ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBIN HARTSHORNE
ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Courbes rationnelles et droites en position générale

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 4 (1985), p. 39-58
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_39_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 4 (1985), 39-58.

COURBES RATIONNELLES ET DROITES EN POSITION GÉNÉRALE

par **R. HARTSHORNE** et **A. HIRSCHOWITZ**

L'objet de ce travail est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient d et ℓ deux entiers avec $d \geqslant 1, \ell \geqslant 0$. Alors il existe dans $\mathbf{P}^3$ une courbe rationnelle lisse de degré d et ℓ droites dont la réunion Y est de rang maximum.*

On dit qu'un sous-schéma Y de $\mathbf{P}^3$ est de rang maximum si, pour tout entier relatif s, le morphisme de restriction $\varphi_Y(s)$ de $H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(s))$ vers $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(s))$ est injectif ou surjectif (cf. Hartshorne [9], Eisenbud – Harris [4]). Ce résultat complète nos travaux antérieurs [10] [13] dont il reprend pour l'essentiel les méthodes. Signalons que Ballico et Ellia ([1] [2] [3]) ont étudié les courbes de genre positif et ont en particulier démontré qu'une courbe générale de degré d et genre g avec $d \geqslant g + 3$ est de rang maximum. Nous montrons dans [12] comment le précédent théorème permet de construire certains faisceaux réflexifs sur $\mathbf{P}^3$ avec bonne cohomologie et certaines courbes lisses de genre élevé de $\mathbf{P}^3$ non contenues dans des surfaces de bas degré. D'autre part, nous pensons que les méthodes et les résultats exposés ici pourraient être utilisés pour construire beaucoup de nouvelles courbes lisses connexes de rang maximum. A titre d'exemple, on donne une telle construction au § III.

Dans la première partie, on a rassemblé quelques résultats préliminaires, tandis que la deuxième partie est consacrée aux constructions de courbes en position générale.

Mots-clés : Espace projectif - Courbe rationnelle - Droite - Cohomologie - Rang maximum.

I. PRÉLIMINAIRES

I.1. Le schéma de Hilbert.

Dans le schéma de Hilbert des sous-schémas de $\mathbf{P}^3$ de polynôme de Hilbert $dt + 1 + \ell(t+1)$ les réunions disjointes d'une courbe rationnelle de degré d avec ℓ droites constituent un ouvert lisse connexe. On note $Z_{d,\ell}$ la composante irréductible qu'il détermine. Le résultat suivant est dû à Tannenbaum [16] qui ne l'énonce évidemment que pour ℓ nul : soit C une réunion connexe, de genre arithmétique nul, de degré d de courbes rationnelles lisses trois à trois d'intersection vide et deux à deux d'intersection quasi-transverses (i.e. les deux tangentes sont distinctes). Si $L_1, \ldots, L_\ell$ sont des droites disjointes ne rencontrant pas C alors $C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell$ est dans $Z_{d,\ell}$.

I.2. Réduction à la deuxième partie.

Dans la deuxième partie, nous prouverons la

II.2.1. Proposition. — *Soient d, ℓ, e, s des entiers vérifiant $d \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$ et $ds + 1 + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3}$. Alors il existe dans $\mathbf{P}^3$ une courbe rationnelle lisse C de degré d, ℓ droites et e points alignés sur une droite L dont la réunion n'est contenue dans aucune surface de degré s. Si ℓ est nul, on peut de plus supposer que L rencontre C.*

Nous montrons ici comment le théorème s'en déduit.

Fixons donc d et ℓ. L'application linéaire du théorème est de rang maximum si et seulement si $H^0(I_Y(s))$ ou $H^1(I_Y(s))$ est nul. Donc, quand Y varie dans une famille plate, d'après les théorèmes de semi-continuité, la condition est ouverte. D'autre part, comme la famille des Y est limitée, il existe d'après le théorème B de Serre, un entier s_0 tel que pour $s \geqslant s_0$ et pour tout Y dans $Z_{d,\ell}$, $H^1(I_Y(s))$ soit nul. Grâce à l'irréductibilité de $Z_{d,\ell}$, les deux remarques précédentes nous ramènent à trouver pour tout s ($\leqslant s_0$) une courbe Y dans $Z_{d,\ell}$ telle que $\varphi_Y(s)$ soit de rang maximum.

Fixons donc s. Si $ds + 1 + \ell(s+1) \leqslant \binom{s+3}{3}$, alors soient ℓ' et e le quotient et le reste de la division de $\binom{s+3}{3} - ds - 1$ par $s+1$. Appliquons la proposition à (d, ℓ', e, s). On obtient une courbe C, des droites $L_1, \ldots, L_{\ell'}$ et un ensemble fini F, de réunion Y′ avec $\varphi_{Y'}(s)$ bijectif. Soit Y la réunion de C et des ℓ premières droites. La restriction de $H^0(\mathcal{O}_{Y'}(s))$ vers $H^0(\mathcal{O}_Y(s))$ est évidemment surjective. Par suite la restriction de $H^0(\mathcal{O}(s))$ vers $H^0(\mathcal{O}_Y(s))$ est aussi surjective.

Si au contraire $ds + 1 + \ell(s+1) > \binom{s+3}{3}$ alors soient $d' \leqslant d$, $\ell' \leqslant \ell$, et $e' \leqslant s$ vérifiant $d's + 1 + \ell'(s+1) + e' = \binom{s+3}{3}$. On peut évidemment supposer $\ell' < \ell$ ou $d' < d$ et $\ell' = \ell = 0$. Si ℓ est nul, la proposition fournit une courbe C′ et un ensemble fini F′ sur une droite L′ rencontrant C′ tels que $C' \cup F'$ et *a fortiori* $C' \cup L'$ ne soit contenu dans aucune surface de degré s. En adjoignant à $C' \cup L'$, $d - d' - 1$ droites rencontrant C′, on trouve d'après (I.1) une courbe rationnelle de degré d non contenue dans une surface de degré s. Si ℓ' est non nul, la proposition fournit C′, $L'_1, \ldots, L'_{\ell'}$, et F′ contenu dans L′ et tels que leur réunion ne soit dans aucune surface de degré s. On peut cette fois supposer que L′ ne rencontre pas $C' \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_{\ell'}$. En adjoignant $d - d'$ droites à C′ et $\ell - \ell' - 1$ droites à $L' \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_{\ell'}$, on obtient (cf. I.1) un schéma de $Z_{d,\ell}$ non contenu dans une surface de degré s.

I.3. Le principe de la démonstration.

On va faire un raisonnement par récurrence fondé sur le résultat suivant :

PROPOSITION (cf. [10] [13]). — *Soit* Q *une quadrique non singulière et* Y *un sous-schéma de* $\mathbf{P}^3$. *Soit* Y_Q *l'intersection schématique de* Y *avec* Q *et* Y′ *son schéma résiduel à* Q (cf. [10] [13], *l'intersection schématique est définie par la somme des faisceaux d'idéaux; l'idéal du schéma résiduel est le noyau du morphisme naturel de* $\mathcal{O}$ *vers* $\mathcal{H}om(I_Q, \mathcal{O}_Y)$. *Si* Y_Q *n'est contenu dans aucune courbe de bidegré* (s,s) de Q *et si* Y′ *n'est contenu dans aucune surface de degré* $s-2$, *alors* Y *n'est contenu dans aucune surface de degré* s.

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré s s'annulant sur Y, sa restriction à Q s'annule sur Y_Q donc est nulle. Par suite P est divisible par une équation q de Q et le quotient P' s'annule sur Y' ce qui l'oblige à être nul.

Dans l'application de ce principe Y' est donné par une hypothèse de récurrence et Y s'obtient en adjoignant des droites et des points à Y'. La partie délicate est le choix de l'« allure » de Y : dans certains cas Y aura des nilpotents; on rappelle en (I.4) ce qu'il faut savoir sur ce cas, pour vérifier la condition sur Y_Q, il faudra d'une part avoir des informations sur $Y' \cup Q$, qui sont données en (I.5) et d'autre part un résultat de position générale dans Q, donné en (I.6).

I.4. Collision.

Soit L et L' deux droites concourantes en un point x et soit $\chi(x)$ le premier voisinage infinitésimal de x dans $\mathbf{P}^3$, c'est-à-dire le sous-schéma défini par le carré de l'idéal de x. Alors $X = L \cup L' \cup \chi(x)$ est spécialisation d'une réunion de deux droites disjointes (cf. [8], p. 259, et [10]). Par conséquent si Y est disjoint de $L \cup L'$ et Y est dans $Z_{d,\ell}$ alors $Y \cup L \cup L' \cup \chi(x)$ est dans $Z_{d,\ell+2}$.

Si Q est une quadrique transverse en x à L et L', alors $X \cap Q$ contient le premier voisinage infinitésimal $t(x)$ de x dans Q et le schéma résiduel de X à Q contient (en fait égale) $L \cup L'$. Si H est un plan contenant L et L', alors le schéma résiduel de X à H est le point x (ceci sert en (II.5.1)).

I.5. Intersection dans la quadrique.

L'intersection d'une droite (ou d'une réunion de droites) avec une quadrique fixe Q « peut être rendue générale par généralisation » : on entend par là que l'ouvert $Z_{1,\ell}^{Q}$ des réunions de $\ell + 1$ droites transverses à Q est dense dans $Z_{1,\ell}$ et que l'intersection avec Q définit un morphisme dominant de $Z_{1,\ell}^{Q}$ vers $\mathrm{Hilb}^{2\ell+2}Q$ (qui est lisse et irréductible, cf. Fogarty [6]).

Nous allons donner un analogue et une variante de ce résultat pour $Z_{d,\ell}$.

I.5.1. Proposition (D. Perrin [15]). — *Soit* $d \neq 2$ *et soit* $Z^{Q}_{d,\ell}$ *l'ouvert de* $Z_{d,\ell}$ *des sous-schémas transverses à* Q. *Alors* $Z^{Q}_{d,\ell}$ *est non vide (donc dense) et l'intersection avec* Q *définit un morphisme dominant de* $Z^{Q}_{d,\ell}$ *vers* $\mathrm{Hilb}^{2d+2\ell}Q$.

Esquisse de démonstration. — Le fait que $Z^{Q}_{d,\ell}$ est non vide est élémentaire. D'autre part les droites ne posent pas de problème parce qu'on peut faire passer une droite par deux points généraux de Q. Donc il suffit de considérer le cas $\ell = 0$. Pour montrer que le morphisme de $Z^{Q}_{d,0}$ vers $\mathrm{Hilb}^{2d}Q$ est dominant, il suffit de voir que l'application tangente est surjective dans un ouvert non vide. Soit C dans $Z^{Q}_{d,0}$. Alors l'application tangente est le morphisme de restriction

$$H^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbf{P}^3}) \to H^0(C \cap Q, \mathcal{N}_{C\cap Q/Q})$$

et son conoyau s'injecte dans $H^1(C, \mathcal{N}_{C/\mathbf{P}^3}(-2))$. D'autre part on sait [5,7,14] que le fibré normal à la courbe rationnelle générale de degré $d \neq 2$ (et donc à la courbe générale de $Z^{Q}_{d,0}$) est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2d-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2d-1)$. Donc $\mathcal{N}_{C/\mathbf{P}^3}(-2)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ dont le H^1 est nul.

Dans la suite (II.2.2, II.2.3), nous utiliserons ce résultat de Perrin pour montrer qu'un certain sous-ensemble de l'intersection $Y \cap Q$ est en position générale. Plus précisément, le résultat technique dont nous avons besoin est le suivant :

I.5.2. Proposition. — *Soient des entiers* x, y, z *vérifiant* $0 \leqslant x \leqslant 2d$, $0 \leqslant y \leqslant \ell$, $0 \leqslant z \leqslant \ell - y$. *Si* $d = 2$ *on suppose* $x < 2d$. *Alors il existe un ouvert non vide* U *de* $\mathrm{Hilb}^{x+2y+z}Q$ *tel que pour tout point* u *de* U, *il existe un point* Y *de* $Z^{Q}_{d,\ell}$ *avec* $Y = C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_\ell$, *tel que :*

a) deux points de $Y \cap Q$ *ne soient pas sur une même génératrice,*

b) u *contienne* x *points de* $C \cap Q$,

c) u *contienne* $L_1 \cap Q, \ldots, L_y \cap Q$,

d) u *contienne un point de* $L_{y+1} \cap Q, \ldots, L_{y+z} \cap Q$.

Démonstration. — On applique la proposition précédente en remarquant que si $p < q$, et si Γ est le graphe de l'inclusion dans $\mathrm{Hilb}^pQ \times \mathrm{Hilb}^qQ$, alors $\Gamma \to \mathrm{Hilb}^pQ$ est dominant. On traite facilement à part le cas où d égale 2.

I.6. Points sur la quadrique.

I.6.1. *Convention.* — Dans la suite, on considère une quadrique Q munie d'un isomorphisme avec $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ qui induit un isomorphisme entre Pic Q et $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. On notera $\mathcal{O}_Q(1,0)$ le premier générateur $p_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ et $\mathcal{O}_Q(0,1)$ le second générateur $p_2^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Nous disons que les droites de Q dont l'idéal est isomorphe à $\mathcal{O}_Q(-1,0)$ sont verticales et que les autres sont horizontales.

Le lemme suivant est une variante du lemme 2.3 de [10].

I.6.2. Lemme. — *Soit t, q, e, m, n des entiers non négatifs vérifiant :*

$$3t + q + e = (m+1)(n+1)$$
$$e \leqslant n+1, \quad \textit{et si} \quad t > 0 \quad \textit{alors} \quad q \geqslant m+n-1 .$$

Alors il existe dans Q t points triples, q points simples et e points alignés sur une droite verticale dont la réunion Y vérifie

$$H^0(Q, I_Y(m,n)) = 0 .$$

Ici on entend par point triple le schéma défini par le carré d'un idéal maximal et I_Y dénote l'idéal de Y dans Q.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur m. Pour m nul, on a $t = 0$ et l'énoncé est évident.

Supposons $e + 2t \leqslant n + 1$, on dispose les e points, les t points triples et encore $n + 1 - e - 2t$ des q points sur une même génératrice verticale D. Si s est dans $H^0(Q, I_Y(m,n))$ alors s s'annule identiquement sur D. Son quotient par un générateur de $H^0(Q, I_D(1,0))$ est une section s' de $H^0(Q, \mathcal{O}(m-1,n))$ qui s'annule en les $q' := q - (n+1-e-2t)$ points hors de D et en les t supports des points triples. On applique l'hypothèse de récurrence avec $t' = 0$, $e' = t$ et q', ce qui donne que s' est nul donc s aussi.

De façon analogue, si $e + 2t > n + 1$, on pose $e' = \left[\dfrac{n+1-e}{2}\right]$ $t' = t - e'$ et $q' = q - n - 1 + e + 2e'$, et on dispose e' points triples et $q - q'$ points simples sur la droite D qui contient les e points.

Le même raisonnement que précédemment nous réduit à l'hypothèse de récurrence (on a $q \leqslant q' + 1$).

Pour le cas des coniques, on utilisera le :

I.6.3. Lemme. — *Soit q, e, m, n des entiers non négatifs vérifiant :*

$$\begin{gathered} 4 + q + e = (m+1)(n+1) \\ e \leqslant n + 1, \qquad (m,n) \neq (1,1) \\ \textit{si} \quad e = n + 1, \qquad \textit{alors} \qquad q \neq 0 . \end{gathered}$$

Alors il existe dans Q, 4 *points coplanaires, e points alignés sur une même génératrice verticale et q autres points dont la réunion* Y *vérifie* $H^0(I_Y(m,n)) = 0$.

Si $e = n + 1$, on se ramène au cas $q' = q > 0$, $e' = 0$, $m' = m - 1$, $n' = n$ où (m',n') diffère de $(1,1)$ puisque q est non nul. On suppose donc $e \leqslant n$. Si m est nul, il suffit de choisir les points sur des génératrices horizontales distinctes. Si n est nul, il suffit de même de choisir les points sur des génératrices verticales distinctes. Dans les autres cas, on a $mn \geqslant 2$ et par suite,

$$e + 1 \leqslant n + 1 \leqslant e + 1 + q .$$

On peut donc placer sur une même génératrice verticale les e points alignés, un des quatre points coplanaires et $n - e$ parmi les autres points. Un choix convenable des $m(n+1)$ points restants permet de conclure.

II. LES CONSTRUCTIONS

II.1. Plan du chapitre.

Ce chapitre est consacré à la

II.1.1. Proposition. — *Soient d, ℓ, e, s des entiers vérifiant* $d \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$, $0 \leqslant e \leqslant s$ *et* $ds + 1 + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3}$.

Alors il existe dans $\mathbf{P}^3$ *une courbe rationnelle lisse* C *de degré* d, ℓ *droites et* e *points alignés sur une droite* L, *dont la réunion n'est contenue dans aucune surface de degré* s. *Si* ℓ *est nul, on peut de plus imposer que* L *rencontre* C.

II.1.2. *Notations.* — On note T l'ensemble des quadruplets (d, ℓ, e, s) vérifiant les hypothèses de la proposition et $\mathrm{T}(s)$ l'ensemble des triplets (d,ℓ,e) avec (d,ℓ,e,s) dans T. Pour s non nul, s est déterminé par (d,ℓ,e). Dans ce cas, on pourra écrire (d,ℓ,e) au lieu de (d,ℓ,e,s). On note $\mathrm{P}(d,\ell,e,s)$ la conclusion de la proposition. Si (d,ℓ,e,s) et (d',ℓ',e',s') sont dans T avec $s' < s$, nous dirons que (d,ℓ,e) est *réductible* (à (d',ℓ',e')) si

$$\mathrm{P}(d',\ell',e') \Rightarrow \mathrm{P}(d,\ell,e).$$

Cette notion évite de mentionner une hypothèse de récurrence pour chaque énoncé partiel.

II.1.3. *Plan.* — Au § 2 et au § 3 on fait des constructions géométriques qui montrent que, sous certaines hypothèses arithmétiques, (d,ℓ,e) est réductible. Au § 4, on montre que ces hypothèses arithmétiques sont satisfaites dès que s vaut au moins 5. Enfin au § 5, on traite les cas avec $s \leqslant 4$.

II.2. Géométrie côté courbe.

II.2.1. *Convention.* — Dans les § 2 et 3, Q désignera une quadrique non singulière sur laquelle on fera éventuellement des hypothèses de position générale. On notera $\mathrm{D}'_0, \mathrm{D}'_1, \ldots, \mathrm{D}'_n, \ldots$ et $\mathrm{D}''_0, \mathrm{D}''_1, \ldots, \mathrm{D}''_n, \ldots$ des suites de génératrices des deux systèmes de Q. Si x est un point de Q, on notera D'_x et D''_x les deux génératrices de Q qui le contiennent. Enfin si Z est un sous-schéma de Q, on note $\mathrm{I}_{\mathrm{Z,Q}}$ son faisceau d'idéaux dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Q}}$.

II.2.2. Proposition. — *Soit* (d,ℓ,e) *dans* $\mathrm{T}(s)$ *avec* $s \geqslant 3$. *S'il existe* (d',ℓ',e') *dans* $(\mathrm{T}(s-2))$ *vérifiant :*

$$\ell' \leqslant \ell, \quad d' \leqslant d \leqslant 3d', \quad e' = 0,\ e-1, \ \textit{ou}\ \ e,$$
$$\textit{et si}\quad \ell = \ell' = e' = 0 < e-1 \quad \textit{alors} \quad d+1 \leqslant 3d'.$$

Alors (d,ℓ,e) *est réductible.*

Démonstration.

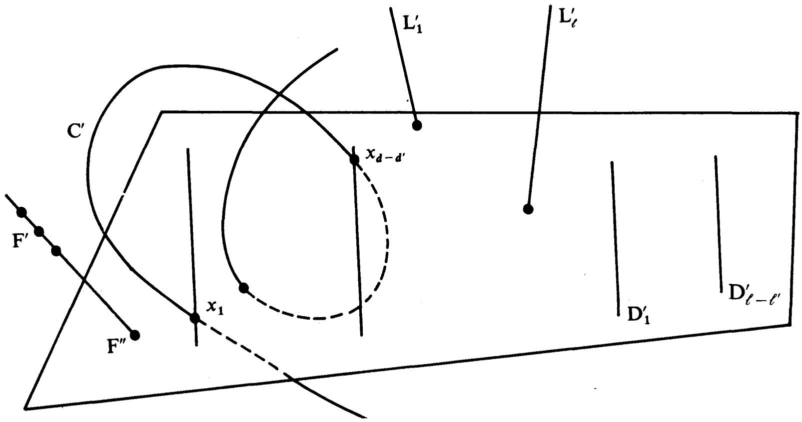


Figure pour le cas $e' = e - 1$.

Soient C', $\mathrm{L}'_1, \ldots, \mathrm{L}'_{\ell'}$ et F' les constituants du schéma donné par $\mathrm{P}(d', \ell', e')$, et soit L une droite contenant F'.

Supposons d'abord $(d, d') \neq (2,2)$. On applique (I.5.2) avec $x = d + d'$, $y = \ell'$, $z = 0$, ce qui donne, quitte à modifier C' et les L'_i, des points $x_1, \ldots, x_{d-d'}$ sur $\mathrm{C}' \cap \mathrm{Q}$ tels que $(\mathrm{C}' \cup \mathrm{L}'_1 \cup \ldots \cup \mathrm{L}'_{\ell'}) \cap (\mathrm{Q} - \{x_1, \ldots, x_{d-d'}\})$ soit en position générale. On pose $\mathrm{C} = \mathrm{C}' \cup \mathrm{D}'_{x_1} \cup \ldots \cup \mathrm{D}'_{x_{d-d'}}$, c'est une courbe rationnelle.

On pose $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}'_1, \ldots, \mathrm{L}_{\ell'} = \mathrm{L}'_{\ell'}$, $\mathrm{L}_{\ell'+1} = \mathrm{D}'_1, \ldots, \mathrm{L}_\ell = \mathrm{D}'_{\ell-\ell'}$. Si $e' = e$, on pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}'$. Si $e' = e - 1$, on choisit F contenant F', contenu dans L et ayant un point dans Q. Si $e' = 0$ et $\ell > 0$, on choisit F sur $\mathrm{D}'_{\ell-\ell'+1}$. Enfin si $e' = 0 < e - 1$ et $\ell = 0$, on choisit F sur une droite D'_x où x est un point de $\mathrm{C}' \cap \mathrm{Q}$ distinct de $x_1, \ldots, x_{d-d'}$ (on a fait l'hypothèse $3d' \geqslant d + 1$ pour qu'un tel point existe). On conclut par (I.3) et (I.6.2). Si $d = d' = 2$, on pose $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$ et on définit les L_i et F comme précédemment et on observe que (I.6.2) s'applique : soit parce que ℓ' est positif soit parce que si ℓ' est nul, s vaut trois auquel cas on constate par inspection que les hypothèses de (I.6.2) restent vérifiées.

II.2.3. Proposition. — *Soit* (d,ℓ,e) *dans* $\mathrm{T}(s)$ *avec* $s \geqslant 2$. *S'il existe* (d',ℓ',e') *dans* $\mathrm{T}(s-2)$ *vérifiant*

$$\ell' \geqslant \ell\,, \quad 2(\ell'-\ell) \leqslant d - d' - 1\,, \qquad \text{et} \qquad e' = 0,\ \ e - 1,\ \ \text{ou}\ \ e\,,$$

alors (d,ℓ,e) *est réductible.*

Démonstration.

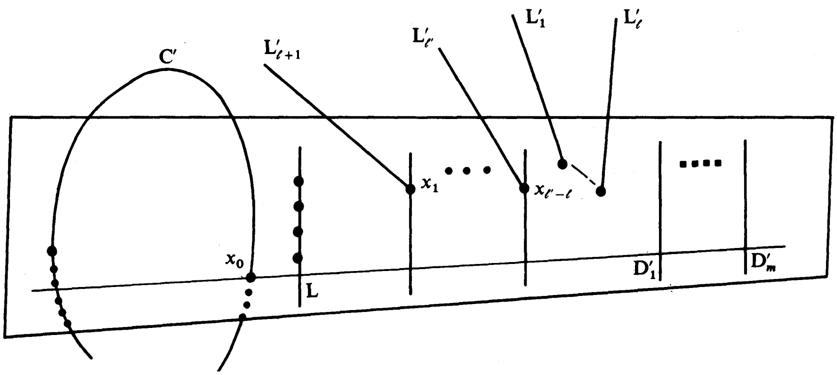


Figure pour $e' = 0$.

Soient C', $L_1, \ldots, L'_{\ell'}$ et F' les constituants du schéma Y' donné par $P(d',\ell',e')$. D'après (I.5.2) avec $x = 2d' - 1$, $y = \ell$, $z = \ell' - \ell$, on peut supposer qu'il existe un point x_0 sur C' et des points $x_1, \ldots, x_{\ell'-\ell}$ respectivement sur $L'_{\ell+1}, \ldots, L'_{\ell'}$ tels que $(C' \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_{\ell'}) \cap (Q - \{x_0, \ldots, x_{\ell'-\ell}\})$ soit en position générale et ne recontre pas $D''_{x_0} \cup D'_{x_1} \cup \ldots \cup D'_{x_{\ell'-\ell}}$.

On peut de plus supposer que cette intersection ne rencontre pas $D'_1, \ldots, D'_m$ avec $m = d - d' - 1 - 2(\ell'-\ell)$.

On pose

$$C = C' \cup D''_{x_0} \cup D'_{x_1} \cup \ldots \cup D'_{x_{\ell'-\ell}} \cup D'_1 \cup \ldots \cup D'_m \cup L'_{\ell+1} \cup \ldots \cup L'_{\ell'}.$$

C'est une courbe rationnelle de degré d (cf. I.1). On pose $L_1 = L'_1, \ldots, L_\ell = L'_\ell$. Si $e' > 0$, alors on choisit F sur L, contenant F' et ayant $e - e'$ points dans Q ($e - e'$ vaut 0 ou 1). Si $e' = 0$, alors on choisit F sur D'_{m+1}. On conclut par (I.3) et (I.6.2).

II.3. Géométrie côté droites.

II.3.1. Proposition. — *Soit* (d,ℓ,e) *dans* $T(3s'+2)$ *avec* $s' \geqslant 1$ *et* $d \leqslant 2s' + 2$. *Alors* (d,ℓ,e) *est réductible à* $\left(1, \dfrac{3s'^2+s'-2}{2}, 0, 3s'-2\right)$.

Preuve. — On va montrer

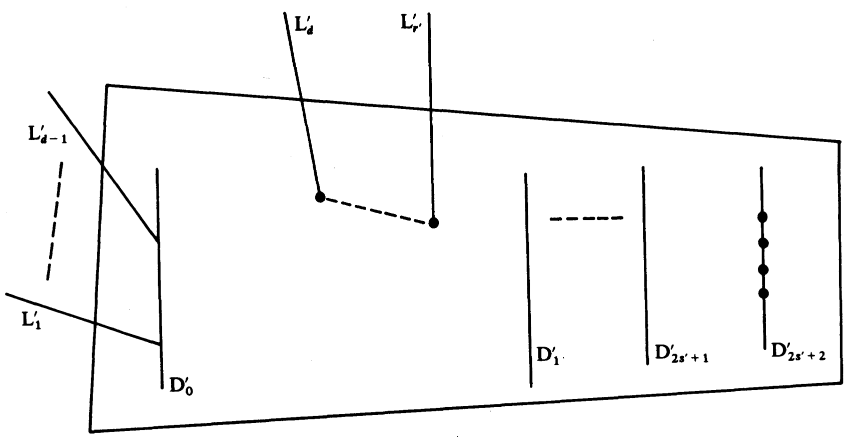
$$P\left(1, \frac{3s'^2+s'-2}{2}, 0, 3s'-2\right) \Rightarrow P^*(3s') \Rightarrow P(d,\ell,e)$$

où $P^*(3s')$ désigne l'énoncé suivant :

il existe $r' := \frac{(s'+1)(3s'+2)}{2}$ droites dont $2s'+1$ admettant une sécante commune et dont la réunion n'est pas contenue dans une surface de degré $3s'$..

a) La première implication est très facile : si $L'_1, \ldots, L'_r$ sont les $\frac{3s'^2+s'}{2}$ droites données, on les complète par $2s'+1$ génératrices $D_1, \ldots, D_{2s'+1}$ d'une quadrique Q, et il suffit, pour conclure par (I.3) de supposer que $(L'_1 \cup \ldots \cup L'_{r'}) \cap Q$ est en position générale dans Q.

b) Passons à la seconde implication.



On a $\ell = \frac{3s'^2+9s'+6}{2} - d$, et $e = s'+d$.

Par généralisation immédiate de $P^*(3s')$, il existe des droites $L'_1, \ldots, L'_r$, telles que $L'_1, \ldots, L'_{d-1}$ aient une sécante commune et dont la réunion n'est pas contenue dans une surface de degré $3s'$. On peut supposer que cette sécante est une génératrice D'_0 d'une quadrique non singulière Q. Soit F' un ensemble fini à e éléments sur la génératrice $D'_{2s'+2}$.

On pose :

$$C = D'_0 \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_{d-1}$$

$$L_1 = L'_d, \ldots, L_{r'-d+1} = L'_{r'}, \quad L_{r'-d+2} = D'_1, \ldots, L_{r'-d+2s'+2} = D'_{2s'+1}$$

$$F = F'.$$

La courbe C est évidemment rationnelle, et on vérifie que $r' - d + 2s' + 2 = e$. On va montrer que C, $L_1, \ldots, L_\ell$, et F conviennent en général.

On pose $Z = ((L'_1 \cup \ldots \cup L'_{r'}) \cap (Q - D'_0)) \cup F$. Son cardinal est $2r' - (d-1) = (3s'+3)(s'+1)$. Pour conclure par (I.3), il reste à montrer qu'on peut supposer que $H^0(Q, I_{Z,Q}(3s'+2, s'))$ est nul, ce qui résulte de (I.6.2).

II.3.2. Proposition. — *Soit* (d,ℓ,e) *dans* $T(3s'+1)$ *avec* $s' \geqslant 2$ *et* $d \leqslant 6s'+1$. *Alors* (d,ℓ,e) *est réductible* $\left(\text{à } \left(1, \dfrac{3s'^2 - s' - 2}{2}, 0, 3s'-3\right)\right)$.

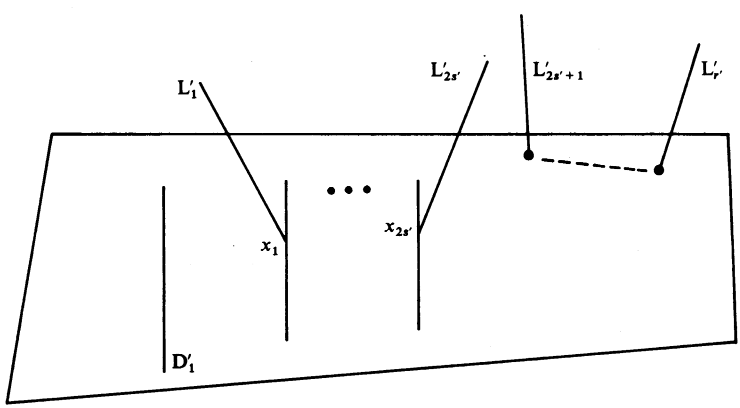
Preuve. — On va montrer

$$P\left(1, \frac{3s'^2 - s' - 2}{2}, 0, 3s'-3\right) \Rightarrow P^*(3s'-1) \Rightarrow P(d,\ell,e) \quad \text{où} \quad P^*(3s'-1)$$

désigne l'énoncé suivant :

il existe $2s'$ coniques dégénérées ayant une sécante commune D_0 dans Q et leurs points singuliers aussi dans Q, et $r = \frac{1}{2}(s'-1)(3s'-2)$ droites dont la réunion n'est pas contenue dans une surface de degré $3s'-1$.

a) (cf. [10]) :



Soient $L'_1, \ldots, L'_{r'}$ les droites données par l'hypothèse, avec $r' = \frac{s'(3s'-1)}{2}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 2s'$, soit x_i un point de $L'_i \cap Q$.

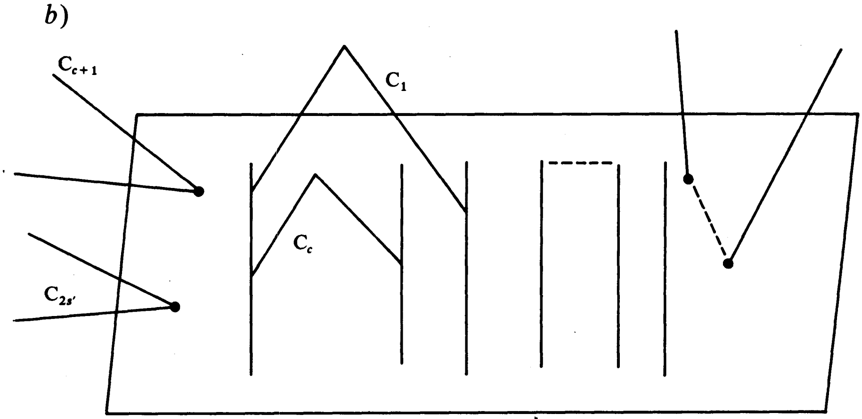
On pose

$$C_1 = L'_1 \cup D'_{x_1}, \ldots, C_{2s'} = L'_{2s'} \cup D'_{x_{2s'}}$$

$$L_1 = L'_{2s'+1}, \ldots, L_{r'-2s'} = L'_{r'}, \qquad L_{r'-2s+1} = D'_1 .$$

On vérifie que $r' - 2s' + 1 = \frac{1}{2}(s'-1)(3s'-2)$. La méthode habituelle (I.3) montre qu'en général $C_1 \cup \ldots \cup C_{2s'} \cup L_1 \cup \ldots \cup L_r$ convient.

b)



On note c la partie entière de $\frac{d+1}{3}$ et on pose $m = d - 2c$. L'énoncé $P^*(3s'-1)$ et l'hypothèse $d \leqslant 6s' + 1$ impliquent qu'il existe c coniques dégénérées $C_1, \ldots, C_c$ rencontrant D'_0, $2s' - c$ coniques dégénérées $C_{c+1}, \ldots, C_{2s'}$ ayant leur point singulier sur Q et $r = \frac{1}{2}(s'-1)(3s'-2)$ droites $L'_1, \ldots, L'_r$, dont la réunion n'est pas contenue dans une surface de degré $3s' - 1$. On peut évidemment convenir que pour $1 \leqslant i \leqslant c$, C_i coupe D'_i et qu'en dehors de $D'_0, \ldots, D'_c$ et des points singuliers de $C_{c+1}, \ldots, C_{2s'}$, chacune des courbes C_j ou L'_j coupe Q en deux points simples en position générale.

On pose $C = C_1 \cup \ldots \cup C_c \cup D'_0 \cup \ldots \cup D'_{m-1}$ (donc pour $d = 1$, $C = D'_0$ et pour $d = 2$, $C = C_1$). C'est une courbe rationnelle de degré d (cf. I.1).

Pour $c+1 \leqslant i \leqslant 2s'$, on note N_i le premier voisinage infinitésimal du point singulier de C_i. On sait (I.4) que $C_i \cup N_i$ est spécialisation d'une réunion de deux droites disjointes. Posons $h = \ell - r - 2(2s'-c)$. Comme (d,ℓ,e) est dans $T(3s'+1)$ on a $(d+\ell+1) \geqslant \frac{(3s'+4)(s'+1)}{2}$ et pour $d \geqslant 3s'+2$, $d+\ell \geqslant \frac{(3s'+4)(s'+1)}{2}\cdot$ On en déduit facilement que h est non-négatif. Soit F un ensemble fini de e points sur D'_{m+h+1} : il nous suffit de prouver que

$$C \cup L'_1 \cup \ldots \cup L'_r \cup C_{c+1} \cup \ldots \cup C_{2s'} \cup N_{c+1} \cup \ldots \cup N_{2s'} \cup D'_{m+1} \cup \ldots \cup D'_{m+h} \cup F$$

n'est pas contenu dans une surface de degré $3s'+1$. Pour conclure par (I.3), il reste à appliquer (I.6.1), avec $t' = 2s' - c$, $n' = 3s'+1$, $e' = e$, $m' = 3s'+1-m-h$, et $q' = (s'-1)(3s'-2) + 4s' + (3c+1-d)$.

L'hypothèse de (I.6.1) s'écrit ici

$$3s'^2 - 7s' + 2 + 3c - d + m + h \geqslant 0.$$

Comme $d = 2c+m$, cette inégalité est bien vérifiée pour $s' \geqslant 2$.

II.4. Arithmétique.

Dans ce paragraphe on montre que pour $s \geqslant 5$, tout triplet (d,ℓ,e) de $T(s)$ est réductible.

II.4.1. Lemme. — *Si* $s \geqslant 5$, $\ell \geqslant \frac{1}{3}(s-2)$ *et* $d \geqslant \frac{4}{3}(s+2)$, *alors* (d,ℓ,e) *est réductible.*

Preuve. — Soient d' et e' le quotient et le reste de la division de

$$\binom{s+1}{3} - \ell(s-1) - 1$$

par $s-2$. On a donc

$$d'(s-2) + 1 + \ell(s-1) + e' = \binom{s+1}{3},$$

avec $0 \leqslant e' \leqslant s-3$.

De l'égalité

$$ds + 1 + \ell(s+1) + e = \binom{s+3}{3}$$

et $0 \leqslant e \leqslant s$ on déduit d'abord

$$\frac{1}{6}(s^2+5s) \leqslant d + \ell \leqslant \frac{1}{6}(s^2+6s+11).$$

Ensuite, en prenant la différence des deux équations pour (d,ℓ,e) et (d',ℓ',e'), et en utilisant les bornes pour $d + \ell$, on obtient

$$\frac{2s^2 - 3s - 8}{3(s-2)} \leqslant d-d' \leqslant \frac{2s^2 + 4s - 6}{3(s-2)}.$$

Nous allons distinguer deux cas.

Si $\frac{2}{3}(s-2) \leqslant e' \leqslant s - 3$, on va prendre

$$d'' = d' + s - 2 - e' + 1, \qquad \ell'' = \ell - s + 2 + e', \qquad e'' = 0,$$

et on veut appliquer (II.2.2). On a évidemment $\ell'' < \ell$, et $(d'',\ell'',e'') \in \mathrm{T}(s-2)$. Il reste à vérifier :

a) $\ell'' \geqslant 0$,

b) $d'' \leqslant d$,

c) $d \leqslant 3\,d''$ (ce qui entraîne $d'' \geqslant 1$).

L'inégalité *a*) résulte du fait que $e' \geqslant \frac{2}{3}(s-2)$ et de l'hypothèse $\ell \geqslant \frac{1}{3}(s-2)$.

L'inégalité *b*) résulte de la minoration de $d - d'$ et de la minoration de e'.

L'inégalité *c*) résulte de la majoration de $d - d'$, et de la minoration de d.

Si $0 \leqslant e' \leqslant \frac{2}{3}(s-2)$, on prend

$$d'' = d' - e', \qquad \ell'' = \ell + e', \qquad e'' = 0,$$

et on applique (II.2.3). On a $\ell'' \geqslant \ell$ par définition. Il faut vérifier

$a)$ $d'' \geqslant 1$,

$b)$ $2(\ell''-\ell) \leqslant d - d'' - 1$.

$a)$ résulte des majorations de $d - d'$ et de e' et de la minoration de d.

$b)$ résulte de la minoration de $d - d'$ et de la majoration de e'.

II.4.2. Lemme. — *Si* $s \geqslant 3$ *et* $\ell \leqslant \dfrac{s-3}{2}$ *alors* (d,ℓ,e,s) *est réductible.*

Preuve. — On se contente d'indiquer pour chaque triplet (cf. II.1.2) concerné, un triplet de $\mathrm{T}(s-2)$ auquel il est réductible soit en vertu de (II.2.2) si $\ell' < \ell$, soit en vertu de (II.2.3) si $\ell' \geqslant \ell$.

On distingue suivant les valeurs de s et ℓ en observant que ces valeurs déterminent d et e.

Pour $s = 6s' + 3$ et $\ell \leqslant 2s' + 1$,

$(6s'^2+12s'+6-\ell,\ell,2s'+1-\ell)$ est réductible à $(6s^2+8s'+3,0,0)$

Pour $s = 6s' + 3$ et $2s' + 2 \leqslant \ell \leqslant 4s' + 2$

$(6s'^2+12s'+5-\ell,\ell,8s'+4-\ell)$ est réductible à $(6s'^2+8s'+3,0,0)$

Pour $s = 6s' + 4$ et $\ell \leqslant 3s' + 1$

$(6s'^2+14s'+8-\ell,\ell,3s'+2-\ell)$ est réductible à $(6s'^2+7s'+3,3s'+1,0)$

Pour $s = 6s' + 5$ et $\ell \leqslant 6s' + 5$

$(6s'^2+16s'+11,0,0)$ est réductible à $(6s'^2+10s'+5,2s'+1,0)$
$(6s'^2+16s'+10-\ell,\ell,6s'+5-\ell)$ est réductible à $(6s'^2+10s'+5,2s'+1,0)$

Pour $s = 6s'+6$ et $\ell \leqslant 3s' + 2$

$(6s'^2+18s'+13-\ell,\ell,5s'+5-\ell)$ est réductible à $(6s'^2+11s'+6,3s'+2,0)$

Pour $s = 6s'+7$ et $\ell \leqslant 4s' + 5$

$(6s'^2+20s'+17,0,0)$ est réductible à $(6s'^2+16s'+11,0,0)$
$(6s'^2+20s'+16-\ell,\ell,6s'+7-\ell)$ est réductible à $(6s'^2+16s'+11,0,0)$

Pour $s = 6s'+8$ et $\ell \leqslant 3s'+4$

$(6s'^2+22s'+20-\ell,\ell,3s'+4-\ell)$ est réductible à
$(6s'^2+16s'+12-\ell,\ 2s'+1+\ell,\ 3s'+4-\ell)$.

II.4.3. Lemme. – *Pour* $s \geqslant 5$ *et* $d < \dfrac{4s}{3}+4$, (d,ℓ,e,s) *est réductible.*

Preuve. – Pour $s = 3s'+1$ avec $s' \geqslant 2$, on peut appliquer (II.3.2).

Pour $s = 3s'+2$ avec $s' \geqslant 1$ et $d \leqslant 2s'+2$, on peut appliquer (II.3.1). Toujours pour $s = 3s'+2$, si $2s'+3 \leqslant d \leqslant 4s'+6$, alors

$$\left(d,\frac{3s'^2+9s'+8}{2}-d,\ d-(2s'+3)\right)$$

est réductible à $\left(1,\dfrac{3s'^2+5s'}{2},0\right)$, et si $3s'+2 \leqslant d \leqslant 5s'+5$, alors $\left(d,\dfrac{3s'^2+9s'+8}{2}-d,\ d-(2s'+3)\right)$ est réductible à $\left(3s'+2,\dfrac{3s'^2-s'}{2},0\right)$.

Pour $s = 3s'+3$ avec $s' \geqslant 1$, si $d \leqslant 3s'+2$, alors $\left(d,\dfrac{(3s'+5)(s'+2)}{2}-d,d-1\right)$ est réductible à

$$\left(d,\frac{(3s'+4)(s'+1)}{2}-d,d-1\right)$$

tandis que si $3s'+3 \leqslant d \leqslant 4s'+7$ alors (d,ℓ,e) est réductible à $\left(3s'+3,\dfrac{3s'^2+s'}{2},0\right)$.

II.5. Les cas avec $s \leqslant 4$.

Pour s nul l'énoncé est évident. Pour s égal à 1, il concerne soit deux droites, soit une conique et un point. Dans les deux cas l'énoncé est évident. Pour s égal à deux, $T(s)$ contient les quatre triplets (4,0,1), (3,1,0), (2,1,2) et (1,2,1). Les quatre énoncés correspondants sont évidents par exemple dès qu'on considère comme courbes rationnelles des réunions connexes de droites. Pour s égal à trois, (6,0,1), (5,1,0), (4,1,3) et (3,2,2) sont réductibles à (3,0,0) et (3,2,2), (2,3,1) et (1,4,0) sont réductibles à (1,1,0) d'après (II.2.2). Pour s égal à quatre, (8,0,2) et (7,1,1) sont réductibles à (4,0,1), (6,2,0), (5,2,4), (4,3,3) et (3,4,2) sont réductibles à (3,1,0) et (2,5,1) est réductible à (1,2,1) par (II.2.2). Il reste à traiter la

II.5.1. Proposition (cf. [10], p. 171). — *Il existe une réunion de sept droites qui n'est contenue dans aucune surface quartique* (*c'est le cas* (1,6,0)).

Voici une variante de la preuve donnée dans [10] :

Soient L_1 et L_2 deux droites concourantes en un point x, soient Q_3, Q_4, Q_5 trois points non alignés dans le plan P engendré par L_1 et L_2, soient L_3, L_4, L_5 des droites coupant ce plan en Q_1, Q_2, Q_3. Soit encore P' un plan passant par x et coupant L_3, L_4, L_5 en des points a_3, a_4, a_5 tels que les droites xa_3, xa_4, xa_5 soient distinctes, enfin soit y un point de P' non contenu dans la quadrique contenant L_3, L_4 et L_5 et soient L_6 et L_7 deux droites de P' passant par y sans rencontrer $L_1, \ldots, L_5$. Si $\chi(x)$ et $\chi(y)$ désignent les voisinages infinitésimaux du premier ordre de x et de y, on sait (I.4) que $Y = L_1 \cup \ldots \cup L_7 \cup \chi(x) \cup \chi(y)$ est spécialisation d'une réunion disjointe de sept droites. Soit S un polynôme de degré 4 s'annulant sur Y. Sa restriction à P' est nulle, donc S est multiple d'un polynôme S' de degré trois qui s'annule sur $Y' = L_1 \cup \ldots \cup L_5 \cup y$. La restriction à P de S' est nulle, donc S' est multiple d'un polynôme S'' de degré deux qui s'annule sur L_3, L_4, L_5 et y donc qui est nul.

III. UN EXEMPLE D'APPLICATION

Nous montrons ci-dessous sur un exemple comment les courbes non connexes données par le théorème permettent de construire des courbes connexes ayant la postulation « naturelle ». La formule de majoration du genre dans ce qu'on appelle le domaine A (cf. [9], th. 3.3) assure que le genre d'une courbe lisse connexe de degré 37 non contenue dans une surface de degré 11 est au plus 44. Inversement :

III.1. Proposition. — *Il existe une courbe lisse connexe de genre* 44 *et degré* 37 *dans* $\mathbf{P}^3$, *non contenue dans une surface de degré* 11.

Démonstration. — D'après le théorème, il existe une courbe rationnelle C de degré 23 et 5 droites $L_1, \ldots, L_5$ dont la réunion n'est pas contenue dans une surface de degré 10. Soit H un plan coupant transversalement C et les L_i. On peut supposer, comme en (I.5) que l'intersection avec H définit un morphisme ouvert de $Z_{23,5}$ vers $\mathrm{Hilb}^{28}H$ au voisinage du point $C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_5$. On peut donc supposer qu'il existe une courbe lisse Γ de degré 9 dans H passant par $L_i \cap H$ pour tout i, et par exactement 17 des points de $C \cap H$. Une fois Γ ainsi choisie, on peut de plus supposer que les 22 points en question sont généraux sur Γ, et bien sûr que les 6 points restants de $C \cap H$ ne sont pas sur une conique.

Alors d'après (I.3) adapté au cas d'un plan, la courbe $C \cup L_1 \cup \ldots \cup L_5$ n'est pas contenue dans une surface de degré 11. Par ailleurs on a $h^1(\mathcal{O}_\Gamma(1)) = 21$ et $h^1(\mathcal{N}_{C/\mathbf{P}^3}(-1)) = 0$, ainsi que $h^1(\mathcal{N}_{L_i/\mathbf{P}^3}(-1)) = 0$.

D'après [11], $C \cup \Gamma \cup L_1 \cup \ldots \cup L_5$ se déforme en une courbe lisse connexe de genre 44 et degré 37 qui, par semi-continuité, n'est contenue dans aucune surface de degré 11.

IV. DERNIÈRES NOUVELLES

Notre théorème a été généralisé dans $\mathbf{P}^N$, $N \geqslant 4$, puis dans $\mathbf{P}^3$, au cas des réunions de courbes rationnelles par Ballico-Ellia [17], respectivement Ballico [18]. Signalons aussi que les mêmes [19] ont maintenant démontré la conjecture du rang maximum, dont la proposition III.1 ci-dessus est un cas (très) particulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Ballico, Ph. Ellia, Generic curves of small genus have maximal rank, *Math. Ann.*, 264 (1983), 211-225.

[2] E, Ballico, Ph. Ellia, Sur la postulation des courbes de $\mathbf{P}^n$ et de leurs projections, *C.R.A.S.*, 299 (1984), 237-240.

[3] E. Ballico, Ph. Ellia, The maximal rank conjecture for non special curves in $\mathbf{P}^3$, *Invent. Math.*, 79 (1985), 541-555.

[4] D. Eisenbud, J. Harris, Divisors on general curves and cuspidal rational space curves, *Invent. Math.*, (1983), 371-418.

[5] D. Eisenbud, A. Van de Ven, On the normal bundle of smooth rational space curves, *Math. Ann.*, 256 (1981), 453-463.

[6] J. FOGARTY, Algebraic families on an algebraic surface, *Amer. J. of Math.*, 90 (1968), 511-521.

[7] F. GHIONE, G. SACCHIERO, Normal bundles of rational curves. *Manuscr. Math.*, 33 (1980), 111-128.

[8] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Math.*, 52, Springer Verlag, New York, (1977), XVI + 496 p.

[9] R. HARTSHORNE, Classification of Algebraic Space Curves, *in* « Vector Bundles and Differential Equations », *Prog. in Math.*, 7, Birkhäuser, Boston, (1980), 83-112.

[10] R. HARTSHORNE, A. HIRSCHOWITZ, Droites en position générale dans l'espace projectif, *in* « Algebraic Geometry », Proc. La Rabida 1981, *Springer Lecture Notes in Math.*, 961, Springer Verlag (1982), 169-189.

[11] R. HARTSHORNE, A. HIRSCHOWITZ, Smoothing Algebraic Space Curves, in Algebraic Geometry, Sitges 1983, *Lecture Notes in Math.*, 1124 (1985), 98-131.

[12] R. HARTSHORNE, A. HIRSCHOWITZ, *Nouvelles courbes de bon genre via la cohomologie des faisceaux réflexifs*, (en préparation).

[13] A. HIRSCHOWITZ, Sur la postulation générique des courbes rationnelles, *Acta Math.*, 146 (1981), 209-230.

[14] K. HULEK, The normal bundle of a curve on a quadric, *Math. Ann.*, 258 (1981), 201-206.

[15] D. PERRIN, Courbes passant par k points généraux de $\mathbf{P}^3$, *C.R.A.S.*, 299 (1984), 451-453.

[16] A. TANNENBAUM, Deformations of Space Curves, *Arch. Math.*, Basel, 34 (1980), 37-42.

[17] E. BALLICO, Ph. ELLIA, On the postulation of many disjoint rational curves in $\mathbf{P}^N$, $N \geqslant 4$, *Boll. U.M.I.*, à paraître.

[18] E. BALLICO, *On the postulation of disjoint rational curves in a projective space*, Preprint Pisa, 1984.

[19] E. BALLICO, Ph. ELLIA, *Beyond the maximal rank conjecture for curves in* $\mathbf{P}^3$, preprint n° 76, Nice, 1985.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1984.

R. HARTSHORNE,
Dept. of Math.
University of California
Berkeley, Cal. 94720 (USA).

A. HIRSCHOWITZ,
Dept. de Math.
U.A. 168
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice Cedex.