tout ouvert affine régulier connexe* V *contenant* p, *assez petit, et pour tout* $f \in \mathcal{O}(r^{-1}(V))^0$ *tel que* $\overline{f}$ *soit un paramètre local en* p, *on a les propriétés suivantes :*

1) *L'homomorphisme* $\psi : k\langle T\rangle \longrightarrow \mathcal{O}(r^{-1}(V))$ *défini par* $\psi(T) = f$ *induit un morphisme de* $r^{-1}(V)$ *dans* $\mathbf{B}_k^1$ *qui est un isomorphisme de* $r^{-1}(p)$ *sur* $\{z \in k^0 \mid |z| < 1\}$ *dont l'application ensembliste est* $x \longmapsto f(x)$.

2) *Il existe* $B_1, B_2, \ldots, B_s$ *disques ouverts de* $r^{-1}(p)$, *tels que* $R \cap r^{-1}(p) = r^{-1}(p) - \bigcup_{1 \leq i \leq s} B_i$. *En particulier, il existe* $\pi_0 \in k^{00}$ *tel que* $\{x \in r^{-1}(p) \mid |f(x)| \geq |\pi_0|\} \subseteq R$.

3) *Soit* $\pi \in k^{00} - \{0\}$, *alors* $W = \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| \geq |\pi|\}$ *est un ouvert affinoïde connexe de* $r^{-1}(V)$, $\overline{W}^c$ *a deux composantes irréductibles* Z_1, Z_2 *respectivement isomorphes à* V *et à* $\mathbf{A}_{\overline{k}}^1 = \operatorname{Spm} \overline{k}[T]$, *et* $Z_1 \cap Z_2$ *est un point doubles ordinaire pour* $\overline{W}^c$.

Preuve. – 1) Voir [3] prop. 2.2, [4] prop. 3 p. 332.

2) Voir [9] prop. 4.4.

THEOREME 2.1. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique régulier, connexe, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Alors* X *admet une réduction préstable.*

Preuve. – Si X est projectif, voir [3] Théorème 7.1, [12] Théorème 1.9. La démonstration étant de nature locale, le résultat est aussi vrai pour les espaces affinoïdes réguliers de dimension 1. On supposera dans la suite X non projectif.

α) Soit R_0 un ouvert affinoïde connexe de X de genre $g(X)$, (R_0 existe d'après la prop. 2.3), soit $s_0 : R_0 \longrightarrow \overline{R}_0$ la réduction de R_0 selon un recouvrement pur $\mathfrak{U}_0 = \{U_1, \ldots, U_\iota\}$, on suppose qu'elle est préstable. Pour tout ouvert affinoïde connexe R contenant R_0, il existe une courbe projective non-singulière C sur k, de genre $g(X)$, et un isomorphisme φ de R sur un ouvert affinoïde de C^{an}. Soit $r_0 : \varphi(R_0) \longrightarrow \overline{\varphi(R_0)}$ la réduction préstable de $\varphi(R_0)$ selon le recouvrement pur $\varphi(\mathfrak{U}_0) = \{\varphi(U_1), \ldots, \varphi(U_\iota)\}$, d'après la prop. 2.6, C^{an} admet une réduction analytique $\hat{r}_0 : C^{an} \longrightarrow \overline{C}$ telle que $\overline{C} = \widehat{\overline{\varphi(R_0)}}$ et $\hat{r}_0 |_{\varphi(R_0)} = r_0$.

β) Montrons qu'il existe un couple (R_0, s_0) décrit comme ci-dessus tel que

(*) pour tout quadruplet $(R, \varphi, C, \hat{r}_0)$ décrit comme ci-dessus, les points de $\hat{r}_0(\varphi(R_0)) - \overline{\varphi(R_0)}$ soient sur les composantes irréductibles rationnelles de $\overline{C}$.

En effet si un couple donné (R_0, s_0) ne vérifie pas (*), on peut en trouver un autre qui la vérifie "mieux". Plus précisément, soient $(R, \varphi, C, \hat{r}_0)$ un quadruplet pour lequel (R_0, s_0) ne vérifie pas (*), $p \in \{\hat{r}_0(\varphi(R)) - \overline{\varphi(R_0)}\} \cap Y_1$ où Y_1 est une composante irréductible non rationnelle, p étant régulier, il existe un ouvert affine connexe $V \subseteq \overline{C}$, $f \in \mathcal{O}(r^{-1}(V))^0$ tels que

$$p \in V \subset Y_1 ,\ V - \{p\} \subsetneq \overline{\varphi(R_0)}$$

et $\overline{f}$ soit un paramètre local en p. D'après le lemme 2.2 il existe $\pi \in k^{00} - \{0\}$ tel que $W = \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| \geqslant |\pi|\}$ soit connexe et contenu dans $\varphi(R)$, donc $W_1 = \varphi(R_0) \cup W$ est un ouvert affinoïde connexe contenu dans $\varphi(R)$, $R_1 = \varphi^{-1}(W_1)$ est un ouvert affinoïde connexe de X de genre $g(X)$ (R_1 contient R_0) et d'après le lemme 2.2, $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_0 \cup \{\varphi^{-1}(W)\}$ est un recouvrement pur de R_1 et la réduction associée $s_1 : R_1 \longrightarrow \overline{R}_1$ est préstable. A $\overline{R}_0$ on peut associer $n_{s_0}(R_0)$ le nombre de points de $\hat{\overline{R}}_0 - \overline{R}_0$ qui sont sur des composantes irréductibles non rationnelles, on définit de la même façon $n_{s_1}(R_1)$. La description de $\overline{W}^c$ par le lemme 2.2 montre que $n_{s_1}(R_1) = n_{s_0}(R_0) - 1$. Comme ces nombres sont positifs, au bout d'un nombre fini de telles opérations, on trouve un couple (R_0, s_0) qui vérifie (*). Il sera fixé dans la suite.

γ) Soient F l'ensemble des points de $\hat{\overline{\mathrm{R}}}_0 - \overline{\mathrm{R}}_0$ qui sont sur les composantes irréductibles rationnelles $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_m$ de $\hat{\overline{\mathrm{R}}}_0$, et pour tout $i \leqslant m$, V_i un ouvert affine régulier de $\hat{\overline{\mathrm{R}}}_0$ tel que $\mathrm{F} \cap \mathrm{Z}_i \subset \mathrm{V}_i \subset \mathrm{Z}_i$. Pour tout quadruplet $(\mathrm{R}, \varphi, \mathrm{C}, \hat{r}_0)$ décrit dans α), φ induit un isomorphisme $\Psi : \overline{\mathrm{R}}_0 \longrightarrow \overline{\varphi(\mathrm{R}_0)}$ tel que $\Psi \circ s_0 = r_0 \circ \varphi$, ψ se prolonge en un isomorphisme $\hat{\psi} : \hat{\overline{\mathrm{R}}}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{C}}$. D'après le choix de (R_0, s_0) (voir β)),

$$\hat{r}_0 (\varphi(\mathrm{R})) \subset \overline{\varphi(\mathrm{R}_0)} \cup \hat{\psi}(\mathrm{F}) = \hat{\psi}(\overline{\mathrm{R}}_0 \cup \mathrm{F}),$$

donc $\varphi(\mathrm{R}) = \varphi(\mathrm{R}_0) \cup \Big(\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi(\mathrm{R}) \cap \hat{r}_0^{-1}(\hat{\psi}(\mathrm{V}_i))\Big)$, donc

$$(^{**})\ \mathrm{R} = \mathrm{R}_0 \cup \Big[\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi^{-1}(\varphi(\mathrm{R}) \cap \hat{r}_0^{-1}(\hat{\psi}(\mathrm{V}_i)))\Big].$$

On pose pour $i \leqslant m$ $\mathrm{X}_i = \cup\, \varphi^{-1}(\varphi(\mathrm{R}) \cap \hat{r}_0^{-1}(\psi(\mathrm{V}_i)))$, où la réunion est prise sur tous les quadruplets possibles $(\mathrm{R}, \varphi, \mathrm{C}, \hat{r}_0)$ décrits dans α). On a X_i connexe, séparé, de genre 0, par conséquent X_i admet un recouvrement pur $\mathfrak{U}_i = \{\mathrm{R}_{n,i}\}_{n \geqslant 0}$ tel que la réduction associée soit préstable et $\mathrm{R}_{0,i} = s_0^{-1}(\mathrm{V}_i - \mathrm{F} \cap \mathrm{Z}_i)$ (prop. 2.5).

D'après $(^{**})$, $\mathfrak{U}_0 \cup \mathfrak{U}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}$ est un recouvrement affinoïde admissible de X ($\mathfrak{U}_0$ est un recouvrement pur de R_0 qui définit $s_0 : \mathrm{R}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{R}}_0$). Il est clair que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement pur de X et que la réduction associée est préstable.

COROLLAIRE 2.1.1. – *Avec les hypothèses du théorème, si* X *n'est pas projectif, on a les propriétés suivantes :*

1) *L'espace* X *admet un recouvrement admissible* $\{\mathrm{X}_n\}_{n \geqslant 1}$ *avec* X_n *affinoïde connexe,* $\mathrm{X}_n \subseteq \mathrm{X}_{n+1}$ *et* $\mathcal{O}(\mathrm{X}_{n+1})$ *est dense dans* $\mathcal{O}(\mathrm{X}_n)$.

2) *Pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X *et tout entier* $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = 0$ *et* $\mathcal{F}$ *est engendré par ses sections globales.*

Preuve. – Voir [9] prop. 4.5.

3. Immersion dans une courbe projective.

THEOREME 3.1. – *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* X *ouvert analytique connexe d'une courbe projective* *connexe non-singulière sur* k. *Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective non-singulière de genre* $g(\mathrm{X})$.

Preuve. – On suppose $g(\mathrm{X}) < g(\mathrm{C})$. Soit $r : \mathrm{C} \longrightarrow \overline{\mathrm{C}}$ une réduction analytique préstable. On va montrer que X est isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective connexe non-singulière C_1 qui admet une réduction préstable $\overline{\mathrm{C}}_1$ ayant strictement moins de singularités que $\overline{\mathrm{C}}$, ce qui démontrera le théorème.

Soit q un point singulier de $\overline{\mathrm{C}}$, c'est un point double ordinaire. Soit V un ouvert affine de $\overline{\mathrm{C}}$ qui contient q et tel que $\mathrm{V} - \{q\}$ soit régulier. Il existe $f \in \mathcal{O}(r^{-1}(\mathrm{V}))$ inversible, $\pi \in k^{00}$ tel que $\| f \|_{\mathrm{sp}} = \| \pi f^{-1} \|_{\mathrm{sp}} = 1$, et que l'homomorphisme

$$\psi : k\langle \mathrm{T} \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(r^{-1}(\mathrm{V}))$$

défini par $\psi(\mathrm{T}) = f$ induise un morphisme $\sigma : r^{-1}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathbf{B}_k^1$ qui est un isomorphisme de $r^{-1}(q)$ sur $\{z \in k^0 \mid |\pi| < |z| < 1\}$ ([3] prop. 2.3). Pour tout $x \in r^{-1}(\mathrm{V})$, on a $\sigma(x) = f(x)$.

Il y a deux types de points singuliers q.

I) Il existe R un ouvert affinoïde connexe de X qui rencontre $r^{-1}(q)$, et $r^{-1}(q) - \mathrm{R} \cap r^{-1}(q)$ est contenu dans une réunion finie disjointe de disques ouverts.

II) Pour tout ouvert affinoïde connexe R de X qui rencontre $r^{-1}(q)$, il existe $\alpha, \beta \in k$ tels que $|\pi| \leqslant |\alpha| < |\beta| \leqslant 1$ et $\mathrm{R} \cap r^{-1}(q) = \{x \in r^{-1}(q) \mid |f(x)| \notin]\,|\alpha|, |\beta|\,[\,\} - \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathrm{B}_i$ où les B_i sont des disques ouverts de $r^{-1}(q)$.

Si tous les points singuliers q sont du type I, $\mathrm{C} - \mathrm{X}$ est contenu dans une réunion finie disjointe de disques ouverts (voir lemme 2.1), on aura donc $g(\mathrm{C}) = g(\mathrm{X})$, ce qui est contraire à l'hypothèse $g(\mathrm{X}) < g(\mathrm{C})$. Par suite il existe un point singulier q du type II. Il existe donc $\lambda \in [\,|\pi|, 1]$ ($|\pi|$ est le rapport de la couronne $r^{-1}(q)$) tel que pour tout ouvert affinoïde R de X, il existe $\alpha, \beta \in k$ avec $|\alpha| < \lambda < |\beta|$ et

$$\{x \in r^{-1}(q) \mid |\alpha| < |f(x)| < |\beta|\} \subset r^{-1}(q) - \mathrm{R} \cap r^{-1}(q).$$

Supposons d'abord $\lambda \in]\,|\pi|, 1\,[$, fixons $\pi_1, \pi_2 \in k$ tels que $|\pi| < |\pi_2| < \lambda < |\pi_1| < 1$ et considérons les espaces affinoïdes : $\mathrm{D}_1 = \{z \in k \mid |z| \leqslant |\pi_1|\} \subset \mathbf{P}_k^1$, $\mathrm{D}_2 = \{z \in k \mid |z| \geqslant |\pi_2|\} \cup \{\infty\} \subset \mathbf{P}_k^1$ et

$$W_0 = r^{-1}(\overline{C} - \{q\}) \cup \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| \geqslant |\pi_1|$$

ou $|f(x)| \leqslant |\pi_2|\}$, W_0 est affinoïde car quasi-compact et différent de C ([5] § 2.2). On les recolle selon les isomorphismes :

$$W_0 \supset \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| = |\pi_1|\} \xrightarrow[\sim]{\sigma} \{z \in k \mid |z| = |\pi_1|\} \subset D_1$$

$$W_0 \supset \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| = |\pi_2|\} \xrightarrow[\sim]{\sigma} \{z \in k \mid |z| = |\pi_2|\} \subset D_2\,,$$

et on note Z l'espace analytique ainsi obtenu. Soient

$$\psi_0 : W_0 \longrightarrow Z\,,\ \psi_1 : D_1 \longrightarrow Z\,,\ \psi_2 : D_2 \longrightarrow Z$$

les morphismes injections canoniques. On définit une application $\theta : C \longrightarrow Z$ par :

$$\theta\ (x) = \begin{cases} \psi_0(x) & \text{si} \quad x \in W_0 \\ \psi_1(\sigma(x)) & \text{si} \quad x \in r^{-1}(q) \quad \text{et} \quad |\pi_2| < |f(x)| \leqslant \lambda \\ \psi_2(\sigma(x)) & \text{si} \quad x \in r^{-1}(q) \quad \text{et} \quad |\pi_1| > |f(x)| > \lambda\,. \end{cases}$$

Le fait que le point singulier q soit du type II entraine que θ induit un isomorphisme de X sur un ouvert analytique de Z. D'autre part Z admet une réduction $\overline{Z}$ isomorphe à la normalisation de $\overline{C}$ au point q. Comme Z est séparé, c'est une courbe projective régulière analytifiée. Soit C_1 la composante connexe de Z qui contient $\theta(X)$, alors X est isomorphe à l'ouvert analytique θ (X) de C_1, C_1 est une courbe projective non-singulière, elle admet une réduction analytique $\overline{C}_1$ qui est une composante connexe de $\overline{Z}$, donc $\overline{C}_1$ a strictement moins de singularités que $\overline{C}$. La démonstration est donc terminée. Le cas où $\lambda = 1$ ou $\lambda = |\pi|$ se traite de façon analogue.

Nous considérons maintenant le problème de l'immersion d'un espace analytique de genre fini dans une courbe projective.

DEFINITION ET NOTATION 3.1. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, R un k-espace affinoïde, connexe, régulier de dimension 1, de genre 0, $x_0 \in R$, R_1 un ouvert affinoïde connexe de R contenant x_0.*

1) *Soit $f \in \mathcal{O}(R)^0$, on dit que f induit une immersion injective ouverte si l'homomorphisme $\psi_f : k\langle T\rangle \longrightarrow \mathcal{O}(R)$ défini par $\psi_f(T) = f$ induit un morphisme $\varphi_f : R \longrightarrow \mathbf{B}_k^1 = \mathrm{Spm}\, k\langle T\rangle$ qui est un isomorphisme de R sur un ouvert affinoïde de $\mathbf{B}_k^1$.*

2) *On note par* $\left|\dfrac{R_1}{R}\right|$ *le nombre*

$$\sup\{\|f|_{R_1}\|_{sp} \mid f \in \mathcal{O}(R)^0,\ f|_{R_1} \text{ non inversible}\}.$$

3) *Soient* $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ *une* x_0*-base de* R_1 *(voir définition* 2.1), $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ *une* x_0*-base de* R. *On définit l'application* $\tau(E, D) : E \longrightarrow D$ *de la façon suivante : pour tout* $i \leqslant n$, $e_i|_{R_1}$ *induit une immersion injective ouverte, donc il existe* $j \leqslant m$ *unique,* $\lambda \in k$ *tels que* $e_i|_{R_1} \in \lambda(d_j + \mathcal{O}(R_1)^{00})$ *(voir prop.* 2.1), *on associe alors* d_j *à* e_i.

4) *Soit* $\varphi : R \longrightarrow \mathbf{P}^1_k$ *un isomorphisme de* R *sur un ouvert affinoïde* $\mathbf{P}^1_k - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} B(a_i, \pi_i)$ *de* $\mathbf{P}^1_k$ *tel que* $\varphi(x_0) = \infty$ *et pour tout* $i \leqslant n$, $e_i = \varphi^{\#}(R)\left(\dfrac{\pi_i}{T - a_i}\right)$, *on note* $\langle e_i | e_j \rangle$ *le nombre* $\left|\dfrac{\pi_i \pi_j}{(a_i - a_j)^2}\right|$ *si* $i \neq j$, *et* 1 *si* $i = j$.

PROPOSITION 3.1. – *Avec les hypothèses de la définition 3.1, on a les propriétés suivantes :*

1) *Soient* R_2 *un ouvert affinoïde connexe de* R *contenant* R_1, $H = \{h_1, \dots, h_t\}$ *une* x_0*-base de* R_2. *Alors*

$$\left|\frac{R_1}{R}\right| \leqslant \left|\frac{R_1}{R_2}\right| \left|\frac{R_2}{R}\right| \quad \left|\frac{R_1}{R}\right| = \max\{\|e_i|_{R_1}\| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

et $\tau(E, D) = \tau(H, D) \circ \tau(E, H)$.

2) *Les nombres* $\langle e_i | e_j \rangle$ *ne dépendent pas du choix de l'isomorphisme* φ.

Preuve. – C'est une conséquence immédiate des propositions 2.1 et 2.2.

LEMME 3.1. – *Soient* k *valué complet algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique régulier de dimension* 1, $(R_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite croissante (pour l'inclusion) d'ouverts affinoïdes connexes de genre* 0 *de* $X, x_0 \in R_1$. *On suppose que* $|\eta_n| = \left|\dfrac{R_n}{R_{n+1}}\right| < 1$ *pour tout* n. *Alors il existe pour tout* $n \geqslant 1$ *une* x_0*-base*

$\{e_{n,1}, \ldots, e_{n,s_n}\}$ *de* R_n *telle que pour* $n > m \geqslant 1$, *on ait*
$e_{n,1}|_{R_m} \in k^{00} \cdot [e_{m,1} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s_n} \delta_{n,m} \; \xi_{m,j} \; k^{00} \langle e_{m,j} \rangle]$, *où*

$$|\delta_{n,m}| = \text{Max}\,\{|\eta_i| \mid m \leqslant i \leqslant n-1\}$$

et $|\xi_{m,j}| = \langle e_{m,j} | e_{m,1} \rangle$.

Preuve. – Voir [9] lemme 5.2.

LEMME 3.2. – *Avec les hypothèses et notations du lemme* 3.1, *il existe une suite d'ouverts affinoïdes connexes* $\{S_n\}_{n \geqslant 1}$ *tels que :*

1) *Pour tout* $n \geqslant 1$, $R_n \subset S_n \subset R_{n+1}$ *et* $\left| \dfrac{S_n}{S_{n+1}} \right| < 1$.

2) *Pour tout isomorphisme* φ_n de S_n *sur un ouvert affinoïde* $\mathbf{P}^1_k - \bigcup_i B(c_i, \iota_i)$ *de* $\mathbf{P}^1_k$ *avec* $\varphi_n(x_0) = \infty$, *on a* $|c_i - c_j| > |\iota_i|$ *si* $i \neq j$.

Preuve. – Voir [9] lemme 5.3.

PROPOSITION 3.2. – *Soient* k *un corps valué maximalement complet et algébriquement clos,* X *un k-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre* 0. *Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique de* $\mathbf{P}^1_k$.

Preuve. – Soit $r : X \longrightarrow \overline{X}$ une réduction préstable (proposition 2.5), si X a un nombre fini de composantes irréductibles, alors X est soit $\mathbf{P}^1_k$, soit un espace affinoïde ([4] théorème 4 p. 345, [12] prop. 1.1), on a donc le résultat d'après le théorème 1.1 (van der Put). On suppose donc que $\overline{X}$ a une infinité de composantes irréductibles $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$. Quitte à augmenter X, on peut les supposer toutes complètes. Comme $g(X) = 0$, le graphe d'intersection de $\overline{X}$ est un arbre ([7] p. 130). Soit $d(Z_n, Z_m)$ la distance entre Z_n et Z_m dans le graphe d'intersection de $\overline{X}$ ([7] p. 11).

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = r^{-1}(\overline{X} - \bigcup_{d(Z_1, Z_m) \geqslant n} Z_m)$, les R_n sont des ouverts affinoïdes connexes de X et $\{R_n\}_{n \geqslant 1}$ est un recouvrement admissible de X. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left| \dfrac{R_n}{R_{n+1}} \right| < 1$.

On fixe un point $x_0 \in R_1$ et on considère la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ associée aux R_n, définie dans le lemme 3.1. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $D_n = \{d_{n,1}, \ldots, d_{n,s_n}\}$ une x_0-base de S_n, on peut supposer que $\tau(D_{n+1}, D_n)(d_{n+1,1}) = d_{n,1}$, donc si $n > m \geqslant 1$, on a $\tau(D_n, D_m)(d_{n,1}) = d_{m,1}$, par conséquent,

$$d_{n,1}|_{S_m} = \alpha_{n,m}\Big(\sum_{\iota \geqslant 1}\ \sum_{1 \leqslant j \leqslant s_m} \lambda_{m,j,\iota}(n)\, d^{\iota}_{m,j}\Big),$$

où $\alpha_{n,m} \in k$, $\lambda_{m,j,\iota}(n) \in k$, $\lim\limits_{\iota \to \infty} \lambda_{m,j,\iota}(n) = 0$, $\lambda_{m,1,1}(n) = 1$ et $|\lambda_{m,j,\iota}(n)| \underset{\neq}{<} \langle d_{m,j} | d_{m,1}\rangle$ si $(j, \iota) \neq (1, 1)$. (voir prop. 2.2).

Soit $\Delta_{m,j,\iota}$ la suite définie par $\Delta_{m,j,\iota}(n) = 0$ si $n \leqslant m$ et $\Delta_{m,j,\iota}(n) = \lambda_{m,j,\iota}(n)$ si $n > m$. Soit $\iota^{\infty}(k)$ l'ensemble des suites à coefficients dans k et bornées, les $\Delta_{m,j,\iota}$ sont des éléments de $\iota^{\infty}(k)$. Soit c l'ensemble des suites convergentes à coefficients dans k, la forme linéaire $\Phi : c \longrightarrow k$ définie par $\Phi((\alpha_n)_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$ est continue, de norme égale à 1. Soit G le sous-espace vectoriel fermé de $\iota^{\infty}(k)$ (muni de la norme $\|(\alpha_n)_n\| = \operatorname{Sup}\limits_n |\alpha_n|$) engendré par c et les suites $\Delta_{m,j,\iota}$ pour $m \geqslant 1$, $j \leqslant s_m$, $\iota \geqslant 1$. La forme linéaire Φ se prolonge en une forme linéaire continue de G dans k, de norme égale à 1 ([10] chap V, k maximalement complet), on note encore Φ ce prolongement.

Pour tout $m \geqslant 1$, on pose

$$g_m = \alpha_{m,1}^{-1} \sum_{\iota \geqslant 1}\ \sum_{1 \leqslant j \leqslant s_m} \Phi(\Delta_{m,j,\iota})\, d^{\iota}_{m,j}|_{S_{m-1}},$$

la série converge car

$$\| d_{m,j}|_{S_{m-1}} \|_{sp} \leqslant \left| \frac{S_{m-1}}{S_m} \right| < 1,$$

donc $g_m \in \mathcal{O}(S_{m-1})$. En utilisant la proposition 2.1, un calcul semblable à celui du lemme 3.1 montre que $\alpha_{m,1} \cdot g_m$ induit une immersion injective ouverte. Par suite l'homomorphisme

$$\psi_m : k\langle \alpha_{m,1} T\rangle \longrightarrow \mathcal{O}(S_{m-1})$$

défini par $\psi_m(\alpha_{m,1} T) = \alpha_{m,1}\, g_m$ induit un isomorphisme φ_m de

S_{m-1} sur l'ouvert affinoïde $\{z \in k \mid |z| \leqslant |\alpha_{m,1}|^{-1}\} \subseteq \mathbf{P}_k^1$ dont l'application ensembliste est $x \longmapsto g_m(x)$. Soient $x \in S_{m-2}$, $n > m$, on a $\alpha_{n,m}\, \alpha_{m,1} = \alpha_{n,1}$, donc

$$\alpha_{m,1}^{-1} \sum_{\iota \geqslant 1} \sum_{s_m \geqslant j \geqslant 1} \Delta_{m,j,\iota}(n)\, d_{m,j}^{\iota}(x)$$

$$= \alpha_{m,1}^{-1}\, \alpha_{n,m}^{-1} \quad d_{n,1}(x) = \alpha_{n,1}^{-1}\, d_{n,1}(x).$$

Donc $g_m(x) - g_{m-1}(x)$ est l'image par Φ d'une suite nulle à partir du $m^{\text{ième}}$ rang, donc $g_m(x) - g_{m-1}(x) = 0$, ce qui prouve que $\varphi_m|_{S_{m-2}} = \varphi_{m-1}$. Soit $X' = \bigcup_{m \geqslant 2} \varphi_m(S_{m-1})$, les $\varphi_m(S_{m-1})$ forment un recouvrement affinoïde admissible de l'ouvert analytique X' de $\mathbf{P}_k^1$ ([7] p. 127), donc X est isomorphe à X'.

PROPOSITION 3.3. — *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un k-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre 0. On suppose que pour tout R ouvert affinoïde connexe de X, $\inf \{ \left| \frac{R}{R'} \right| \mid R'$ ouvert affinoïde connexe contenant $R\}$ est nulle. Alors X est isomorphe à un ouvert analytique X' de $\mathbf{P}_k^1$ tel que $\mathbf{P}_k^1 - X'$ soit une partie compacte (pour la topologie ordinaire sur $\mathbf{P}_k^1$).*

Preuve. — On peut supposer X non projectif. Soit $\delta \in k^{00} - \{0\}$, X admet un recouvrement admissible affinoïde $\{R_n\}_{n \geqslant 1}$ avec R_n connexe, $R_n \subset R_{n+1}$ et $\left| \frac{R_n}{R_{n+1}} \right| \leqslant |\delta|$ (voir prop. 2.4).

Soit $x_0 \in R_1$. On munit chaque R_n d'une x_0-base $\{e_{n,1}, \ldots, e_{n,s_n}\}$ définie dans le lemme 3.1, donc pour $n > m \geqslant 1$, on a $e_{n,1}|_{R_m} \in k^0.[e_{m,1} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s_m} \delta\, \xi_{m,j}\, k^{00} \langle e_{m,j} \rangle]$, où $\xi_{m,j} \in k$ et $|\xi_{m,j}| = \langle e_{m,j} | e_{m,1} \rangle$. On considère les suites $\Delta_{m,j,\iota}$ associées aux x_0-bases $\{e_{n,1}, \ldots, e_{n,s_n}\}$ définies dans la démonstration de la proposition précédente ainsi que les espaces de Banach $\ell^\infty(k)$, c, G. Soit Φ une forme linéaire sur G satisfaisant $\|\Phi\| < |\delta|^{-1}$ et $\Phi((\alpha_n)_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$ pour tout $(\alpha_n)_n \in c$ ([10] p. 61). On a donc $\Phi(\Delta_{m,1,1}) = 1$ et si $(j, \iota) \neq (1, 1)$

$|\Phi(\Delta_{m,j,\iota})| \leqslant \|\Phi\| \cdot |\delta| \cdot \langle e_{m,j} | e_{m,1}\rangle \underset{\neq}{<} \langle e_{m,j} | e_{m,1}\rangle$. On définit, de façon analogue à ce qui est fait dans la démonstration de la proposition précédente, les fonctions $g_m \in \mathcal{O}(\mathrm{R}_{m-1})$, un petit calcul montre que g_m induit un isomorphisme φ_m de R_{m-1} sur un ouvert affinoïde de $\mathbf{P}_k^1$ et que $\varphi_m|_{\mathrm{R}_{m-2}} = \varphi_{m-1}$. Soit $\mathrm{X}' = \bigcup_{m \geqslant 2} \varphi_m(\mathrm{R}_{m-1})$, en composant avec une fonction homographique, on peut supposer $\varphi_m(x_0) = \infty$. Comme

$$\left|\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_m}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}\right| \cdots \left|\frac{\mathrm{R}_{m-1}}{\mathrm{R}_m}\right| \leqslant |\delta|^{m-1},$$

si $\varphi_2(\mathrm{R}_1) = \mathbf{P}_k^1 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s_1} \mathrm{B}(a_i, \pi_i)$, $\mathbf{P}_k^1 - \varphi_{m+1}(\mathrm{R}_m)$ est une réunion d'un nombre fini de disques ouverts de rayons majorés par $|\delta|^{m-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant s_1} |\pi_i|$, ce qui montre que $\mathbf{P}_k^1 - \mathrm{X}'$ est compact.

Soit R un ouvert affinoïde de $\mathbf{P}_k^1$ contenu dans X', $(\mathrm{R} \cap [\mathbf{P}_k^1 - \varphi_{m+1}(\mathrm{R}_m)])_{m \geqslant 1}$ est une suite décroissante d'ouverts de diamètres tendant vers 0, d'intersection vide, donc

$$\mathrm{R} \cap [\mathbf{P}_k^1 - \varphi_{m+1}(\mathrm{R}_m)] = \emptyset$$

pour un certain m, soit $\mathrm{R} \subset \varphi_{m+1}(\mathrm{R}_m)$, donc $\{\varphi_{m+1}(\mathrm{R}_m)\}_{m \geqslant 1}$ est un recouvrement admissible de l'ouvert analytique X' et X est isomorphe à X'.

DEFINITION 3.2. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un k-espace analytique connexe, régulier, de dimension 1, séparé, de genre fini, $r : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{X}}$ une réduction préstable. On appelle demi-droite infinie de $\overline{\mathrm{X}}$ toute suite $(\mathrm{Y}_n)_{n \geqslant 1}$ de composantes irréductibles deux à deux distinctes de $\overline{\mathrm{X}}$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Y}_n \cap \mathrm{Y}_{n+1} \neq \emptyset$. Comme $g(\mathrm{X}) < \infty$, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout*

$$m \geqslant n+2\,,\ \mathrm{Y}_n \cap \mathrm{Y}_{n+1} = \{q_n\}$$

(i.e. est réduit à un point) et $\mathrm{Y}_n \cap \mathrm{Y}_m = \emptyset$. La fibre formelle $r^{-1}(q_n)$ est isomorphe à une couronne $\{z \in k \mid |\pi_n| < |z| < 1\}$, on appelle valeur absolue de l'angle $(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_{n+1})$ le nombre $|\pi_n|$ ([7] p. 131), on dit que le produit des valeurs absolues des angles de la demi-droite $(\mathrm{Y}_n)_{n \geqslant 1}$ est nul si $\prod_{n \geqslant n_0} |\pi_n| = 0$.

PROPOSITION 3.4. — *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre* 0. *On suppose que* X *admet une réduction préstable* $r : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{X}}$ *telle que le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie de* $\overline{\mathrm{X}}$ *soit nul et que toutes les composantes irréductibles de* $\overline{\mathrm{X}}$ *soient complètes. Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique* X' *de* $\mathbf{P}_k^1$ *et* $\mathbf{P}_k^1 - \mathrm{X}'$ *est compact.*

Preuve. — Voir [9] prop. 5.3.

Nous passons maintenant du genre 0 au genre fini.

THEOREME 3.2. — *Soient* k *un corps valué maximalement complet et algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Alors* X *est un ouvert analytique d'une courbe projective non-singulière de genre* $g(\mathrm{X})$.

Preuve. — Soit $r : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{X}}$ une réduction préstable, on peut supposer que $\overline{\mathrm{X}}$ a une infinité de composantes irréductibles (voir le début de la démonstration de la proposition 3.2). Soient V_0 un ouvert affine connexe de $\overline{\mathrm{X}}$ tel que $g(\mathrm{V}_0) = g(\mathrm{X})$, F l'adhérence de V_0 dans $\overline{\mathrm{X}}$, et $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ les adhérences des composantes connexes de $\overline{\mathrm{X}} - \mathrm{F}$. Pour tout $i \leqslant n$, $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}_i$ est un point double ordinaire p_i, il existe alors un ouvert affine connexe U_i et $f_i \in \mathcal{O}(r^{-1}(\mathrm{U}_i))^0$ avec les propriétés suivantes: $p_i \in \mathrm{U}_i$, $\mathrm{U}_i - \{p_i\}$ est régulier, l'homomorphisme $\psi_i : k\langle \mathrm{T}\rangle \longrightarrow \mathcal{O}(r^{-1}(\mathrm{U}_i))$ défini par $\psi_i(\mathrm{T}) = f_i$ induit un isomorphisme σ_i de $r^{-1}(p_i)$ sur une couronne de la forme $\{z \in k \mid |\pi_i| < |z| < 1\}$ et $\overline{f_i}\,|_{\mathrm{F} \cap \mathrm{U}_i} = 0$ ([3] prop. 2.3). On fixe π_0, $\pi_0' \in k$ tels que $1 > |\pi_0| > |\pi_0'| > |\pi_i|$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et on considère les ouverts analytiques

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_i &= r^{-1}(\mathrm{F}_i - \{p_i\}) \cup \{x \in r^{-1}(\mathrm{U}_i) \mid |f_i(x)| \geqslant |\pi_0|\},\\
\mathrm{A}_i &= \{x \in r^{-1}(\mathrm{U}_i) \mid |\pi_0| \geqslant |f_i(x)| \geqslant |\pi_0'|\};\\
\mathrm{X}_i' &= \mathrm{X}_i \cup \mathrm{A}_i,\ \mathrm{R}_i = \mathrm{X}_i \cap \mathrm{A}_i = \{x \in r^{-1}(\mathrm{U}_i) \mid |f_i(x)| = |\pi_0|\},\\
\mathrm{R}_0 &= r^{-1}(\mathrm{F} - \{p_1, \ldots, p_n\}) \cup \\
&\qquad \bigcup_{i \leqslant n} \{x \in r^{-1}(\mathrm{U}_i) \mid |f_i(x)| \leqslant |\pi_0|\}.
\end{aligned}$$

Pour $i \leqslant n$, on a $g(\mathrm{X}_i') = 0$ parce que $\mathrm{X}_i' \cap r^{-1}(\mathrm{V}_0) = \emptyset$. On construit l'espace analytique Y_i en recollant X_i' et le disque fermé $\{z \in k \mid |z| \leqslant |\pi'_0|\}$ par l'isomorphisme

$$\{x \in r^{-1}(\mathrm{U}_i) \mid |f_i(x)| = |\pi'_0|\} \underset{\sim}{\overset{\sigma_i}{\to}} \{z \in k \mid |z| \leqslant |\pi'_0|\}.$$

L'espace analytique Y_i est connexe régulier, séparé, de dimension 1, de même genre que X'_i, donc de genre 0. D'après la proposition 3.2, il existe un isomorphisme φ_i de Y_i sur un ouvert analytique de $\mathbf{P}^1_k$. On peut supposer que $\varphi_i(\mathrm{X}'_i) \subset \{z \in k \mid |z| \geqslant |\pi'_0|\} \cup \{\infty\}$, $\varphi_i(\mathrm{A}_i) = \{z \in k \mid |\pi_0| \geqslant |z| \geqslant |\pi'_0|\}$, et $\varphi_i(\mathrm{R}_i) = \{z \in k \mid |z| = |\pi_0|\}$, et donc que $\varphi_i(\mathrm{X}_i) \subset \{z \in k \mid |z| \geqslant |\pi_0|\} \cup \{\infty\}$. Pour $i \leqslant n$, on pose $\mathrm{D}_i = \{z \in k \mid |z| \geqslant |\pi_0|\} \cup \{\infty\}$. On recolle les espaces analytiques $\mathrm{R}_0, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n$ par les isomorphismes

$$\mathrm{R}_0 \supset \mathrm{R}_i \underset{\sim}{\overset{\varphi_i}{\to}} \varphi_i(\mathrm{R}_i) \subset \mathrm{D}_i.$$

Soit Y l'espace analytique ainsi obtenu, on voit que Y est séparé. Comme Y est connexe, régulier, quasi-compact de dimension 1, il est soit projectif, soit affinoïde ([5] § 2.2 prop. 5), donc Y est ouvert analytique d'une courbe projective non-singulière (théorème 1.1), donc X est ouvert analytique d'une courbe projective non-singulière, on peut supposer cette courbe de même genre que X d'après le théorème 3.1.

Remarque. – Dès que k n'est plus maximalement complet, il y a un contre-exemple au théorème 3.2. Voir [9] Prop. 5.5.

Soient K un corps valué complet, k un sous-corps fermé de K, X un espace analytique séparé sur k. On peut définir de façon canonique un espace analytique $\mathrm{X}_{(\mathrm{K})}$ sur K, si $\mathrm{X} = \mathrm{Spm}\,\mathrm{A}$ est affinoïde, $\mathrm{X}_{(\mathrm{K})} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Spm}\,(\mathrm{A} \hat{\otimes}_k \mathrm{K})$ ([2] p. 368-370).

PROPOSITION 3.6. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre fini sur k, K la clôture maximalement complète de k. Alors on a les propriétés suivantes :*

1) *Le corps K est algébriquement clos, $\overline{\mathrm{K}} = \overline{k}$, si $r : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{X}}$ est la réduction de X selon un recouvrement pur $\mathfrak{U} = \{\mathrm{U}_i\}_{i\in\mathrm{I}}$, $r_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{(\mathrm{K})} \longrightarrow \overline{\mathrm{X}}_{(\mathrm{K})}$ la réduction de $\mathrm{X}_{(\mathrm{K})}$ selon le recouvrement pur $\mathfrak{U}_{(\mathrm{K})} = \{\mathrm{U}_{i(\mathrm{K})}\}_{i\in\mathrm{I}}$. Alors $\overline{\mathrm{X}}_{(\mathrm{K})} = \overline{\mathrm{X}}$ et pour tout $q \in \overline{\mathrm{X}}$, $r_{(\mathrm{K})}^{-1}(q)$ est isomorphe à $r^{-1}(q)_{(\mathrm{K})}$.*

2) *Si $\mathcal{O}(\mathrm{X})^0 = k^0$, alors $\mathcal{O}(\mathrm{X}_{(\mathrm{K})})^0 = \mathrm{K}^0$. ($\mathcal{O}(\mathrm{X})^0$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(\mathrm{X})$ tels que $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathrm{X}$).*

Preuve. – Voir [9] lemme 5.4.

THEOREME 3.3. – *Soient k un corps valué complet algébriquement clos, X un k-espace analytique de dimension 1. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *L'espace X est ouvert analytique d'une courbe projective non singulière C et $C - X$ est compact (pour la topologie ordinaire de C^{an}).*

ii) *L'espace X est ouvert analytique d'une courbe projective non singulière et $\mathcal{O}(X)^0 = k^0$.*

iii) *L'espace X est régulier, séparé, de genre fini et $\mathcal{O}(X)^0 = k^0$.*

iv) *L'espace X est régulier, séparé, de genre fini, connexe et pour toute réduction analytique $r : X \longrightarrow \overline{X}$ préstable, le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie de $\overline{X}$ est nul et toutes les composantes irréductibles de $\overline{X}$ sont complètes.*

Preuve. – α) i) implique ii). Comme C^{an} est régulier, tout point de C^{an} est contenu dans un ouvert affinoïde isomorphe à $\mathbf{B}_k^1 = \mathrm{Spm}\, k\langle T\rangle$, donc il existe $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ouverts affinoïdes de C^{an} isomorphes à $\mathbf{B}_k^1$ tels que $C - X \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} D_{i,+}$ où $D_{i,+}$ est une fibre formelle de D_i. On peut supposer les D_i deux à deux disjoints.

Soit $g \in \mathcal{O}(X)^0$. Comme $D_i - D_i \cap X$ est compact, on voit facilement que $g|_{X \cap D_i}$ se prolonge en une fonction $g_i \in \mathcal{O}(D_i)$. L'ouvert $C - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} D_{i,+}$ est affinoïde ([3] lemme 3.5), les fonctions $g|_{C - \bigcup_i D_{i,+}}, g_1, \ldots, g_n$ se recollent en une fonction

$$\lambda \in \mathcal{O}_{C^{an}}(C^{an}) = k, \quad \text{d'où} \quad g \in k^0 .$$

β) ii) implique iii). X est de genre fini d'après la proposition 1.5.

γ) iii) implique iv). Comme $\mathcal{O}(X)^0 = k^0$, X est connexe. Soit $r : X \longrightarrow \overline{X}$ une réduction préstable de X selon un recouvrement pur $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X.

γ_1) Supposons k maximalement complet. D'après le théorème 3.2, X est ouvert analytique d'une courbe projective non singulière C, de genre $g(X)$. Montrons d'abord que X est dense dans C^{an}. Supposons le contraire, il existe un ouvert affinoïde R de C^{an}, $R \neq \phi$ et $R \subseteq C - X$, il existe $f \in \mathcal{R}(C)$ tel que $R = \{x \in C \mid f \in \mathcal{O}_{C,x}, |f(x)| \leqslant 1\}$ ([5] § 1 théorème 1), il suit que $f^{-1} \in \mathcal{O}(X)^0 - k$, contraire à l'hypothèse $\mathcal{O}(X)^0 = k^0$, donc X est dense dans C^{an}. Donc les composantes irréductibles de $\overline{X}$ sont toutes complètes.

Soit V un ouvert affine de $\overline{X}$ de genre $g(X)$, alors toute demi-droite infinie $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ de $\overline{X}$ contenue dans $\overline{X} - V$ correspond à une suite décroissante de disques ouverts $(B_n)_{n \geqslant 1}$ de $C^{an} - r^{-1}(V)$ telle que $\bigcap_{n \geqslant 1} B_n \cap X = \phi$ et que la limite des rayons des B_n soit égale au produit des valeurs absolues des angles (Y_n, Y_{n+1}) (voir [9] prop. 5.4). Comme X est dense dans C^{an} et k maximalement complet, la limite des rayons des B_n est nulle, donc le produit des valeurs absolues des angles (Y_n, Y_{n+1}) pour $n \geqslant 1$ est nul.

γ_2) Cas général. Soient K la clôture maximalement complète de k, $r_K : X_{(K)} \longrightarrow \overline{X}_{(K)}$ la réduction de $X_{(K)}$ selon le recouvrement par $\mathcal{U}_{(K)} = \{U_{i(K)}\}_{i \in I}$. D'après la proposition 3.6 et γ_1), on a le résultat pour la réduction $r_K : X_{(K)} \longrightarrow \overline{X}_{(K)}$ donc aussi pour la réduction $r : X \longrightarrow \overline{X}$ (toujours d'après la proposition 3.6).

δ) iv) implique i). On reprend la démonstration du théorème 3.2 avec les mêmes notations. Pour tout $i \leqslant n$, Y_i est un k-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre 0 (Y_i est défini dans la même démonstration) et admet une réduction préstable $\overline{Y}_i$ qui est la réunion de F_i avec une composante irréductible de $\overline{Y}_i$ isomorphe à $\mathbf{P}_k^1$, donc d'après la proposition 3.4, Y_i est isomorphe par φ_i à un ouvert analytique de $\mathbf{P}_k^1$ et $\mathbf{P}_k^1 - \varphi_i(Y_i)$ est compact. Par conséquent $D_i - \varphi_i(X_i)$ est compact. D'autre part $\overline{Y}$, la réduction de Y selon le recouvrement par $\mathcal{V}$, est la réunion de F avec un nombre fini de composantes irréductibles isomorphes à $\mathbf{P}_k^1$, donc $\overline{Y}$ est complète et Y est une courbe projective ([4] p. 334, [7] p. 139. Enfin, $X = R_0 \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ est isomorphe à un ouvert analytique de Y dont le complémentaire dans Y est compact.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bosch, Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme, *Manuscripta Math.*, 20 (1977), 1-27.

[2] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, Non-archimedian analysis, *Grund. der Math.*, 261, Springer Verlag, 1984.

[3] S. Bosch, W. Lütkebohmert, Stable reduction and uniformization of abelian varieties I, *Math. Ann.*, 270 (1985), 349-379.

[4] J. Fresnel, Géométrie analytique rigide, *Polycopié, Université de Bordeaux I, 1984.*

[5] J. Fresnel, M. Matignon, Structure des espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué, complet, ultramétrique, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, (IV), Vol. CXLV (1986), 159-210.

[6] J. Fresnel, M. van der Put, Géométrie analytique rigide et application, *Progress in Math.*, 18, Birkhaüser, 1981.

[7] L. Gerritzen, M. van der Put, Schottky groups and Mumford curves, *Lecture Notes*, n° 817, Springer Verlag, 1980.

[8] U. Köpf, Uber eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Raüme, *Schriftenreihe Math. Inst. Univ Münster*, 2, Série Heft 7 (1974).

[9] Q. Liu, Ouverts analytiques d'une courbe projective sur un corps valué complet ultramétrique algébriquement clos, *Thèse Bordeaux 1987.*

[10] A.F. Monna, Analyse non-archimédienne, *Erg. der Math.*, 56 Springer (1970).

[11] M. van der Put, The class group of a one-dimensional affinoïd space, *Ann. Inst. Fourier*, 30-4 (1980), 155-164.

[12] M. van der Put, Stable reductions of algebraic curves, *Proc. Konik. Ned. Ak. Serie A*, vol. 87 (1984), 461-478.

[13] J.-P. SERRE, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1956), 1-42.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1986.

Qing LIU,
U.A. N° 226 C.N.R.S.
U.E.R. de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F – 33405 TALENCE Cedex (France).