

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HUBERT RUBENTHALER

Formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 1 (1986), p. 1-38

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_1_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMES RÉELLES DES ESPACES PRÉHOMOGÈNES IRRÉDUCTIBLES DE TYPE PARABOLIQUE

par Hubert RUBENTHALER

1. Introduction.

Soit G un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbf{C}$, que nous supposons ici toujours réductif et soit ρ une représentation de G dans un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Le triplet (G, ρ, V) est appelé espace préhomogène s'il existe dans V une G -orbite (notée Ω) qui est ouverte pour la topologie de Zariski. S'il n'y a pas d'ambiguïté concernant la représentation, nous utiliserons la notation (G, V) pour les espaces préhomogènes. Il est facile de voir que la notion d'espace préhomogène est en fait essentiellement infinitésimale : (G, ρ, V) est préhomogène si et seulement si il existe $v_0 \in V$ telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & d\rho(X) v_0 \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & V \end{array}$$

est surjective ($\mathfrak{g}$ désignant l'algèbre de Lie de G et $d\rho$ désignant la représentation dérivée de ρ). Le complémentaire de Ω dans V , noté S , est appelé lieu singulier de l'espace préhomogène.

La théorie des espaces préhomogènes a été fondée par M. Sato. Son premier article à ce sujet (en japonais, rédigé par T. Shintani) date de 1970. Une classification de ces objets a été obtenue par Sato et Kimura en 1977 ([11]). Nous renvoyons également à cette dernière référence pour tout ce qui concerne la théorie générale de ces espaces. Les espaces préhomogènes

Mots-clés : Espaces préhomogènes — Formes réelles — Sous-algèbres paraboliques — Diagrammes de Satake..

particulièrement intéressants sont ceux dont le lieu singulier S est une hypersurface irréductible. Le polynôme irréductible P associé à S est alors un invariant relatif de la représentation et tout invariant relatif est une puissance de P . Un espace préhomogène dont le lieu singulier est une hypersurface est dit régulier. Si l'espace préhomogène est régulier, une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que S soit irréductible, est que la représentation associée soit irréductible (dans cette dernière situation on dira que l'espace préhomogène est irréductible). Les espaces préhomogènes réguliers irréductibles fournissent ainsi une première famille (nombreuse...) d'espaces dont le lieu singulier est une hypersurface irréductible.

Supposons que cette dernière condition soit remplie et qu'en outre G , ρ et V soient définis sur $\mathbf{R}$. Soient $G_{\mathbf{R}}$ le groupe des points réels de G , $G_{\mathbf{R}}^0$ la composante connexe de 1 dans $G_{\mathbf{R}}$, $V_{\mathbf{R}}$ les points réels de V et $S_{\mathbf{R}}$ les points réels de S . Dans cette situation $V_{\mathbf{R}} - S_{\mathbf{R}}$ se décompose en un nombre fini de $G_{\mathbf{R}}^0$ -orbites $V_1, V_2, \dots, V_k$. Pour φ appartenant à $\mathcal{S}(V_{\mathbf{R}})$ (l'espace de Schwartz de $V_{\mathbf{R}}$) et s appartenant à $\mathbf{C}$ on appelle fonction zêta une expression du type :

$$Z_j(\varphi, s) = \int_{V_j} \varphi(x) |P(x)|^s d^*x$$

où $d^*x = |P(x)|^{-n/d} dx$ est la mesure $G_{\mathbf{R}}^0$ -invariante sur V_j ($n = \dim V$, $d = \deg P$). Cette intégrale converge évidemment pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grand. Désignons par $Z(\varphi, s)$ le vecteur colonne des $Z_j(\varphi, s)$. Sato et Shintani ([12], [13], [14]) démontrent alors que $Z(\varphi, s)$ se prolonge en une fonction de s méromorphe sur $\mathbf{C}$, vérifiant l'équation fonctionnelle remarquable suivante :

$$Z(\hat{\varphi}, s) = \gamma(s) Z(\varphi, n/d - s),$$

où $\hat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ et où $\gamma(s)$ est une matrice de fonctions méromorphes dépendant de la forme réelle choisie, dont la détermination est un des problèmes majeurs de la théorie.

Ceci justifie l'intérêt porté aux formes réelles des espaces préhomogènes. Le but du présent article, dont les résultats ont été annoncés dans [7], est de fournir la classification complète des formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique que nous allons définir à présent.

2. Espaces préhomogènes de type parabolique.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, ψ une base de R fixée une fois pour toute et θ une partie de ψ .

On désigne par $\mathfrak{h}_\theta$ l'orthogonal de θ :

$$\mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h}, \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \theta\}.$$

Dans $\mathfrak{h}_\theta$ on distingue l'élément H^θ défini par les équations $\alpha(H^\theta) = 0$ si $\alpha \in \theta$ et $\alpha(H^\theta) = 2$ si $\alpha \in \psi - \theta$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g}, [H^\theta, X] = 2pX\}.$$

On vérifie trivialement que $[d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta)$, on a donc obtenu une $\mathbb{Z}$ -gradation. L'espace $d_0(\theta)$, que nous noterons désormais $\mathfrak{l}_\theta$, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$, qui opère par l'action adjointe dans chacun des $d_i(\theta)$. Nous noterons L_θ le sous-groupe connexe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\mathfrak{l}_\theta$. La représentation précédente de $\mathfrak{l}_\theta$ dans chacun des $d_i(\theta)$ provient évidemment d'une représentation de L_θ dans les $d_i(\theta)$. Ces représentations sont notées $(\mathfrak{l}_\theta, d_i(\theta))$ et $(L_\theta, d_i(\theta))$.

On sait (Vinberg) que ces représentations sont préhomogènes. Les espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ sont dits de type parabolique ([8], [9]).

Posons :

$$n_\theta^+ = \sum_{p \geq 1} d_p(\theta), n_\theta^- = \sum_{p \leq -1} d_p(\theta).$$

Alors $\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + n_\theta^+$ est la sous-algèbre parabolique standard associée à θ , son radical nilpotent est n_θ^+ . L'algèbre $\mathfrak{l}_\theta$ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_\theta$.

La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ est maximale, c'est-à-dire si et seulement si $\text{Card}(\psi - \theta) = 1$ (ce résultat est classique, voir par exemple [9]).

A chaque espace préhomogène de type parabolique on associe un diagramme de Dynkin à poids qui le détermine complètement ; on l'obtient à partir du diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ en entourant d'un cercle les sommets qui correspondent aux racines de $\psi - \theta$. Ainsi, le diagramme obtenu en enlevant les sommets encerclés et les arêtes reliées à ces sommets est le diagramme de Dynkin de la partie semi-simple $\mathfrak{g}'_\theta$ de $\mathfrak{g}_\theta$.

Le problème suivant est alors de déterminer, sous l'hypothèse Card $(\psi - \theta) = 1$, quels sont les espaces préhomogènes $(\mathfrak{g}_\theta, d_1(\theta))$ qui sont réguliers. Ce problème a été résolu par l'auteur ([8], [9]) en faisant le lien avec la théorie des sl_2 -triplets. La comparaison de la classification obtenue et de la classification de Sato-Kimura montre que "presque tous" les espaces préhomogènes réguliers irréductibles sont de type parabolique (les diagrammes de Dynkin correspondant à cette dernière classification constituent les têtes de rubrique de la table figurant à la fin de l'article).

L'intérêt de cette construction provient du fait que l'algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ et l'espace $d_1(\theta)$ des représentations considérées sont plongés dans l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$, ce qui permet par exemple, dans certains cas, d'interpréter la fonction zêta comme une intégrale d'entrelacement ou d'obtenir des décompositions orbitales précises ([8]).

Les résultats prouvés dans cet article permettent de classifier les formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique : ces formes réelles sont en bijection avec les diagrammes de Satake de l'algèbre ambiante $\mathfrak{g}$ qui vérifient une condition de compatibilité avec le diagramme de Dynkin de l'espace préhomogène (voir la remarque 5.5. ci-dessous et la table à la fin de l'article).

3. Résultats préliminaires.

Sauf précision contraire, les parties θ intervenant dans les paragraphes 3 et 4 sont arbitraires.

3.1. Formes réelles de représentations.

Nous appellerons *forme réelle* de $(\mathfrak{g}_\theta, d_1(\theta))$ la donnée d'une

forme réelle $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$ de l'algèbre $\mathfrak{l}_{\theta}$ et d'une forme réelle $d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$ de $d_1(\theta)$ telle que $[\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}] \subset d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$ (la définition restant évidemment la même pour toute représentation de dimension finie d'une algèbre réductive).

La question qui se pose alors est de savoir si l'"environnement naturel" que constitue $\mathfrak{g}$ pour $(\mathfrak{l}_{\theta}, d_1(\theta))$ subsiste pour $(\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}})$, c'est-à-dire notamment s'il existe une forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$ et $d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$ sont respectivement les espaces d'indice 0 et 1 d'une $\mathbf{Z}$ -graduation.

Nous verrons ci-dessous que ce genre de résultat n'est pas vrai en général pour un espace préhomogène parabolique quelconque, mais qu'on obtient effectivement de tels résultats lorsque l'espace préhomogène est irréductible et régulier.

Le problème que nous posons est donc différent du problème de la classification des formes réelles d'une représentation donnée d'une algèbre semi-simple, problème qui a été résolu par E. Cartan ([4]) et dont on pourra avoir un exposé en langage plus actuel dans un article d'Iwahori ([6]). Ces résultats dont nous aurons besoin de manière ponctuelle un peu plus loin se trouvent également exposés sans démonstration, mais de manière éclairante dans un Lecture Note de Tits ([15]). Nous allons les rappeler brièvement, sans démonstration.

Soit $(\mathfrak{g}, \Lambda, V)$ une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$, considérons la représentation $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \Lambda, V)$ obtenue par restriction de Λ à $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Pour une telle représentation, il conviendra de distinguer la notion de $\mathbf{C}$ -irréductibilité (pas de $\mathbf{C}$ -sous-espace invariant non trivial) de la notion de $\mathbf{R}$ -irréductibilité (pas de $\mathbf{R}$ -sous-espace invariant non trivial). Il est facile de voir que

$(\mathfrak{g}, \Lambda, V)$ est irréductible $\Leftrightarrow (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \Lambda, V)$ est $\mathbf{C}$ -irréductible.

Supposons à présent $(\mathfrak{g}, \Lambda, V)$ *irréductible*. Dans ce cas

$(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \Lambda, V)$ est $\mathbf{R}$ -réductible $\Leftrightarrow$ il existe une forme réelle $V_{\mathbf{R}}$ de V stable par $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

En effet, si $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \Lambda, V)$ est $\mathbf{R}$ -réductible, il existe un sous-espace vectoriel réel E de V qui est invariant par $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, donc $E + iE$ et $E \cap iE$ sont invariants par $\mathfrak{g}$. Comme V est irréductible,

on a $E \cap (iE) = \{0\}$ et $E + iE = V$. Donc E est une forme réelle. La réciproque est évidente.

Soit $V^{(*)}$ le dual anti-linéaire de V , c'est-à-dire l'ensemble des applications f de V dans $\mathbb{C}$ telles que

$$f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; x, y \in V).$$

On munit $V^{(*)}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par les opérations

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) = f(\bar{\alpha} x)$$

$$(f_1, f_2 \in V^{(*)}, x \in V, \alpha \in \mathbb{C}).$$

Notons $\bar{V}$ l'espace vectoriel dual de $V^{(*)}$. Alors tout élément x de V détermine un unique élément $\bar{x}$ de $\bar{V}$ par $\bar{x}(f) = f(x)$ ($f \in V^{(*)}$) et $x \rightarrow \bar{x}$ est une bijection anti-linéaire de V sur $\bar{V}$. Si A est un endomorphisme de V on pose $\bar{A} \cdot \bar{x} = \overline{A \cdot x}$, dans ce cas $\bar{A}$ est un endomorphisme de $\bar{V}$ et $A \rightarrow \bar{A}$ est une bijection anti-linéaire de $gl(V)$ sur $gl(\bar{V})$.

La donnée de (g, Λ, V) et de $g_{\mathbb{R}}$ permet de construire une représentation $(g, \bar{\Lambda}, \bar{V})$ définie par

$$\bar{\Lambda}(X + iY) = \bar{\Lambda}(X) + i\bar{\Lambda}(Y) \quad (X, Y \in g_{\mathbb{R}}).$$

Soit (g, σ, U) une autre représentation et supposons que $(g, \bar{\Lambda}, \bar{V})$ et (g, σ, U) soient équivalentes (on écrira $\sigma \sim \bar{\Lambda}$). Il existe donc un isomorphisme $\varphi: \bar{V} \rightarrow U$ tel que $\varphi \circ \bar{\Lambda}(X) = \sigma(X) \circ \varphi$ pour tout X de g . Soit f la bijection anti-linéaire de V sur U obtenue en posant $f(x) = \varphi(\bar{x})$. On voit alors que $f \circ \Lambda(X) = \sigma(X) \circ f$ pour tout $X \in g_{\mathbb{R}}$. En fait $\bar{\Lambda} \sim \sigma$ si et seulement s'il existe une bijection anti-linéaire f de V dans U telle que $f \circ \Lambda(X) = \sigma(X) \circ f$ ($\forall X \in g_{\mathbb{R}}$).

On dit que Λ est *auto-conjuguée* si $\bar{\Lambda} \sim \Lambda$. D'après ce qui précède, cela se produit si et seulement s'il existe une bijection anti-linéaire J de V dans V telle que $J \circ \Lambda(X) = \Lambda(X) \circ J$. Dans ce cas J^2 est un automorphisme linéaire qui commute à Λ . Puisque la représentation (G, Λ, V) était irréductible, le lemme de Schur implique que $J^2 = c \cdot \text{Id}$, ($c \in \mathbb{C}^*$). En fait, on montre sans difficultés que le nombre c est réel, et que son signe ne dépend pas de la bijection anti-linéaire J commutant à Λ choisie.

Ce signe (± 1) est appelé l'*index* de la représentation irréductible auto-conjuguée Λ et noté $\epsilon(\Lambda)$. On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1.1 ([6]), Lemme 4). — Soit (g, Λ, V) une représentation irréductible de g et soit g_R une forme réelle de g . Alors

(g_R, Λ, V) est R -réductible $\Leftrightarrow \Lambda$ est auto-conjuguée et d'index 1.

Soit $g_R = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de g_R . Soit $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ une algèbre abélienne maximale contenue dans $\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{h}_R$ une sous-algèbre abélienne maximale de g_R contenant $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{h}$ la complexifiée de $\mathfrak{h}_R$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de g . Soit R l'ensemble des racines de $(g, \mathfrak{h})$ et soit ρ l'opération de restriction des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Soit $R_0 = \{\alpha \in R, \rho(\alpha) = 0\}$. On sait que $\rho(R - R_0) = S =$ l'ensemble des racines de $(g_R, \mathfrak{a}_\mathfrak{p})$.

Soit ψ une base adaptée à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, c'est-à-dire telle que

- 1) $\psi_0 = \psi \cap R_0$ est une base de R_0 ,
- 2) $\rho(\psi - \psi_0) = \pi$ est une base de S .

Une telle base existe.

Le diagramme de Satake associé à $(g_R, \mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ est construit à partir du graphe de Dynkin de ψ de la manière suivante :

— les sommets correspondant aux racines de ψ_0 sont tracés en noir (de ce fait, les racines de ψ_0 seront appelées *racines noires*),

— les sommets correspondant aux racines de $\psi - \psi_0$ sont tracés en blanc (de ce fait, les racines de $\psi - \psi_0$ seront appelées *racines blanches*),

— on joint par une double flèche  les sommets blancs correspondant à des racines dont les restrictions à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ coïncident.

Pour tout ce qui concerne les diagrammes de Satake, nous renvoyons le lecteur à l'article d'Araki [1] ou au livre de Warner [16].

Soit alors w_0 l'élément du groupe de Weyl W_0 de R_0 tel que $w_0 \psi_0 = -\psi_0$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de ψ .

Nous définissons une permutation (d'ordre 2) de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la manière suivante :

- si α_i est noire, $\varphi(i)$ est définie par $\alpha_{\varphi(i)} = -w_0 \alpha_i$,
- si α_i est blanche et si aucune flèche du diagramme de Satake n'aboutit à α_i , alors $\varphi(i) = i$,
- si α_i est blanche et est reliée à α_j par une flèche, alors $\varphi(i) = j$.

THEOREME 3.1.2. — *Pour $i \in [1, 2, \dots, n]$ soit ω_i le poids fondamental correspondant à α_i et soit Λ_ω la représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ de poids dominant $\omega = \sum m_i \omega_i$. Alors Λ_ω est auto-conjuguée (par rapport à $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$) si et seulement si pour tout i on a $m_i = m_{\varphi(i)}$ et, dans ce cas, on a $\epsilon(\Lambda_\omega) = (-1)^{\gamma(\Lambda_\omega)}$*

où $\gamma(\Lambda_\omega) = \sum_{\{i, \alpha_i \in \psi_0\}} m_i$.

Le théorème ci-dessus est bien connu. On peut le déduire du théorème 2 de [6] et du lemme 2.1.2 (p. 68) de [10].

3.2. Sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie semi-simples réelles.

Rappelons les notations. $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ une algèbre abélienne maximale contenue dans $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ contenant $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. On a alors : $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{a}_\mathfrak{f} + \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{a}_\mathfrak{f} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap \mathfrak{f}$. Soit $\mathfrak{h}$ la complexifiée de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit R le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et soit ρ l'opération de restriction des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Soit $R_0 = \{\alpha \in R, \rho(\alpha) = 0\}$. On sait que $\rho(R - R_0) = S$ est l'ensemble des racines de $(\mathfrak{g}_\mathbb{R}, \mathfrak{a}_\mathfrak{p})$. On choisit une base ψ de R adaptée à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ et on pose $\psi_0 = \psi \cap R_0$, $\pi = \rho(\psi - \psi_0)$. L'ensemble π est alors une base de S .

Si $\mathfrak{m}$ désigne le centralisateur de $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{f}$, on sait que

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \oplus \sum_{\lambda \in S} \mathfrak{g}_\mathbb{R}^\lambda$$

où $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^\lambda$ désigne les espaces radiciels réels usuels :

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}} , [a, X] = \lambda(a) X , \forall a \in \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}\}.$$

On sait également que R_0 est le système de racines de la paire $(\mathfrak{m}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{C}})$, le symbole $\mathbf{C}$ en exposant signifiant que l'on complexifie les espaces.

Soit E une partie de π et soit $\mathfrak{a}_E = \{H \in \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}, \lambda(H) = 0, \forall \lambda \in E\}$.

Soit $Z(\mathfrak{a}_E)$ le centralisateur de $\mathfrak{a}_E$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. On a

$$Z(\mathfrak{a}_E) = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \mathfrak{m} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}$$

où $\langle E \rangle$ désigne l'ensemble des éléments de S qui sont combinaison linéaire d'éléments de E . Soit S^+ l'ensemble des éléments positifs de S (par rapport à π) et soit $\langle E \rangle^+ = S^+ \cap \langle E \rangle$. On pose :

$$n_E^+ = \sum_{\lambda \in S^+ - \langle E \rangle^+} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}.$$

Alors $b_E = Z(\mathfrak{a}_E) + n_E^+$ est une sous-algèbre parabolique (standard) de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

Soit $\theta_E = \psi_0 \cup (\rho^{-1}(E) \cap \psi)$. Il est facile de voir que

$$\alpha \in \langle \theta_E \rangle \Leftrightarrow \rho(\alpha) = 0 \text{ ou } \rho(\alpha) \in \langle E \rangle. \quad (*)$$

LEMME 3.2.1. — Soit $b_E^{\mathbf{C}}$ la complexifiée de b_E . On a $b_E^{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}_{\theta_E}$.

Démonstration. — On a $b_E = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \mathfrak{m} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + \sum_{\lambda \in S^+ - \langle E \rangle^+} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}$, donc

$$b_E^{\mathbf{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{m}^{\mathbf{C}} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + i \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}) + \sum_{\lambda \in S^+ - \langle E \rangle^+} (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + i \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}).$$

Or $\mathfrak{m}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{C}} + \sum_{\alpha \in R_0} \mathfrak{g}^{\alpha}$, donc

$$b_E^{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R_0} \mathfrak{g}^{\alpha} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + i \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}) + \sum_{\lambda \in S^+ - \langle E \rangle^+} (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + i \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}).$$

La relation (*) ci-dessus implique que

$$\sum_{\alpha \in R_0} \mathfrak{g}^{\alpha} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda} + i \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda}) = \sum_{\alpha \in \langle \theta_E \rangle} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Ainsi

$$\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R_0} g^\alpha + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} (g_{\mathbf{R}}^\lambda + i g_{\mathbf{R}}^\lambda) = \mathfrak{l}_{\theta_E}.$$

Du fait que ψ est une base adaptée à α_p on déduit que :

$$\alpha \in R^+ - \langle \theta_E \rangle^+ \Leftrightarrow \rho(\alpha) \in S^+ - \langle E \rangle^+.$$

D'où

$$n_E^{+\mathbf{C}} = \sum_{\lambda \in S^+ - \langle E \rangle^+} (g_{\mathbf{R}}^\lambda + i g_{\mathbf{R}}^\lambda) = \sum_{\alpha \in R^+ - \langle \theta_E \rangle^+} g^\alpha = n_{\theta_E}^+.$$

Donc

$$b_E^{\mathbf{C}} = \mathfrak{l}_{\theta_E} + n_{\theta_E}^+ = \mathfrak{p}_{\theta_E}.$$

□

Pour toute partie $\theta \subset \psi$ on définit l'ensemble $\Omega_1(\theta)$ de racines de la manière suivante : $\Omega_1(\theta) = \{\alpha \in R, \alpha = \sum_{\gamma \in \theta} m_\gamma \gamma + \beta, \beta \in \psi - \theta\}$.

Autrement dit, l'ensemble $\Omega_1(\theta)$ est défini par l'égalité

$$d_1(\theta) = \sum_{\alpha \in \Omega_1(\theta)} g^\alpha.$$

De même pour toute partie $E \subset \pi$ on définit l'ensemble $\omega_1(E)$ de racines restreintes de la manière suivante :

$$\omega_1(E) = \left\{ \lambda \in S, \lambda = \sum_{\gamma \in E} m_\gamma \gamma + \beta, \beta \in \pi - E \right\}$$

et on pose

$$d_1(E) = \sum_{\lambda \in \omega_1(E)} g_{\mathbf{R}}^\lambda.$$

LEMME 3.2.2. —

$$\rho^{-1}(\omega_1(E)) = \Omega_1(\theta_E).$$

Démonstration. — Cette égalité découle immédiatement du fait que $\alpha \in \langle \theta_E \rangle$ si et seulement si $\alpha \in R_0 \cup \langle E \rangle$ et du fait que ρ est une surjection de $\psi - \theta_E$ sur $\pi - E$. □

Le corollaire suivant est alors immédiat.

COROLLAIRE 3.2.3. — $d_1(E)^{\mathbf{C}} = d_1(E) + id_1(E) = d_1(\theta_E)$.

4. Construction et caractérisation de certaines formes réelles des espaces préhomogènes de type parabolique.

Commençons par donner une définition.

DEFINITION 4.1. — Deux formes réelles $(\varrho_{\theta}^1, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}^1)$ et $(\varrho_{\theta}^2, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}^2)$ de $(\varrho_{\theta}, d_1(\theta))$ sont dites équivalentes s'il existe $g \in L_{\theta}$ tel que

$$g \cdot \varrho_{\theta}^1 = \varrho_{\theta}^2 \text{ et } g \cdot d_1(\theta)_{\mathbf{R}}^1 = d_1(\theta)_{\mathbf{R}}^2.$$

L'objet de ce paragraphe est de mettre en évidence certaines classes d'équivalence remarquables de telles formes réelles.

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan et soit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ une algèbre abélienne maximale contenue dans $\mathfrak{p}$. On sait alors que dans ce cas $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$. L'adjectif déployé signifant que pour tout $a \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ l'endomorphisme $\text{ad } a$ est diagonalisable sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. On sait que toute sous-algèbre abélienne déployée maximale $\mathfrak{a}$ est obtenue par ce procédé. De plus, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$ sont deux décompositions de Cartan telles que $\mathfrak{a}$ soit abélienne maximale à la fois dans $\mathfrak{p}_1$ et dans $\mathfrak{p}_2$, alors ces deux décompositions de Cartan sont conjuguées par un élément de la forme $\exp(\text{ad } X)$, X appartenant à $\mathfrak{a}$.

DEFINITION 4.2. — Soient comme précédemment $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et ψ une base du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Soient également $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

Nous dirons que la paire $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \mathfrak{a})$ est adaptée à $(\mathfrak{h}, \psi)$ si

— $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}$ contenant $\mathfrak{a}$

— ψ est adaptée à $\mathfrak{a}$.

Il est clair que toute paire $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \alpha)$ où α est abélienne déployée maximale dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est conjuguée par un élément de G à une paire adaptée à $(\mathfrak{h}, \psi)$.

THEOREME 4.3 (*Les notations non précisées sont définies dans le paragraphe 2*). — On se fixe les objets usuels $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \psi$ ainsi qu'une partie θ de ψ . Soit $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}, \alpha)$ une paire adaptée à $(\mathfrak{h}, \psi)$ telle que

$$a) \psi_0 \subset \theta$$

$$b) \theta = \rho^{-1} \rho(\theta) \cap \psi.$$

Soit $E = \rho(\theta - \psi_0)$. Dans ce cas $\theta_E = \theta$ et $(Z(\alpha_E), d_1(E))$ est une forme réelle de $(\mathfrak{g}_\theta, d_1(\theta))$.

De plus, les formes réelles $(\mathfrak{g}_{\theta_{\mathbf{R}}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}})$ de $(\mathfrak{g}_\theta, d_1(\theta))$ qui sont équivalentes aux formes réelles ainsi construites sont exactement celles pour lesquelles la restriction de la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est réelle.

Démonstration. — Par définition

$$\begin{aligned} \theta_E &= \psi_0 \cup (\rho^{-1} \rho(\theta - \psi_0) \cap \psi) \\ &= \psi_0 \cup (\rho^{-1} \rho(\theta) \cap \psi - \rho^{-1} \rho(\psi_0) \cap \psi) \\ &= \psi_0 \cup (\theta - \psi_0) \text{ (on utilise a)} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Le fait que $Z(\alpha_E)$ soit une forme réelle de $\mathfrak{g}_\theta$ est alors contenu dans la démonstration du lemme 3.2.1 et le corollaire 3.2.3. dit que $d_1(E)$ est une forme réelle de $d_1(\theta)$. Pour montrer que $(Z(\alpha_E), d_1(E))$ est une forme réelle de $(\mathfrak{g}_\theta, d_1(\theta))$, il suffit donc de montrer que $d_1(E)$ est stable par l'action adjointe de $Z(\alpha_E)$. Rappelons que $d_1(E) = \sum_{\lambda \in \omega_1(E)} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^\lambda$ et que $Z(\alpha_E) = \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \mathfrak{m} + \sum_{\lambda \in \langle E \rangle} \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^\lambda$.

Soit $H \in \mathfrak{a}_{\mathbf{p}} + \mathfrak{m}$ et soient $\lambda \in \omega_1(E)$, $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^\lambda$ et $a \in \mathfrak{a}_{\mathbf{p}}$. Alors $[a, [H, X]] = [[a, H], X] + [H, [a, X]] = [H, [a, X]] = \lambda(a) [H, X]$, ce qui montre que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^\lambda$ (donc a posteriori $d_1(E)$) est stable par $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}$. Soit d'autre part $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^\mu$ avec $\mu \in \langle E \rangle$. Alors $[Y, X] \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda+\mu}$ et si $\lambda + \mu$ est une racine restreinte, c'est-à-dire si $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^{\lambda+\mu} \neq \{0\}$, on a $\lambda + \mu \in \omega_1(E)$. Ainsi $[Y, X]$ appartient à $d_1(E)$ et nous avons bien constaté que $d_1(E)$ est stable par $Z(\alpha_E)$. De plus, il est évident que la restriction de B à $Z(\alpha_E)$ est réelle.

Inversement, soit $(\ell_{\theta_{\mathbf{R}}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}})$ une forme réelle de $(\ell_{\theta}, d_1(\theta))$. Posons $d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}} = \{Y \in d_{-1}(\theta), B(Y, X) \in \mathbf{R} \text{ pour tout } X \in d_1(\theta)_{\mathbf{R}}\}$. La restriction de B à $d_{-1}(\theta) \times d_1(\theta)$ étant non dégénérée, $d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ est une forme réelle de $d_{-1}(\theta)$. De plus, l'invariance de la forme de Killing montre immédiatement que $d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ est stable par $\ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$, autrement dit $(\ell_{\theta_{\mathbf{R}}}, d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}})$ est une forme réelle de $(\ell_{\theta}, d_{-1}(\theta))$.

Une première étape dans la démonstration de la partie réciproque du théorème est constituée du lemme suivant :

LEMME 4.4. — *On suppose que la restriction de B à $\ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est réelle. Dans ce cas, la sous-algèbre réelle $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ engendrée par $d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}, \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$ et $d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration du lemme. — Commençons par démontrer que $[d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}]$ est inclus dans $\ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$. Soient $Y \in d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}, X \in d_1(\theta)_{\mathbf{R}}, H \in \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$. Le nombre

$$B(H, [X, Y]) = B([H, X], Y)$$

est réel d'après la définition de $d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$. Ecrivons $[Y, X] = H_1 + iH_2$ avec $H_i \in \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$ ($i = 1, 2$). Nous venons de voir que

$$B(H, H_1) + iB(H, H_2)$$

appartient à $\mathbf{R}$ quel que soit $H \in \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$. Puisque $B(H, H_i) \in \mathbf{R}$ on a $B(H, H_2) = 0$ pour tout $H \in \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$.

On en déduit que $H_2 = 0$, donc que $[X, Y] \in \ell_{\theta_{\mathbf{R}}}$.

Pour $p \in \mathbf{N}^*$ on définit par récurrence les espaces $d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$ en posant

$$d_{p+1}(\theta)_{\mathbf{R}} = [d_p(\theta)_{\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}].$$

De même on pose

$$d_{-p-1}(\theta)_{\mathbf{R}} = [d_{-p}(\theta)_{\mathbf{R}}, d_{-1}(\theta)_{\mathbf{R}}].$$

Nous allons démontrer, par récurrence sur p , l'assertion suivante qui établira le lemme.

$\forall p \in \mathbf{N}^*$

1) L'espace $d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$ (respectivement $d_{-p}(\theta)_{\mathbf{R}}$) est une forme réelle de $d_p(\theta)$ (respectivement $d_{-p}(\theta)$).

2) La restriction de B à $d_{-p}(\theta)_{\mathbf{R}} \times d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$ est réelle.

3) Quels que soient les entiers i et j appartenant à $[-p, p]$ tels que $i + j \in [-p, p]$ on a $[d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, d_j(\theta)_{\mathbf{R}}] \subset d_{i+j}(\theta)_{\mathbf{R}}$.

Nous venons de voir que cette assertion était vraie pour $p = 1$. Supposons-la vraie pour p et démontrons-la pour $p + 1$. Il est facile de voir que

$$[d_p(\theta), d_1(\theta)] = d_{p+1}(\theta)$$

et que

$$[d_{-p}(\theta), d_{-1}(\theta)] = d_{-p-1}(\theta).$$

Soit alors $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{\ell(i)}^i$ une base de $d_i(\theta)_{\mathbf{R}}$ ($i = \pm 1, \pm p$). Les éléments $[e_j^1, e_k^p]$ (respectivement $[e_r^{-1}, e_s^{-p}]$) qui engendrent $d_{p+1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ (respectivement $d_{-p-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$) sur $\mathbf{R}$ engendrent sur $\mathbf{C}$ l'espace $d_{p+1}(\theta)$ (respectivement $d_{-p-1}(\theta)$).

Cela implique que $d_{p+1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ contient une forme réelle de $d_{p+1}(\theta)$, la même chose étant vraie pour $d_{-p-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ par rapport à $d_{-p-1}(\theta)$.

On a :

$$\begin{aligned} B([e_r^{-1}, e_s^{-p}], [e_j^1, e_k^p]) \\ = -B(e_s^{-p}, [[e_r^{-1}, e_j^1], e_k^p]) - B(e_s^{-p}, [e_j^1, [e_r^{-1}, e_k^p]]). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $[e_r^{-1}, e_j^1] \in \mathfrak{g}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ et $[e_r^{-1}, e_k^p] \in d_{p-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$, donc $[[e_r^{-1}, e_j^1], e_k^p] \in d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$ et $[e_j^1, [e_r^{-1}, e_k^p]] \in d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence $d_{-p}(\theta)_{\mathbf{R}}$ et $d_p(\theta)_{\mathbf{R}}$ sont en dualité réelle par rapport à la forme de Killing. On en déduit que $B([e_r^{-1}, e_s^{-p}], [e_j^1, e_k^p]) \in \mathbf{R}$.

On est donc dans la situation d'un espace vectoriel complexe V et d'un sous-espace vectoriel réel $W \subset V$, contenant une forme réelle de V , tels qu'il existe une base de V^* (le dual complexe de V) dont les éléments sont réels sur W . On en déduit que W est une forme réelle de V . Dans notre contexte, cela signifie que $d_{p+1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ (respectivement $d_{-p-1}(\theta)_{\mathbf{R}}$) est une forme réelle de $d_{p+1}(\theta)$ (respectivement $d_{-p-1}(\theta)$) et que la restriction de B à $d_{-p-1}(\theta)_{\mathbf{R}} \times d_{p+1}(\theta)_{\mathbf{R}}$ est réelle.

Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer l'assertion 3) pour $p + 1$. Pour cela, nous allons démontrer par récurrence sur $j \in [0, p + 1]$ que si $i + j \in [-p - 1, p + 1]$ avec $i \in [-p - 1, p + 1]$, alors $[d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, d_j(\theta)_{\mathbf{R}}] \subset d_{i+j}(\theta)_{\mathbf{R}}$ (*). Ceci est évidemment vérifié pour $j = 0$.

Supposons donc que l'assertion(*) ci-dessus soit vérifiée pour $j \in [0, j_0]$, $j_0 \in [1, p + 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} [d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, d_{j_0+1}(\theta)_{\mathbf{R}}] &= [d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, [d_{j_0}(\theta)_{\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}]] \\ &= [[d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, d_{j_0}(\theta)_{\mathbf{R}}], d_1(\theta)_{\mathbf{R}}] + [d_{j_0}(\theta)_{\mathbf{R}}, [d_i(\theta)_{\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}]] \\ &\subset [d_{i+j_0}(\theta)_{\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}}] + [d_{j_0}(\theta)_{\mathbf{R}}, d_{i+1}(\theta)_{\mathbf{R}}] \\ &\subset d_{i+j_0+1}(\theta)_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Ceci démontre l'assertion(*). L'assertion symétrique relative aux indices $j \in [-p - 1, 0]$ se démontre de manière analogue. On a ainsi l'assertion 3) pour $p + 1$, donc le lemme 4.4.

Il est bien connu que si $\mathfrak{l}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{l}_{\theta}$ alors le centre $\mathfrak{h}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ de $\mathfrak{l}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est une forme réelle du centre $\mathfrak{h}_{\theta}$ de $\mathfrak{l}_{\theta}$ et que la partie semi-simple $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ de $\mathfrak{l}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est une forme réelle de la partie semi-simple $\mathfrak{l}'_{\theta}$ de $\mathfrak{l}_{\theta}$.

Nous notons, $\mathfrak{h}(\theta)$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_{\theta}$ engendrée par les vecteurs H_{α} ($\alpha \in \theta$). Soit $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}} = \mathfrak{f}^{\theta} + \mathfrak{p}^{\theta}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$. Soit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$ une algèbre abélienne maximale contenue dans $\mathfrak{p}^{\theta}$ et soit $\mathfrak{a}(\theta)$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$. Alors $\mathfrak{a}(\theta) = \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}^{\theta}} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$ où $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}^{\theta}} = \mathfrak{a}(\theta) \cap \mathfrak{f}^{\theta}$ et on sait que $\mathfrak{a}(\theta)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$.

Quitte à conjuguer par un élément de $L'_{\theta} = (L_{\theta}, L_{\theta})$, on peut supposer que $\mathfrak{a}(\theta)$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}(\theta)$ et que θ est adaptée à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$.

On sait également que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$ est une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$. En fait $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$ est abélienne déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et maximale dans $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ pour cette propriété. Pour le démontrer, il suffit de montrer qu'elle est déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Soit $a \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}}$; les valeurs propres de $\text{ad } a$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ sont les mêmes que celles de $\text{ad } a$ sur $\mathfrak{g}$, ce sont donc les valeurs que prennent les racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur a . Or $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}^{\theta}} \subset \mathfrak{h}(\theta)_{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha \in \theta} \mathbf{R} \cdot H_{\alpha}$ et toutes les racines

sont réelles sur $\mathfrak{h}(\theta)_{\mathbf{R}}$. On en déduit facilement que $\text{ad}(a)$ est diagonalisable sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, ainsi $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est bien déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

D'autre part, soit $\mathfrak{a}_{\theta}$ la sous-algèbre déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ maximale de $\mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}}$. Commençons par montrer que $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est abélienne, déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et maximale dans $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$ pour ces propriétés. Le fait d'être déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est évident. Il suffit alors de montrer qu'un élément x_0 de $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$, qui commute à $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ et qui est diagonalisable sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, appartient à $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$. Ecrivons $x_0 = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}}$ et $x_2 \in \mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$. Puisque x_0 est diagonalisable sur $\mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$ et que x_1 est nul sur $\mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$, on en déduit que x_2 est diagonalisable sur $\mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$. De plus x_2 centralise $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ puisque $0 = [x_0, \mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}] = [x_2, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}]$. L'algèbre $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ étant abélienne déployée maximale dans $\mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$, on en déduit que $x_2 \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$. Puisque $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et que $[x_0, x_2] = 0$, on en déduit que $x_0 - x_2 = x_1$ est diagonalisable sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Puisque $\mathfrak{a}_{\theta}$ a été choisie maximale, l'élément x_1 appartient à $\mathfrak{a}_{\theta}$. Donc $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est bien déployée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et maximale dans $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$ pour cette propriété.

En fait $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est abélienne déployée maximale dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Si cela n'était pas le cas, il existerait $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}} - (\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta})$, qui commute à $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ et qui est diagonalisable sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Ecrivons

$$X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i, \quad x_i \in d_i(\theta)_{\mathbf{R}}$$

et commençons par remarquer que $H^{\theta} \in \mathfrak{a}_{\theta}$: cela résultera immédiatement du fait que $H^{\theta} \in \mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}}$.

Si $H^{\theta} = H_1 + iH_2$ avec $H_i \in \mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}}$, on a pour

$$Y \in d_1(\theta)_{\mathbf{R}} : [H^{\theta}, Y] = 2Y = [H_1, Y] + i[H_2, Y].$$

On en déduit que $[H_2, Y] = 0 \forall Y \in d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$, ce qui implique que $H_2 = 0$, donc $H^{\theta} \in \mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}}$. On a alors

$$0 = [H^{\theta}, X] = \sum_{i \neq 0} 2i x_i,$$

c'est-à-dire que $x_i = 0$ lorsque $i \neq 0$. Ainsi $X \in \mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$, ce qui est contraire au fait que $\mathfrak{a}_{\theta} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}\theta}$ est déployée maximale dans $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$.

On en déduit donc que $\alpha_\theta + \alpha_{p\theta}$ est déployée maximale dans $\mathfrak{g}_R$. Soit $\alpha = \alpha_\theta + \alpha_{p\theta}$ et soit R_0 l'ensemble des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nulles sur α .

Il s'agit à présent de montrer que la paire $(\mathfrak{g}_R, \alpha)$ est adaptée à $(\mathfrak{h}, \psi)$. Pour cela, il ne reste plus qu'à montrer que ψ est adaptée à α . Puisque $H^\theta \in \alpha_\theta$, on voit que $R_0 \subset \langle \theta \rangle$. Soit σ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_R$ dans $\mathfrak{g}$ et posons $\alpha^\sigma(X) = \overline{\alpha(\sigma(X))}$ pour $X \in \mathfrak{h}_\theta$. D'après un résultat bien connu ([16] pages 23-24), pour démontrer que ψ est adaptée à α , il suffit de démontrer que si $\alpha \in R - R_0$ alors $\alpha > 0$ implique $\alpha^\sigma > 0$. On vient de voir que R_0 est exactement l'ensemble des racines de $\langle \theta \rangle$ qui sont nulles sur $\alpha_{p\theta}$. Puisque θ est adaptée à $\alpha_{p\theta}$, on a : $\alpha \in \langle \theta \rangle - R_0, \alpha > 0 \implies \alpha^\sigma > 0$. Supposons à présent que $\alpha \in R^+ - \langle \theta \rangle^+$, alors

$$\alpha^\sigma(H^\theta) = \overline{\alpha(\sigma(H^\theta))} = \overline{\alpha(H^\theta)} = \alpha(H^\theta) > 0,$$

ce qui implique que $\alpha^\sigma > 0$. Donc ψ est adaptée à α .

Il faut également montrer que les conditions a) et b) du théorème sont remplies. Nous avons déjà remarqué que la première $(\psi_0 \subset \theta)$ l'était. Démontrons la deuxième. Si θ était différent de $\rho^{-1} \rho(\theta) \cap \psi$ il existerait $\alpha_1 \in \psi - \theta$ et $\alpha_2 \in \theta$ tel que $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2)$. Or $\alpha_1(H^\theta) = 2$ et $\alpha_2(H^\theta) = 0$ ce qui est impossible si $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2)$. Ainsi la condition b) est bien vérifiée.

Enfin, il reste à démontrer que si $E = \rho(\theta - \psi_0)$ on a bien $Z(\alpha_E) = \mathfrak{l}_{\theta_R}$ et $d_1(\theta)_R = d_1(E)$.

Puisque θ est adaptée à $\alpha_{p\theta}$, E est une base des racines de $(\mathfrak{l}'_{\theta_R}, \alpha_{p\theta})$. On en déduit que $\alpha_E = \alpha_\theta$ et il est alors évident que $Z(\alpha_E) = \mathfrak{l}_{\theta_R}$. Puisque $d_1(\theta)_R$ est stable pour

α , on a $d_1(\theta)_R = \sum_{\lambda \in S-E} \mathfrak{g}_R^\lambda \cap d_1(\theta)_R$. Supposons que $\mathfrak{g}_R^\lambda \cap d_1(\theta)_R \neq \{0\}$ et soit x un élément non nul de cet espace. On a $[H^\theta, x] = 2x = \lambda(H^\theta) \cdot x$ donc $\lambda(H^\theta) = 2$, c'est-à-dire que $\mathfrak{g}_R^\lambda \subset d_1(\theta)$. Comme $\sum_R \mathfrak{g}_R \cap d_1(\theta) = d_1(\theta)_R$, on a $\mathfrak{g}_R^\lambda \subset d_1(\theta)_R$. Ainsi $d_1(\theta) = \sum_{\{\lambda, \lambda(H^\theta)=2\}} \mathfrak{g}_R^\lambda = \sum_{\lambda \in \omega_1(E)} \mathfrak{g}_R^\lambda = d_1(E)$.

Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

$\mathfrak{l}_\theta$ est alors l'ensemble des matrices de $\mathfrak{sl}(2n+3)$ de la forme :

$$\mathfrak{l}(A, B, C, D, E) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ \hline \end{array}$$

et $d_1(\theta)$ l'ensemble des matrices de la forme :

$$d(X, Y, Z, T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

L'ensemble des matrices $\mathfrak{l}(0, B, 0, D, 0)$ de $\mathfrak{l}_\theta$ constitue la partie semi-simple $\mathfrak{l}'_\theta$ de $\mathfrak{l}_\theta$. L'ensemble $\mathfrak{l}'_{\theta\mathbb{R}}$ des matrices $\mathfrak{l}(0, B, 0, D, 0)$ avec ${}^tB = -B$ et ${}^tD = -D$ est une forme réelle de $\mathfrak{l}'_\theta$. L'espace vectoriel réel $\mathfrak{h}_{\theta\mathbb{R}}$ engendré par les vecteurs

$$H_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & & & & \\ & \mu_i & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \mu_i & & & \\ & & & & & \nu_i & & \\ & 0 & & & & & \gamma_i & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \gamma_i \\ & & & & & & & & & \epsilon_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{6n+8}{2n+3}, \mu_1 = \frac{2n+2}{2n+3}, \nu_1 = \gamma_1 = \epsilon_1 = \frac{-2n-4}{2n+3} \\ \lambda_2 &= \mu_2 = \nu_2 = \frac{+2n+4}{2n+3}, \gamma_2 = -\frac{2n+2}{2n+3}, \epsilon_2 = \frac{-6n-8}{2n+3} \\ \lambda_3 &= \nu_3 = \gamma_3 = \epsilon_3 = \frac{2ni}{2n+3}, \mu_3 = \frac{-(2n+6)i}{2n+3} \\ \lambda_4 &= \mu_4 = \nu_4 = \epsilon_4 = \frac{2ni}{2n+3}, \gamma_4 = \frac{-(2n+6)i}{2n+3} \end{aligned}$$

est une forme réelle de $\mathfrak{h}_\theta$.

De même l'ensemble $d_1(\theta)_{\mathbf{R}}$ des matrices $d(X, Y, Z, T)$ avec $Y = {}^t\bar{X}$ et $T = {}^t\bar{Z}$ est une forme réelle de $d_1(\theta)$.

En posant $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}} = \mathfrak{h}_{\theta\mathbf{R}} + \mathfrak{l}'_{\theta\mathbf{R}}$, on vérifie facilement que $(\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}, d_1(\theta)_{\mathbf{R}})$ est une forme réelle de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$.

Montrons qu'on a toujours $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \sum_p \mathfrak{g}_{\mathbf{R}} \cap d_p(\theta)$. Pour cela, il suffit de montrer que si $x = \sum_p x_p$ ($x_p \in d_p(\theta)$) appartient à $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ alors chaque $x_p \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. Soit p_0 le plus petit entier tel que $d_{p_0}(\theta) \neq \{0\}$. Pour $j \in \mathbf{N}$ on pose $\mathfrak{g}^j = \sum_{k \leq j} d_{p_0+k}(\theta)$. Nous allons établir l'assertion précédente pour $x \in \mathfrak{g}^j$ par récurrence.

rence sur j . Si $x \in \mathfrak{g}^0 = d_{p_0}(\theta)$ c'est évident. Supposons que cela soit vrai pour j et soit $x \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}} \cap \mathfrak{g}^{j+1}$, alors $x = x_{p_0} + x_{p_0+1} + \dots + x_{p_0+j} + x_{p_0+j+1}$. Nous avons déjà vu que dans cette situation H^θ appartient obligatoirement à $\mathfrak{l}_{\theta\mathbf{R}}$. On a

$$[H^\theta, x] = 2p_0 x_{p_0} + 2(p_0 + 1)x_{p_0+1} + \dots \\ + 2(p_0 + j)x_{p_0+j} + 2(p_0 + j + 1)x_{p_0+j+1} \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}.$$

On en déduit que

$$[H^\theta, x] - (2p_0 + j + 1)x = -2(j + 1)x_{p_0} - \dots - 2x_{p_0+j}$$

appartient à $\mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les éléments $x_{p_0}, \dots, x_{p_0+j}$ appartiennent à $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, donc x_{p_0+j+1} appartient à $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et l'assertion est démontrée. Cela implique que si $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, $d_p(\theta)_{\mathbf{R}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{R}} \cap d_p(\theta)$ est une forme réelle de $d_p(\theta)$. Nous allons à présent montrer que cela n'est pas le cas dans notre exemple. Un calcul simple montre que

$$[d(X, {}^t\bar{X}, Z, {}^t\bar{Z}), d(X', {}^t\bar{X}', Z', {}^t\bar{Z}')]]$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \alpha & \\ \hline & & & \beta \\ \hline & & & \gamma \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

où $\alpha = X \cdot {}^t\bar{X}' - X' \cdot {}^t\bar{X}$, $\beta = {}^t\bar{X} \cdot Z' - {}^t\bar{X}' \cdot Z$, $\gamma = Z \cdot {}^t\bar{Z}' - Z' \cdot {}^t\bar{Z}$.

On voit facilement que l'ensemble des matrices β ainsi obtenues est l'ensemble de toutes les matrices complexes de type $n \times n$.

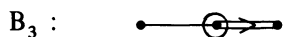
Ceci montre que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} \cap d_2(\theta)$ n'est pas une forme réelle de $d_2(\theta)$ et donc que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ n'est pas une forme réelle.

On remarquera que dans cet exemple la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est réelle, et que ce n'est pas le cas pour la restriction à $\mathfrak{h}_{\theta_{\mathbf{R}}}$.

5. Classification infinitésimale des formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique.

Rappelons que la représentation $(\mathfrak{l}_{\theta}, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si $\text{Card}(\psi - \theta) = 1$ (voir par exemple [9]).

PROPOSITION. 5.1. — *On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre simple et que $\text{Card}(\psi - \theta) = 1$. Alors la restriction de la forme de Killing à toute forme réelle $\mathfrak{l}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ de $\mathfrak{l}'_{\theta}$ est réelle sauf pour la forme pseudo-complexe de $\mathfrak{l}'_{\theta}$ dans les deux cas suivants :*



Démonstration. — Soit α_0 l'unique racine de $\psi - \theta$ et soient θ_i ($i = 1, \dots, n$ avec $n \leq 3$) les composantes connexes de θ . Le graphe de Dynkin de $\mathfrak{l}'_{\theta}$ est le graphe de θ vu comme partie du graphe de ψ et les parties connexes θ_i correspondent aux idéaux simples de $\mathfrak{l}'_{\theta}$, que nous désignerons par $\mathfrak{l}'_{\theta_i}$. La restriction de la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{l}'_{\theta}$ est une forme invariante sur $\mathfrak{l}'_{\theta}$. On sait que $B|_{\mathfrak{l}'_{\theta} \times \mathfrak{l}'_{\theta}} = \sum c_i B_i$ où B_i est la forme de Killing de $\mathfrak{l}'_{\theta_i}$ et où $c_i \in \mathbf{C}$, l'écriture précédente signifiant que $B(\sum x_i, \sum y_i) = \sum c_i B_i(x_i, y_i)$ avec $x_i, y_i \in \mathfrak{l}'_{\theta_i}$. Pour ce résultat bien connu, on pourra par exemple voir [2] exercice 18 b.

Soit alors (x_i, y_i) un couple quelconque d'éléments de la forme réelle déployée de $\mathfrak{l}'_{\theta_i}$ associée à la sous-algèbre de Cartan

$$\sum_{\alpha \in \theta_i} \mathbf{C} \cdot H_{\alpha}.$$

Alors x_i et y_i appartiennent à une forme réelle déployée de $\mathfrak{g}$, donc $B(x_i, y_i) = c_i B_i(x_i, y_i)$ est un élément de $\mathbf{R}$.

On en déduit que pour tout i , c_i appartient à $\mathbf{R}$.

Soit à présent $\mathcal{L}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ une forme réelle quelconque d'éléments de $\mathcal{L}'_{\theta}$. Deux cas peuvent se présenter :

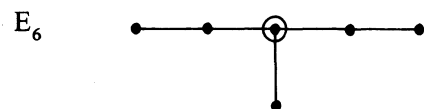
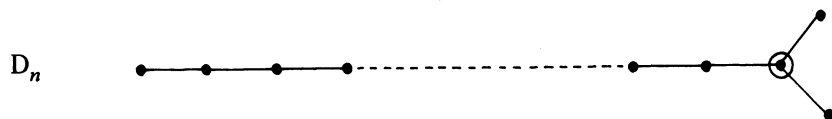
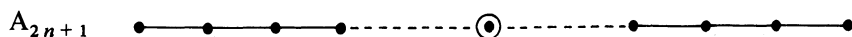
1^{er} cas : La décomposition en idéaux simples de $\mathcal{L}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est la suivante : $\mathcal{L}'_{\theta_{\mathbf{R}}} = \oplus \mathcal{L}'_{\theta_{i\mathbf{R}}}$ où chaque $\mathcal{L}'_{\theta_{i\mathbf{R}}}$ est une forme réelle de $\mathcal{L}'_{\theta_i}$. Dans ce cas, il est évident d'après ce que l'on vient de voir que la restriction de B à $\mathcal{L}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est réelle.

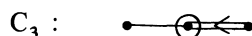
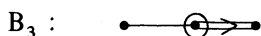
2^{eme} cas : Il existe un idéal simple J de $\mathcal{L}'_{\theta_{\mathbf{R}}}$ dont la complexifiée est de la forme $\mathcal{L}'_{\theta_{i_1}} \oplus \mathcal{L}'_{\theta_{i_2}}$. On sait alors (voir par exemple [5] Prop. 4.2.2. p. 165) que J est pseudo-complexe, c'est-à-dire obtenue par restriction des scalaires dans une algèbre de Lie semi-simple complexe $J(\mathbf{C})$, que $J(\mathbf{C})$, $\mathcal{L}'_{\theta_{i_1}}$ et $\mathcal{L}'_{\theta_{i_2}}$ sont isomorphes et qu'il existe un anti-automorphisme σ de $\mathcal{L}'_{\theta_{i_1}}$ sur $\mathcal{L}'_{\theta_{i_2}}$ tel que $J = \{X + \sigma(X), X \in \mathcal{L}'_{\theta_{i_1}}\} \subset \mathcal{L}'_{\theta_{i_1}} \oplus \mathcal{L}'_{\theta_{i_2}}$. Dans ce cas, si $X + \sigma(X)$ et $Y + \sigma(Y)$ sont des éléments de J , on a

$$\begin{aligned} B(X + \sigma(X), Y + \sigma(Y)) &= c_{i_1} B_{i_1}(X, Y) + c_{i_2} B_{i_2}(\sigma(X), \sigma(Y)) \\ &= c_{i_1} B_{i_1}(X, Y) + c_{i_2} \overline{B_{i_1}(X, Y)}. \end{aligned}$$

On voit alors que cette dernière expression est réelle si et seulement si $c_{i_1} = c_{i_2}$.

La considération des graphes de Dynkin des algèbres de Lie simples montrent que les seules possibilités dans le deuxième cas sont les suivantes :

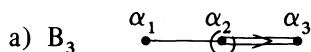




Les graphes de Dynkin précédents étant les seuls ayant la propriété que si on enlève un sommet, il y ait au moins deux composantes connexes du complémentaire de ce sommet qui sont isomorphes.

Dans les cas de A_{2n+1} , de D_n et de E_6 la considération des automorphismes du graphe de Dynkin ([3] Planches I, IV, V) montre qu'il existe un automorphisme de $\mathfrak{g}$ échangeant $\ell'_{\theta_{i_1}}$ et $\ell'_{\theta_{i_2}}$, ce qui implique facilement que $c_{i_1} = c_{i_2}$.

Il reste à examiner les deux cas restants :



L'algèbre de Lie correspondant à B_3 est $O(7, \mathbf{C})$ et on sait (voir par exemple [11] pages 16-17) que $O(7, \mathbf{C})$ est isomorphe à l'ensemble des matrices de $\mathfrak{gl}(7, \mathbf{C})$ de la forme

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline -b_1 & & & & & & \\ -b_2 & & X & & & & Y \\ -b_3 & & & & & & \\ \hline -a_1 & & & & & & \\ -a_2 & & & Z & & & -{}^tX \\ -a_3 & & & & & & \end{array} \right]$$

avec ${}^tY = -Y$ ${}^tZ = -Z$

$a_i, b_i \in \mathbf{C}$

Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est donnée par les matrices diagonales

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \lambda_1 \\ & \lambda_2 \\ & \lambda_3 \\ & -\lambda_1 \\ & -\lambda_2 \\ & -\lambda_3 \end{array} \right]$$

et les racines simples sont $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, $\alpha_3 = \lambda_3$ et $\theta = \{\alpha_1, \alpha_3\}$. On en déduit que $\mathfrak{h}_\theta$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & -\lambda & \\ & & & & & -\lambda \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

et on calcule alors facilement $\mathfrak{l}_\theta$ (le centralisateur de $\mathfrak{h}_\theta$), c'est l'ensemble des matrices de la forme

$$\mathfrak{l}(B, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & & & 0 & & & \\ 0 & B & & 0 & & & \\ \gamma & 0 & 0 & \beta & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & {}^t B & & 0 \\ -\alpha & & & & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad \text{où } B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbf{C})$$

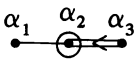
On vérifie alors que l'ensemble des matrices $\mathfrak{l}(0, \alpha, \beta, \gamma)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ par l'application

$$\mathfrak{l}(0, \alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \beta & \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma & \frac{1}{2} \beta \end{pmatrix}.$$

Cela implique que l'ensemble des matrices de la forme

$$\ell \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \bar{\beta} & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\alpha} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\gamma} & \frac{1}{2} \bar{\beta} \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \right) \text{ est une forme réelle pseudo-}$$

complexe de ℓ'_θ et un calcul élémentaire (la forme de Killing est à une constante réelle près la trace du produit de deux matrices) montre que la restriction de la forme de Killing à cette forme réelle n'est pas réelle.

b) C_3 

L'algèbre de Lie correspondant à C_3 est $sp(3, \mathbf{C})$. C'est l'ensemble des matrices de $\mathfrak{gl}(6, \mathbf{C})$ de la forme

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -{}^t X \end{bmatrix} \text{ avec } {}^t Y = Y \quad {}^t Z = Z.$$

Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est donnée par l'ensemble des éléments diagonaux

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & -\lambda_1 & \\ & & & & & -\lambda_2 \\ & & & & & & -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

et les racines simples sont $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, $\alpha_3 = 2\lambda_3$. Ici $\theta = \{\alpha_1, \alpha_3\}$. On en déduit que $\mathfrak{h}_\theta$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

dont le centralisateur $\mathfrak{l}_\theta$ est constitué des matrices de la forme

$$\mathfrak{l}(B, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} B & 0 & \bigcirc \\ 0 & \alpha & \beta \\ \bigcirc & -{}^t B & 0 \\ \gamma & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbf{C}).$$

L'ensemble des matrices de la forme $\mathfrak{l}(0, \alpha, \beta, \gamma)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ par l'application

$$\mathfrak{l}(0, \alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Cela implique que l'ensemble des matrices de la forme $\mathfrak{l}\left(\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma\right)$ est une forme réelle de $\mathfrak{l}'_\theta$ et on constate facilement que la restriction de la forme de Killing à cette forme réelle n'est pas réelle. $\square$

THEOREME 5.2. — *Supposons $\mathfrak{g}$ simple et $\text{Card}(\psi - \theta) = 1$. Alors toutes les formes réelles des représentations $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ proviennent des formes réelles de $\mathfrak{g}$ par le processus du théorème 4.3. à l'exception du cas où $\mathfrak{l}_{\theta_{\mathbf{R}}}$ est la forme réelle pseudo-complexe de $\mathfrak{l}_\theta$ dans la représentation associée au diagramme $\bullet \longleftrightarrow \bigcirc \longleftarrow \bullet$*

Démonstration. — Vu le théorème 4.3. et la proposition précédente, il faut prouver :

1) qu'il n'y a pas de forme réelle $(\ell_{\theta_R}, d_1(\theta)_R)$ de la représentation $(\ell_{\theta}, d_1(\theta))$ où ℓ_{θ_R} est la forme réelle pseudo-complexe de ℓ_{θ} dans le cas du diagramme exceptionnel $\bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet$

2) qu'il existe une forme réelle $(\ell_{\theta_R}, d_{-1}(\theta)_R)$ de $(\ell_{\theta}, d_1(\theta))$ où ℓ_{θ_R} est la forme réelle pseudo-complexe de ℓ_{θ} dans le cas du diagramme exceptionnel $\bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet$

Dans le premier cas, le diagramme de Satake de ℓ'_{θ_R} est $\circ_{\alpha_1} \text{---} \circ_{\bar{\alpha}_1}$ et le poids dominant de $(\ell_{\theta}, d_{-1}(\theta))$ est $\omega_1 + 2\bar{\omega}_1$ (où ω_1 , respectivement $\bar{\omega}_1$, est le poids fondamental correspondant à α_1 , respectivement $\bar{\alpha}_1$) ; on considère ici la représentation $(\ell_{\theta}, d_{-1}(\theta))$ plutôt que $(\ell_{\theta}, d_1(\theta))$ parce que son poids dominant s'exprime plus simplement, mais cela ne change rien quant au résultat). En appliquant le théorème 3.1.2., on s'aperçoit que cette représentation n'est pas auto-conjuguée, ce qui donne le résultat dans ce cas.

Dans le deuxième cas, le diagramme de Satake de ℓ'_{θ_R} est le même que le précédent, mais le poids dominant est $\omega_1 + \bar{\omega}_1$ et le théorème 3.1.2. nous dit alors que la représentation correspondante est auto-conjuguée et d'index 1, ce qui termine la démonstration. $\square$

Etant donné que l'espace préhomogène associé au diagramme $\bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet$ est régulier irréductible (il figure dans la classification de [9]), le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE 5.3. — *A l'exception de l'espace préhomogène associé au diagramme $\bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet$ toutes les formes réelles $(\ell_{\theta_R}, d_1(\theta)_R)$ des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique proviennent de formes réelles de $\mathfrak{g}$ par le processus du théorème 4.3.*

Remarque 5.4. — On peut cependant remarquer que cet unique espace préhomogène exceptionnel est le même que celui associé au diagramme $\bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet$ et que donc toutes ses formes réelles sont obtenues à partir des formes réelles de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ par le processus du théorème 4.3.

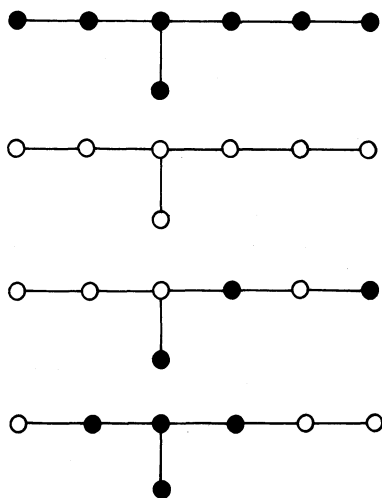
Remarque 5.5. — Il est alors facile de donner la liste complète des formes réelles des espaces préhomogènes de type parabolique réguliers irréductibles. En effet, d'après ce qui précède, les formes réelles de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ sont classifiées, à une exception près, par les diagrammes de Satake correspondant aux différentes formes réelles de $\mathfrak{g}$ tels que l'unique racine de $\psi - \theta$ soit blanche et non reliée par une flèche à une autre racine (ces propriétés n'étant que des transcriptions des conditions a) et b) du théorème 4.3.).

Donnons un exemple :

Cherchons les formes réelles de l'espace préhomogène dont le diagramme est



Les différentes formes réelles de E_7 sont données par les diagrammes de Satake suivant :



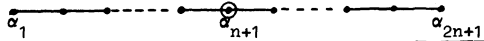
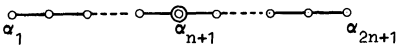
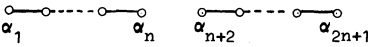
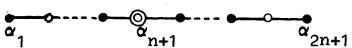
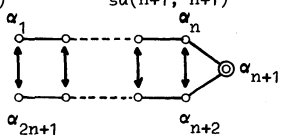
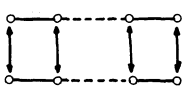
Les formes réelles cherchées sont donc classifiées par les diagrammes suivants :

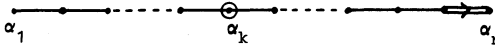
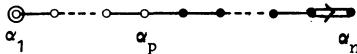
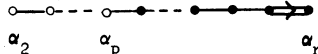
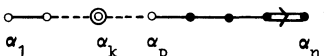
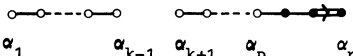
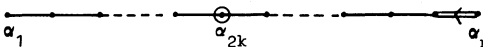
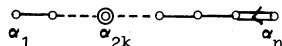
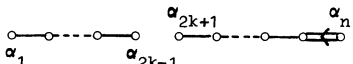
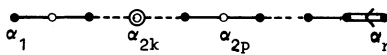
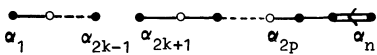
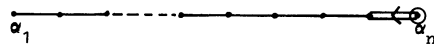
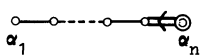
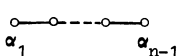
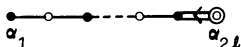
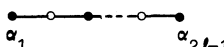


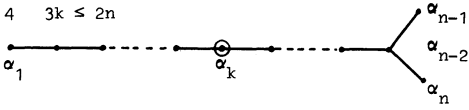
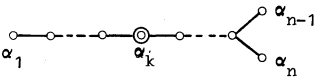
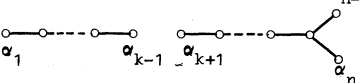
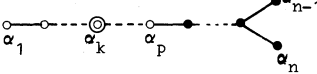
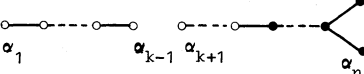
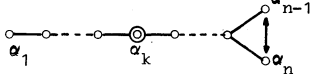
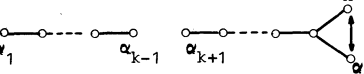
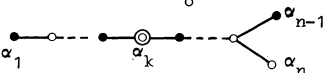
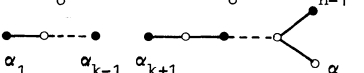
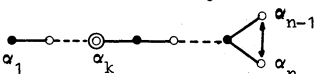
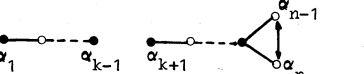
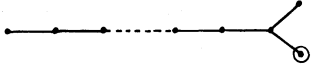
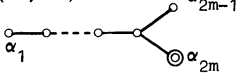
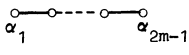
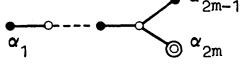
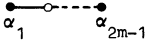
La table ci-dessous dresse la liste complète de ces formes réelles. Dans la première colonne, on trouvera le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ et sa désignation, la racine entourée d'un cercle (toujours blanche comme on vient de le voir) étant l'unique racine de $\psi - \theta$. La deuxième colonne contient le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}'_{\theta, \mathbf{R}}$ et la désignation de l'algèbre qui lui correspond.

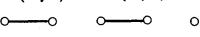
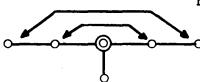
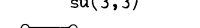
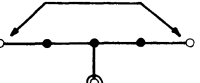
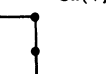
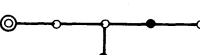
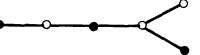
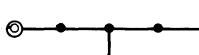
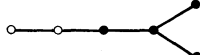
Notons encore que les algèbres exceptionnelles sont désignées par le sigle habituel de leur complexifiée suivi de leur indice de Cartan (qui est par définition $\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{f}$).

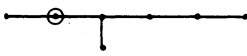
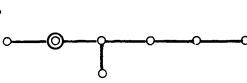
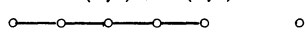
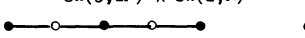
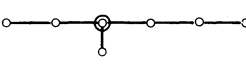
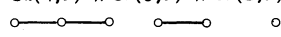
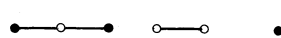
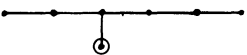
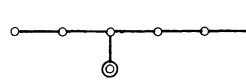
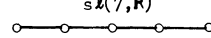
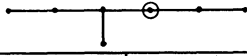
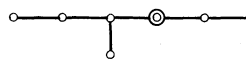
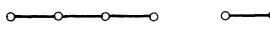
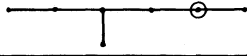
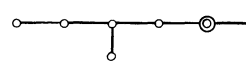
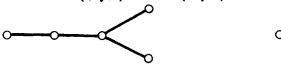
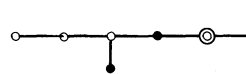
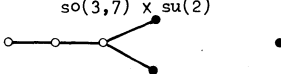
TABLE

$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$	$\mathfrak{g}'_{\theta, \mathbf{R}}$
A_{2n+1} 	
1) $\mathfrak{sl}(2n+2, \mathbf{R})$ 	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{R})$ 
2) $n = 2p+1$ $\mathfrak{sl}(2(p+1), \mathbf{H})$ 	$\mathfrak{sl}(p+1, \mathbf{H}) \times \mathfrak{sl}(p+1, \mathbf{H})$ 
3) $\mathfrak{su}(n+1, n+1)$ 	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ 

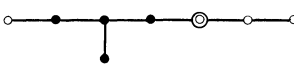
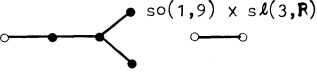
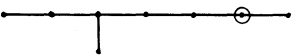
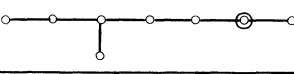
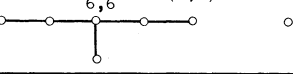
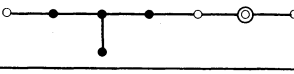
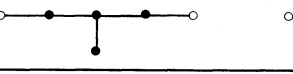
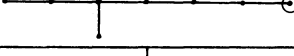
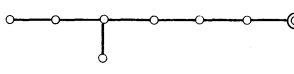
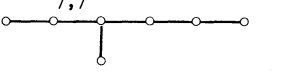
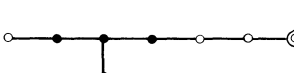
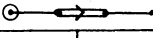
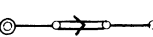
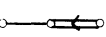
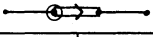
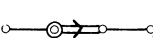
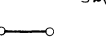
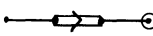
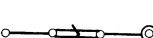
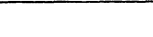
$B_n \quad n \geq 2$ $3k \leq 2n+1$ 	
1) $1 \leq p \leq n$ $so(p, 2n+1-p)$ 	$so(p-1, 2n-p)$ 
2) $2 \leq k \leq n$ $so(p, 2n+1-p)$ 	$sl(k, \mathbb{R}) \times so(p-k, 2n+1-p-k)$ 
$C_{n+1} \quad n \geq 3, 4k \leq n$ 	
1.1. $sp(n, \mathbb{R})$ 	$sl(2k, \mathbb{R}) \times sp(n-2k, \mathbb{R})$ 
1.2. $sp(p, n-p) \quad 2k \leq n$ 	$sl(k, \mathbb{H}) \times sp(p-k, n-p-k)$ 
$C_{n+2} \quad n \geq 3$ 	
2.1. $sp(n, \mathbb{R})$ 	$sl(n, \mathbb{R})$ 
2.2. $n = 2l \quad sp(l, l)$ 	$sl(l, \mathbb{H})$ 

$D_{n,1}$ $n \geq 4$ $3k \leq 2n$ 	
1.1. $so(n,n)$ 	$sl(k, \mathbb{R}) \times so(n-k, n-k)$ 
1.2. $1 \leq k \leq p \leq n-2$ $so(p, 2n-p)$ 	$sl(k, \mathbb{R}) \times so(p-k, 2n-p-k)$ 
1.3. $so(n-1, n+1)$ 	$sl(k, \mathbb{R}) \times so(n-k-1, n-k+1)$ 
1.4. $n = 2l$ $k = 2k_o$ $so^*(4l)$ 	$sl(k_o, \mathbb{H}) \times so^*(4(l-k_o))$ 
1.5. $n = 2l+1$ $k = 2k_o$ $so^*(4l+2)$ 	$sl(k_o, \mathbb{H}) \times so^*(4(l-k_o)+2)$ 
$D_{n,2}$ $n = 2m$, $m \geq 2$ 	
2.1. $so(2m, 2m)$ 	$sl(2m, \mathbb{R})$ 
2.2. $so^*(4m)$ 	$sl(m, \mathbb{H})$ 

$E_6 \cdot 1$ 	
$1.1.$  $E_{6,6}$	$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
$1.2.$  $E_{6,2}$	$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
$E_6 \cdot 2$ 	
$2.1.$  $E_{6,6}$	$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$ 
$2.2.$  $E_{6,2}$	$\mathfrak{su}(3, 3)$ 
$2.3.$  $E_{6,-14}$	$\mathfrak{su}(1, 5)$ 
$E_7 \cdot 1$ 	
$1.1.$  $E_{7,7}$	$\mathfrak{so}(6, 6)$ 
$1.2.$  $E_{7,-5}$	$\mathfrak{so}^*(12)$ 
$1.3.$  $E_{7,-25}$	$\mathfrak{so}(2, 10)$ 

$E_{7,2}$ 	
2.1.  $E_{7,7}$	$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
2.2.  $E_{7,-5}$	$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{H}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
$E_{7,3}$ 	
3.1.  $E_{7,7}$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
3.2.  $E_{7,-5}$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{H}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathfrak{su}(2)$ 
$E_{7,4}$ 	
4.1.  $E_{7,7}$	$\mathfrak{sl}(7, \mathbb{R})$ 
$E_{7,5}$ 	
5.1.  $E_{7,7}$	$\mathfrak{sl}(5, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 
$E_{7,6}$ 	
6.1.  $E_{7,7}$	$\mathfrak{so}(5, 5) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 
6.2.  $E_{7,-5}$	$\mathfrak{so}(3, 7) \times \mathfrak{su}(2)$ 

6.3.	$E_{7,-25}$		$so(1,9) \times sl(2, \mathbb{R})$	
$E_{7,7}$				
7.1.	$E_{7,7}$		$E_{6,6}$	
7.2	$E_{7,-25}$		$E_{6,-26}$	
$E_{8,1}$				
1.1.	$E_{8,8}$		$so(7,7)$	
1.2.	$E_{8,-24}$		$so(3,11)$	
$E_{8,2}$				
2.1.	$E_{8,8}$		$sl(8, \mathbb{R})$	
$E_{8,3}$				
3.1.	$E_{8,8}$		$sl(5, \mathbb{R}) \times sl(4, \mathbb{R})$	
$E_{8,4}$				
4.1.	$E_{8,8}$		$so(5,5) \times sl(3, \mathbb{R})$	

4.2.		$E_{8,-24}$		$so(1,9) \times sl(3, \mathbb{R})$
$E_8 \cdot 5$				
5.1.		$E_{8,8}$		$E_{6,6} \times sl(2, \mathbb{R})$
5.2.		$E_{8,-24}$		$E_{6,-26} \times sl(2, \mathbb{R})$
$E_8 \cdot 6$				
6.1.		$E_{8,8}$		$E_{7,7}$
6.2.		$E_{8,-24}$		$E_{7,-25}$
$F_4 \cdot 1$				
1.1.		$F_{4,4}$		$sp(3, \mathbb{R})$
$F_4 \cdot 2$				
2.1.		$F_{4,4}$		$sl(3, \mathbb{R}) \times sl(2, \mathbb{R})$
$F_4 \cdot 3$				
3.1.		$F_{4,4}$		$so(3,4)$
3.2.		$F_{4,-20}$		$so(7)$
$G_2 \cdot 1$				
1.1.		$G_{2,2}$		$sl(2, \mathbb{R})$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ARAKI, On root systems and infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, *J. of Math.*, Osaka city Univ., vol. 13 (1962), 1-34.
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 1, Hermann, Paris (1960).
- [3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5, 6, Hermann, Paris (1968).
- [4] E. CARTAN Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *J. Math. Pures et App.* t. 10, (1914), 149-186 ou *Oeuvres Complètes* t. I. vol. 1, 459-530.
- [5] M. GOTO, Fr.D. GROSSHANS, *Semi-simple Lie algebras*, Marcel Dekker Inc., New-York, 1978
- [6] N. IWAHORI On real irreducible representations of Lie algebras, *Nagoya Math. J.*, vol. 14 (1959), 59-83.
- [7] H. RUBENTHALER Classification infinitésimale des formes réelles de certains espaces préhomogènes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 295, 55-57.
- [8] H. RUBENTHALER Espaces préhomogènes de type parabolique, Thèse, Départ. de Math., Univ. de Strasbourg, 1982.
- [9] H. RUBENTHALER Espaces préhomogènes de type parabolique, Lec. in Math., Kyoto Univ. n° 14, Lectures on Harmonic Analysis on Lie Groups and related Topics, 189-221.
- [10] I. SATAKE *Classification theory of semi-simple algebraic groups*, Marcel Dekker Inc., New-York, 1971.
- [11] M. SATO, T. KIMURA A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.*, 73 (1977), 1-155.
- [12] M. SATO, T. SHINTANT On Zêta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.*, 100, 1 (1974), 131-170.

- [13] T. SHINTANI On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *M. Math. Soc. Japan*, 24 (1972), 132-188.
- [14] T. SHINTANI On Zêta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 22 (1975), 25-65.
- [15] J. TITS Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, *Lecture Notes in Math.*, n° 40, Springer, 1967.
- [16] G. WARNER *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer, Berlin - Heidelberg - New-York, 1972.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1984.

Hubert RUBENTHALER,
Université de Nancy I
UER Sciences Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.