ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AHMED ZERIAHI

Meilleure approximation polynomiale et croissance des fonctions entières sur certaines variétés algébriques affines

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 2 (1987), p. 79-104
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_79_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 2 (1987), 79-104.

MEILLEURE APPROXIMATION POLYNOMIALE ET CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES SUR CERTAINES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES AFFINES

par Ahmed ZERIAHI

Introduction.

Soit K un compact polynomialement convexe de $\mathbf{C}^n$, alors d'après un théorème d'approximation d'Oka-Weil ([6], Th. 2.7.7., p. 55) toute fonction f holomorphe au voisinage de K peut être approchée uniformément sur K par une suite de polynômes de n variables complexes. Le théorème de Bernstein-Walsh (voir [4], [15] pour le cas d'une variable et [10] pour celui de plusieurs variables) précise le degré d'approximation de f au sens de Tchebysheff. C'est-à-dire que l'erreur d'approximation :

$$(1) \quad \mathscr{E}_k(f;\mathrm{K}) := \operatorname{Inf}\left\{\max_{z\in \mathrm{K}} |f(z)-\mathrm{P}(z)| : \mathrm{P}\in \mathscr{P}_k(\mathbf{C}^n)\right\}, \quad k \geqslant 1$$

où $\mathscr{P}_k$ $(\mathbf{C}^n)$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de n variables complexes de degré au plus k, décroît vers 0 au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison inférieure à un.

De façon plus précise, lorsque K est L-régulier (la fonction extrémale V_K est continue) la suite géométrique « optimale » a pour raison $1/r$ $(r>1)$ où r est le « niveau » du plus grand domaine

$$(2) \qquad \Omega_r = \{z\in \mathbf{C}^n : \exp \mathrm{V}_\mathrm{K}(z) < r\}$$

sur lequel la fonction f est holomorphe.

Nous avons étendu ce théorème au cas d'une variété algébrique affine de dimension pure ([17]).

Mots-clés : Variété algébrique affine intersection complète - Meilleure approximation polynomiale - Croissance des fonctions entières - Fonctions plurisousharmoniques extrémales - Formules intégrales avec poids.

Il est bien connu que la borne inférieure est atteinte dans (1) pour au moins un polynôme dit polynôme de Tchebysheff de la meilleure approximation de f sur K d'ordre k. Il est en général difficile de construire de tels polynômes.

Cependant, nous allons montrer ici qu'il est possible de construire des opérateurs linéaires pour la meilleure approximation sur K pour les fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}_r (r > 1)$ (où Ω_r est donné par (2)) de telle sorte que l'erreur d'approximation $\|f - A_k(f)\|_K$ soit contrôlée par une quantité de la forme $c(r,\theta) \frac{\|f\|}{r^k} \bar{\Omega}_{r\theta}$, où $c(r,\theta)$ ne dépend que de $r > 1$ et $\theta > 1$. Cela signifie en particulier que cette erreur décroît vers 0 comme $\frac{1}{r^k}$ « uniformément » en f; mais la nouveauté réside dans le fait que notre méthode permet de préciser le comportement asymptotique de la constante $c(r,\theta)$ lorsque r tend vers $+\infty$. Nous montrons que $C(r,\theta)$ est à croissance polynomiale en r.

Cette majoration permet de donner des estimations précises sur les coefficients de Fourier d'une fonction entière par rapport à une base polynomiale orthogonale sur K pour une mesure de Borel positive convenable sur K. Ces estimations sont utilisées pour le calcul de l'ordre et du type d'une fonction entière, à l'aide de ses coefficients de Fourier selon la base considérée, généralisant ainsi les formules classiques de Lindelöf et Gol'dberg (voir [8]).

Enfin nous utilisons ces formules pour donner une extension à plusieurs variables d'un théorème de type Bernstein reliant l'ordre et le type d'une fonction entière à sa meilleure approximation polynomiale sur K.

Ce genre de résultats a déjà fait l'objet de quelques travaux, notamment ceux de Nguyen Thanh Van ([7]) et Winiarski ([13], [14]).

La méthode utilisée ici repose sur les formules de représentations avec des noyaux à poids construites récemment par Anderson et Berndtsson ([1]) ainsi que les formules d'interpolation de Berndtsson ([3]) obtenues à partir des précédentes.

Les résultats que nous obtenons sont plus généralement valables lorsqu'on remplace $\mathbf{C}^n$ par une variété algébrique affine intersection complète (voir § 1 pour la définition).

1. Construction d'opérateurs linéaires pour la meilleure approximation polynomiale.

Soit X une variété algébrique affine intersection complète de codimension $m \geqslant 1$ contenue dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et définie par :

$$X = \{z \in \mathbf{C}^{n+m} : u_1(z) = \cdots = u_m(z) = 0\}$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des polynômes de $n + m$ variables complexes de degré $\leqslant d$ et vérifiant la condition d'intersection complète :

$$(1) \qquad \partial u_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial u_m(z) \neq 0, \quad \forall z \in X.$$

En raisonnant comme dans ([2], exemple 1) on montre facilement à l'aide de (1) et du Nullstellensatz qu'il existe un entier $M \geqslant 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$(2) \qquad \|\partial u_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial u_m(z)\| \geqslant C(1+|z|)^{-M}, \quad \forall z \in X.$$

Dans tout ce qui va suivre si $E \subset X$, $O(E)$ désignera l'espace des fonctions holomorphes sur E si E ouvert et au voisinage de E si E est quelconque. $\mathscr{P}_\ell(\mathbf{C}^{n+m})$ désignera l'espace des polynômes de $n + m$ variables complexes de degré au plus ℓ. Posons pour tout $r \geqslant 1$:

$$X_r = z \in X : \|z\| < r\}, \qquad \text{où} \qquad \|z\| = \max_j |z_j|$$

et supposons dans la suite que $X_1 \neq \varnothing$.

Nous allons prouver le résultat suivant qui sera fondamental dans la suite :

THÉORÈME 1.1. — *Pour tout $r > 1$, $\theta > 1$ et $\ell > m(d-1)$, il existe un opérateur linéaire intégral :*

$$S_\ell^{r,\theta} : \ O(\bar{X}_{r\theta}) \to \mathscr{P}_\ell(\mathbf{C}^{n+m})$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\text{(i)} \qquad |S_\ell^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C(\theta,r,\ell).(1+|z|)^\ell \, |f|_{\bar{X}_{r\theta}},$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^{n+m}$, $\ell > m(d-1)$ et $f \in O(\bar{X}_{r\theta})$

(ii) $$\max_{z\in Z_1} |f(z)-S_\ell^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C(\theta)\cdot\frac{(r+1)^{M+2n+m(d-1)}}{(r-1)^{2n-1}}\left(\frac{1+\sqrt{n+m}.r}{1+r^2}\right)^\ell |f|_{X_{r\theta}}$$

pour toute fonction $f\in O(\bar{X}_{r\theta})$ *et tout entier* $\ell > m(d-1)$, *la constante* $C(\theta)$ *étant indépendante de* f, *de* ℓ *et de* r.

Tout d'abord rappelons brièvement la formule intégrale à poids de Anderson et Berndtsson qui va nous servir à construire les opérateurs linéaires dont il est question dans le théorème.

Soit $\theta > 1$ et χ_θ une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ telle que $\chi_\theta = 1$ sur $[0,1]$ et à support dans $[0,\theta]$.

Posons pour $r > 1$,

$$U_r = \{z\in \mathbf{C}^{n+m} : \|z\|<r\} \qquad \text{et} \qquad \chi_{r,\theta}(z) = \prod_{j=1}^{n+m}\chi_\theta\left(\frac{|z_j|}{r}\right).$$

La formule de Koppelman avec des noyaux à poids de type Anderson et Berndtsson ([1]) appliquée à la fonction $\chi_{r,\theta}f$ avec $f\in O(\bar{X}_{r\theta})$ donne :

$$(3)\quad f(z)=\int_{U_{r\theta}} f(\zeta)\bar\partial\chi_{r,\theta}(\zeta)\wedge K^{(N)}(z,\zeta) + \int_{U_{r\theta}} f(\zeta)\chi_{r,\theta}(\zeta)P^{(N)}(z,\zeta)$$

pour $z\in X_r$;

$K^{(N)}$ et $P^{(N)}$ sont des noyaux portés par la variété X construits par Berndtsson pour obtenir des formules d'interpolation ([3]) et définis par les formules suivantes :

$$(4)\quad K^{(N)}(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k,n,m)G^{(k)}(\langle Q, z-\zeta\rangle+1) \cdot \frac{s\wedge(\bar\partial s)^{n-1-k}\wedge(\bar\partial Q)^k}{|z-\zeta|^{2(n-k)}}\wedge\mu(z,\zeta)$$

$$(5)\quad P^{(N)}(z,\zeta) = C(n,m)G^{(n+m)}(\langle Q, z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q)^n\wedge\mu(z,\zeta)$$

où l'on a posé $G(\alpha) = \alpha^N (\alpha\in\mathbf{C})$, $s = \sum_{j=1}^{n+m}(\bar z_j-\bar\zeta_j)\,d\zeta_j$,

$$(6)\qquad Q(z,\zeta) = \partial\log(1+|\zeta|^2) = \sum_{j=1}^{n+m}\frac{\bar\zeta_j}{(1+|\zeta|^2)}\,d\zeta_j$$

avec

$$|\zeta|^2 = \sum_{j=1}^{n+m} |\zeta_j|^2,$$

$$(7) \quad \mu(z,\zeta) = \frac{g^1(z,\zeta) \wedge \ldots \wedge g^m(z,\zeta) \wedge \overline{\partial u_1}(\zeta) \wedge \ldots \wedge \overline{\partial u_m}}{\|\partial u_1(\zeta) \wedge \ldots \wedge \partial u_m\|^2} \sigma_X$$

où σ_X est la mesure de Lebesgue sur X; ainsi μ est un courant positif de bidegré (m,m) dont les coefficients sont des mesures positives portées par la variété X, de sorte que dans la formule (3) les deux intégrales portent sur $X_{r\theta} = X \cap U_{r\theta}$. De plus précisons que les formes $g^1, \ldots, g^m$ qui interviennent dans (7) sont définies par :

$$g^k(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n+m} g_j^k(z,\zeta)\, d\zeta_j, \qquad k = 1, \ldots, m$$

où les coefficients g_j^k sont définis par les conditions suivantes

$$u_k(z) - u_k(\zeta) = \sum_{j=1}^{n+m} (z_j - \zeta_j) g_j^k(z,\zeta), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Dans le cas considéré ici, on prendra les polynômes suivants :

$$(8) \qquad g_j^k(z,\zeta) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \zeta_j} u_k(\zeta + t(z-\zeta))\, dt,$$

$$k = 1, \ldots, m \qquad \text{et} \qquad j = 1, \ldots, n+m.$$

Remarquons que le noyau $P^{(N)}(z,\zeta)$ défini par (5) est holomorphe en z sur $\mathbf{C}^{n+m}$ alors que $K^{(N)}(z,\zeta)$ ne l'est pas.

Posons pour $f \in C^0(\bar{X}_{r\theta})$

$$(9) \quad T_N^{r,\theta}(f)(z) = \int_{X_{r\theta}} f(\zeta)\chi_{r,\theta}(\zeta) P^{(N)}(z,\zeta), \quad z \in \mathbf{C}^{n+m}.$$

Pour démontrer le théorème 1.1, nous aurons besoin de deux lemmes :

LEMME 1.1. — *Pour tout réel* $N > m + n$, $T_N^{r,\theta}(f)$ *est un polynôme en* $z \in \mathbf{C}^{n+m}$ *de degré* $\leqslant N - m - n + m(d-1)$ *qui vérifie :*

$$|T_N^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C(n,m,\theta,r,N)(1+|z|)^{N-n-m+m(d-1)} |f|_{\bar{X}_{r\theta}}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^{n+m}$.

Démonstration. — Explicitons le noyau $P^{(N)}$. Remarquons tout d'abord que $\langle Q(z,\zeta), z-\zeta\rangle + 1 = \dfrac{1+\bar{\zeta}.z}{1+|\zeta|^2}$; alors d'après (5), (6) et (7) on a :

$$(10)\quad P^{(N)}(z,\zeta) = C(n,m)N(N-1)\dots(N-n-m+1)\left(\frac{1+\bar{\zeta}.z}{1+|\zeta|^2}\right)^{N-n-m}(\partial\bar{\partial}\log(1+|\zeta|^2))^n \wedge \mu(z,\zeta).$$

D'autre part d'après la formule (8), on a

$$|g_j^k(z,\zeta)| \leqslant C(n,m)(1+|\zeta|+|z|)^{d-1},$$
$$\forall z \in \mathbf{C}^{n+m}, \qquad \forall \zeta \in \mathbf{C}^{n+m}, \qquad \forall k, \quad \forall j$$

d'où on déduit aisément les inégalités :

$$(11)\quad \|g^1(z,\zeta) \wedge \dots \wedge g^m(z,\zeta)\| \leqslant C(n,m)(1+|\zeta|+|z|)^{m(d-1)}, \qquad \forall z, \quad \forall \zeta,$$

$$(12)\quad \|\mu(z,\zeta)\| \leqslant \frac{\|g^1(z,\zeta) \wedge \dots \wedge g^m(z,\zeta)\|}{\|\partial u_1(\zeta) \wedge \dots \wedge \partial u_m(\zeta)\|} \leqslant C(1+|\zeta|)^{M+m(d-1)}(1+|z|)^{m(d-1)}, \quad \forall z, \quad \forall \zeta$$

en utilisant (2). Par suite de l'inégalité (12) et de la formule (10) on déduit la majoration :

$$(13)\quad \|P^{(N)}(z,\zeta)\| \leqslant C(n,m)\frac{(1+|\zeta|)^{N-n-m+m(d-1)}}{(1+|\zeta|^2)^{N-m-M/2}}(1+|z|^{N-n-m+m(d-1)}.$$

A partir de la formule (9) et de l'inégalité (13), on déduit aisément la majoration du lemme qui montre que $T_N^{r,\theta}(f)$ est bien un polynôme de degré $\leqslant N-n-m+m(d-1)$ d'après le théorème de Liouville. Le lemme est démontré.

LEMME 1.2. — *Pour tout* $\theta > 1$, *il existe une constante* $C(n,m,\theta) > 0$ *telle que pour tout* $r > 1$ *et* $f \in O(\bar{X}_{r\theta})$ *on ait :*

$$\max_{z\in \bar{X}_1} |f(z) - T_N^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C(n,m,\theta)\cdot\frac{(1+r\theta)^{M+m(d-1)+2n}}{(r-1)^{2n-1}}\left(\frac{1+\sqrt{n+m}.r\theta}{1+r^2}\right)^N |f|_{X_{r\theta}}.$$

Démonstration. — D'après la formule de représentation (3) on a

$$(14)\quad |f(z)-T_N^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant \int_{X_{r\theta}\setminus X_r} |f(\zeta)|\,\|\bar\partial\chi_{r,\theta}(\zeta)\|.\|K^{(N)}(z,\zeta)\|$$

puisque $\chi_{r,\theta} = 1$ sur U_r.

Il est facile de voir que $\|\bar\partial\chi_{r,\theta}(\zeta)\| = 0\left(\frac{1}{r}\right)$ pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^{n+m}$. Il suffit donc d'estimer $\|K^{(N)}(z,\zeta)\|$. Ce noyau s'écrit compte tenu de la formule (4) et de ce qui précède :

$$(15)\quad K^{(N)}(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k,n,m)N(N-1)\ldots(N-k+1)\left(\frac{1+\bar\zeta.z}{1+|\zeta|^2}\right)^{N-k} \times \frac{s\wedge(\partial s)^{n-1}\wedge(\partial\bar\partial\log(1+|\zeta|^2))^k}{|z-\zeta|^{2(n-k)}}\wedge\mu(z,\zeta).$$

Remarquons que pour $z \in \bar X_1$ et $\zeta \in U_{r\theta}\setminus U_r$, $r > 1$ on a : $|z-\zeta| \geqslant r-1$. Il résulte alors de la formule (15) compte tenu des estimations (2), (11) et (12) :

$$(16)\quad \|K^{(N)}(z,\zeta)\| \leqslant C(n,m,\theta)\frac{(1+r\theta)^{M+m(d-1)}}{(r-1)^{2n-1}}\left(\frac{1+\sqrt{n+m}.r\theta}{1+r^2}\right)^N$$

pour $z \in \bar X_1$ et $\zeta \in X_{r\theta}\setminus X_r (r>1)$.

D'après (14) et (16) on obtient alors :

$$(17)\quad \max_{z\in\bar X_1}|f(z)-T_N^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C(n,m,\theta)\frac{(1+r\theta)^{M+m(d-1)}}{(r-1)^{2n-1}}\times\left(\frac{1+\sqrt{n+m}.r\theta}{1+r^2}\right)^N\times\int_{X_{r\theta}} d\sigma_X.$$

D'après un théorème de Stoll l'aire $\int_{X_{r\theta}} d\sigma_X$ est dominée par $(r\theta)^{2n}$ ([12]). En reportant cette majoration dans (17), on obtient le lemme avec θ^2 au lieu de θ. Ce qui prouve le lemme.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1.1. Soit $r > 1$, $\theta > 1$ et $\ell > m(d-1)$.

Posons $N_\ell = \ell + n + m - m(d-1)$, $\theta' = \sqrt{\theta}$ et $r' = r\theta'$.

Définissons l'opérateur $S_\ell^{r,\theta}$ par la formule :

$$S_\ell^{r,\theta}(f) = T_{N_\ell}^{r',\theta'}(f) \qquad \text{pour} \qquad f \in O(\bar{X}_{r\theta}).$$

Il est alors immédiat de voir que ces opérateurs vérifient les conditions du théorème 1.1 d'après les lemmes 1.1 et 1.2.

2. Meilleure approximation polynomiale : cas d'un polyèdre polynomial.

Soit Y une variété algébrique intersection complète de codimension $p > 0$ dans $\mathbf{C}^{n+p}$ définie par :

$$Y = \{z \in \mathbf{C}^{n+p} : v_1(z) = \cdots = v_p(z) = 0\}$$

où $v_1, \ldots, v_p$ sont des polynômes de $n + p$ variables complexes tels que

$$(1) \qquad \partial v_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial v_p(z) \neq 0, \qquad \forall z \in Y.$$

Soit $P : \mathbf{C}^{n+p} \to \mathbf{C}^q$ une application polynomiale de degré

$$d = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \deg (P_j) > 1,$$

on lui associe le polyèdre polynomial compact de Y défini par :

$$K = K_P = \{z \in Y : \|z\| \leqslant 1, \ \|P(z)\| \leqslant 1\}.$$

On définit aussi les polyèdres polynomiaux ouverts :

$$D_r = \{z \in Y : \|z\| < r^d, \|P(z)\| < r^d\}, \qquad r > 1.$$

Comme au § 1, on montre qu'il existe un entier $M > 0$ tel que

$$(2) \qquad \|\partial v_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial v_p(z)\| > C(1+|z|)^{-M}, \qquad z \in Y.$$

Dans ces conditions, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit* K *un polyèdre polynomial compact de* Y, θ *un nombre réel* > 1 *et* $P : \mathbf{C}^{n+p} \to \mathbf{C}^q$ *une application polynomiale de degré* $d > d_\theta = (\log \theta)^{-1} \log \sqrt{n + p + q}$ *telle que* $K = K_P$. *Alors pour tout réel*

$r > 1$ et tout entier $\ell > (p+q)(d-1)$, il existe un opérateur linéaire intégral d'approximation :

$$A_\ell^{r\theta} : O(\bar{D}_{r\theta}) \to \mathscr{P}_{\ell.d}(C^{n+p})$$

vérifiant l'estimation suivante :

$$\max_{z \in K} |f(z) - A_\ell^{r,\theta}(f)(z)| < C(\theta) \frac{(r^d+1)^N}{(r^d-1)^{2n-1}} \cdot \frac{|f|_{D_{r\theta}}}{r^{\ell.d}}$$

pour tout $f \in O(\bar{D}_{r\theta})$; où $N = (p+q)(d-1) + M + 2n$ et $C(\theta)$ est une constante indépendante de f, ℓ et r.

Démonstration. — Soit $\theta > 1$ et $P : \mathbf{C}^{n+p} \to \mathbf{C}^q$ une application polynomiale telle que $K = K_P$. En élevant chaque composante de P à une puissance convenable, on peut choisir P de degré arbitrairement grand. Soit $\theta > 1$, on prendra P tel que $d = d_\theta$ vérifie $\theta^d > \sqrt{n+p+q}$. Considérons la variété algébrique

$$X = \{(\zeta,\eta) \in \mathbf{C}^{n+p} \times \mathbf{C}^q : v(\zeta) = 0,\ \eta = P(\zeta)\}.$$

Alors X est une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^{n+p} \times \mathbf{C}^q \simeq \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{p+q}$ intersection complète de codimension $m = p + q$ et l'application d'Oka :

$$\begin{aligned} \mu_P : Y &\to X \\ z &\mapsto (z, P(z)) \end{aligned}$$

est une bijection polynomiale de Y sur X. Désignons par U_ρ^k le polydisque de centre l'origine et de polyrayon $(\rho,\ldots,\rho)$ dans $\mathbf{C}^k$. On a alors

$$\mu_P(K_P) = X \cap (\bar{U}_1^{n+p} \times \bar{U}_1^q) \quad \bar{X}_1$$

$$\mu_P(D_r) = X \cap (U_{r^d}^{n+p} \times U_{r^d}^q) \quad = = X_{r^d}.$$

Toute fonction $f \in O(\bar{D}_{r\theta})$ se transforme par μ_P en une holomorphe f_* sur $\bar{X}_{(r\theta)^d}$ à laquelle on peut appliquer le théorème 1.1. On construit ainsi les opérateurs d'approximations en posant

$$A_\ell^{r,\theta}(f)(z) = S_\ell^{r',\theta}(f_*)(z, P(z)), \quad z \in Y \qquad \text{avec} \qquad r' = r^d\theta^d.$$

Il est alors clair que $A_\ell^{r,\theta}$ est un opérateur linéaire intégral de $O(\bar{D}_{r\theta})$ dans $\mathscr{P}_{\ell d}(\mathbf{C}^{n+p})$ qui d'après le théorème 1.1 vérifie les estimations du

théorème 2.1 puisque :

$$\max_{Z \in K_P} |f(z) - A_\ell^{r,\theta}(f)(z)| = \max_{w \in X_1} |f_*(w) - S_\ell^{r^d,\theta^d}(f_*)(w)|$$

le théorème 2.1 est démontré.

3. Meilleure approximation polynomiale sur un compact régulier.

Soit K un compact de $\mathbf{C}^N$, on définit la fonction extrémale associée à K([11]) par la formule

$$V_K(z) = \sup \{v(z); v \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^N),\ v \leqslant 0 \text{ sur } K\}$$

où $\mathscr{L}(\mathbf{C}^N)$ est la classe des fonctions plurisousharmoniques (p.s.h.) sur $\mathbf{C}^N$ vérifiant

$$v(z) \leqslant C_v + \log(1+|z|), \qquad z \in \mathbf{C}^N$$

où C_v est une constante ne dépendant que de v.

Si $N = 1$, V_K coïncide avec la fonction de Green de la composante non bornée de $\mathbf{C} \setminus K$ avec pôle à l'infini ([10]).

On montre ([11]) que si K est non-pluripolaire dans $\mathbf{C}^N$ alors la régularisée semi-continue supérieurement (s.c.s.) sur $\mathbf{C}^N$ définie par :

$$V_K^*(z) = \limsup_{\zeta \to z} V_K(\zeta), \qquad \forall z \in \mathbf{C}^N$$

est plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^N$ et $V_K^* \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^N)$.

Supposons maintenant que X est une variété algébrique intersection complète de codimension $p > 1$ dans $\mathbf{C}^{n+p}$ et K un compact de X. Alors comme compact de $\mathbf{C}^{n+p}$, K possède une fonction extrémale V_K définie sur $\mathbf{C}^{n+p}$, mais comme K est pluripolaire dans $\mathbf{C}^{n+p}$, on a $V_K^* = +\infty$ sur $\mathbf{C}^{n+p}$ ([11]).

Cependant Sadullaev ([9]) a montré que si K est non-pluripolaire sur chaque branche irréductible de X, la régularisée s.c.s. de V_K sur X définie par :

$$V_K^*(z) = \limsup_{\substack{\zeta \to z \\ \zeta \in X}} V_K(\zeta), \quad z \in X$$

est p.s.h. sur X et vérifie :

$$V_K^*(z) \leqslant C_v + \log(1+|z|), \qquad z \in X$$

où C_v est une constante ne dépendant que de v (voir aussi [17]).

On montre aussi ([9] et [17]) que :

$$V_K(z) = \operatorname{Sup}\{v(z) : v \in \mathscr{L}(X), v|K \leqslant 0\}, \qquad z \in X$$

où $\mathscr{L}(X)$ est la classe des fonctions p.s.h. sur X vérifiant :

$$v(z) \leqslant C_v + \log(1+|z|), \qquad z \in X.$$

Une étude plus détaillée de cette fonction extrémale sur une variété algébrique se trouve dans ([17]).

On montre également que si V_K est continue en tout point de K alors V_K est continue sur X ([17]), dans ce cas nous dirons que K est L-régulier dans X. On définit les domaines de niveau de la fonction extrémale par :

$$\Omega_r = \{z \in X : V_K(z) < \log r\}, \qquad r > 1.$$

Voici notre résultat principal :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* K *un compact* L-*régulier dans* X. *Alors pour tout* $\theta > 1$, *il existe des entiers* $\ell_\theta > 1$, $N_\theta > 1$ *et* $d_\theta > 1$, *une constante* $c_\theta > 0$ *tels que pour tout* $r > 1$ *et tout* $\ell \geqslant \ell_\theta$ *il existe un opérateur linéaire*

$$A_\ell^{r,\theta} : O(\bar{\Omega}_{r_\theta}) \to \mathscr{P}_{\ell . d_\theta}(\mathbf{C}^{n+p})$$

vérifiant l'estimation suivante :

$$\max_{z \in K} |f(z) - A_\ell^{r,\theta}(f)(z)| \leqslant C_\theta \frac{(r+1)^{N_\theta}}{(r-1)^{2n-1}} \cdot \frac{|f|_{\Omega_{r\theta}}}{r^{\ell . d_\theta}}$$

pour tout $f \in O(\bar{\Omega}_{r\theta})$, $\ell \geqslant \ell_\theta$ *et* $r > 1$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord approcher de façon uniforme les domaines Ω_r par des polyèdres polynomiaux et appliquer le théorème 2.1. C'est le but du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soit* K *un compact* L-*régulier sur chaque composante connexe de* X. *Alors pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$, *et tout réel* $\theta > 1$, *il existe des polynômes* $P_1, \ldots, P_q$ *de* $n+p$ *variables complexes, avec*

$d = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \deg(P_j) > d_\theta = (\log \theta)^{-1} . \log \sqrt{n+p+q}$ *et tels que :*

$$(2) \quad (1-\varepsilon)V_K(z) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} \frac{1}{d} \log |P_i(z)| \leqslant V_K(z) + \varepsilon, \quad \forall z \in X.$$

En particulier, si on pose $D_r := \{z \in X : \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |P_i(z)| < r^d\}$, *on a :*

$$(3) \qquad \Omega_r \subset D_{r_e^\varepsilon} \quad et \quad D_{r^{1-\varepsilon}} \subset \Omega_r, \qquad \forall r > 1.$$

Démonstration. — Nous allons utiliser la même idée que dans la démonstration de ([17], lemme 4.1.). Identifions X à la sous-variété algébrique

$$\tilde{X} := \{(z,t) \in \mathbf{C}^{n+p} \times \mathbf{C} : t = 1 \text{ et } z \in X\}$$

de $\mathbf{C}^{n+p+1}$ et considérons le cône algébrique Y de $\mathbf{C}^{n+p+1}$ engendré par $\tilde{X}$. Soit $\tilde{K}$ le compact de $\tilde{X}$ auquel s'identifie K. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Considérons la fonction g_ε définie sur Y par la formule :

$$g_\varepsilon(\zeta) = \begin{cases} |t| \exp(1-\varepsilon)V_K(z/t) & \text{si } \zeta = (z,t) \in Y \text{ et } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } \zeta = (z,0) \in Y. \end{cases}$$

Puisque K est L-régulier, il résulte de ([17], théorème 3.1) que V_K est p.s.h. continue sur X et donc g_ε est p.s.h. et continue sur Y.

Soit $\rho > 0$ tel que $K \subset \{z \in \mathbf{C}^{n+p} : |z| \leqslant \rho\}$, alors d'après ([17], proposition 4.1.) on a :

$$V_K(z) \geqslant \log^+ \frac{|z|}{\rho}, \qquad \forall z \in X.$$

Par conséquent si on pose $|\zeta|_\rho = \max\left(\frac{|z|}{\rho}, |t|\right)$ pour $\zeta = (z,t) \in Y$, la fonction définie par :

$$h_\varepsilon(\zeta) = \max\{g_\varepsilon(\zeta), |\zeta|_\rho\}, \qquad \zeta \in Y$$

est p.s.h. continue sur Y. De plus $\log h_\varepsilon$ est p.s.h. continue sur $Y \setminus \{0\}$ et vérifie les inégalités suivantes :

$$(4) \qquad \exp(1-\varepsilon)V_K(z) \leqslant h_\varepsilon(z,1) \leqslant \exp V_K(z), \qquad \forall z \in X.$$

En considérant le domaine de Stein disqué

$$\Omega = \{\zeta \in Y : h_\varepsilon(\zeta) < 1\}$$

et en raisonnant comme dans ([17], lemme 4.1.), on prouve facilement l'assertion suivante :

Pour tout $\zeta \in S : = \{\zeta \in Y : |\zeta| = 1\}$, il existe une suite $\{Q_k\}$ de polynômes homogènes avec $\deg(Q_k) = k$ pour $k \geqslant 1$ et telle que :

$$Q_k(\zeta) = h_\varepsilon(\zeta)^k, \qquad \forall k \geqslant 1 \tag{5}$$

$$\limsup_{k \to \infty} |Q_k(w)|^{1/k} \leqslant h_\varepsilon(w), \qquad \forall w \in Y. \tag{6}$$

Soit $\eta > 0$, la fonction $\log h_\varepsilon$ étant continue sur S, en appliquant le lemme de Hartogs à l'inégalité (6), on obtient :

$$|Q_k(w)|^{1/k} \leqslant e^{+\eta} h_\varepsilon(w), \qquad \forall w \in S, \quad \forall k \geqslant k_0(\eta). \tag{7}$$

D'autre part la continuité de $\log h_\varepsilon$ et (5) montrent qu'il existe un voisinage ω_ζ de ζ dans Y tel que si on prend $k_1 > k_0(\eta)$ on ait

$$|Q_{k_1}(w)^{1/k_1} \geqslant e^{-\eta} h_\varepsilon(w), \qquad \forall w \in \omega_\zeta. \tag{8}$$

Autrement dit : pour chaque $\zeta \in S$, on peut trouver un polynôme homogène Q_{k_ζ} de degré $k_\zeta > k_0(\eta)$ et un voisinage ω_ζ de ζ dans Y pour lesquels les deux inégalités (7) et (8) sont satisfaites.

Par un argument de compacité, on en déduit facilement qu'il existe un nombre fini de polynômes homogènes $Q_{k_{\zeta_1}}, \ldots, Q_{k_{\zeta_q}}$ tels que $\deg(Q_{k_{\zeta_i}}) = k_{\zeta_i}$ pour $i = 1, \ldots, q$ et vérifiant les estimations suivantes :

$$e^{-\eta} h_\varepsilon(w) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant q} |Q_{k_{\zeta_i}}(w)|^{1/k_{\zeta_i}} \leqslant e^{\eta} h_\varepsilon(w), \quad \forall w \in S. \tag{9}$$

Par homogénéité, la relation (9) a lieu sur Y. Compte tenu des inégalités (4), on en déduit immédiatement (2) par restriction à $\tilde{X}$ en posant $2\eta = \varepsilon$ et en définissant les polynômes suivants :

$$P_i(z) = (e^{k_{\zeta_i} \cdot \eta} Q_{k_{\zeta_i}}(z,1)^{d_i}) \qquad \text{avec} \qquad d_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} k_{\zeta_j}\right) . d_\theta$$

et

$$d = \left(\prod_{j=1}^{q} k_{\zeta_j}\right) d_\theta .$$

Les inégalités (2) montrent alors que $d = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \deg(P_j)$ et le lemme est prouvé.

Démonstration du théorème 3.1. — Supposons d'abord que $K \subset \{z : \|z\| < 1\}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a alors $K \subset \{z \in \mathbf{C}^{n+p} : \|z\| \leqslant e^{-\varepsilon}\}$. Soit $\theta > 1$, d'après le lemme 3.1, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_q$ de $n + p$ variables complexes tels que $d = \max \deg(P_j) > d_\theta = (\log \theta)^{-1} \log \sqrt{n + p + q}$ et tels que :

$$D_{r^{1-\varepsilon}} \subset \Omega_r, \qquad \forall r > 1$$

où

$$\Omega_r = \{z \in X : V_K(z) < \log r\} \qquad \text{et} \qquad D_r = \{z \in X : \sup_{1 \leqslant j \leqslant q} |P_j(z)| < r^d\}.$$

L'inclusion $K \subset \{\|z\| < e^{-\varepsilon}\}$ donne $V_K(z) \geqslant \log\left(\frac{\|z\|}{e^{-\varepsilon}}\right)$ et donc si $z \in D_r$, on a alors :

$$(1-\varepsilon)V_K(z) < \log r \qquad \text{et} \qquad \|z\| < e^{-\varepsilon} e^{V_K(z)} < e^{-\varepsilon} r^{1/1-\varepsilon} < r^d$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit puisque $d \geqslant 2$. On en déduit que

$$D_r = \{z \in X : \|z\| < r^d, \sup_{1 \leqslant j \leqslant q} |P_j(z)| < r^d\}.$$

Puisque $\theta > 1$ et $D_{r^{1-\varepsilon}} \subset \Omega_r$, en choisissant $\varepsilon \in]0, 1[$ de sorte que $\theta^{1-\varepsilon} > 1$, et en posant $\eta = \theta^{1-\varepsilon}$, on a $D_{r^{1-\varepsilon}, \eta} \subset \Omega_{r, \theta}$. On en déduit alors l'opérateur de restriction suivant :

$$O(\bar{\Omega}_{r,\theta}) \to O(\bar{D}_{r^{-\varepsilon}, n}), \qquad r > 1.$$

D'après le théorème 2.1, il existe un opérateur linéaire intégral

$$A_\ell^{r^{1-\varepsilon}\eta} : O(\bar{D}_{r^{1-\varepsilon}, \eta}) \to \mathscr{P}_{\ell d}(\mathbf{C}^{n+p})$$

ayant la propriété de « meilleure approximation uniforme » énoncée dans ce théorème. En désignant par $A_\ell^{r,\theta}$ la restriction de cet opérateur à l'espace $O(\bar{\Omega}_{r\theta})$, on obtient les résultats annoncés dans le théorème 3.1.

Dans le cas général, on considère une transformation affine Φ de $\mathbf{C}^{n+p}$ dans $\mathbf{C}^{n+p}$ telle que $\Phi(K) = K' \subset \{z \in \mathbf{C}^{n+p} : \|z\| < 1\}$ et on applique ce qui précède à la variété algébrique $\Phi(X) = X'$. Il est facile de vérifier que $V_K(z) = V_{K'}(\Phi(z))$ et par suite que $\Phi(\Omega_r) = \Omega'_r$, $\forall r > 1$ où $\Omega_r = \{z \in X : V_K(z) < \log r\}$ et $\Omega'_r = \{z' \in X' : V_{K'}(z') < \log r\}$. Il suffit main-

tenant de transporter l'opérateur d'approximation sur X′ par Φ^{-1} pour obtenir un opérateur d'approximation sur X ayant les propriétés annoncées dans le théorème. C.Q.F.D.

Nous allons en déduire un résultat qui peut être considéré comme une version précise du théorème de Bernstein-Walsh concernant la meilleure approximation polynomiale au sens de Tchebysheff des fonctions holomorphes sur un compact. Notons pour une fonction continue f sur K :

$$\mathscr{E}_k(f;\mathrm{K}) = \operatorname{Inf}\left\{\max_{z\in \mathrm{K}} |f(z)-\mathrm{P}(z)| : \mathrm{P}\in \mathscr{P}_k(\mathbf{C}^{n+p})\right\}, \qquad k \geqslant 0.$$

COROLLAIRE 3.1. — *Soit* K *un compact* L-*régulier de* X. *Alors pour tout* $\theta > 1$, *il existe un entier* $\mathrm{N}_\theta \geqslant 1$ *et constante* $\mathrm{C}_\theta > 0$ *tels que :*

$$\mathscr{E}_k(f;\mathrm{K}) \leqslant \mathrm{C}_\theta \cdot \frac{(r+1)^{\mathrm{N}_\theta}}{(r-1)^{2n-1}} \cdot \frac{|f|_{\bar{\Omega}_{r\theta}}}{r^k},$$

pour tout $k \geqslant 1$, *tout* $r > 1$ *et tout* $f \in \mathrm{O}(\bar{\Omega}_{r\theta})$.

Démonstration. — Soit $\theta > 1$. Considérons les opérateurs $\mathrm{A}_\ell^{r,\theta}$ donnés par le théorème 3.1 et posons pour $f \in \mathrm{O}(\bar{\Omega}_{r\theta})$:

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{A}_\ell^{r,\theta}(f) \quad \text{si} \quad k > \ell_\theta d_\theta \qquad \text{et} \qquad \ell_\theta d_\theta < k \leqslant (\ell_\theta + 1)\, d_\theta$$
$$\mathrm{P}_k = \mathrm{A}_{\ell_\theta}^{r,\theta}(f) \quad \text{si} \quad k \leqslant \ell_\theta\, d_\theta.$$

Alors pour chaque entier $k \geqslant 0$, P_k est un polynôme de $n + p$ variables complexes de degré au plus k qui vérifie d'après le théorème 3.1, l'inégalité suivante :

$$\max_{z\in \mathrm{K}} |f(z)-\mathrm{P}_k(z)| \leqslant \mathrm{C}_\theta \frac{(r+1)^{\mathrm{N}_\theta}}{(r-1)^{2n-1}} \cdot \frac{|f|_{\bar{\Omega}_{r\theta}}}{r^{\ell_\theta d_\theta}}, \qquad \forall k \geqslant 0. \tag{10}$$

Par définition même, on a

$$\mathscr{E}_k(f;\mathrm{K}) \leqslant \max_{z\in \mathrm{K}} |f(z)-\mathrm{P}_k(z)|, \qquad \forall k \geqslant 0.$$

D'après (10) et le fait que $\ell d_\theta \geqslant k - d_\theta$, il en résulte l'inégalité du corollaire avec $\mathrm{N}_\theta + d_\theta$. Ce qui prouve le corollaire.

On peut également déduire du théorème 3.1 une estimation de l'erreur d'approximation d'une fonction holomorphe au voisinage d'un compact L-régulier de X à l'aide de ses polynômes d'interpolation de Lagrange aux points extrémaux de K.

Définissons d'abord ce que sont les points extrémaux et les polynômes de Lagrange associés à un compact K non-pluripolaire d'un sous-ensemble algébrique X de $\mathbf{C}^h$. Considérons sur $\mathbf{N}^h$ l'ordre suivant : pour $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^h$, $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si, $|\alpha| < |\beta|$ ou $|\alpha| = |\beta|$ et il existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \leqslant i < k$ et $\alpha_k < \beta_k$, où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{h} |\alpha_i|$.

Désignons par I l'idéal de la variété X et posons :

$$\mathbf{N}^h(\mathrm{I}) = \{\alpha \in \mathbf{N}^h : z^\alpha \notin [z^\beta : \beta \leqslant \alpha] + \mathrm{I}\}$$

où $[z^\alpha : \beta \leqslant \alpha]$ désigne le sous-espace vectoriel complexe des polynômes engendré par la famille $\{z^\beta\}_{\beta \leqslant \alpha}$.

La famille $\{z^\alpha : \alpha \in \mathbf{N}^h(\mathrm{I})\}$ est linéairement indépendante modulo I. Ordonnons l'ensemble $\mathbf{N}^h(\mathrm{I})$ par une bijection croisssante

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{N} &\to \mathbf{N}^h(\mathrm{I}) \\ j &\to \alpha(j) \end{aligned}$$

α existe car $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbf{N}^h(\mathrm{I})$ dont les intervalles bornés sont finis.

Posons alors :

$$e_j(z) = z^{\alpha(j)}, \qquad z \in \mathrm{X}, \qquad j \in \mathbf{N}. \tag{11}$$

Alors pour $k \in \mathbf{N}$, si on désigne par

$$m_k = \# \{\alpha \in \mathbf{N}^h(\mathrm{I}) : |\alpha| \leqslant k\}$$

$\{e_0, \ldots, e_{m_k}\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_{\mathrm{X}}^k$ des restrictions à X des polynômes de h variables de degré $\leqslant k$.

Soit K un compact non-pluripolaire de X. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un système $\xi^{(k)} = \{\xi_0^{(k)} \ldots, \xi_k^{(k)}\}$ de points de K tel que :

$$\mathrm{V}(\xi^{(k)}) = \mathrm{V}(\xi_0^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)}) : = \det\, (e_j(\xi_i^{(k)}))_{i,j=0,\ldots,k} \neq 0$$

et que pour tout $x^{(k)} = \{x_0, \ldots, x_k\} \subset \mathrm{K}$ on ait :

$$|\mathrm{V}(x_0, \ldots x_k)| \leqslant |\mathrm{V}(\xi_0^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)})|.$$

Un tel système de points s'appelle système de points extrémaux d'ordre k du compact K (voir [11] dans le cas où $X = \mathbf{C}^n$).

Les polynômes de Lagrange associés à ce système sont :

$$L^{(j)}(z;\xi^{(k)}) = \frac{V(\xi_0^{(k)},\ldots,\xi_{j-1}^{(k)},z,\xi_{j+1}^{(k)},\ldots\xi_k^{(k)})}{V(\xi_0^{(k)},\ldots,\xi_{j-1}^{(k)},\xi_j^{(k)},\xi_{j+1}^{(k)},\ldots,\xi_k^{(k)})}, \qquad j = 0,\ldots,k.$$

Si f est une fonction continue sur K, le polynôme

$$L_k(f)(z) = \sum_{j=0}^{m_k} f(\xi_j^{(m_k)})L^{(j)}(z;\xi^{(m_k)})$$

est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre k de f aux points extrémaux $\xi^{(m_k)}$ puisque l'on a

$$L_k(f)(\xi_j^{(m_k)}) = f(\xi_j^{(m_k)}), \qquad j = 0,\ldots,m_k.$$

On a de plus la formule d'interpolation de Lagrange :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m_k} f(\xi_j^{(m_k)})L^{(j)}(z;\xi^{(m_k)}), \qquad \forall f \in \mathscr{P}_X^k. \tag{12}$$

On a alors :

COROLLAIRE 3.2. — *Soit* K *un compact* L-*régulier de* X *et pour* $k \geqslant 1$ *un système* $\xi^{(m_k)} = \{\xi_0^{(m_k)},\ldots,\xi_{m_k}^{(m_k)}\}$ *de points extrémaux de* K. *Alors pour tout* $\theta > 1$, *il existe un entier* $N_\theta \geqslant 1$ *et une constante* $C_\theta > 0$ *tels que :*

$$\max_{z\in K} |f(z) - L_k(f)(z)| \leqslant C_\theta \frac{(r+1)^{N_\theta}}{(r-1)^{2n-1}} \frac{|f|_{\bar{\Omega}_{r\theta}}}{r^k},$$

pour tout $f \in O(\bar{\Omega}_{r\theta})$, $r > 1$ *et* $k \geqslant 1$.

Soit $\{P_k\}_{k>0}$ la suite des polynômes construits à partir du théorème 3.1 et vérifiant (10) (voir démonstration du corollaire 3.1).

D'après (12) et la définition des points extrémaux on a :

$$L_k(P_k) = P_k \qquad \text{et} \qquad \max |L^{(j)}(z\ ;\zeta^{(m_k)})| \leqslant 1.$$

On en déduit que pour toute fonction continue g sur K, on a :

$$\|L_k(g)\|_K \leqslant (m_k+1)\|g\|_K.$$

D'où il résulte :

$$\begin{aligned}\|f-L_k(f)\|_K &\leqslant \|f-P_k\|_K + \|P_k - L_k(f)\|_K \\ &\leqslant \|f-P_k\|_K + \|L_k(f-P_k)\|_K \leqslant (m_k+2)\|f-P_k\|_K .\end{aligned}$$

L'estimation du corollaire résulte alors de (10) et du fait que :

$$\lim_{k\to+\infty} (m_k+2)^{1/k} = 1 .$$

4. Croissance des fonctions entières de plusieurs variables.

Rappelons d'abord les notions d'ordre et de type de croissance. Soit $\chi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction croissante. On définit l'ordre de χ par la formule

$$\rho(\chi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+\chi(r)}{\log r} . \tag{1}$$

Si χ est d'ordre fini $\rho > 0$, on définit le type de χ par la formule :

$$\sigma(\chi) = \sigma(\chi;\rho) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\chi(r)}{r^\rho} . \tag{2}$$

Pour une fonction entière f sur $\mathbf{C}^n$, la croissance sera déterminée par celle de la fonction $\chi(r) = \log^+ M(f;r)$, où $M(f;r) = \max_{\|z\|\leqslant r} |f(z)$ où $\|.\|$ est une norme $\mathbf{C}^n$. L'ordre de la fonction f ne dépend pas de la norme choisie mais son type en dépend.

Nous allons introduire une notion plus générale de type.

Soit K un compact non-pluripolaire de $\mathbf{C}^n$, V_K sa fonction L-extrémale sur $\mathbf{C}^n$. Posons

$$\Omega_r = \{z \in \mathbf{C}^n : \exp V_K^*(z) < r\}, \qquad r > 1 .$$

Pour une fonction entière f sur $\mathbf{C}^n$, posons

$$M_K(f;r) = \max_{z\in\Omega_r} |f(z)| , \qquad r > 1 . \tag{3}$$

Il est facile de voir que $\log^+ M_K(f;r)$ et $\log^+ M(f;r)$ ont le même ordre

que l'on appellera l'ordre de f :

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log^+ M_K(f;r)}{\log r}. \tag{4}$$

Si f est d'ordre fini non nul $\rho\,(0<\rho<+\infty)$, on définit le K-type de f par la formule :

$$\sigma_K(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ M_K(f;r)}{r^\rho}. \tag{5}$$

Exemples :

1) Si $K = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\| \leqslant 1\}$, le K-type défini par la formule (5) n'est autre que le type usuel par rapport à la norme $\|.\|$.

2) Si $K = \bar{D}$, où D est un domaine de Reinhardt borné et complet, le K type défini par (5) coïncide avec le G-type défini par Gol'dberg, avec

$$G = |D| = \{(|z_1|,\ldots,|z_n|) \in \mathbf{R}^n_+ : z = (z_1,\ldots,z_n) \in D\} \quad \text{(voir [8])}.$$

3) Si $K \subset \mathbf{C}$ est de capacité logarithmique $c(K) > 0$ et f est une fonction entière sur $\mathbf{C}$ d'ordre fini $\rho > 0$, alors le K-type de f est donné par la formule $\sigma_K(f) = c(K)^\rho.\sigma$, où σ est le type usuel de f sur $\mathbf{C}$.

Remarquons que les notions d'ordre et de K-type définis par les formules (4) et (5) se généralisent aux fonctions entières définies sur une variété algébrique affine de dimension pure $n \geqslant 1$.

Dans toute la suite X sera une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^{n+p}$ intersection complète de codimension p comme précédemment.

Nous allons donner des formules analogues à celles de Gol'dberg (voir [8] théorème 3.1.1, p. 131) pour le calcul de l'ordre et du K-type d'une fonction entière à l'aide des coefficients de son développement dans une base polynomiale convenable.

Soit K un compact L-régulier de X qui soit non pluripolaire et μ une mesure capacitaire extrémale sur K (voir [17]). Nous pouvons construire ([17]) une base orthogonale $\{A_k\}_{k\geqslant 1}$ polynomiale de l'espace O(X) des fonctions holomorphes sur X en orthogonalisant dans l'espace de Hilbert $L^2(K,\mu)$ suivant le procédé de Hilbert-Schmidt la suite $\{e_k\}_{k\geqslant 0}$ totale de polynômes linéairement indépendante sur X construite au paragraphe précédent (voir 3 (11)).

Rappelons l'inégalité de Bernstein-Markov (voir [17]).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\text{(BM)} \qquad \sup_{z \in K} |f(z)| \leqslant C_\varepsilon (1 + \varepsilon)^{\deg(f)} \left(\int_K |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$$

pour toute fonction holomorphe à croissance polynomiale sur X.

Notons :

$$(6) \qquad \nu_k(K) = \left(\int_K |A_k|^2 \, d\mu \right)^{1/2}, \qquad k \geqslant 0$$

$$(7) \qquad a_k(K) = \max_{z \in K} |A_k(z)|, \qquad k \geqslant 0.$$

Grâce à § 3 (1) on en déduit $V_K(z) \geqslant \frac{1}{s_k} \log (|A_k(z)/a_k(K))$ d'où

$$(7\ bis) \qquad |A_k|_{\Omega_r} \leqslant a_k(K) r^{s_k}.$$

Désignons par $L^2_{\mathscr{P}}(K,\mu)$ le sous-espace fermé de $L^2(K,\mu)$ engendré par les restrictions à K des polynômes sur $\mathbf{C}^{n+p}$. Alors toute fonction $f \in L^2_{\mathscr{P}}(K,\mu)$ s'écrit

$$(8) \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A_k, \qquad \text{où} \qquad f_k = \frac{1}{\nu_k(K)^2} \int_K f . \bar{A}_k \, d\mu.$$

Si f est une fonction entière sur X, la série (8) converge normalement sur tout compact de X.

THÉORÈME 4.1. — *Soit f une fonction entière sur X et $f = \sum_{k \geqslant 0} f_k A_k$ son développement en série suivant la base $\{A_k\}_{k \geqslant 0}$. Alors*

1) *f est d'ordre fini ρ si et seulement si*

$$(9) \qquad \rho_1 = \limsup_{k \to \infty} \frac{s_k \log s_k}{-\log (|f_k| . a_k(K))} < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \rho = \rho_1$$

où $s_k = \deg(A_k)$, $k \geqslant 0$.

2) *f est d'ordre fini $\rho \in]0, +\infty[$ et de K-type fini $\sigma \in]0, +\infty[$ si et seulement si*

$$(10) \qquad \sigma_1 = \frac{1}{e\rho} \limsup_{k \to \infty} s_k (|f_k| a_k(K))^{\rho/s_k} < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \sigma = \sigma_1.$$

La démonstration de ce théorème procède comme dans le cas classique (voir [5], p. 9-12) en remplaçant les inégalités de Cauchy par le lemme suivant :

LEMME 4.1. — *Soit* $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A_k$ *une fonction holomorphe sur* X. *Alors pour tout* $\theta > 1$, *il existe un entier* $N_\theta > 1$, *une constante* $c_\theta > 0$ *tels que :*

$$|f_k| \leqslant \frac{c_\theta}{\nu_k(K)} \cdot \frac{(r+1)^{N_\theta}}{(r-1)^{2n-1}} \frac{|f|_{\Omega_{r\theta}}}{r^{s_k}}, \tag{11}$$

pour tout $r > 1$, $k \geqslant 0$. c_θ *et* N_θ *ne dépendent ni de* r, *ni de* k, *ni de la fonction entière* f.

Démonstration du lemme 4,1. —. Par construction, chaque polynôme A_k est orthogonal à tous les polynômes de degré $< s_k = \deg(A_k)$.

Par conséquent pour tout polynôme P de $n + p$ variables complexes de degré $\leqslant s_k - 1$, on a :

$$|f_k| = \left| \frac{1}{\nu_k(K)^2} \int_K (f - P) . \bar{A}_k \, d\mu \right|, \qquad \forall k \geqslant 0.$$

Il en résulte de façon évidente l'estimation :

$$|f_k| \leqslant \frac{\sqrt{\mu(K)}}{\nu_k(K)} \cdot \mathscr{E}_{s_k - 1}(f; K), \qquad \forall k \geqslant 0.$$

Il suffit maintenant pour avoir (11) d'appliquer le corollaire 3.1.

Démonstration du théorème 4.1. — La démonstration se fait essentiellement comme dans le cas classique (voir [5], p. 9-12). Il suffit d'utiliser le lemme 4.1 (au lieu des inégalités de Cauchy) pour la majoration des coefficients du développement de f et l'inégalité (7 *bis*) pour la majoration des polynômes A_k.

Nous allons donc simplement indiquer par exemple comment se démontre la première assertion.

Supposons f d'ordre fini ρ. Il est clair par définition même que $\log M_K(f;r)$ et $\log((r+1)^{N_\theta} M_K(f;r))$ ont le même ordre. Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, il existe r_ε assez grand (>2) tel que

$$(r+1)^{N_\theta} M_K(f;r) \leqslant \exp r^{\rho+\varepsilon}, \qquad \forall r \geqslant r_\varepsilon.$$

En appliquant le lemme 4.1, on obtient alors pour $\theta > 1$:

$$(12) \qquad |f_k| v_k(\mathrm{K}) \leqslant c_\theta r^{-s_k} \exp(\theta r)^{\rho+\varepsilon}, \qquad \forall r > r_\varepsilon.$$

Le minimum de l'expression $r^{-s_k} \exp(\theta r)^{\rho+\varepsilon}$ est atteint pour

$$r = r_k = \theta^{-1}(s_k/\rho+\varepsilon)^{1/\rho+\varepsilon}$$

et vaut $\theta^{s_k}(s_k/\rho+\varepsilon)^{-s_k/\rho+\varepsilon}.\exp(s_k/\rho+\varepsilon)$. Il existe donc un entier $k_0 = k_0(\theta,\varepsilon)$ tel que pour $k \geqslant k_0$ on ait : $r_k > r_\varepsilon$ et d'après (12), on en déduit :

$$(13) \qquad |f_k|.v_k(\mathrm{K}) \leqslant \theta^{s_k}(s_k/\rho+\varepsilon)^{-s_k/\rho+\varepsilon}.\exp(s_k/\rho+\varepsilon), \qquad k \geqslant k_0.$$

De l'inégalité (13), on déduit facilement en tenant compte de l'inégalité (BM) et de la définition de $a_k(\mathrm{K})$:

$$(14) \qquad -\log(|f_k| a_k(\mathrm{K})) \geqslant (s_k/\rho+\varepsilon)\,[\log(s_k/\rho+\varepsilon)-1] \\ -\log(c_\theta c_\varepsilon) - s_k \log((1+\varepsilon)\theta), \quad \forall k \geqslant k_0.$$

L'inégalité (14) prouve que si l'on pose par définition

$$\rho_1 = \limsup_{k\to\infty} \frac{s_k \log s_k}{-\log(|f_k| a_k(\mathrm{K}))},$$

on obtient, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, l'inégalité $\rho_1 \leqslant \rho$.

Pour montrer que $\rho \leqslant \rho_1$, développons $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathrm{A}_k$ en série, normalement convergente sur tout compact de X. On a alors :

$$\mathrm{M}_\mathrm{K}(f;r) = |f|_{\Omega_r} \leqslant \sum_{k\geqslant 0} |f_k|.|\mathrm{A}_k|_{\Omega_r}.$$

D'après la définition de ρ_1 et l'inégalité (7 *bis*) on a pour $\varepsilon > 0$:

$$(15) \qquad \mathrm{M}_\mathrm{K}(f;r) \leqslant c_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{-s_k/\rho_1+\varepsilon}((1+\varepsilon)r)^{s_k}, \qquad \forall k \geqslant 0.$$

Le maximum du terme général de la série du second membre de l'inégalité (15) lorsque k varie est obtenu pour $s_k = \frac{1}{e}(r(1+\varepsilon))^{\rho_1+\varepsilon}$. Un raisonnement classique dû à Lindelöf (voir [5], p. 10-11) permet d'en déduire :

$$\mathrm{M}_\mathrm{K}(f;r) \leqslant c_\varepsilon \exp(r(1+\varepsilon))^{\rho_1+2\varepsilon}, \qquad \forall r > 1$$

ce qui prouve que $\rho \leqslant \rho_1$.

D'après la première partie du raisonnement on a donc $\rho = \rho_1$. En joignant les deux parties du raisonnement précédent, on obtient la première assertion du théorème. Quant à la seconde, elle se démontre de la même façon en raisonnant comme dans ([5], p. 11-12).

Nous pouvons maintenant démontrer un théorème de type Bernstein reliant l'ordre et le type d'une fonction entière à sa meilleure approximation polynomiale. De façon plus précise :

Soit K un compact L-régulier de X et μ une mesure capacitaire extrémale sur K. Soit $q \in [1, +\infty]$, pour $f \in L^q(K,\mu)$ posons

$$\mathscr{E}_k^{(q)}(f;K) = \inf \{\|f - P\|_{L^q(K,\mu)} : P \in \mathscr{P}_k(\mathbf{C}^{n+p})\}.$$

On obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. — *Soit $f \in L^q(K,\mu)$, on a alors :*

1) *f coïncide μ-presque partout sur K avec la restriction à K d'une fonction holomorphe sur X d'ordre fini $\rho < +\infty$ si et seulement si*

$$(16) \qquad \beta = \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log k}{-\log \mathscr{E}_k^{(q)}(f;K)} < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \rho = \beta.$$

2) *f coïncide μ-presque partout sur K avec la restriction à K d'une fonction holomorphe sur X d'ordre $\rho (0<\rho<+\infty)$ et de K-type $\sigma (0<\sigma<+\infty)$ si et seulement si*

$$(17) \qquad \gamma = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{e.\rho} \mathscr{E}_k^{(q)}(f;K)^{\rho/k} < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \sigma = \gamma.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $f \in L^q(K,\mu)$ avec $q \geqslant 2$. Alors f s'écrit $f = \sum_{k-0}^{\infty} f_k A_k$ dans $L^2(K,\mu)$ avec

$$f_k = \frac{1}{\nu_k(K)^2} \int_K f.\bar{A}_k \, d\mu, \quad k \geqslant 0;$$

on vérifie facilement à l'aide de l'inégalité (BM) et de l'inégalité de Hölder que l'on a pour $\varepsilon > 0$

$$(18) \qquad |f_k| \leqslant \frac{c(\varepsilon)}{\nu_k(K)} (1+\varepsilon)^{s_k} \mathscr{E}_{s_{k-1}}^{(q)}(f;K), \qquad \forall k \geqslant 0$$

$$(19) \qquad \mathscr{E}_k^{(q)}(f;K) \leqslant c(\varepsilon) \sum_{s_j > k} |f_j| (1+\varepsilon)^{s_j} \nu_j(K), \qquad \forall k \geqslant 0.$$

A partir de ces deux inégalités, il est facile de prouver que :

$$(20) \qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{s_k \log s_k}{-\log(|f_k|\nu_k(K))} = \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log k}{-\log \mathscr{E}_k^{(q)}(f;K)}$$

$$(21) \qquad \limsup_{k\to\infty} s_k(|f_k|\nu_k(K))^{\rho/s_k} = \limsup_{k\to\infty} k\mathscr{E}_k^{(q)}(f;K)^{\rho/k}.$$

Supposons maintenant que f vérifie la relation (16) (resp. (17)), il résulte alors de (20) (resp. 21)) que la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k A_k$ converge normalement sur tout compact de X (utiliser en plus l'inégalité (BM) pour majorer $|A_k|_{\Omega_r}$) vers une fonction holomorphe sur X qui coïncide μ.p.p. sur K avec f. D'après (20) (resp. (21)) il résulte alors du théorème 4.1, que le prolongement ainsi obtenu est une fonction entière d'ordre ρ (resp. d'ordre ρ et de K-type σ).

Si $1 \leqslant q \leqslant 2$ et $f \in L^q(K;\mu)$, d'après (BM) et l'inégalité de Hölder, on a encore l'inégalité (18). Si on suppose que f est vérifié (16) (resp. (17)), il en résulte encore que la série $\Sigma f_k A_k$ converge normalement sur tout compact de X vers une fonction entière sur X qui coïncide μ.p.p. sur K avec f, ce qui prouve que $f \in L^2(K,\mu)$ et donc l'inégalité (19) est vérifiée, le reste se fait comme dans le cas précédent.

Inversement supposons que f soit une fonction entière sur X d'ordre ρ (resp. d'ordre $\rho(0<\rho<+\infty)$ et de K-type $\sigma(0<\sigma<+\infty)$). Alors $f \in L^2(K,\mu)$ et les relations (20) et (21) sont satisfaites. La relation (16) (resp. (17)) résulte alors immédiatement de la formule (9) (resp. (10)) donnée par le théorème 4.1.

Remarques. — 1) La notion de K-type introduite ici a été considérée pour un produit de compacts de **C** par Nguyen Thanh Van ([17]) qui a prouvé le théorème 4.2 dans ce cas particulier. Dans le cas d'une variable voir [13] et sa bibliographie.

2) Pour un compact de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, cette notion de K-type a également été considérée par Winiarski ([14]), mais la formule (17) permettant le calcul du K-type semble nouvelle pour un compact L-régulier K qui n'est pas un produit de compacts. Nous ne savons pas si elle reste valable pour un compact non pluripolaire quelconque. Cependant si X est un cône algébrique de $\mathbf{C}^N$ de dimension pure $n \geqslant 1$ et K un compact disqué non pluripolaire de X, alors les théorèmes 4.1 et 4.2 sont encore valables sans hypothèse de régularité sur K. En effet

dans ce cas on montre facilement que

$$\mathscr{E}_{\ell}^{(\infty)}(f;\mathrm{K}) \leqslant \frac{r}{r-1}\,\frac{\|f\|_{\Omega_r}}{r^{\ell+1}}$$

pour tout $r > 1$, $\ell > 1$ et $f \in \mathscr{O}(\bar{\Omega}_r)$, où le premier membre est défini pour la mesure d'équilibre $\mu = (dd^c V_K^*)^n$.

Cette inégalité permet de démontrer directement le lemme 4.1 dans ce cas et de prouver de la même façon les deux théorèmes 4.1 et 4.2.

L'auteur tient à remercier le referee pour les remarques et suggestions utiles qu'il lui a faites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Anderson et Berndtsson, Henkin-Ramirez formulas with weight factors, *Ann. Inst. Fourier*, 32, 3 (1982), 91-110.

[2] C. A. Berenstein et B. A. Taylor, On the geometry of interpolating varieties, Séminaire Lelong-Skoda, Lecture Notes 919, 1980-81.

[3] B. Berndtsson, A formula for interpolation and division in $\mathbf{C}^n$, *Math. Ann.*, 263, 4 (1983), 339-418.

[4] S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes*, Bruxelles, 1912.

[5] R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954.

[6] L. Hörmander, *An introduction to complex Analysis in several variables*, New York, Van Nostrand Co., 1966.

[7] Nguyen Thanh Van, Croissance et meilleure approximation polynomiale des fonctions entières, *Ann. Polon. Math.*, 24 (1982), 325-333.

[8] L. I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1974.

[9] A. Sadullaev, An estimate for polynomials on analytic sets, *Math. USSR Izv*, 20, 3 (1980), 493-502.

[10] J. Siciak, On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105, (2) (1962), 322-357.

[11] J. Siciak, Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbf{C}^n$, *Ann. Polon. Math.*, 39 (1981), 175-211.

[12] W. Stoll, The growth of the area of a transcendental analytic set I et II, *Math. Ann.*, 156 (1964), 47-78 et 144-170.

[13] T. Winiarski, Approximation and interpolation of entire functions, *Ann. Polon. Math.*, 23 (1970), 259-273.

[14] T. Winiarski, Application of approximation and interpolation methods to the examination of entire functions of n complex variables, *Ann. Polon. Math.*, 28 (1973), 98-121.

[15] J. L. WALSH, *Interpolation and approximation by rational functions*, Boston, 1960.

[16] A. ZERIAHI, Capacité, constante de Čebyšev et polynômes orthogonaux associés à un compact de $\mathbf{C}^n$, *Bull. Sc. Math.*, 109 (1985), 325-335.

[17] A. ZERIAHI, Fonctions plurisousharmoniques extrémales, Approximation et croissance des fonctions holomorphes sur des ensembles algébriques, Thèse de Doctorat d'État, Sciences, U.P.S. Toulouse, 1986.

Manuscrit reçu le 24 mars 1986
révisé le 5 novembre 1986.

Ahmed ZERIAHI,
Université Paul Sabatier
U.E.R. M.I.G.
118, route de Narbone
31062 Toulouse (France).