ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHARLES EHRESMANN

Catégories inductives et pseudogroupes

Annales de l'institut Fourier, tome 10 (1960), p. 307-332
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10__307_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 307-336.

CATÉGORIES INDUCTIVES ET PSEUDOGROUPES

par Charles EHRESMANN (Paris)

Le but de cet article est de préciser certaines notions algébriques qui permettent d'esquisser une théorie générale des structures locales. Il sera suivi d'une étude des pseudogroupes construits à partir d'un groupoïde différentiable, où seront développés en particulier les notions et résultats résumés dans [4].

1. — Groupoïdes inductifs.

Nous précisons et complétons ici l'exposé qui se trouve dans [1]. Étant donnée une catégorie, nous désignons encore par α la fonction qui associe à tout élément de la catégorie son unité à droite, par β la fonction qui lui associe son unité à gauche.

Définition. — Un groupoïde inductif *est un groupoïde* $\mathfrak{S}$ *muni d'un foncteur généralisé covariant* φ *de* $\mathfrak{S}$ *dans* $\mathfrak{S}$, *appelé foncteur d'induction, un élément de* $\varphi(f)$, *où* $f \in \mathfrak{S}$, *s'appelant* élément induit par f. *Ce foncteur vérifie les axiomes suivants:*

1) *Pour* $s \in \varphi(\alpha(f))$, $f \in \mathfrak{S}$, *il existe un seul* $g \in \varphi(f)$ *tel que* $s = \alpha(g)$; *g est appelé l'élément induit par f sur s.*

2) *Si* $f' \in \varphi(f)$, *alors* $\varphi(f') \subset \varphi(f)$.

3) $\varphi(f) = \varphi(f')$ *entraîne* $f = f'$.

4) *Pour toute sous-classe* A *de* $\varphi(f)$, *il existe un* $g \in \varphi(f)$ *tel que* $\mathrm{A} \subset \varphi(g)$ *et que* $g \in \varphi(h)$ *pour tout h tel que* $\mathrm{A} \subset \varphi(h)$.

Ces axiomes entraînent les propriétés suivantes :

$\varphi(\alpha(f)) = \alpha\,(\varphi(f))$; ceci résulte de la définition d'un foncteur généralisé [1] qui donne les relations : $\varphi(f)\varphi(\alpha(f)) = \varphi(f)$ et $\varphi(f^{-1})\varphi(f) = \varphi(\alpha(f))$.

$\varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$, c'est-à-dire les éléments induits par f^{-1} sont les inverses des éléments induits par f.

L'élément g de 4) est unique et s'appelle l'*agrégat* de A ; on le désignera par $\cup$ A. L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. $\alpha(\cup A) = \cup\alpha(A)$; $\beta(\cup A) = \cup\beta(A)$; $\cup\varphi(f) = f$.

La relation $g \in \varphi(f)$ est une relation d'ordre que nous noterons $g \prec f$. Les fonctions α et β et la loi de composition de $\mathfrak{S}$ sont compatibles avec cette structure d'ordre. Toute classe majorée A admet une borne supérieure $\cup$ A. Nous supposerons dorénavant que $\mathfrak{S}$ admet un plus petit élément noté 0 ; si cette condition n'est pas vérifiée initialement, nous complèterons $\mathfrak{S}$ par l'adjonction de l'élément 0 tel que $0 \prec f$ pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et $\alpha(0) = 0$, $0.0 = 0$. Toute famille A de $\mathfrak{S}$ admet alors une intersection ou borne inférieure ; c'est l'agrégat de $\bigcap_{f \in A} \varphi(f)$.

Une classe munie d'une relation d'ordre telle que toute partie admette une intersection s'appellera ici une *classe inductive*. Il en résulte l'existence d'un agrégat pour toute partie majorée. En particulier $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_0$ sont des classes inductives, $\mathfrak{S}_0$ désignant la classe des unités de $\mathfrak{S}$.

On peut étendre la multiplication définie dans $\mathfrak{S}$ à tous les couples $(f', f) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, en posant $f'f = g'g$, où g est l'élément induit par f tel que $\beta(g) = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g' l'élément induit par f' tel que $\alpha(g') = \alpha(f') \cap \beta(f)$. La multiplication ainsi étendue sera appelée *pseudomultiplication* dans $\mathfrak{S}$. Elle possède les propriétés suivantes : Elle est associative. Sa restriction aux couples d'unités de $\mathfrak{S}$ est commutative. Les unités de $\mathfrak{S}$ forment une classe d'éléments idempotents (il peut y en avoir d'autres). Elle admet au plus une unité, l'agrégat, lorsqu'il existe, de toutes les unités de $\mathfrak{S}$. Si cette condition n'est pas remplie, on peut toujours compléter $\mathfrak{S}$ par l'adjonction d'un élément Ω qui soit une unité pour la multiplication de $\mathfrak{S}$ et pour la pseudomultiplication. Les éléments induits de $f \in \mathfrak{S}$ sont les pseudoproduits de f avec les unités de $\mathfrak{S}$. Le groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ considéré avec sa pseudomultiplication sera appelé *pseudogroupe*.

Inversement, soit $\mathfrak{S}$ une classe munie d'une loi de composition appelée pseudomultiplication, partout définie et associative. De plus, supposons donnée une classe $\mathfrak{S}_0$ d'éléments idempotents, stable pour la pseudomultiplication, telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) La restriction de la pseudomultiplication à $\mathfrak{S}_0$ est commutative.

Soient e et e' deux éléments de $\mathfrak{S}_0$ tels qu'il existe $\varepsilon \in \mathfrak{S}_0$ satisfaisant à l'équation $e = e'\varepsilon$. Alors nous écrivons $e \prec e'$ et on montre que cette relation est une relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, équivalente à la relation $e = ee'$. Tout couple d'éléments (e, e') de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure à savoir ee'.

2) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $fe = f$ admet une borne inférieure $\alpha(f)$ vérifiant l'équation $f\alpha(f) = f$; de même la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $ef = f$ admet une borne inférieure $\beta(f)$ vérifiant l'équation $\beta(f)f = f$. (Il en résulte que $fe = f$ est équivalent à $\alpha(f) \prec e$.)

3) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, il existe un $f' \in \mathfrak{S}$ tel que $f'f = \alpha(f)$ et $ff' = \beta(f)$.

Proposition. — *L'axiome* 3) *entraîne l'existence pour tout* $f \in \mathfrak{S}$ *d'un élément* f^{-1} *tel que* $f^{-1}f = \alpha(f)$, $ff^{-1} = \beta(f)$ *et* $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$.

Montrons que $\beta(f) \prec \alpha(f')$. En effet, on a :

$$ff'\alpha(f') = \beta(f) = ff'\alpha(ff').$$

En multipliant par $(ff')'$, on a

$$\alpha(ff')\,\alpha(f') = \alpha(ff') = \beta(f) = \beta(f)\,\alpha(f').$$

Soit $f^{-1} = f'\,\beta(f)$ et montrons que : $f^{-1}f = \alpha(f)$ et $ff^{-1} = \beta(f)$. En effet :

$$f^{-1}f = f'\,\beta(f)f = f'f = \alpha(f).$$
$$ff^{-1} = ff'\,\beta(f) = \beta(f).$$

De plus on a : $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$, en vertu du lemme :

Lemme. — $\alpha(fe) = e\alpha(f)$, $\beta(ef) = e\beta(f)$, où $e \in \mathfrak{S}_0$.

Posons $\varepsilon = \alpha(f)e$ et montrons que $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon = (f\varepsilon)\varepsilon$ entraîne $\alpha(f\varepsilon) \prec \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = f\varepsilon$ entraîne, en multipliant à gauche par f' : $\alpha(f)\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = \alpha(f)\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon\alpha(f\varepsilon)$; d'où $\varepsilon \prec \alpha(f\varepsilon)$ et par suite $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$, c'est-à-dire $\alpha(fe) = e\alpha(f)$. On démontre de même la deuxième formule.

Dans $\mathfrak{S}$ on définit la relation $f \prec f'$ équivalente à : il existe $e \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = f'e$. Cette relation est une relation d'ordre :

$f \prec f'$ et $f' \prec f''$ entraînent évidemment $f \prec f''$. En vertu de 2), on a $f \prec f$. Enfin, $f = f'e'$ et $f' = fe$ entraînent :

$$f' = fe = f'e'e = fee'e = fee' = f.$$

En vertu du lemme et de l'axiome 2), $f \prec f'$ entraîne $\alpha(f) \prec \alpha(f')$ et $\beta(f) \prec \beta(f')$.

Soit A une partie de $\mathfrak{S}_0$ admettant une borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Alors cette borne est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$. De même, si $A \subset \mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$, celle-ci est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Ceci résulte du fait que tout élément inférieur à une unité est une unité. Nous poserons encore l'axiome suivant :

4) Pour la relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, toute partie de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure. (Cet axiome entraîne l'existence d'un plus petit élément noté 0).

Si A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$, (il revient au même de supposer majorée dans $\mathfrak{S}_0$ ou dans $\mathfrak{S}$), alors A admet une borne supérieure dans $\mathfrak{S}_0$, égale à la borne inférieure des majorants de A, dans $\mathfrak{S}_0$; remarquons que cette borne supérieure est aussi borne supérieure de A dans $\mathfrak{S}$.

THÉORÈME. — *La donnée de $\mathfrak{S}_0$ et de la pseudomultiplication vérifiant* 1), 2), 3), 4) *détermine sur $\mathfrak{S}$ une structure de groupoïde inductif: la classe de ses unités est $\mathfrak{S}_0$; sa multiplication est la restriction de la pseudomultiplication donnée aux couples (f', f) tels que $\alpha(f') = \beta(f)$; le produit correspondant sera désigné par $f'.f$; l'inverse de f est l'élément f^{-1} dont nous avons prouvé l'existence. La relation d'induction $f \prec f'$ est la relation d'ordre définie ci-dessus; la pseudomultiplication donnée coïncide avec la pseudomultiplication déduite de la loi d'induction et définit sur $\mathfrak{S}$ une structure de pseudogroupe.*

Démontrons que $\mathfrak{S}_0$ est la classe des unités de $\mathfrak{S}$. Si $e \in \mathfrak{S}_0$, on a $\alpha(e) = \beta(e) = e$ d'après 2). Si $f.e$ est défini, on a $\alpha(f) = \beta(e) = e$, donc $f.e = f\alpha(f) = f$. De même si $e.f$ est défini, on a $e.f = f$. Donc e est une unité. Si ε est une unité, $\varepsilon\alpha(\varepsilon) = \varepsilon = \alpha(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_0$.

Si $f'.f$ est défini, on a $\alpha(f'.f) = \alpha(f)$ et $\beta(f'.f) = \beta(f')$. En effet, si $e \in \mathfrak{S}_0$, $fe = f$ est équivalent à $f'fe = f'f$; car cette dernière équation entraîne $f'^{-1}f'fe = f'^{-1}f'f$, c'est-à-dire $\alpha(f')fe = \alpha(f')f$, ou encore, comme $\alpha(f') = \beta(f)$, $fe = f$. De même $ef' = f'$ est équivalent à $e(f'f) = f'f$. Ce qui précède montre que $\mathfrak{S}$ est une catégorie pour la multiplication restreinte. D'autre part l'élément f^{-1} est l'inverse « à gauche » de f pour la multiplication restreinte, car $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$. Donc $\mathfrak{S}$ est un groupoïde pour la multiplication restreinte d'après le lemme :

Lemme. — *Si dans une catégorie tout élément x admet un inverse à gauche x' (tel que $x'x = \alpha(x)$), cet inverse est inverse à droite (c'est-à-dire $xx' = \beta(x)$); la catégorie est un groupoïde et x' est l'inverse de x.*

En effet, soit $x'x = \alpha(x)$. On a

$$\alpha(x') = \beta(x) \qquad \text{et} \qquad \beta(x'x) = \beta(x') = \alpha(x).$$

Donc xx' est défini : $(xx')(xx') = x(x'x)x' = x\alpha(x)x' = xx'$. Il existe y tel que

$$y(xx') = \alpha(xx') = \beta(x) = y(xx')(xx') = \beta(x)xx' = xx',$$

donc $xx' = \beta(x)$.

Proposition. — *La relation d'ordre $f \prec f'$ est encore définie par : il existe $e' \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = e'f'$.*

Montrons que $f'e = \beta(f'e)f'$. En effet :

$$\beta(f'e)\, f' = (f'e)\, (f'e)^{-1}\, f' = f'ef'^{-1}\, f' = f'e\, \alpha(f') = f'e.$$

Nous avons utilisé ici la formule $(ge)^{-1} = eg^{-1}$ qui s'obtient en écrivant : $(eg^{-1})\,(ge) = e\,\alpha(g)e = e\,\alpha(g) = \alpha(ge)$. Donc eg^{-1} est inverse « à gauche » de ge. Il est aussi inverse « à droite » d'après le lemme précédent.

On démontre de même que $e'f = f\alpha(e'f)$.

Pour compléter la démonstration du théorème, montrons que la fonction qui associe à f la classe des éléments $f' \prec f$ est un foncteur généralisé. Soit $h = g.f$; pour tout $e \in \mathfrak{S}_0$, on a : $he = (g.f)e = gfe$; posons $f' = fe$ et $g' = g\beta(f')$; alors $\alpha(g') = \beta(f')\alpha(g) = \beta(f')\beta(f) = \beta(f')$ et $g'.f' = g\beta(f')f' = gfe = he$. Inversement, soit $g' = g\varepsilon$ et $f' = f\varepsilon'$ tels que $\alpha(g') = \beta(f')$; alors $g'f' = g\varepsilon f\varepsilon'$; d'après le dernier lemme, $\varepsilon f = f\varepsilon''$, donc $g'f' = gf\varepsilon''\varepsilon' \prec h$.

Si g et f sont des éléments quelconques de $\mathfrak{S}$, leur pseudo-produit déduit de la loi d'induction est leur composé gf; en effet $gf = g\alpha(g)\,\beta(f)f = (ge)\,(ef)$, où $e = \alpha(g)\beta(f)$.

Démontrons que deux éléments quelconques f et g de $\mathfrak{S}$ ont une borne inférieure. Soit L la classe des éléments l tels que

$l \prec f$ et $l \prec g$. Montrons que ces éléments l ont un agrégat; soit $e = \bigcup_{l \in L} \alpha(l)$, $f' = fe$ et $g' = ge$. Alors $f' = g'$: En effet f' et g' sont deux éléments ayant même unité à droite et qui induisent des éléments égaux sur tout $\varepsilon = \alpha(l)$; on démontre que $\beta(f')$ est l'agrégat des $\beta(f'\varepsilon)$ et comme $f'\varepsilon = g'\varepsilon$, on a $\beta(f') = \beta(g')$. Le composé $g'^{-1}.f'$ est donc défini; il induit sur chaque ε l'élément $(g'\varepsilon)^{-1}.(f'\varepsilon) = \varepsilon$. Par conséquent l'agrégat des ε est induit par $g'^{-1}.f'$; comme $e = \alpha(g'^{-1}f')$, on a $e = g'^{-1}.f'$. Il en résulte $g' = f'$ et cet élément est la borne inférieure de f et g.

Si A est une partie bornée supérieurement dans $\mathfrak{S}$, alors il existe un agrégat $\cup$A, qui est l'élément fe où $e = \cup\alpha(A)$ et où f est un majorant pour A. En effet, fe est un majorant de A; soit g un majorant quelconque de A; alors $fe = ge$, d'après la démonstration qui précède; donc $fe \prec g$, c'est-à-dire $fe = \cup$A.

Définition. — *Un sous-pseudogroupe d'un pseudogroupe $\mathfrak{S}$ est une partie $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ qui vérifie les axiomes suivants :*

1) *Le pseudoproduit fg de deux éléments f et g de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

2) *L'inverse f^{-1} de $f \in \mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

3) *L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

L'axiome 3) appliqué à la partie vide de $\mathfrak{S}'$ entraîne que $0 \in \mathfrak{S}'$.

Ces axiomes sont équivalents aux suivants :

a) $\mathfrak{S}'$ est un sous-groupoïde de la structure de groupoïde de $\mathfrak{S}$ (relativement à la multiplication restreinte).

b) Si e est une unité appartenant à $\mathfrak{S}'$ et si $f \in \mathfrak{S}'$, alors $fe \in \mathfrak{S}'$.

c) L'agrégat d'une famille d'éléments de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.

Remarque. — La classe des unités $\mathfrak{S}'_0$ de $\mathfrak{S}'$ est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ stable par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation dans $\mathfrak{S}_0$. Cependant, l'intersection de deux éléments f_1 et f_2 de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$ si la *relation de compatibilité* suivante est remplie :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2),$$

relation équivalente à : $f_1 \cap f_2 = f_1(\alpha(f_1) \cap \alpha(f_2))$.

On rencontre aussi des sous-classes $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$\mathfrak{S}'$ satisfait 1), 2), et

3′) L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$, majorée dans $\mathfrak{S}'$, appartient à $\mathfrak{S}'$.

Une telle sous-classe $\mathfrak{S}'$ sera appelée *sous-pseudogroupe faible* de $\mathfrak{S}$. Elle vérifie encore *a*), *b*) et contient l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{S}'$ liés par la relation de compatibilité.

On peut remplacer 3) par un axiome 3″) encore plus faible que 3′) :

3″) Toute partie A de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}'$ admet une borne supérieure pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$ (mais cette borne supérieure n'est pas forcément l'agrégat de A dans $\mathfrak{S}$).

Une classe $\mathfrak{S}'$ qui vérifie 1), 2) et 3″) est encore un groupoïde inductif pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$. Nous dirons que $\mathfrak{S}'$ est un pseudogroupe *contenu* dans $\mathfrak{S}$.

L'intersection d'une famille de sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$. Si B est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, l'intersection des sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ contenant B sera appelée *sous-pseudogroupe de* $\mathfrak{S}$ *engendré par* B.

En particulier, soit B une partie de $\mathfrak{S}$ vérifiant les axiomes 1) et 2) et soit $\mathfrak{S}'$ le sous-pseudogroupe engendré par B. Alors $\mathfrak{S}'$ contient les agrégats dans $\mathfrak{S}$ des parties de B. En particulier $\mathfrak{S}'_0$ contient l'agrégat d'une classe d'unités A appartenant à B. Donc si e' est une unité de B, $\mathfrak{S}'_0$ contient aussi $e' \cap \left(\bigcup_{e\in A} e\right) = e'\left(\bigcup_{e\in A} e\right)$.

Supposons vérifié dans $\mathfrak{S}_0$ l'*axiome de distributivité* suivant :

$$\text{(D)} \qquad e' \cap \left(\bigcup_{e\in A} e\right) = \bigcup_{e\in A} (e' \cap e)$$

ou

$$e'\left(\bigcup_{e\in A} e\right) = \bigcup_{e\in A} (e'e).$$

Alors on montre que $\mathfrak{S}'$ est la classe des agrégats des familles d'éléments de B. Dans ce cas, nous dirons que B est une *base* du pseudogroupe $\mathfrak{S}'$.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION. — *Un groupoïde inductif* $\mathfrak{S}$ *sera appelé* groupoïde local *lorsque la classe* $\mathfrak{S}_0$ *de ses unités vérifie l'axiome de distributivité* (D).

Proposition. — *Si* $\mathfrak{S}_0$ *vérifie l'axiome* (D), *alors* $\mathfrak{S}$ *vérifie aussi l'axiome de distributivité :*

$$f' \cap \Big(\bigcup_{f \in A} f\Big) = \bigcup_{f \in A} (f \cap f')$$

où A *est une classe majorée d'éléments de* $\mathfrak{S}$.

En effet, soit $g = (\bigcup A) \cap f'$. Démontrons que l'on a : $g = (\bigcup A) \cap g = \bigcup_{f \in A} (f \cap g)$. Comme g et f sont induits par $\bigcup A$, l'unité à droite de $(\bigcup A) \cap g$ est $\alpha(\bigcup A) \cap \alpha(g)$, l'unité à droite de $\bigcup_{f \in A} (f \cap g)$ est $\bigcup_{f \in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Comme $\alpha(\bigcup A)$ est l'agrégat des $\alpha(f)$, où $f \in A$, l'axiome (D) dans $\mathfrak{S}_0$ donne $\alpha(\bigcup A) \cap \alpha(g) = \bigcup_{f \in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Il en résulte

$$(\bigcup A) \cap g = \bigcup_{f \in A} (f \cap g),$$

car les deux membres de cette égalité sont des éléments induits par $\bigcup A$. De plus $f \cap f' = f \cap g$, car $g \prec f'$ et $f \cap f' \prec g$. Donc $g = \bigcup_{f \in A} (f \cap f')$.

Soit $\mathfrak{S}'$ un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{S}$. Sur tout $e \in \mathfrak{S}'_0$, la donnée de $\mathfrak{S}'$ détermine [1] une *paratopologie* $T(\mathfrak{S}', e)$; c'est la classe des éléments $\varphi(e) \cap \mathfrak{S}'_0$. Tout $f \in \mathfrak{S}'$ détermine un isomorphisme de la paratopologie $T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$ sur $T(\mathfrak{S}', \beta(f))$; c'est l'application : $\varepsilon \to \beta(f\varepsilon)$, où $\varepsilon \in T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$. Si $e_1 \prec e$, $e_1 \in \mathfrak{S}'_0$, alors $T(\mathfrak{S}', e_1)$ est la paratopologie induite sur e_1 par $T(\mathfrak{S}', e)$.

Soit $\mathfrak{E}$ le groupoïde inductif de toutes les applications biunivoques (d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque). Un sous-pseudogroupe Γ de $\mathfrak{E}$ sera appelé un *pseudogroupe de transformations.* En particulier, supposons que les unités de Γ admettent un agrégat qui sera l'application identique d'un ensemble E. Alors Γ est appelé *pseudogroupe de transformations sur* E. C'est un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{E}_E$ de toutes les applications biunivoques d'une partie de E sur une partie de E. Le pseudogroupe de transformations Γ détermine sur E une topologie $T(\Gamma, E)$ dont les ouverts sont les ensembles $\alpha(f)$, où $f \in \Gamma$; chaque $f \in \Gamma$ est un homéomorphisme de $\alpha(f)$ sur $\beta(f)$ par rapport à cette topologie.

Un exemple de sous-pseudogroupe faible s'obtient de la manière suivante : Soit E un ensemble muni d'une topologie T non séparée. Soit $\mathfrak{S}'_0$ la classe des ouverts séparés de E et $\mathfrak{S}'$ la classe des homéomorphismes dont la source et le but appartiennent à $\mathfrak{S}'_0$. Alors $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{C}_{\mathrm{E}}$.

Un exemple de pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ *contenu* dans $\mathfrak{S}$ s'obtient de la manière suivante : $\mathfrak{S}'_0$ est la classe des ensembles convexes contenus dans R^n et $\mathfrak{S}'$ est la classe des isomorphismes affines d'un convexe sur un convexe.

Les *pseudogroupes d'isomorphismes locaux* [1] sont aussi des exemples de pseudogroupes. Soit $\mathfrak{S}$ un pseudogroupe et soit $\mathfrak{S}^l$ la classe des triplets $(\mathrm{S}', f, \mathrm{S})$, où S et S′ sont des éléments de $\mathfrak{S}_0$, $f \in \mathfrak{S}$, $\alpha(f) \prec \mathrm{S}$, $\beta(f) \prec \mathrm{S}'$. Munissons $\mathfrak{S}^l$ de la pseudomultiplication suivante :

$$(\mathrm{S}'_1, f_1, \mathrm{S}_1)\,(\mathrm{S}', f, \mathrm{S}) = \left| \begin{array}{lll} (\mathrm{S}'_1, f_1 f, \mathrm{S}) & \text{si} & \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}' \\ (0, 0, 0) & \text{si} & \mathrm{S}_1 \neq \mathrm{S}'. \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{S}^l_0$ la classe des éléments idempotents $(\mathrm{S}, e, \mathrm{S})$, où $e \prec \mathrm{S} \in \mathfrak{S}_0$. Alors $\mathfrak{S}^l$ est un pseudogroupe : Les éléments induits par $(\mathrm{S}', f, \mathrm{S})$ sont les éléments $(\mathrm{S}', fe, \mathrm{S})$, c'est-à-dire $(\mathrm{S}', g, \mathrm{S})$, où $g \prec f$. La multiplication restreinte est :

$$(\mathrm{S}'_1, f_1, \mathrm{S}_1)\,(\mathrm{S}', f, \mathrm{S}) = (\mathrm{S}'_1, f_1 f, \mathrm{S}) \quad \text{si} \quad \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}' \quad \text{et} \quad \alpha(f_1) = \beta(f).$$

Si l'on restreint la pseudomultiplication à :

$(\mathrm{S}'_1, f_1, \mathrm{S}_1)\,(\mathrm{S}', f, \mathrm{S}) = (\mathrm{S}'_1, f_1 f, \mathrm{S})$ si et seulement si $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}'$, alors $\mathfrak{S}^l$ devient une catégorie dont les unités sont les triplets (S, S, S). Le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{S}^l$ s'identifie avec $\mathfrak{S}$, en identifiant $(\mathrm{S}', f, \mathrm{S})$ avec f lorsque $\alpha(f) = \mathrm{S}$ et $\beta(f) = \mathrm{S}'$. Donc $\mathfrak{S}^l$ est une catégorie d'homomorphismes pour $\mathfrak{S}$ (appelée catégorie des isomorphismes locaux déduite de $\mathfrak{S}$ dans [1]).

2. — Catégories inductives.

Définition. — Une catégorie inductive *est une catégorie* $\mathfrak{C}$ *munie d'une relation d'ordre appelée* loi d'induction, *la classe des éléments* f' *induits par* f, *c'est-à-dire tels que* $f' \prec f$, *étant notée* $\mathrm{I}(f)$. *Cette loi d'induction vérifie les axiomes suivants :*

1) *Il existe un sous-groupoïde* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathfrak{C}$ *admettant les mêmes unités que* $\mathfrak{C}$ *et tel que, si* $\varphi(f) = \mathrm{I}(f) \cap \mathfrak{S}$, *pour tout* $f \in \mathfrak{S}$,

alors φ *est un foncteur d'induction dans le groupoïde* $\mathfrak{S}$. Remarquons que $\varphi(e)$ est alors une classe d'unités lorsque $e \in \mathfrak{C}_0$ (classe des unités de $\mathfrak{C}$).

2) *Soit* $p(h) = (\beta(h), \alpha(h))$, *pour* $h \in \mathfrak{C}$. *Alors l'application* p *applique* $\mathrm{I}(h)$ *d'une façon biunivoque sur une partie de* $\varphi(\beta(h)) \times \varphi(\alpha(h))$.

3) *Toute partie de* $\mathfrak{C}$ *a une borne inférieure.* Il en résulte que toute partie A majorée de $\mathfrak{C}$ admet un agrégat $\cup$A.

4) *Si* h_1 *et* h_2 *sont induits par* $h \in \mathfrak{C}$, *on a :*

$$\alpha(h_1 \cap h_2) = \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2); \qquad \beta(h_1 \cap h_2) = \beta(h_1) \cap \beta(h_2).$$

5) $$\alpha(\cup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \alpha(h), \qquad \beta(\cup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \beta(h).$$

6) $$\mathrm{I}(h'h) = \mathrm{I}(h')\mathrm{I}(h).$$

Remarquons que ces axiomes entraînent que $\mathfrak{C}$ est une espèce de structures inductives au-dessus du groupoïde inductif $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ (voir [1]). La notion de catégorie inductive exposée ici est équivalente à celle de catégorie inductive de morphismes de [1].

L'axiome 2) peut encore s'énoncer :

2') Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, $e' \prec \beta(h)$, alors il existe au plus un $h' \prec h$ tel que $\alpha(h') = e$ et $\beta(h') = e'$.

Remarquons que les axiomes 2) et 4) entraînent : Si $h_1 \prec h$, $h_2 \prec h$, $\alpha(h_1) \prec \alpha(h_2)$, $\beta(h_1) \prec \beta(h_2)$, alors on a $h_1 \prec h_2$.

Proposition. — $\mathfrak{C}_0$ *est une sous-classe inductive de* $\mathfrak{C}$, *c'est-à-dire que si* e *et* $e' \in \mathfrak{C}_0$, *alors* $e \cap e' \in \mathfrak{C}_0$ *et si* E *est une sous-classe de* $\mathfrak{C}_0$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *alors* $\cup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$.

En effet, il résulte de l'axiome 5) que, si E est une classe d'unités, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\alpha(\cup \mathrm{E}) = \cup \alpha(\mathrm{E}) = \cup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$. Soit e et $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \bigcap_{\mathfrak{S}} e' = \varepsilon$, $e \cap e' = \varepsilon'$; alors $\varepsilon \prec \varepsilon'$. Inversement soit A la classe des $u \in \mathfrak{C}$ tels que $u \prec e$ et $u \prec e'$; on a $\alpha(u) \prec e$ et $\alpha(u) \prec e'$, d'où $\alpha(u) \prec \varepsilon$; de même $\beta(u) \prec \varepsilon$. Or $\varepsilon' = \cup \mathrm{A}$, donc $\alpha(\varepsilon') \prec \varepsilon$ et $\beta(\varepsilon') \prec \varepsilon$ d'après l'axiome 5). Comme ε et ε' sont induits par e, on a $\varepsilon' \prec \varepsilon$, donc $\varepsilon = \varepsilon'$ et, puisque $\varepsilon \in \mathfrak{C}_0$, on a $\varepsilon' \in \mathfrak{C}_0$.

Proposition. — *Si* A *est une classe d'éléments de* $\mathfrak{S}$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *l'agrégat* $\cup_{\mathfrak{S}}$A *de* A *dans* $\mathfrak{S}$ *est identique à l'agrégat* $\cup$A *de* A *dans* $\mathfrak{C}$.

En effet, $\alpha(\bigcup A) = \bigcup \alpha(A) = \alpha(\bigcup_{\mathfrak{S}} A)$, $\beta(\bigcup A) = \bigcup \beta(A) = \beta(\bigcup_{\mathfrak{S}} A)$. Or $\bigcup A \prec \bigcup_{\mathfrak{S}} A$ et, en vertu de 2), on a $\bigcup A = \bigcup_{\mathfrak{S}} A$.

Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, on a $\bigcap_{\mathfrak{S}} A \prec \bigcap A$.

On peut étendre la multiplication dans $\mathfrak{C}$ en posant :

$h'h = \bigcup(l'l)$, où $l' \prec h'$, $l \prec h$, $\alpha(l') = \beta(l)$, lorsque cet agrégat existe. Cette multiplication étendue appelée *pseudo-multiplication* est associative. Remarquons que si f et f' appartiennent à $\mathfrak{S}$, leur pseudoproduit ainsi défini dans $\mathfrak{C}$, s'il existe, peut être différent du pseudoproduit défini dans $\mathfrak{S}$ par la structure de groupoïde inductif de $\mathfrak{S}$.

On voit que $\alpha(h'h) \prec \alpha(h)$ et que $\beta(h'h) \prec \beta(h')$. Si $e \in \mathfrak{C}_0$ et si $e \prec \alpha(h')$, alors $h'e$ est défini et on a $h'e \prec h'$. De même, si $e \prec \beta(h)$, alors eh est défini et on a $eh \prec h$.

Remarque. — Si pour tout $e \in \mathfrak{C}_0$, la classe $\mathrm{I}(e)$ est un ensemble, on peut démontrer par récurrence transfinie que $h'h$ est toujours défini.

PROPOSITION. — *$\alpha(h)$ est l'intersection de la classe* E *des $e \in \mathfrak{C}_0$ tels que $he = h$; de même $\beta(h)$ est l'intersection de la classe* E′ *des $e' \in \mathfrak{C}_0$ tels que $e'h = h$.*

En effet, $h\alpha(h) = h$, donc $\bigcap \mathrm{E} \prec \alpha(h)$; inversement, si $he = h$, alors $\alpha(he) = \alpha(h) \prec e$, d'après ce qui précède, donc $\alpha(h) \prec \bigcap \mathrm{E}$; de même $\beta(h) = \bigcap \mathrm{E}'$.

Remarquons que $\mathfrak{S}$ peut être réduit à $\mathfrak{C}_0$; mais le cas le plus intéressant est celui où $\mathfrak{S}$ est la classe de tous les éléments inversibles de $\mathfrak{C}$. Cette notion est alors équivalente à celle de catégorie inductive d'homomorphismes (voir [1]). On peut définir une telle catégorie à l'aide des axiomes 2′), 3), 4), 5), 6), 7), 8), où :

7) Si f est inversible et $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(f)$, il existe un élément inversible unique $g \prec f$ tel que $\alpha(g) = e$.

8) L'agrégat d'une famille d'éléments inversibles majorée par un élément inversible est inversible.

Une famille d'éléments (h_i) de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible* si :

$$\alpha(h_i \cap h_j) = \alpha(h_i) \cap \alpha(h_j), \quad \beta(h_i \cap h_j) = \beta(h_i) \cap \beta(h_j).$$

Une catégorie inductive sera appelée *complète* si toute famille (h_i) compatible et telle que $\bigcup_i \alpha(h_i)$ et $\bigcup_i \beta(h_i)$ existent admet un agrégat dans $\mathfrak{C}$.

Si l'axiome (D) est vérifié dans $\mathfrak{C}_0$, il est vérifié dans $\mathfrak{C}$, qui sera appelé alors *catégorie locale.*

Une catégorie inductive sera dite *régulière* si elle vérifie les axiomes supplémentaires : *a*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, alors $\alpha(he) = e$. *b*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e' \prec \beta(h)$, alors $\beta(e'h) = e'$. Elle sera dite *normale à droite* (resp. *à gauche*) si elle vérifie *a*) (resp. *b*)) et : *c*) si $f \in \mathfrak{S}$, $e \prec \alpha(f)$, $e \in \mathfrak{C}_0$, alors $fe \in \mathfrak{S}$ (resp. $e' \succ \beta(f)$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, alors $e'f \in \mathfrak{S}$).

Proposition. — *Dans une catégorie inductive régulière, $h'h$ est défini pour tout couple (h', h) et on a : $h'h = (h'e)(eh)$, où $e = \alpha(h') \cap \beta(h)$.*

En effet, soit $l \prec h$ et $l' \prec h'$ avec $\alpha(l') = \beta(l) \prec e$. Montrons que $l'l \prec (h'e)(eh)$. Or $l'\alpha(l') \prec h'e$ et $\beta(l)l \prec eh$, donc $l'l \prec (h'e)(eh)$. Par suite $h'h$ est défini et $h'h \prec (h'e)(eh)$. De plus, $(h'e)(eh) \prec h'h$, car $h'e \prec h'$, $eh \prec h$, $\alpha(h'e) = \beta(eh) = e$, donc $(h'e)(eh) = h'h$.

Proposition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière, $\mathrm{I}(h)$ est la classe des pseudoproduits $e'he$, où $e' \prec \beta(h)$, $e \prec \alpha(h)$.*

En effet, $he \prec h$ et $e'(he)$ est l'agrégat des éléments $l'l$, où $l' \prec e' \prec \beta(h)$ et $l \prec he \prec h$; comme $l'l \prec \beta(h)h = h$, on a $e'he \prec h$. Montrons que si $h_1 \prec h$, alors $h_1 = \beta(h_1)h\alpha(h_1)$: On a $h_1 = h_1\alpha(h_1) \prec h\alpha(h_1)$ et $h_1 = \beta(h_1)h_1 \prec \beta(h_1)h\alpha(h_1)$. D'autre part, $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ et h_1 sont induits par h, car $\alpha(h_1) \prec \alpha(h)$ et $\beta(h_1) \prec \beta(h\alpha(h_1))$. Les unités à droite et à gauche de $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ étant induites par $\alpha(h_1)$ et $\beta(h_1)$, on a $\beta(h_1)h\alpha(h_1) \prec h_1$.

En particulier la catégorie des applications continues d'un espace topologique dans un autre et la catégorie des applications continues d'un espace topologique sur un autre sont des catégories inductives; la première est régulière.

Définition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive, une sous-catégorie $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ est appelée* sous-catégorie inductive *lorsque les axiomes suivants sont vérifiés :*

1) *L'intersection de deux unités de $\mathfrak{C}'$ appartient à $\mathfrak{C}'$.*

2) *Pour toute partie* A *de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}$, l'agrégat* $\cup$A *appartient à $\mathfrak{C}'$.*

3) *Soit $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}'$. Si $f \in \mathfrak{S}'$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(f)$, alors il existe $g \in \mathfrak{S}'$ tel que $g \prec f$ et $\alpha(g) = e$.*

Il en résulte que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière, une sous-catégorie inductive $\mathfrak{C}'$ est dite *régulière* si elle vérifie de plus l'axiome :

4) Si $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $h \in \mathfrak{C}'$, $e \prec \alpha(h)$ $e' \prec \beta(h)$, alors $he \in \mathfrak{C}'$ et $e'h \in \mathfrak{C}'$.

Le système d'axiomes 1), 2), 3), 4) est équivalent au suivant :

a) $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie stable pour la pseudomultiplication.

b) $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

c) Identique à 2).

On dira que $\mathfrak{C}'$ est une *sous-catégorie inductive faible* si l'axiome 2) est remplacé par :

2′) Pour toute partie A de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}'$, l'agrégat $\bigcup$ A appartient à $\mathfrak{C}'$.

Il en résulte alors que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}$.

3. — Catégorie des filtres déduite d'une catégorie inductive.

Soit $\mathfrak{A}$ une classe munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques de $\mathfrak{A}$ admettent une intersection et qu'il y ait un plus petit élément 0.

DÉFINITION. — *Une partie* F *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée* filtre *sur* $\mathfrak{A}$ *si l'intersection de deux éléments de* F *appartient à* F *et si tout élément majorant d'un élément de* F *appartient à* F. *Une partie* B *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée une base de filtre lorsque l'intersection de deux éléments de* B *contient un élément de* B.

Si B est une base de filtre, la classe des majorants des éléments de B forme un filtre F appelé *filtre engendré par* B.

Si le filtre F contient 0, il est identique à $\mathfrak{A}$ et s'appellera le *filtre trivial*, ou *filtre* 0. Les autres filtres sont les *filtres propres*.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive régulière, la classe* $\mathfrak{F}$ *des filtres de* $\mathfrak{C}$ *forme une catégorie inductive régulière.*

La classe des éléments $\alpha(f)$, où $f \in$ F, est une base de filtre dans $\mathfrak{C}_0$ ou dans $\mathfrak{C}$, car $\alpha(f \cap g) \prec \alpha(f) \cap \alpha(g)$. Le filtre engendré par cette base de filtre sera désigné par α(F) et sera appelé la *source de* F. De même, le *but* de F est le filtre β(F) engendré par les éléments $\beta(f)$, $f \in$ F.

LEMME. — *Si* $h \in$ F, $\varepsilon \in \beta$(F) *et* $\varepsilon \prec \beta(h)$, *alors* $\varepsilon h \in$ F. *De même, si* $h \in$ F, $e \in \alpha$(F) *et* $e \prec \alpha(h)$, *alors* $he \in$ F.

En effet, il existe $l \in F$ tel que $\beta(l) \prec \varepsilon$. Soit $l' = l \cap h$; on a $l' \prec h$ et $\beta(l') \prec \varepsilon$; posons $l'' = l' \cup \varepsilon h$; alors $l'' \in F$ et on a $l'' \prec h$, $\beta(l'') = \beta(l') \cup \beta(\varepsilon h) = \varepsilon$. Donc $l'' \prec \varepsilon h$ et par suite $\varepsilon h \in F$. De même on démontre que $he \in F$.

Démonstration du théorème. — Soient F′ et F deux filtres sur $\mathfrak{C}$ tels que $\alpha(F') = \beta(F)$. Le produit F′F sera alors le filtre engendré par la classe des éléments $f'f$, où $f' \in F'$, $f \in F$, $\alpha(f') = \beta(f)$. Montrons que la classe M des éléments $f'f$ est la base d'un filtre. Si $h' \in F'$ et $h \in F$, alors le pseudoproduit $h'h$ est un élément de M, à savoir $(h'\varepsilon)(\varepsilon h)$, où $\varepsilon = \alpha(h') \cap \beta(h)$. Soient $f'f$ et $g'g$ deux éléments de M. Soit $h = f \cap g$ et $h' = f' \cap g'$. Alors $h' \in F'$ et $h \in F$ et le pseudoproduit $h'h$ appartient à M. Or $h'h \prec f'f$ et $h'h \prec g'g$, donc $h'h \prec f'f \cap g'g$. Donc M est la base d'un filtre que nous désignerons par F′F. Remarquons que M est aussi la classe des pseudoproduits $h'h$, où $h \in F$, $h' \in F'$.

Si B est une base de F, B′ une base de F′, alors B′B est une base de F′F, en désignant par B′B la classe des pseudoproduits $b'b$, où $b \in B$, $b' \in B'$. En effet, tout $f'f$ contient un tel élément $b'b$, où $b \prec f$, $b' \prec f'$.

Si E est un filtre dont une base est formée d'unités, alors $F'E = F'$ et $EF = F$, pour tous les filtres F et F′ tels que $\alpha(F') = E$ et $\beta(F) = E$. En effet, soit $f' \in F'$, e une unité appartenant à E; si $\varepsilon = \alpha(f') \cap e$, alors $\varepsilon \in E$, $f'\varepsilon \in F'$ et $f'\varepsilon \prec f'e$. Donc $F'E \subset F'$. D'autre part, $F' \subset F'E$. On démontre de même que $EF = F$.

Si $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}$, $\alpha(F') = \beta(F)$, alors $\alpha(F'F) = \alpha(F)$ et $\beta(F'F) = \beta(F')$. En effet, soit $f \in F$; il existe $f' \in F'$ tel que $\alpha(f') \prec \beta(f)$. L'élément $\alpha(f')f$ est un élément f_1 de F. On a $\alpha(f'f_1) = \alpha(f_1) \prec \alpha(f)$. Donc $\alpha(F) \subset \alpha(F'F)$. Comme $\alpha(F'F) \subset \alpha(F)$, on a $\alpha(F'F) = \alpha(F)$. On a de même $\beta(F'F) = \beta(F')$.

Les résultats précédents montrent que $\mathfrak{F}$ est une catégorie dont les unités sont les filtres ayant une base formée d'unités, l'unité à droite de F étant $\alpha(F)$, son unité à gauche $\beta(F)$.

Soit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ la classe des filtres F admettant une base B formée d'éléments de $\mathfrak{S}$. Alors $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde; en effet, $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est inversible et son inverse F^{-1} admet pour base la classe des inverses f^{-1}, où $f \in B$. Remarquons qu'une base de filtre dans $\mathfrak{S}$

est une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ et une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ formée d'éléments de $\mathfrak{S}$ est une base de filtre dans $\mathfrak{S}$. Il en résulte que les éléments f^{-1} forment bien une base de filtre, car $f \in \mathfrak{S}$, $g \in \mathfrak{S}$ entraîne $f \bigcap_{\mathfrak{S}} g \in \mathfrak{S}$ et $f^{-1} \bigcap_{\mathfrak{S}} g^{-1} = \left(f \bigcap_{\mathfrak{S}} g\right)^{-1}$.

Considérons dans $\mathfrak{F}$ la relation d'ordre $F \prec F'$ équivalente à $F' \subset F$. Cette relation d'ordre est une loi d'induction dans $\mathfrak{F}$. La borne inférieure d'une famille de filtres pour cette loi d'induction est le filtre engendré par la réunion des filtres de la famille. Le plus petit élément est le filtre 0. Toute partie bornée A de $\mathfrak{F}$ admet un agrégat; c'est l'intersection de tous les filtres $F \in A$.

Pour la relation d'ordre induite sur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, le groupoïde $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde inductif : c'est le groupoïde inductif privilégié qui intervient dans la définition d'une catégorie inductive. En effet, si $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, $E \prec \alpha(F)$, $E \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, alors le filtre induit par F sur E est le filtre engendré par les éléments induits par f sur e, où $f \in F$, $e \in E$, e est une unité $\prec \alpha(f)$.

Pour tout $F \in \mathfrak{F}$ et tout $E \in \mathfrak{F}_0$, $E \prec \alpha(F)$, la classe des pseudoproduits fe, où $f \in F$, $e \in E$, forme une base de filtre. Appelons FE le filtre qu'elle engendre; FE admet aussi pour base la classe des éléments fe, où $f \in F$, $e \in E$ et $e \prec \alpha(f)$. On définit de même E'F si $E' \prec \beta(F)$. On a $\alpha(FE) = E$, $\beta(E'F) = E'$. Si $G \prec F$, alors

$$\beta(G) \prec \beta(F\,\alpha(G)) \text{ et } G = \beta(G)F\,\alpha(G).$$

On démontre que, si $H \prec F'F$, alors $H = (\beta(H)F'E')\,(E'F\alpha(H))$, où $E' = \beta(F\alpha(H)) \cap \alpha(\beta(H)F')$, donc $H = K'K$, avec $K' \prec F'$, $K \prec F$. Ce qui précède permet de vérifier facilement les axiomes d'une catégorie inductive.

Remarquons que $\mathfrak{C}$ est plongé dans $\mathfrak{F}$, en identifiant l'élément f au filtre formé de tous les majorants de f, que nous noterons $[f]$; la relation d'induction dans $\mathfrak{C}$ est induite par celle de $\mathfrak{F}$.

Soit $\mathfrak{C}'$ une sous-catégorie inductive, $\mathfrak{F}'$ la classe des filtres $F \in \mathfrak{F}$, ayant une base formée d'éléments de $\mathfrak{C}'$; on montre facilement que $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie inductive faible, alors $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie faible de $\mathfrak{F}$.

4. — Groupoïdes inductifs au-dessus d'un groupoïde inductif.

DÉFINITION. — *Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ deux groupoïdes inductifs, φ et φ' leurs foncteurs d'induction. $\mathfrak{S}$ est appelé groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$ lorsqu'il est muni d'un foncteur covariant p de $\mathfrak{S}$ vers $\mathfrak{S}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soit $f \in \mathfrak{S}$, $s \in \mathfrak{S}_0$, tels que $p(s) = \alpha(p(f))$. Alors il existe $g \in \mathfrak{S}$ tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.*

2) *L'élément g ci-dessus est unique.*

3) *$\varphi(f)$ est appliqué d'une façon biunivoque par p sur une sous-classe de $\varphi'(f')$, où $f' = p(f)$.*

4) *Si $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, où s, s_1 et s_2 sont des unités de $\mathfrak{S}$, alors $p(s_1 \cap s_2) = p(s_1) \cap p(s_2)$.*

5) *Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ majorée par $s \in \mathfrak{S}_0$, il existe $s_1 \prec s$ tel que $p(s_1) = \bigcup p(A)$.*

Les axiomes 1) et 2) entraînent : $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde G de $\mathfrak{S}'$ et G est un groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{S}_0$. En effet, reprenant les notations de 1), le composé de $(p(f), s)$ sera $\beta(g)$, c'est-à-dire on peut écrire $s' = p(f)s$, où $s' = \beta(g)$. Cette multiplication vérifie les axiomes d'un groupoïde d'opérateurs, en d'autres termes, $\mathfrak{S}_0$ *est une espèce de structures sur* G *ou au-dessus* (¹) *de* $\mathfrak{S}'$.

Les axiomes 3), 4), 5) expriment que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures *inductives* au-dessus de $\mathfrak{S}'$ (voir [1]) : l'élément f de $\mathfrak{S}$ peut être identifié avec le couple $(p(f), \alpha(f))$.

On démontre les propriétés suivantes :

$f_1 \prec f$ est équivalent à : $\alpha(f_1) \prec \alpha(f)$ et $p(f_1) \prec p(f)$.

Étant données trois unités s, s_1, s_2 de $\mathfrak{S}$ telles que $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, pour que $s_1 \prec s_2$, il faut et il suffit que $p(s_1) \prec p(s_2)$.

(¹) En accord avec la définition suivante (qui généralise légèrement celle de [1] page 52).

DÉFINITION. — Une catégorie $\mathfrak{C}$ est appelée *catégorie d'opérateurs* sur une classe E lorsqu'on a défini une multiplication pour certains couples (f, z), $(f, z) \to fz$, où $f \in \mathfrak{C}$, $z \in E$, $fz \in E$ satisfaisant aux axiomes suivants :

1) Si l'un des éléments $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$.

2) Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est défini.

3) Si e est une unité de $\mathfrak{C}$ et si ez est défini, alors $ez = z$.

4) Pour tout $z \in E$, il existe $f \in \mathfrak{C}$ tel que fz soit défini.

5) Pour tout $f \in \mathfrak{C}$, il existe $z \in E$ tel que fz soit défini.

On dira aussi que E est une espèce de structures (covariantes) *sur* $\mathfrak{C}$. Si ces axiomes sont vérifiés sauf 5), on dira que E est une espèce de structures *au-dessus* de $\mathfrak{C}$; c'est alors une espèce de structures *sur* une sous-catégorie de $\mathfrak{C}$.

On a : $p(\bigcup A) = \bigcup p(A)$, où A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$. Si B est une partie majorée de $\mathfrak{S}$, on a :

$$p(\bigcup B) = \bigcup p(B), \quad \alpha(\bigcup B) = \bigcup \alpha(B), \quad \beta(\bigcup B) = \bigcup \beta(B).$$

Si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{S}$ et si $f_2 f_1$ est leur pseudoproduit, alors $p(f_2 f_1) \prec p(f_2)p(f_1)$. Si $s \prec \alpha(f)$, on a $p(fs) = p(f)p(s)$.

En général, $p(\mathfrak{S})$ n'est pas un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$. Si $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(f_2 f_1) = p(f_2)p(f_1)$, où le deuxième membre est un pseudoproduit dans $p(\mathfrak{S})$. Si p est un foncteur biunivoque de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(\mathfrak{S})$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}'$.

Si $\mathfrak{S}'$ est un groupoïde local, alors $\mathfrak{S}$ est un groupoïde local.

Une famille d'éléments f_i de $\mathfrak{S}$ est appelée *compatible relativement à* $\mathfrak{S}'$ si elle possède les propriétés suivantes :

a) $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$, où $s_i = \alpha(f_i)$, $s_j = \alpha(f_j)$.

b) $\alpha(p(f_i) \cap p(f_j)) = p(s_i) \cap p(s_j)$.

Il en résulte : $\alpha(f_i \cap f_j) = s_i \cap s_j$, $p(f_i \cap f_j) = p(f_i) \cap p(f_j)$. c'est-à-dire f_i et f_j sont compatibles dans $\mathfrak{S}$, $p(f_i)$ et $p(f_j)$ sont compatibles dans $\mathfrak{S}'$.

DÉFINITION. — *Un groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ au-dessus de $\mathfrak{S}'$ est dit complet relativement à $\mathfrak{S}'$ lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

c) *Toute famille d'éléments de $\mathfrak{S}$ qui est compatible relativement à $\mathfrak{S}'$ et dont la projection dans $\mathfrak{S}'$ admet un agrégat dans $\mathfrak{S}'$ admet elle-même un agrégat dans $\mathfrak{S}$.*

5. — Catégories inductives au-dessus d'une catégorie inductive :

DÉFINITION. — *Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux catégories inductives, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ les sous-groupoïdes inductifs privilégiés dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$,* I *et* I' *les lois d'induction dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$; on appellera $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ lorsque $\mathfrak{C}$ est muni d'un foncteur covariant π de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soient s, s_1, s_2 des unités de $\mathfrak{C}$, $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$. Alors $\pi(s_1 \cap s_2) = \pi(s_1) \cap \pi(s_2)$. De plus, $\pi(s_1) = \pi(s_2)$ entraîne $s_1 = s_2$.*

2) *Soit* A *une partie de $\mathfrak{C}_0$, majorée par* S *dans $\mathfrak{C}_0$, alors il existe $\sigma \prec$ S tel que $\pi(\sigma) = \bigcup \pi(A)$.*

3) *Soit $h \in \mathfrak{C}$; alors $\pi(I(h)) \subset I'(\pi(h))$.*

4) *L'application $h \to (\beta(h), \pi(h), \alpha(h))$ de $\mathfrak{C}$ sur une partie de $\mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}' \times \mathfrak{C}_0$ est biunivoque.*

5) $\pi(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$.

6) *Soit* $f \in \mathfrak{S}$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *où* $\pi(s) = \pi(\alpha(f))$. *Alors il existe un* $g \in \mathfrak{S}$ *et un seul tel que* $\alpha(g) = s$ *et* $\pi(g) = \pi(f)$.

On obtient un système d'axiomes équivalent en remplaçant 1), 2), 5), 6) par l'axiome : La restriction de π à $\mathfrak{S}$ définit $\mathfrak{S}$ comme groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$. Une catégorie inductive $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$ a été appelée dans [1] catégorie inductive d'homomorphismes au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Les éléments induits par $h \in \mathfrak{C}$ s'identifient à des triplets (s_2, h', s_1) où $s_1 \prec \alpha(h)$, $s_2 \prec \beta(h)$, $h' \prec \pi(h)$. Si h_1 et h_2 sont induits par h, on a $\pi(h_1 \cap h_2) = \pi(h_1) \cap \pi(h_2)$ Si B est une partie de $\mathfrak{C}$, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\pi(\bigcup \mathrm{B}) = \bigcup \pi(\mathrm{B})$.

$\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{C}'$, mais, en général, ce n'est pas une sous-catégorie inductive.

Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont des catégories régulières, pour la pseudo-multiplication on a :

$$\pi(h_2 h_1) \prec \pi(h_2)\pi(h_1).$$

Si $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie régulière faible de $\mathfrak{C}'$, alors π est un isomorphisme de $\mathfrak{C}$ sur $\pi(\mathfrak{C})$ pour leurs structures de catégorie inductive.

Une famille d'éléments h_i de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ si on a :

a) $\quad \pi(s_i \cap s_j) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j), \quad \pi(s'_i \cap s'_j) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j),$
où $\quad s_i = \alpha(h_i), \quad s_j = \alpha(h_j), \quad s'_i = \beta(h_i), \quad s'_j = \beta(h_j).$

b) $\alpha(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j), \quad \beta(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j).$

Définition. — *Une catégorie inductive* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *est dite* complète relativement à $\mathfrak{C}'$ *lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

c) *Toute famille d'éléments de* $\mathfrak{C}$ *qui est compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ *et dont la projection admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}'$ *admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}$.

Si $\mathfrak{C}'$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale.

Proposition. — *Au-dessus d'une catégorie inductive normale à droite (resp. à gauche)* $\mathfrak{C}$, *on peut définir une catégorie inductive normale* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ *dont les objets sont les paratopologies sur les unités de* $\mathfrak{C}$.

Soit T une paratopologie sur $e \in \mathfrak{C}_0$; c'est-à-dire T est une partie de $\varphi(e)$, classe des unités induites par e, telle que T soit saturé par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation quelconque et contienne e et 0. Soit $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ la classe des triplets (T', h, T), où $h \in \mathfrak{C}$, T est une paratopologie sur $\alpha(h)$, T′ une paratopologie sur $\beta(h)$, tels que $e \in T$ entraîne $\beta(he) \in T'$ (resp. $e' \in T'$ entraîne $\alpha(e'h) \in T$). La classe $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive pour la loi de composition : $(T'', h' T_1)(T', h, T) = (T'', h'h, T)$, si et seulement si $T_1 = T'$, et pour la loi d'induction :

$(t', h', t) \prec (T', h, T)$ si et seulement si $h' \prec h$, $t = T \cap \varphi(\alpha(h'))$, $\alpha(h') \in T$, $\beta(h') \in T'$, $t' = T' \cap \varphi(\beta(h'))$.

Une unité de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est un triplet (T, e, T), où $e \in \mathfrak{C}_0$. Il correspond d'une façon biunivoque à T; c'est-à-dire, la classe des paratopologies sur les unités de $\mathfrak{C}$ est une classe d'objets pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$.

Le sous-groupoïde inductif privilégié de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est la classe $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ de triplets (T', f, T), où $f \in \mathfrak{S}$, $T' = fT =$ classe des éléments $\beta(fe)$, où $e \in T$, fe est l'élément de $\mathfrak{S}$ induit par f sur e.

Soit $h' = he$, $e \prec \alpha(h)$, $e \in T$, t la paratopologie induite par T sur e, t' la paratopologie induite par T′ sur $\beta(h')$. Alors $(t', h', t) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a :

$$(T', h, T)(t, e, t) = (t', he, t), \tag{1}$$

où le premier membre est un pseudoproduit dans la catégorie inductive $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a respectivement une formule analogue :

$$(t_1, e_1, t_1)(T', h, T) = (t_1, e_1 h, t_1'). \tag{2}$$

Ces deux formules montrent que $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive régulière, si $\mathfrak{C}$ est régulier.

$\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}$ par rapport au foncteur projection $\pi : (T', h, T) \to h$.

La formule (1) entraîne :

$$\pi((T', h, T)(t, e, t)) = he.$$

De même respectivement :

$$\pi((t_1, e_1, t_1)(T', h, T))) = e_1 h.$$

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie locale complète relativement à $\mathfrak{C}$.

DÉFINITION. — *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *est dite supraréqulière au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *lorsque* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *sont des catégories inductives régulières,* $\mathfrak{C}$ *étant au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *par rapport à un foncteur projection* π *vérifiant l'axiome :*

$$\pi(hs) = \pi(h)\pi(s), \qquad \pi(s'h) = \pi(s')\pi(h),$$

où

$$h \in \mathfrak{C}, s \in \mathfrak{C}_0, \qquad s' \in \mathfrak{C}_0, \qquad s \prec \alpha(h), \qquad s' \prec \beta(h).$$

En particulier la catégorie $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est supraréqulière au-dessus de $\mathfrak{C}$ si $\mathfrak{C}$ est régulier.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive au-dessus de la catégorie inductive* $\mathfrak{C}'$. *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *sera dite* étalée au-dessus de $\mathfrak{C}'$ *lorsque la restriction du foncteur projection* π *à la classe* $\mathrm{I}(h)$ *est biunivoque sur* $\mathrm{I}'(\pi(h))$ *et que la restriction de* π *à* $\varphi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *est biunivoque sur* $\varphi'(\pi(s))$.

Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$ et si $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$ est régulière, alors $\mathfrak{C}$ est supraréqulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

PROPOSITION. — *Si* $\mathfrak{C}$ *est supraréqulière au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *normal, alors* $\mathfrak{C}$ *est étalée et supraréqulière au-dessus de* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ *par rapport au foncteur projection* $\tau : h \to (\mathrm{T}', \pi(h), \mathrm{T})$, *où* T *est la paratopologie sur* $\pi(s)$ *définie par* $\pi(\varphi(s))$, *où* $s = \alpha(h)$, T' *étant la paratopologie définie de la même façon sur* $\pi(s')$, *où* $s' = \beta(h)$.

Le groupoïde privilégié de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ est $\mathfrak{S}$. De plus on a : $\pi = \pi'\tau$, où π' est le foncteur projection de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ sur $\mathfrak{C}'$.

Cette proposition généralise la proposition de [1] page 64. $\tau(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, qui est aussi supraréqulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Si de plus la catégorie $\mathfrak{C}$ est complète relativement à $\mathfrak{C}'$, alors elle est complète relativement à $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, mais la catégorie $\tau(\mathfrak{C})$ n'est pas forcément complète relativement à $\mathfrak{C}'$.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ telle que le foncteur projection π soit biunivoque sur $\pi(\mathfrak{C})$. Alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est supraréqulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive régulière faible. Si $\mathfrak{C}$ est complet au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est saturé par induction.

Une catégorie $\mathfrak{C}$ étalée et complète au-dessus de $\mathfrak{C}'$ généralise la notion de faisceau d'ensembles : Si $\mathfrak{C}$ se réduit à la classe des unités $\mathfrak{C}_0$, alors $\mathfrak{C}_0$ peut s'appeler un faisceau de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'_0$. En ajoutant des structures algébriques supplémentaires dans $\mathfrak{C}$, on peut généraliser la notion de faisceau (d'ensembles munis de structures algébriques).

6. — Jets locaux.

Proposition. — *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$, π le foncteur projection. La classe $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ des triplets (e', h, e), où $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(\pi(h))$, $e' \prec \beta(\pi(h))$, $e \prec \alpha(\pi(s'h))$, $e' \prec \beta(\pi(hs))$ pour tout $s \prec \alpha(h)$ et tout $s' \prec \beta(h)$ tels que $e \prec \pi(s)$, $e' \prec \pi(s')$, est une catégorie inductive lorsqu'on la munit de la loi de composition: $(e'', h', e'_1)(e', h, e) = (e'', h'h, e)$, si et seulement si $e' = e'_1$ et $\alpha(h') = \beta(h)$, et de la loi d'induction:*

$$(e'_1, h_1, e_1) \prec (e', h, e) \quad \textit{si et seulement si} \quad e_1 = e,\ e'_1 = e',\ h_1 \prec h.$$

Les unités sont les triplets (e, s, e), où $e \prec \pi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$. Le groupoïde inductif privilégié dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est la classe des triplets (e', f, e), où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(g)$, *où* $g \in \mathfrak{S}'$, $g \prec \pi(f)$, $\alpha(g) = e$.

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ par $h \to (\pi(\beta(h)), h, \pi(\alpha(h)))$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, la catégorie $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est une catégorie inductive au-dessus de $\Theta(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'_0)$, le foncteur projection étant : $(e', h, e) \to (e', \pi(h), e)$.

Dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$, nous considérons la relation d'équivalence ρ suivante :

$(e', h, e) \sim (e'_1, h_1, e_1)$ si et seulement si $e = e_1$, $e' = e'_1$, $e \prec \alpha(\pi(h \cap h_1))$, $e' \prec \pi(\beta(h \cap h_1))$.

ρ est effectivement une relation d'équivalence: $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_1))$ et $e \prec \pi(\alpha(h_1 \cap h_2)$ entraînent $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_2))$, car $(h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2) \prec h \cap h_2$ et comme $h \cap h_1$ et $h_1 \cap h_2$ sont induits par h_1, on a :

$$\pi((h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2)) = \pi(h \cap h_1) \cap \pi(h_1 \cap h_2)).$$

Si $(e', h, e) \sim (e', h_1, e)$ et $(e'_1, l, e_1) \sim (e'_1, l_1, e_1)$ et si de plus h et l sont majorés dans $\mathfrak{C}$, alors $(e' \cap e'_1, h \cap l, e \cap e_1) \sim (e' \cap e'_1,$

$h_1 \cap l_1$, $e \cap e_1$). Si A est une famille d'éléments (e'_i, h_i, e_i) majorée dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ et si $(e'_i, h_i, e_i) \sim (e'_i, l_i, e_i)$, alors $\cup A \sim \cup B$, où B est la famille d'éléments (e'_i, l_i, e_i).

La relation d'équivalence ρ *est compatible avec la multiplication dans* $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$. *Par passage au quotient, on en déduit une multiplication dans la classe* $\mathfrak{J}'$ *dont les éléments sont les classes d'équivalence suivant* ρ. Désignons par ${}_{e'}j_e h$ la classe d'équivalence de (e', h, e). Alors la multiplication dans $\mathfrak{J}'$ est définie par :

$$(1) \quad ({}_{e''}j_{e'}h')\,({}_{e'}j_e h) = {}_{e''}j_e(h'h), \qquad \text{où} \qquad \alpha(h') = \beta(h).$$

Pour cette multiplication $\mathfrak{J}'$ est une catégorie : l'unité à droite ou *source* de ${}_{e'}j_e h$ est ${}_e j_e \alpha(h)$, son unité à gauche ou *but* est ${}_{e'}j_{e'}\beta(h)$. Une unité quelconque ${}_e j_e s$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \pi(s)$, sera appelée *germe de structure* au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Un élément de $\mathfrak{J}'$ sera appelé *jet local* de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Le jet local ${}_{e'}j_e h$ est aussi le filtre le plus fin dans Θ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ possédant les propriétés suivantes : il contient (e', h, e) et le foncteur $(e', l, e) \to \pi(l)$ de Θ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ vers $\mathfrak{C}'$ l'applique dans le filtre η engendré par les éléments $h' \prec \pi(h)$ tels que $e \prec \alpha(h')$, $e' \prec \beta(h')$. Remarquons que l'application ${}_{e'}j_e h \to \eta$ n'est pas un foncteur.

Soit $h \in \mathfrak{C}$ tel qu'il existe $g \in \mathfrak{C}'$ où $g \prec \pi(h)$, $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = e'$. Les jets locaux ${}_{e'}j_e h$ correspondants forment une sous-classe $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{J}'$. $\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{J}'$ contenant tous les germes de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Le filtre η correspondant à ${}_{e'}j_e h$ est alors le filtre $[g]$ engendré dans $\mathfrak{C}'$ par g. L'application : ${}_{e'}j_e h \to g$ est un foncteur.

Proposition. — $\mathfrak{J}'$ *est une catégorie inductive régulière pour la loi d'induction suivante :*

${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 \prec {}_{e'}j_e h$ *si et seulement si* $e'_1 \prec e'$, $e_1 \prec e$ *et* ${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 = {}_{e'_1}j_{e_1}h$.

Le groupoïde inductif privilégié dans $\mathfrak{J}'$ est le groupoïde dont les éléments sont les jets ${}_{e'}j_e f$, où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(\pi(f)e)$, où $\pi(f)e$ est l'élément de $\mathfrak{S}'$ induit par $\pi(f)$ sur e.

$\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{J}'$. De plus la formule (1) est aussi valable plus généralement lorsque la condition $\alpha(h') = \beta(h)$ est remplacée par ${}_{e'}j_{e'}\alpha(h') = {}_{e'}j_{e'}\beta(h)$ en considérant $h'h$ comme un pseudoproduit.

PROPOSITION. — *Si $\mathfrak{C}$ est suprarégulier au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\mathfrak{J}$ est une catégorie inductive étalée au-dessus de $\mathfrak{C}'$.*

PROPOSITION. — *Si $\mathfrak{C}$ est suprarégulier au-dessus de $\mathfrak{C}'$ normal, la catégorie $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$ des jets locaux de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$ est une catégorie inductive étalée au-dessus de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{T}(\mathfrak{C}'),\, \mathfrak{C}')}$, le foncteur projection étant: ${}_{e'}j_e h \to {}_{e'}j_e \tau(h)$, où τ est le foncteur qui étale $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$.*

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie avec une sous-catégorie $[\mathfrak{C}]$ de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$, en identifiant $h \in \mathfrak{C}$ avec $[h] = {}_{e'}j_e h$, où $e = \pi(\alpha(h))$, $e' = \pi(\beta(h))$; la loi d'induction dans $\mathfrak{C}$ correspond à la restriction à $[\mathfrak{C}]$ de la loi d'induction dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$. L'intersection de deux éléments de $[\mathfrak{C}]$ appartient à $[\mathfrak{C}]$: $[h] \cap [h'] = [h \cap h']$. L'agrégat d'une partie de $[\mathfrak{C}]$ majorée dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$ appartient à $[\mathfrak{C}]$. Tout élément de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$ est induit par un élément de $[\mathfrak{C}]$. Nous exprimons ces trois dernières propriétés en disant que $[\mathfrak{C}]$ est une *paratopologie* sur $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \mathfrak{C}')}$.

7. — Catégories inductives au-dessus de la catégorie des applications.

Soit $\tilde{\mathfrak{F}}$ la catégorie inductive des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque, le sous-groupoïde inductif priviligié étant $\mathfrak{F}$. Une sous-catégorie inductive (faible) de $\tilde{\mathfrak{F}}$ sera appelée catégorie inductive (faible) d'applications.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\tilde{\mathfrak{F}}$, π le foncteur projection de $\mathfrak{C}$ vers $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{S}$ la classe des éléments inversibles. Soit $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ la sous-catégorie de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\, \tilde{\mathfrak{F}})}$, formée des *jets locaux* « *atomiques* » de la forme ${}_{x'}j_x f$, où $f \in \mathfrak{C}$, où x est un point de $\pi(\alpha(f))$, $x' = \pi(f)(x)$; un tel jet sera désigné par $j^\lambda_x f$. Soit $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ la classe de ses unités ou *germes structuraux* « *atomiques* ». $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ s'identifie avec le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

L'image $\hat{f}$ de $\alpha(\pi(f))$ par l'application $j^\lambda f$: $x \to j^\lambda_x f$ sera appelée *ouvert élémentaire* de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. Les réunions quelconques d'ouverts élémentaires sont les ouverts d'une « métatopologie » sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$, c'est-à-dire d'une structure définie sur la classe $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ par la donnée d'une famille de parties vérifiant les axiomes des ouverts d'une topologie. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ devient alors une catégorie topologique [2]. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ est un ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Si $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}')$ est un sous-groupoïde ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Inversement un sous-groupoïde ouvert G de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ détermine le sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ dont les éléments sont les éléments f de $\mathfrak{S}$ tels que $\hat{f} \subset G$; tout sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}''$ de $\mathfrak{S}$ tel que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}'') = G$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}'$. Les éléments de $\mathfrak{S}$ correspondent d'une façon biunivoque aux ouverts élémentaires de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$. Un élément f de $\mathfrak{C}$ peut s'identifier au couple $(U', \hat{f})$, où U' est un ouvert élémentaire de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ contenant $\beta(\hat{f})$. Plus généralement on montre que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ détermine complètement $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{F}})$.

L'application α étale l'espace topologique $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. L'application β est une application continue de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. Les applications α et β sont ici les applications source et but dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

Soit $\mathfrak{T}$ la catégorie $\mathfrak{T}(\tilde{\mathfrak{F}})$ dont les objets sont les topologies. Alors $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$ par le foncteur τ. Désignons $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T})$ par $\mathfrak{J}^\lambda$, $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T}_0)$ par $\mathfrak{J}^\lambda_0$ qui est la classe des germes de topologies, ces classes étant munies des métatopologies définies ci-dessus. Alors on a :

Proposition. — *La restriction $\hat{\tau}$ à $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ du foncteur qui étale $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{F}})$ au-dessus de $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}, \tilde{\mathfrak{F}})$ étale l'espace topologique $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda$ et de même $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda_0$. L'application $\hat{\tau}$ est : $j^\lambda_x f \to j^\lambda_x \tau(f)$, où $f \in \mathfrak{C}$.*

Le procédé d'élargissement d'une espèce de structures [1] conduit à munir $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ d'une métastructure de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ élargie ; nous considérons $\mathfrak{C}_0$ comme une espèce de structures au-dessus de $\tilde{\mathfrak{F}}$ (pour laquelle $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathfrak{F}}$). Le couple $(j^\lambda f, s)$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $f \in \mathfrak{C}$, est une *carte locale élémentaire* de $\mathfrak{C}_0$ sur l'ouvert élémentaire $\hat{f}$ de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Étant donnée une deuxième carte locale $(j^\lambda g, s')$, le changement de carte est le triplet $(\sigma, \varepsilon, \sigma)$, où $\sigma = \alpha(f \cap g)$ et $\varepsilon = \pi(\sigma)$. La métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ est définie par l'atlas formé par les cartes locales élémentaires. En supposant $\mathfrak{C}$ complet au-dessus de $\tilde{\mathfrak{F}}$, le couple $(j^\lambda f, s)$ définit une structure

$\hat{s}$ de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ sur $\hat{f}$. Les structures $\hat{s}$ forment une classe de structures compatibles qui définit également la métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

En particulier, soit $\mathfrak{C}^r$ la catégorie des applications r fois continûment différentiables dont les objets sont les structures de variétés r fois continûment différentiables de classe $\mathfrak{C}_0^r$. Soit $\mathfrak{J}^{\lambda, r} = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}^r)$, $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r} = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0^r) =$ classe des germes (atomiques) de structures r fois continûment différentiables. Alors $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ ainsi que $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$ est muni d'une métastructure r fois continûment différentiable. Si $k \leqslant r$, $\mathfrak{C}^r$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}^k$, qui est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$. De plus $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{J}^{\lambda, k}$, qui est étalé *au-dessus* de $\mathfrak{J}^\lambda$, ces classes étant munies des métastructures correspondantes.

Étant donné un germe de structure $\hat{x} \in \mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$, un *repère* pour $\hat{x}$ est un jet inversible $h \in \mathfrak{J}^{\lambda, r}$ tel que $\beta(h) = \hat{x}$ et $\alpha(h) =$ germe $\hat{O}_n$ de R^n en l'origine O. Dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ on a la relation d'équivalence ρ_r : $j_x^\lambda f \sim j_x^\lambda g$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $j_x^\lambda f$ et $j_x^\lambda g$ ont la même unité à droite $\hat{x}$ ainsi que la même unité à gauche $\hat{x}'$.

2) Soit h un repère pour $\hat{x}$, h' un repère pour $\hat{x}'$. Soit $h'^{-1}(j_x^\lambda f)h = j_0^\lambda \bar{f}$, où $\bar{f} \in \mathfrak{C}^r$ est une application dans R^p d'un voisinage de O relativement à R^n telle que $O = \bar{f}(O)$. Soit de même $h'^{-1}(j_x^\lambda g)h = j_0^\lambda \bar{g}$. Alors $\bar{f} - \bar{g}$ est une fonction définie dans un voisinage de O telle que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ soient nulles.

La classe d'équivalence de $j_x^\lambda f$ suivant ρ_r sera désignée par $j_x^r f$ et s'appellera un *jet infinitésimal d'ordre* r *de* $\hat{x}$ *vers* $\hat{x}'$. La relation d'équivalence ρ_r est compatible avec la multiplication dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$; la classe $\mathfrak{J}^r$ des jets infinitésimaux d'ordre r est une catégorie admettant encore $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$ comme classe d'objets. Soit Π^r le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^r$.

Les catégories $\mathfrak{J}^r$ sont les catégories fondamentales de la géométrie différentielle. Une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre r (ou d'*objets géométriques d'ordre* r) est une classe $\mathfrak{M}$ admettant Π^r comme groupoïde d'opérateurs, plus généralement admettant $\mathfrak{J}^r$ ou une de ses sous-catégories comme catégorie d'opérateurs. Soit $\mathfrak{M}'$ une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre k, par rapport à Π^k, où $k \leqslant r$. Une *application* *covariante* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ est une application γ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ telle que :

$$\gamma(Xz) = (j^k X)\gamma(z),$$

où $X \in \Pi^r$, $j^k X$ l'élément de Π^k qui se déduit de X par le foncteur canonique j^k de Π^r sur Π^k; l'élément $\gamma(z)$ est appelé *covariant différentiel* de z.

Ces notions conduisent à une théorie générale des prolongements d'ordre r d'une variété différentiable ainsi que des structures infinitésimales définies par des sections de ces prolongements (voir les références dans [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen (*Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, 60, 1957, p. 49-77).

[2] Catégories topologiques et catégories différentiables (*Colloque Geométrie Différentielle Globale*, Bruxelles, 1958 CBRM).

[3] Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie (*Colloque Int. de Géométrie diff. de Strasbourg, C.N.R.S.*, 1953).

[4] Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie (*Revista Union Mat. Argentina*, 1960, vol XIX, p. 48).