ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL DOMERGUE
H. SHORT

Surfaces incompressibles dans les variétés obtenues par chirurgie longitudinale le long d'un noeud de S^3

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 2 (1987), p. 223-238
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_223_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 2 (1987), 223-238.

SURFACES INCOMPRESSIBLES DANS LES VARIÉTÉS OBTENUES PAR CHIRURGIE LONGITUDINALE LE LONG D'UN NŒUD DE S^3

par M. DOMERGUE et H. SHORT

1. Introduction.

1.1. *Notations – Définitions.*

Tout au long de cet article, les variétés et les applications considérées sont P.L. La terminologie générale de cette catégorie ainsi que les définitions classiques particulières à la dimension 3 sont empruntées à [6], [7]. Toutes les variétés considérées sont supposées orientables, mais ne sont pas orientées en général. Pour $X \subset M$, $N(X)$ désigne le voisinage régulier de X dans M. Un nœud dans une 3-variété M est toujours supposé non trivial.

Il y a une correspondance biunivoque qui, à tout type d'homéomorphisme de triplet (M,T,ξ) où M est un 3-variété, T une composante torique incompressible de ∂M et ξ une courbe simple fermée non triviale sur T, fait correspondre le type d'homéomorphisme de la paire (M_ξ, k_ξ) où M_ξ est une 3-variété et k_ξ un nœud de M_ξ, défini comme suit :

On choisit un homéomorphisme φ de T sur $S^1 \times \partial D^2$ tel que $\varphi(\xi) = \{1\} \times \partial D^2$. La variété M_ξ s'obtient en raccordant M et $S^1 \times D^2$ par φ, k_ξ est l'image par le raccordement de $S^1 \times \{0\}$. Cette construction est indépendante de φ, par rapport au type de (M_ξ, k_ξ).

Nous dirons que (M_ξ, k_ξ) est obtenue par *obturation* (ou chirurgie) de (M,T,ξ). Dans la suite, nous considérons $M \subset M_\xi$, $S^1 \times D^2 \subset M_\xi$

Mots-clés : 3-variété - Nœud - Chirurgie de Dahn - Surface de Seifert - Surface incompressible

(après identification) de sorte que l'on pourra écrire par convention $M_\xi = M \bigcup_\xi (S^1 \times D^2)$, $k_\xi = S^1 \times \{0\}$.

La correspondance réciproque se définit à partir du type d'homéomorphisme d'une paire (P,k) où P est une 3-variété et k un nœud de P, en lui associant le type du triplet $(P - N(k), \partial N(k), \xi)$ où ξ est un méridien de k sur $\partial N(k)$.

Dans la notation classique, pour k nœud de S^3, $S^3(k\,;p,q)$ désigne l'obturation (K_ξ, k_ξ) du triplet $(K, \partial K, \xi)$ où $K = S^3 - N(k)$ et ξ est le support de la courbe orientée de ∂K représentée par $pm + q\ell$ par rapport à la paire méridien-parallèle (m, ℓ) orientée de ∂K associée au plongement de k. La variété $S^3(k\,;0,1)$ est appelée *l'obturation longitudinale* de k.

Une *surface de Seifert de* k est une surface $(S, \partial S)$ orientable, proprement plongée dans $(K, \partial K)$ dont le bord, connexe, est λ le support de ℓ. Dans (K_λ, k_λ), S donne naissance à une surface fermée orientable S_λ formée par la réunion de S et d'un disque méridien D_λ de k_λ vérifiant : $D_\lambda \cap S = \lambda = \partial D_\lambda$.

Remarquons que S_λ et k_λ sont transverses en un seul point (de $\mathrm{int}(D_\lambda)$) dans K_λ.

DÉFINITION. — *Un nœud k de S^3 est de type $\mathscr{C}$ (resp. de type $\mathscr{I}$) s'il existe une surface de Seifert $(S, \partial S)$ incompressible dans $(K, \partial K)$ telle que la 3-variété $K - N(S)$ soit bord-compressible (resp. bord-incompressible).*

En d'autres termes, disons qu'un tore solide H de genre g plongé dans S^3 est totalement noué dans S^3 si $S^3 - H$ est bord-incompressible; avec cette définition, un nœud k de S^3 est de type $\mathscr{C}$ (resp. de type $\mathscr{I}$) s'il existe une surface de Seifert $(S, \partial S)$ incompressible telle que le tore $N(S)$ ne soit pas totalement noué (resp. totalement noué) dans S^3.

1.2. *Résultats.*

Nous obtenons les résultats suivants annoncés dans [4].

THÉORÈME 1. — *Soit k un nœud de type $\mathscr{C}$, soit $(S, \partial S)$ une surface de Seifert incompressible de k telle que $K - N(S)$ soit bord-compressible. Alors :*

(1) *S_λ est incompressible dans K_λ.*

(2) *K_λ est irréductible.*

THÉORÈME 2. — *Soit k un nœud de type $\mathscr{I}$, soit* $(S, \partial S)$ *une surface de Seifert incompressible de k telle que* $K - N(S)$ *soit bord-incompressible. Alors :*

Pour toute courbe simple fermée ξ *de* ∂K *qui enlace au moins deux fois le nœud k dans* S^3, $\partial(K - N(S))$ *reste incompressible dans* K_ξ *et* K_ξ *est irréductible.*

Remarques. — 1) D'après Kirby [10], un nœud de S^3 possède la propriété R (resp. R′) s'il est impossible d'obtenir $S^1 \times S^2$ (resp. une 3-variété à groupe cyclique) par chirurgie longitudinale; la conjecture de Poenaru affirme que par cette même chirurgie, on obtient une 3-variété irréductible.

Le théorème 1 entraîne que les nœuds de type $\mathscr{C}$ vérifient la conjecture de Poenaru et donc ont les propriétés R′ et R.

2) Il existe des nœuds de S^3 (par exemple les nœuds de tore, [12]) qui par chirurgie de Dehn permettent d'obtenir un espace lenticulaire distinct de S^3 et $S^1 \times S^2$. Le théorème 2 prouve que les nœuds de type $\mathscr{I}$ n'ont pas cette propriété.

1.3. *Structure de l'article.*

Le paragraphe 2 contient les démonstrations des théorèmes 1 et 2. Pour le théorème 1, nous utilisons un lemme obtenu indépendamment par G. Gordon [5], J. Johansson [9] et J. H. Presynski [17]. Par ailleurs W. Jaco a obtenu indépendamment un résultat analogue au Théorème 1 dans [8].

Pour le théorème 2, nous utilisons un lemme, conséquence des résultats obtenus par H. Short dans [19].

Dans le paragraphe 3 nous donnons d'abord des exemples de nœuds de type $\mathscr{C}$, en particulier il est prouvé qu'un nœud non trivial, bord d'un disque singulier idéal d'indice au plus égal à 2 est de type $\mathscr{C}$ (proposition 3.2.3). Puis nous prouvons que pour les nœuds de type $\mathscr{I}$, les revêtements cycliques ramifiés sont toujours des variétés de Haken (proposition 3.3.1).

1.4. *Addendum.*

Les résultats de cet article ont fait l'objet d'un exposé au Colloque de Géométrie Hyperbolique à l'Université de Warwick en Avril 84.

Depuis, les techniques de D. Gabai [20], [21], reprises entre autres par M. Scharleman [23], et les travaux de Culler, Gordon, Luecke et Shalen [22], ont permis de progresser de façon considérable dans la connaissance des variétés obtenues par chirurgie de Dehn sur un nœud de S^3.

2. Démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Rappelons d'abord qu'une surface $(F,\partial F)$ proprement plongée dans une 3-variété $(M,\partial M)$ est dite ∂-réductible s'il existe un disque Δ plongé dans M et deux arcs a et b tel que :

$$\Delta \cap F = a, \qquad \Delta \cap M = b,$$
$$a \cap b = \partial a = \partial b \qquad \text{et} \qquad \partial\Delta = a \cup b,$$

a et b étant non parallèles au bord. Un tel disque Δ est appelé un disque de ∂-réduction de $(F,\partial F)$. La surface $(F,\partial F)$ est ∂-irréductible s'il n'existe pas de disque de ∂-réduction.

LEMME 1. — *Soit* M *une 3-variété orientable, soit* $(j,\partial j)$ *un arc proprement plongé dans* $(M,\partial M)$ *joignant deux composantes de* ∂M *différentes de la 2-sphère.*

(1) *Si* M *est bord-compressible, il existe un disque* $(D,\partial D)$ *de compression de* $(M,\partial M)$ *transverse à* $(N(j),j)$ *tel que la surface plane* $(P,\partial P)$ *déterminée par* $D \cap \overline{(M-N(j))}$ *soit* ∂*-irréductible dans* $\overline{M-N(j)}$.

(2) *Si* M *est bord-incompressible et si* M *est réductible, il existe une 2-sphère* Σ *non triviale dans* M, *transverse à* $(N(j),j)$ *telle que la surface plane* $(P,\partial P)$ *déterminée par* $\Sigma \cap \overline{(M-N(j))}$ *soit* ∂*-irréductible dans* $\overline{M-N(j)}$.

Dans la démonstration nous notons $E = \overline{M-N(j)}$.

Afin d'éviter les cas triviaux où P est un disque dans (1) et où P est une 2-sphère non triviale dans (2), nous supposerons $(E,(\partial E)\cap(\partial M))$ incompressible dans (1) et E irréductible dans (2).

Étape (1) :

Choisissons un disque de compression $(D,\partial D)$ de $(M,\partial M)$ transverse à $(N(j),j)$ et tel que le nombre n $(n>0)$ de disques méridiens de j contenus dans $D \cap N(j)$ soit minimal.

Pour un tel disque, $D \cap E$ détermine une surface plane $(P,\partial P)$ proprement plongée et ∂-irréductible dans $(E,\partial E)$:

Si $(P,\partial P)$ était ∂-réductible, il existerait un disque de compression de $(P,\partial P)$ dans E ou un disque à deux côtés de ∂-réduction de $(P,\partial P)$ dans E.

Nous allons prouver que l'existence d'un tel objet contredit la minimalité de n. Soit $(\Delta,\partial\Delta)$ un disque de compression de $(P,\partial P)$ dans $(E,\partial E)$, $\partial\Delta$ sépare D en un anneau A et un disque B. Alors $A \cup \Delta$ est un disque de compression de $(M,\partial M)$ contredisant la minimalité de n (avec les hypothèses que nous avons formulées au début de la démonstration). Soit R une région à deux côtés de ∂-réduction de $(P,\partial P)$ dans $(E,\partial E)$; par définition, $R \cap P = b$, $R \cap \partial E = a$, $\partial R = a \cup b$, $a \cap b = \partial a = \partial b$ où b est un arc proprement plongé dans $(P,\partial P)$ non parallèle à un arc de ∂P et où $a \subset \partial E$ est un arc joignant dans $\partial E - (\partial P)$ les extrémités de l'arc b; les cas où l'arc a est parallèle dans $\partial E - (\partial P)$ à un arc de ∂P ne sont plus à considérer puisque $(P,\partial P)$ est incompressible. Si l'arc j est orienté en partant de la composante de ∂M qui contient ∂D (si elle existe, sinon arbitrairement), les méridiens de $D \cap N(j)$ sont ordonnés de 1 à n $(n>0)$ dans ∂P et sur $\partial N(j)$. Les possibilités pour l'arc $a \subset \partial E$ sont :

(i) l'arc a joint deux méridiens consécutifs de ∂P.

(ii) l'arc a joint ∂D au premier méridien de ∂P.

(iii) l'arc a joint ∂D à lui-même, ou le premier méridien de ∂P à lui-même, ou le dernier de ∂P à lui-même.

Pour (i), une isotopie locale de D, dans M au voisinage de R et de la 3-boule de $N(j)$ limitée par les deux méridiens joints par l'arc a, le transforme en un disque contredisant la minimalité de n (le nombre de disques méridiens devient $n - 2$).

Pour (ii), une isotopie locale de D, dans M au voisinage de R et de la boule B^3 limitée par le disque méridien origine de $N(j)$ et le disque méridien joint par l'arc a, le transforme en un disque contredisant la minimalité de n (le nombre n devient $n - 1$).

Dans le dernier cas, l'arc b sépare $(P,\partial P)$ en P_1 et P_2 deux surfaces planes non triviales puisque b n'est pas parallèle à un arc de ∂P. Dans le sous-cas où l'arc a joint ∂D à lui-même, l'arc b sépare D en deux disques D_1 et D_2; et $D_1 \cup R$ (ou $D_2 \cup R$) est un disque de compression de $(M,\partial M)$, contredisant la minimalité de n. Dans le sous-cas où l'arc

a joint le premier (ou le dernier) méridien de ∂P à lui-même, nous notons ξ ce méridien; alors $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$ avec $\xi_1 \cap \xi_2 = \partial\xi_1 = \partial\xi_2 = a \cap b$ pour deux arcs ξ_1 et ξ_2 de ξ tels que $\xi_1 \cup b = \partial D_1$, avec D_1 disque inclus dans l'intérieur de D. Après isotopie locale, $D_1 \cup R$ devient un disque de compression de $(M,\partial M)$ contredisant la minimalité de n.

Étape (2) :

Choisissons une 2-sphère Σ non triviale dans M transverse à $(N(j),j)$ et telle que le nombre n $(n>0)$ de disques méridiens de j contenus dans $D \cap N(j)$ soit minimal. La surface plane $(P,\partial P)$ déterminée par $\Sigma \cap E$ est proprement plongée et ∂-irréductible dans $(E,\partial E)$:

Nous raisonnons comme dans l'étape (1). Soit $(\Delta,\partial\Delta)$ un disque de compression de $(P,\partial P)$ dans $(E,\partial E)$, $\partial\Delta$ sépare Σ en deux disques Σ_1 et Σ_2; la sphère $\Sigma_1 \cup \Delta$ ou la sphère $\Sigma_2 \cup \Delta$ doit être non triviale dans M puisque Σ est non triviale dans M. Ceci contredit la minimalité de n. Soit R une région à deux côtés de ∂-réduction de $(P,\partial P)$ dans $(E,\partial E)$. Avec les notations de l'étape (1), ou bien l'arc a joint deux méridiens consécutifs de j, ou bien l'arc a joint ξ à lui-même. Dans le premier cas comme dans l'étape (1) une isotopie locale de Σ dans M la transforme en une sphère non triviale de M contredisant la minimalité de n. Dans le deuxième cas, l'arc b sépare $(P,\partial P)$ en P_1 et P_2 et le même argument que celui de la fin de l'étape (1) transforme $P_i \cup R$ en un disque de compression de M qui est supposée bord-incompressible.

Démonstration du théorème 1. — Choisissons $N(S_\lambda \cup k_\lambda)$ dans K_λ tel que (les conventions du § 1.1 sont ici utilisées) :

$$N(S_\lambda \cup k_\lambda) = N(S_\lambda) \cup N(k_\lambda);$$
$$N(S_\lambda) \cap N(k_\lambda) = N(D_\lambda), \qquad D_\lambda \subset S^1 \times D^2; \qquad N(S) = N(S_\lambda) \cap K.$$

Posons $E = \overline{K - N(S)}$, $M = \overline{K_\lambda - N(S_\lambda)}$, $j_\lambda = k_\lambda \cap M$, $N(j_\lambda) = N(k_\lambda) \cap M$; ainsi nous avons $E = \overline{M - N(j_\lambda)}$.

Étape (1) : S_λ est incompressible dans K_λ.

Pour le démontrer, nous supposons S_λ (donc ∂M) compressible dans K_λ (dans M) et nous montrons que la compressibilité de ∂E dans E interdit l'existence d'une surface plane $(P,\partial P)$ de $(E,\partial E)$ ayant la propriété annoncée dans le (1) du lemme 1.

Remarquons que les composantes de ∂P sont ∂D et un ensemble non vide fini de méridiens de j_λ puisque $(S, \partial S)$ est supposée incompressible dans $(K, \partial K)$. Par hypothèse, nous pouvons choisir un disque de compression Z de $(E, \partial E)$ transverse à P tel que le nombre n de composantes connexes de $Z \cap P$ soit minimal. L'incompressibilité de $(S, \partial S)$ assure $n > 0$. Le graphe $(\partial Z) \cup (Z \cap P)$ détermine dans Z au moins une région ayant au plus un côté dans ∂Z; la propriété de $(P, \partial P)$ assure l'existence d'au moins une région minimale pour le graphe $(\partial P) \cup (Z \cap P)$ dans $(P, \partial P)$ une telle région permet de réduire le disque Z en un ou deux disques dans $(E, \partial E)$ dont un au moins est un disque de compression pour $(E, \partial E)$ contredisant la minimalité de n.

Étape (2) : K_λ est irréductible.

L'étape 1 entraîne qu'il suffit de vérifier M irréductible; nous supposons le contraire et nous montrons que la compressibilité de ∂E dans E interdit l'existence d'une surface plane $(P, \partial P)$ ayant la propriété annoncée dans le (2) du lemme 1.

Remarquons que les composantes de ∂P sont un ensemble non vide fini de méridiens de j_λ puisque $(S, \partial S)$ est incompressible dans $(K, \partial K)$.

Comme dans l'étape 1, choisissons un disque Z de compression de ∂E dans E, transverse à $(P, \partial P)$ tel que le nombre n de composantes de $Z \cap P$ soit minimal; l'incompressibilité de $(S, \partial S)$ assure $n > 0$. Le même argument que celui de l'étape 1 assure l'existence d'une région minimale dans P pour le graphe $(\partial P) \cup (Z \cap P)$. Une telle région permet de réduire le disque Z dans $(E, \partial E)$ en un ou deux disques dont un au moins est un disque de compression pour $(E, \partial E)$ contredisant la minimalité de n.

Nous avons ainsi prouvé le théorème 1.

Remarques. — (1) Une façon de résumer le théorème 2.1 est de dire que K_λ est une variété de Haken.

(2) Pour tout nœud de type $\mathscr{C}$, il y a une décomposition de S^3 de la forme suivante :

$$S^3 = X \cup Y,$$

X et Y sont des 3-variétés, $X \cap Y = \partial X = \partial Y$; $k \subset \partial K$ sépare cette surface et $\partial X - k$ est incompressible; X et Y sont bord-compressibles.

Pour le voir il suffit de poser $X = N(S) \cup N(k)$, $Y = \overline{K - N(S)}$ et de remarquer qu'un représentant de k est situé sur $\partial X = \partial Y$ comme ci-dessus.

Pour une telle décomposition chacune des composantes connexes de $X - k$ donne naissance dans K_λ à une surface fermée incompressible; de plus K_λ est irréductible. La démonstration de ce résultat est analogue à celle donnée pour le type $\mathscr{C}$.

Dans la démonstration du théorème 2 nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* (M,k) *une paire où* M *est une* 3-*variété compacte orientable et où* k *est un nœud dans* $\operatorname{int}(M)$. *Supposons que* (M,k) *satisfait aux conditions suivantes :*

(1) M *est irréductible.*

(2) ∂M *est incompressible dans* $M - k$.

(3) ∂M *porte un méridien de* k.

Alors toute 3-*variété obtenue par chirurgie, à partir de* (M,k), *le long d'une courbe périphérique de* k *qui parcourt le nœud* k *au moins deux fois est une* 3-*variété irréductible et bord-incompressible.*

La preuve de ce lemme est tout à fait analogue à celle donnée par H. Short (cf. [19], proposition 1 (i) et théorème 1).

Démonstration du théorème 2. — Considérons $N'(k) \subset \operatorname{int}(N(k))$ un voisinage régulier de k dans $N(k)$ et soit ξ' une courbe simple sur $\partial N'(k)$ parallèle à ξ dans $\overline{N(k) - N'(k)}$. Posons :

$$Q = N(S) \cup \overline{(N(k) - N'(k))}; \quad (Q_{\xi'}, k_{\xi'}) \text{ l'obturation de } (Q, \partial N'(k), \xi').$$

Nous remarquons tout d'abord que la 3-variété K_ξ s'obtient, en identifiant par leur bord, les deux 3-variétés $\overline{K - N(S)}$ et $Q_{\xi'}$.

Par hypothèse $\overline{K - N(S)}$ est irréductible et bord-incompressible; pour prouver le théorème 2 il suffit donc de prouver que $Q_{\xi'}$ est irréductible et bord-incompressible.

Pour cela, notons (Q_λ, k_λ) l'obturation de $(Q, \partial N'(k), \lambda)$ avec λ une longitude de k sur $\partial N'(k)$; si la 3-variété Q est regardée comme sous-variété de Q_λ, $Q_{\xi'}$ s'obtient aussi par chirurgie, à partir de (Q_λ, k_λ), le

long de la courbe périphérique ξ' parcourant au moins deux fois le nœud k_λ puisque ξ enlace deux fois au moins le nœud k de S^3. Nous pouvons démontrer sans difficulté que la paire (Q_λ, k_λ) satisfait aux conditions du Lemme 2 pour conclure que la 3-variété $Q_{\xi'}$ est irréductible et bord-incompressible.

3. Nœuds de type $\mathscr{C}$ - Nœuds de type $\mathscr{I}$.

3.1. *Notations — Remarques.*

Outre les notations déjà fixées dans le paragraphe 1, nous utiliserons dans ce paragraphe les définitions, les notations et les remarques suivantes :

Pour k nœud de S^3 et $(S', \partial S')$ surface de Seifert de k dans $K = \overline{S^3 - N(k)}$, nous posons :

$$X = N(S') \cup N(k) \qquad \text{et} \qquad E = \overline{K - N(S')}.$$

3.1.1. La surface S' se prolonge par un col ($\cong \partial S' \times [0\ 1]$) en une surface S plongée dans X et telle que $\partial S = k$.

3.1.2. Les 3-variétés X et E satisfont à :

$$S^3 = X \cup E \qquad \text{et} \qquad E \cap X = \partial E = \partial X.$$

3.1.3. L'éclatement de S^3 le long de S [14] sera noté $(\tilde{E}, \partial\tilde{E}, \sigma)$; rappelons que $\tilde{E}$ est la 3-variété obtenue en « doublant » les points de $\mathrm{int}(S)$ à partir de (S^3, S); ainsi $\partial\tilde{E}$ s'identifie naturellement au double de S et σ est la symétrie naturelle de $\partial\tilde{E}$. Nous noterons p_σ l'identification de $(\tilde{E}, \partial\tilde{E})$ définissant le triplet (S^3, S, k) ; sur $p_\sigma^{-1}(E)$, p_σ est un plongement, sur $p_\sigma^{-1}(X)$, p_σ est l'identification de l'éclatement de X le long de S. Dans $\tilde{E}$, $p_\sigma^{-1}(X)$ est un col ($\cong \partial\tilde{E} \times [0\ 1]$) dont une extrémité est $\partial\tilde{E}$ et dont l'autre extrémité est la surface $\partial p_\sigma^{-1}(E)$. Ainsi

$$\tilde{E} = p_\sigma^{-1}(E) \cup p_\sigma^{-1}(X) \qquad \text{et} \qquad p_\sigma^{-1}(E) \cap p_\sigma^{-1}(X) = \partial p_\sigma^{-1}(E).$$

3.1.4. Enfin remarquons que ∂X est une surface incompressible dans $X - k$ de genre $2g$ et que $(X, \partial X)$ est un tore solide de rang g (si g désigne le genre de S) pour lequel tout disque de compression est percé au moins deux fois par le nœud k.

3.2. *Nœuds de type $\mathscr{C}$.*

Les « Δ-produits » de [1] sont des nœuds de type $\mathscr{C}$ puisque le plongement de la paire (X,k) servant à les définir assure la compressibilité de $\partial E = \partial X$ dans E.

Les « small-knots » de [3] qui ne contiennent aucune surface incompressible non parallèle au bord dans $S^3 - k$, les « star-knots » de [15] et les nœuds alternés [12] sont de type $\mathscr{C}$ car ils ont la propriété : « toute surface incompressible dans $S^3 - k$ porte un méridien »; ainsi $\partial X = \partial E$ incompressible, non parallèle au bord dans $X - k$ ne portant pas de méridien (remarque 3.1.4), doit être compressible dans E.

PROPOSITION 3.2.1. — *Les nœuds fibrés, les nœuds composés, les nœuds doubles, les nœuds alternés sont de type $\mathscr{C}$.*

Pour les nœuds fibrés, E est homéomorphe à $S \times I$ si S est la surface de fibration; de plus pour un nœud fibré, K_λ est un S_λ-fibré sur S^1.

Pour les nœuds composés, considérons, une 2-sphère Σ définissant la composition. La surface de Seifert S construite à partir d'une surface de Seifert incompressible pour chacun des deux facteurs de composition est elle-même incompressible, $S \cap \Sigma$ est dans ce cas réduit à un seul arc et $\Sigma \cap E$ détermine un disque de compression de $(E,\partial E)$.

Pour les nœuds doubles la propriété R' a été étudiée algébriquement dans [13]. Par construction, il existe une surface S de genre 1 plongée dans $N(k)$ telle que $\partial S = d(k,n)$, le double de k avec n-twist [18]; de plus il existe un disque Δ plongé dans $N(k)$ tel que $\Delta \cap S = \alpha \cup \beta$ et $\partial\Delta = \alpha \cup \beta$ où α, β sont deux arcs (non parallèle sur S à un arc de k) proprement plongés dans S vérifiant $\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$ (voir proposition 3.2.3). Pour Δ transverse à $\partial X = \partial E$, $\Delta \cap E$ détermine un disque de compression de $(E,\partial E)$.

Pour les nœuds alternés outre le résultat cité plus haut de [12] nous pouvons utiliser un résultat de [2] affirmant l'incompressibilité de la surface S construite à partir d'une projection alternée du nœud par la méthode des cercles de Seifert [18]; pour une telle surface, E est toujours bord-compressible.

PROPOSITION 3.2.2. — *Supposons qu'il existe un représentant k_0 du nœud trivial de S^3 contenu dans* Int (X) *et tel que ∂X soit incompressible*

dans $X - k_0$ *(ceci est en particulier le cas lorsqu'il existe un homéomorphisme* $\varphi : X \to X$ *tel que* $\varphi(k)$ *soit le nœud trivial de* S^3*) alors* E *est bord-compressible.*

En effet $S^3 - k_0$ ne contient aucune surface fermée incompressible puisque k_0 est le nœud trivial de S^3. Par suite $\partial X = \partial E$ doit être compressible dans E.

Pour illustrer la proposition 3.2.2 nous montrons dans la proposition 3.2.3 qu'un nœud non trivial défini par un disque singulier « idéal » d'indice inférieur ou égal à 2 est de type $\mathscr{C}$:

Toute paramétrisation d'un nœud k de S^3 s'étend en une application $f : D^2 \to S^3$.

Il est connu qu'il existe toujours une telle homotopie vérifiant les conditions suivantes :

1) f est une immersion transverse, en position générale transverse par rapport à k.

2) Chaque composante connexe de l'ensemble des singularités de f (« Self-intersections ») est constituée d'un arc de points doubles joignant dans $S^3 - k$ deux points de k.

Au voisinage d'un arc de points doubles, la situation peut être représentée dans une 3-boule comme l'indique la figure 1. Dans cette figure, le disque singulier $f(D^2)$ est supposé orienté (orientation induite par f et une orientation de D^2), une orientation de S^3 définit alors le côté positif et le côté négatif de $f(D^2)$.

L'opération de « cut and paste » orientable [16] associe à $f(D^2)$ une surface orientée S_f telle que $\partial S_f = k$, de genre n si n est le nombre

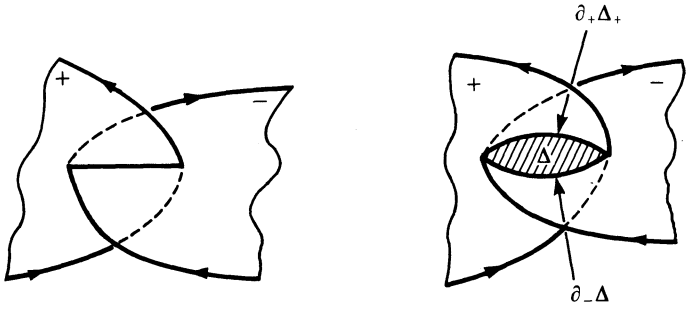

Fig. 1.

d'arcs doubles de f; au voisinage de chaque arc de points doubles de f, cette opération fait naître un disque Δ plongé dans S^3 tel que $\Delta \cap S_f = \partial\Delta = \partial_+ \Delta \cup \partial_- \Delta$ où $\partial_+ \Delta$ et $\partial_- \Delta$ sont deux arcs proprement plongés dans S_f de mêmes extrémités (voir fig. 1).

(La notation $\partial_+ \Delta$ et $\partial_- \Delta$ est déterminée par le côté positif et le côté négatif de S_f).

Dans la situation que nous venons de décrire, nous dirons que f (ou $f(D^2)$) est un *disque singulier « idéal » définissant* k d'indice n. La surface S_f est dite obtenue par « cut and paste » orientable à partir de f (ou de $f(D^2)$). A chaque arc double de f est associé un disque Δ décrit comme ci-dessus, donc sous l'hypothèse S_f incompressible, nous déduisons le type $\mathscr{C}$ pour k.

Le cas particulier d'un nœud double (non trivial) est $n = 1$, puisque $N(f(D^2))$ est dans ce cas un tore solide (voir proposition 3.2.3).

PROPOSITION 3.2.3. — *Si f: $D^2 \to S^3$ est un disque singulier « idéal » d'indice au plus 2 définissant un nœud k de S^3, alors ou bien k est trivial, ou bien k est de type $\mathscr{C}$.*

Supposons k non trivial. Si S_f, la surface orientable obtenue par « cut and paste » orientable à partir de f (voir définition plus haut), est incompressible, nous avons vu que le nœud k est de type $\mathscr{C}$.

Supposons donc S_f compressible (donc $n=2$); puisque le nœud k est supposé non trivial, toute réduction de S_f le long d'un disque de compression doit être incompressible (de genre 1).

Notons $\Delta_i (i=1,2)$ les disques associés aux arcs doubles de f, avec les notations précédentes nous avons $\partial\Delta_i = \partial_+\Delta_i \cup \partial_-\Delta_i$ $(i=1,2)$.

Choisissons un disque de compression $(D, \partial D)$ de S_f tel que :

1) ∂D est transverse à $\partial\Delta_i$ $(i=1,2)$ sur S_f.

2) D est en position générale transverse par rapport à Δ_i $(i=1,2)$.

3) Le nombre des composantes connexes de $D \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ est minimal.

L'existence d'un tel disque est assuré par les théorèmes de position générale [6] en considérant l'éclatement de S^3 le long de S_f (voir remarque 3.1.3). Sans restreindre la généralité nous supposons que la courbe ∂D est située du côté des normales positives de S_f.

Dans ces conditions chaque composante de $D \cap \Delta_i$ est : ou bien un point isolé de $\mathrm{int}(\partial_- \Delta_i)$ et ∂D, ou bien une courbe simple fermée de $\mathrm{int}(\Delta_i)$ et $\mathrm{int}(D)$, ou bien un arc proprement plongé dans Δ_i ayant ses deux extrémités dans $\mathrm{int}(\partial_+ \Delta_i)$ $(i=1,2)$. Un argument analogue à celui de la démonstration du théorème 1 montre que $D \cap \Delta_i = (\partial D) \cap (\partial_- \Delta_i)$ pour $i = 1,2$ (réductions par courbes simples minimales d'intersection, suivies de réductions par arcs simples d'intersections minimales de Δ_i).

La réduction de S_f le long d'un tel disque $(D, \partial D)$ produit une surface S incompressible pour k. Nous allons prouver que pour cette surface, E est compressible en utilisant la proposition 3.2.2 :

Choisissons un voisinage régulier $X(S_f)$ de S_f dans S^3 tel que $D \cap X(S_f)$ soit un col de $D(\cong \partial D \times [0\ 1])$ qui avec notre supposition joint ∂D et $\partial_+ D$. Notons que ce col se prolonge en un anneau A proprement plongé dans $X(S_f)$ joignant $\partial_- D$ et $\partial_+ D$. Par construction de S, nous pouvons choisir X(S) voisinage régulier de S dans S^3 tel que $\overline{X(S_f) - N(A)} \subset X(S)$ où N(A) est un voisinage régulier de $(A, \partial A)$ dans $(X(S_f), \partial(X(S_f)))$.

La propriété de D : $\partial D \cap (\partial_- \Delta_i) = D \cap \Delta_i$, nous permet de supposer que N(A) a été choisi de telle manière qu'il existe un disque D_i, proprement plongé dans X(S) tel que : $D_i \cap N(A) = \phi$ et $D_i \cap S = \partial_- \Delta_i$ $(i=1,2)$ et $D_1 \cap D_2 = \phi$.

La position de D_i est représentée dans la figure 2 :

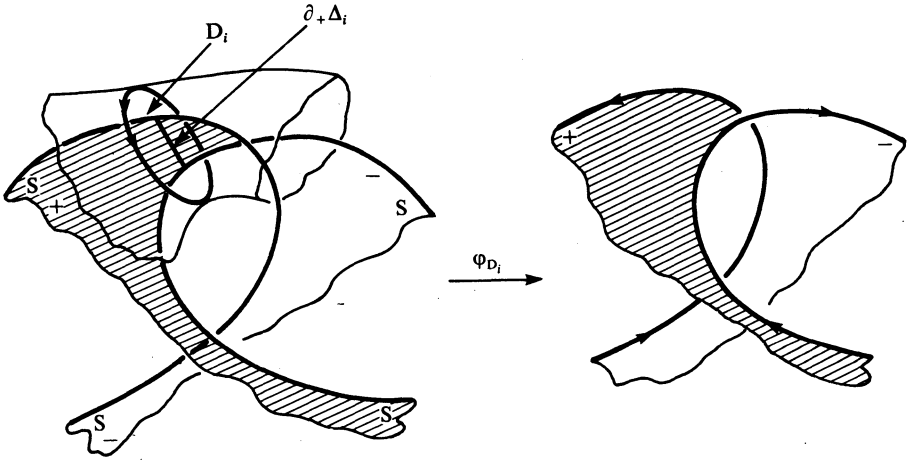

Fig. 2.

Il y a un homéomorphisme φ_{D_i} de X(S) dans X(S) qui fixe le complémentaire d'un voisinage régulier de D_i dans X(S) pour $i = 1,2$ (D_i – « twist ») tel que pour $\varphi = \varphi_{D_1} \circ \varphi_{D_2}$, $\varphi(k)$ soit le nœud trivial de S^3 en vertu des propriétés de F (voir fig. 2).

La proposition 3.2.2 permet dans ces conditions de conclure au type $\mathscr{C}$ pour k.

3.3. *Nœuds de type* $\mathscr{I}$:

– Pour construire des nœuds de type $\mathscr{I}$, il suffit de plonger la paire (X,k) (voir définition et propriétés dans 3.1) par $p : (X,k) \to S^3$ de telle façon que $\overline{S^3 - p(X)}$ soit bord-incompressible :

Le nœud $p(k)$ est un nœud de type $\mathscr{I}$.

– Les « small-knots », les « star-knots », les nœuds alternés (voir 3.2) sont de type $\mathscr{C}$ mais ne sont pas de type $\mathscr{I}$.

– Des exemples de nœuds de type $\mathscr{I}$ et de type $\mathscr{C}$ sont donnés dans [11]. Une propriété générale concernant les nœuds de type $\mathscr{I}$ est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3.1. – *Tous les revêtements cycliques ramifiés d'un nœud de type* $\mathscr{I}$ *sont des variétés de Haken.*

Plus précisément, si $p_n : M_n \to S^3$ *est le revêtement ramifié cyclique d'ordre* n *de* (S^3,k), *il existe une famille de* n *surfaces fermées incompressibles dans* M_n, *disjointes et non parallèles deux à deux, équivariantes par rapport au groupe cyclique d'ordre* n *opérant sur* M_n.

Choisissons S une surface de Seifert pour k dans S^3 telle que $\partial X = \partial E$ (voir 3.1.1) soit bord-incompressible (voir 3.1). La construction de M_n à partir d'une telle surface est rappelée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{E},\partial\tilde{E},\sigma) \times \mathbf{Z}_n & \xrightarrow{p_{\sigma,n}} & M_n \\ \downarrow \pi_n & & \downarrow p_n \\ (\tilde{E},\partial\tilde{E},\sigma) & \xrightarrow{p_\sigma} & S^3 \end{array}$$

où $(E,\partial E,\sigma) \xrightarrow{p_\sigma} (S^3,S,k)$ est l'éclatement et l'identification de (S^3,S,k) (voir 3.1.3),

π_n est la projection naturelle,
$p_{\sigma,n}$ est l'identification définissant M_n, [14],
p_n est l'application de revêtement ramifié induite par π_n.

Ainsi $p_n^{-1}(E)$ est constitué de n exemplaires de E dans M_n, $p_n^{-1}(X)$ est le voisinage régulier dans M_n de $S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{n-1}$, sous polyèdre de M_n équivariant par l'action de $\mathbf{Z}_n$ sur M_n.

Il suffit de remarquer que pour $n \geqslant 2$, $p_n^{-1}(X)$ est bord-incompressible pour conclure que $\partial(p_n^{-1}(X)) = \partial(p_n^{-1}(E))$ est une famille de surfaces fermées satisfaisant aux conclusions de la proposition 3.3.1.

L'irréductibilité de M_n est assurée par l'incompressibilité de

$$\partial(p_n^{-1}(X)) = \partial(p_n^{-1}(E)),$$

l'irréductibilité de E et l'irréductibilité de

$$p_n^{-1}(X) = N(S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{n-1}).$$

Remarque. — Cette proposition permet de conclure au type $\mathscr{C}$ (en excluant le type $\mathscr{I}$) pour tous les nœuds dont un revêtement ramifié n'est pas Haken.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. R. Brakes, Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 87, n° 3 (1980), 443-448.

[2] R. H. Crowell, Genus of alternating link types, *Ann. of Math.*, Vol. 69, n° 2 (1959), 258-275.

[3] M. Culler and P. Shalen, Incompressible surfaces and surgery on knots, preprint.

[4] M. Domergue et H. Short, Surfaces incompressibles dans les variétés obtenues par chirurgie longitudinale sur un nœud de S^3, *C.R.A.S.*, Tome 300. Série I, n° 19 (1985), 669-672.

[5] C. Mc Gordon, Dehn surgery and satellite knots, *Trans. AMS*, 275, n° 2 (1983), 687-708.

[6] J. Hempel, 3-manifolds, *Annals of Math Studies*, n° 86, Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

[7] W. Jaco, Lectures on Three-Manifold Topology, *CBMS Regional Conferences Series*, (43) Amer. Math. Soc., (1980).

[8] W. Jaco, Adding a 2-handle to a 3-manifold, *Proc. A.M.S.*, 92 (1984), 288-292.

[9] K. Johannson, On irreducibility of 3-manifolds, *preprint*.

[10] R. Kirby, Problems in low dimensional manifold theory, *Proc. Symposia in Pure Math.*, vol. 32 (1978).

[11] H. C. Lyon, Simple knots without unique minimal surfaces, *Proc. A.M.S.*, 43 (1974), 449-453.

[12] W. Menasco, Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements, *Topology*, 23 (1984), 37-44.

[13] L. Moser, On the impossibility of obtaining $S^2 \times S^1$ by elementary surgery along a knot, *Pacific J. of Math.*, 53 (1974), 519-523.

[14] Neuwirth, Knot groups, *Annals of Math. Studies*, n° 56 Princeton University Press (1953).

[15] U. Oertel, Closed incompressible surfaces in complements of star links, *Pacific Journal of Mathematics.*

[16] C. D. Papakyriakopoulos, On Dehn's Lemma and the asphericity of knots, *Ann. of Math.*, 66 (1957), 1-26.

[17] J. H. Prezynskii, Incompressibility of surfaces after Dehn surgery, *Michigan Math. J.*, 30 (1983), 289-307.

[18] D. Rolfsen, Knots and Links, *Maths. Lecture Series*, Publish or Perish.

[19] H. Short, Some closed incompressible surfaces... in « Low dimensional topology », *Lecture Note Séries*, n° 95, London Math. Soc., p. 179-194. Edited by Roger Fenn.

Références complémentaires :

[20] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds, *J. Diff. Geom.*, 18 (1983), 445-503.

[21] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds (II) et (III), *MSRI preprint*, n° 08912-85.

[22] M. Culler, C. Gordon, J. Luecke and P. Shalen, Dehn surgery on knots, *preprint*..

[23] M. Scharleman, Sutured manifolds and generalized Thurstan norms, *preprint*, décembre 1985.

Manuscrit reçu le 15 mars 1985
révisé le 16 juillet 1986.

M. Domergue & H. Short,
Université de Provence
Mathématiques - L.A. au C.N.R.S. n° 225
3, place Victor Hugo
13331 Marseille Cedex 03.