

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHÈLE AUDIN

Quelques calculs en cobordisme lagrangien

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 3 (1985), p. 159-194

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_159_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_159_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES CALCULS EN COBORDISME LAGRANGIEN

par Michèle AUDIN

Les groupes de cobordisme lagrangien ont été définis géométriquement par V.I. Arnold [2] dans un cadre assez général. Nous ne considérerons ici que des immersions de variétés dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$.

La métrique euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n$ permet d'identifier $\mathbf{C}^n$ au fibré cotangent $T^*\mathbf{R}^n$, on le munit ainsi de la structure symplectique naturelle définie par la 2-forme exacte $\omega = -d\lambda$, où λ est la forme de Liouville de $T^*\mathbf{R}^n$. Une immersion i d'une variété de dimension n dans $\mathbf{C}^n$ sera dite lagrangienne exacte si la forme $i^*\lambda$ est exacte.

Les cobordismes ont lieu dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et sont supposés définis par des immersions lagrangiennes exactes.

Nous appellerons L_n le groupe de cobordisme orienté, et $\mathfrak{L}_n$ le groupe de cobordisme non orienté des immersions lagrangiennes exactes de variétés fermées de dimension n dans $\mathbf{C}^n$.

Les hypothèses d'exactitude permettent de relever les immersions (de façon essentiellement unique) dans la variété de contact $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ en sous-variétés "legendriennes". Les groupes que nous considérons sont donc, dans la terminologie de [2] les groupes de cobordisme "legendrien cylindrique" dans $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

V.I. Arnold a montré que $L_1 \cong \mathbf{Z}$, $\mathfrak{L}_1 = 0$, en exhibant une immersion explicite de S^1 dans $\mathbf{C}$, qui engendre L_1 , et qui est le bord d'une très jolie immersion lagrangienne exacte

Mots-clés : Cobordisme – Immersions lagrangiennes – Singularités.

de la bande de Möbius dans $\mathbb{C}^2$. Les calculs que nous présentons ici sont des calculs de topologie algébrique, et peuvent donc sembler plus arides (le problème est qu'on ne connaît pas beaucoup d'exemples). En particulier, nous montrons que certains groupes sont engendrés par des immersions lagrangiennes exactes de sphères (c'est le cas pour $L_3 \cong \mathbb{Z}/3$), mais nous ne savons pas écrire d'autre immersion de S^n dans $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) que celle dite "de Whitney" dont il est facile de voir qu'elle est 0 dans L_n .

La traduction du problème "géométrique" d'Arnold en termes de topologie algébrique est rendue possible par le théorème de Gromov-Lees :

Etant donné une variété V , nous appellerons U -parallélisation de V la donnée d'une trivialisatıon complexe du fibré vectoriel $TV \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Il est facile de voir que l'application tangente à une immersion lagrangienne définit une U -parallélisation de la variété immergée.

Appelons homotopie ℓ -régulière entre deux immersions lagrangiennes exactes $F_0, F_1 : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ la donnée d'une application différentiable $F : V \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$, qui est une immersion lagrangienne exacte de $V \times \{t\}$ pour tout t , et telle que $F(\cdot, 0) = F_0$, $F(\cdot, 1) = F_1$. On définit à l'aide de cette notion une relation d'équivalence entre les immersions lagrangiennes exactes de V dans $\mathbb{C}^n$.

0.1. THEOREME ([12], [13]). — *L'application, qui, à une immersion lagrangienne exacte de V dans $\mathbb{C}^n$, associe la U -parallélisation de V définie par son application tangente, induit une bijection de l'ensemble des classes d'homotopie ℓ -régulières d'immersions lagrangiennes exactes $V \rightarrow \mathbb{C}^n$ dans l'ensemble des classes d'homotopie des U -parallélisations de V .*

Remarquons qu'à cause des hypothèses d'exactitude, une homotopie ℓ -régulière entre F_0 et F_1 induit un cobordisme de F_0 à F_1 ; de plus, les fibrés vectoriels complexes de rang n sur les variétés de dimension n sont stables. La notion de cobordisme considérée est donc le cobordisme des variétés U -parallélisées. On déduit alors facilement l'expression de L_* et $\mathcal{L}L_*$ en termes classiques de groupes d'homotopie de "spectres de Thom" :

Appelons Λ_n (resp. $\tilde{\Lambda}_n$) la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens (totalement isotropes maximaux) de $\mathbb{C}^n$ (resp. orientés) et λ_n le fibré vectoriel (réel de rang n) tautologique sur Λ_n . Soit $\pi: \tilde{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_n$ le revêtement double. On appelle $M\lambda_n$ l'espace de Thom de λ_n , et $M\lambda$ le spectre de Thom associé.

De même, soient $M\tilde{\lambda}_n$ l'espace de Thom du fibré $\pi^* \lambda_n$ sur $\tilde{\Lambda}_n$ et $M\tilde{\lambda}$ le spectre de Thom associé.

0.2. THEOREME (Eliashberg [9]). —

$$\mathcal{H}L_n \cong \pi_n(M\lambda); L_n \cong \pi_n(M\tilde{\lambda}).$$

Il se trouve que $\pi_* M\lambda$ a déjà été calculé depuis longtemps par L. Smith et R. Stong [17], hors de tout contexte "lagrangien".

Dans ce travail, nous rappelons le calcul de $\mathcal{H}L_*$ et nous calculons l'image de $\mathcal{H}L_*$ dans le cobordisme non-orienté $\mathcal{H}_*$ de Thom. Ces résultats montrent peut-être que la théorie $\mathcal{H}L_*$ n'est pas très intéressante (elle s'injecte dans $\mathcal{H}_*$), mais sont assez surprenants: il y a beaucoup de classes de cobordisme non-orienté qui contiennent des variétés possédant des immersions lagrangiennes (*). Nous donnons ensuite des résultats sur L_* : Comme le calcul de $\mathcal{H}L_*$ est assez facile, on essaie de relier L_* et $\mathcal{H}L_*$ par une "suite exacte de Rokhlin". Une telle suite exacte ne peut exister, puisqu'on sait que $L_1 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}L_1 = 0$. Nous introduisons donc une nouvelle théorie de cobordisme: le cobordisme des variétés SU-parallélisées. Les nouveaux groupes SL_* ont une suite exacte de Rokhlin les reliant à $\mathcal{H}L_*$; et L_* s'obtient très facilement à partir de SL_* (partie 3). Nous étudions ensuite la partie 2-primaire de L_* dont nous montrons en particulier qu'elle est détectée par les nombres caractéristiques ad hoc. Les résultats obtenus, même partiels, permettent de calculer l'image de L_* dans $\mathcal{H}L_*$, et l'image de L_* dans le cobordisme orienté Ω_*^{SO} . Dans la partie suivante (5), nous verrons que la "partie impaire" de L_* est bien différente: plus question ici de nombres caractéristiques. En particulier, L_* contient deux exemplaires de la partie impaire des groupes d'homotopie des sphères.

(*) Rappelons que toute variété qui possède une immersion lagrangienne possède une immersion lagrangienne exacte: c'est une conséquence de Gromov-Lees (mais il y a des arguments plus faciles...).

Dans les trois dernières parties (6, 7 et 8), nous donnons des exemples et applications. Nous calculons d'abord les sous-groupes de L_* formés des classes de cobordisme représentées par des immersions lagrangiennes de sphères. Nous verrons que ces dernières suffisent à engendrer rationnellement L_* . Nous donnons ensuite les valeurs des groupes L_n pour $n \leq 10$, avec leurs générateurs (sauf dans le cas de L_9), exhibant, enfin, une variété (de dimension 5), qui n'est pas stablement parallélisable, mais qui est U-parallélisable et dont une des U-parallélisations engendre le groupe infini cyclique L_5 . Nous finissons par des applications à la théorie énumérative des singularités lagrangiennes, répondant, au moins théoriquement, à une question posée par V.I. Arnold, qui a été le point de départ de l'ensemble de ce travail.

Les conversations que j'ai pu avoir avec Lionel Schwartz et François Latour m'ont été particulièrement utiles. F. Latour m'a (entre autres choses) signalé que le calcul de $\pi_* M\lambda$ était dû à Smith et Stong, et surtout fourni la démonstration de 6.4 pour remplacer un argument faux.

Certains des résultats des parties 6, 7 et 8 ont été annoncés (avec quelques erreurs) dans [4].

1. Rappels sur la cohomologie de Λ_n et $\tilde{\Lambda}_n$.

On a $\Lambda_n = U(n)/O(n)$, $\tilde{\Lambda}_n = U(n)/SO(n)$, on appelle $\Lambda = U/O$; $\tilde{\Lambda} = U/SO$. La cohomologie de ces espaces est bien connue, elle a été particulièrement étudiée par Borel [6] et Fuks [10]. Voici les résultats et notations que nous utiliserons dans la suite.

$$\begin{array}{ccccc} \text{On considère les fibrations : } \Lambda & \xrightarrow{j} & BO & \xrightarrow{p} & BU \\ & & \tilde{\Lambda} & \xrightarrow{j} & BSO & \xrightarrow{p} & BU \end{array}$$

et le revêtement $\pi : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$.

1.1. Il existe une classe $\beta_{2k} \in H^{4k+1}(\Lambda; \mathbb{Z})$, transgressive, dont la transgression est $2c_{2k+1} \in H^{4k+2}(BU; \mathbb{Z})$.

Pour $k \geq 1$, nous appellerons encore β_{2k} la classe $\pi^* \beta_{2k}$; si $k = 0$, remarquons que $p^* c_1 = 0$ dans $H^2(BSO; \mathbb{Z})$

et appelons $\beta_0 \in H^1(\tilde{\Lambda}; \mathbb{Z})$ la classe dont la transgression est c_1 (ce n'est pas $\pi^* \beta_0$) (il n'y aura pas de confusion due à ces notations). Traditionnellement, les classes β_0 considérées dans $H^1(\Lambda; \mathbb{Z})$, $H^1(\tilde{\Lambda}; \mathbb{Z})$ sont appelées "classe de Maslov".

Soit A un anneau contenant $\frac{1}{2}$ (nous utiliserons $A = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}/p$, p premier impair). Appelons encore $\beta_{2k} \in H^{4k+1}(\Lambda; A)$ (resp. $H^{4k+1}(\tilde{\Lambda}; A)$) la classe déduite de β_{2k} par l'homomorphisme $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \longrightarrow A$;

1.2. $H^*(\Lambda; A)$ (resp. $H^*(\tilde{\Lambda}; A)$) est une algèbre extérieure, engendrée par les classes β_{2k} .

1.3. $\Lambda_n, \tilde{\Lambda}_n, \Lambda, \tilde{\Lambda}$ sont sans torsion impaire.

Si on remarque que les classes β_{2k} sont primitives (voir 5.4 pour une démonstration), on en déduit :

1.4. $H_*(\Lambda; A)$ (resp. $H_*(\tilde{\Lambda}; A)$) est une algèbre extérieure sur un générateur en chaque dimension congrue à 1 modulo 4.

Tous ces résultats sont dans [6] ou s'en déduisent facilement (Borel considère plutôt la fibration $U \longrightarrow U/SO \longrightarrow BSO$, par exemple).

Passons maintenant aux classes définies par Fuks.

1.5. Si $b_{2k} \in H^{4k+1}(\Lambda; \mathbb{Z})$ est la classe définie par Fuks en termes de cycles de Schubert, on a : $b_{2k} = \pm \beta_{2k} + \text{décomposables}$ (modulo la torsion paire). (D'ailleurs, 1.1. ne définit β_{2k} que modulo la torsion paire.)

1.6. $j^* : H^*(BO; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^*(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$ est surjective. Soit $a_i = j^* w_i$, où w_i est la i -ème classe de Stiefel-Whitney. Alors, $H^*(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$ est l'algèbre extérieure engendrée par les a_i .

1.6 bis. Soit $w_i \in H^i(BSO; \mathbb{Z}/2)$ la i -ème classe de Stiefel-Whitney et $a_i = j^* w_i \in H^i(\tilde{\Lambda}; \mathbb{Z}/2)$. Soit a'_1 la réduction de la classe de Maslov. Alors, $H^*(\tilde{\Lambda}; \mathbb{Z}/2)$ est l'algèbre extérieure engendrée par a'_1 et les $a_i (i \geq 2)$.

(1.6 bis se déduit de 1.6 [10] en considérant la suite exacte de Gysin pour le revêtement π ; on a bien sur $\pi^* a_1 = 0$).

1.7. Si ρ est la réduction modulo 2, on a :

$$\rho b_{2k} = a_{2k} a_{2k+1} \in H^{4k+1}(\Lambda; \mathbb{Z}/2).$$

(Ce résultat n'est pas énoncé par Fuks, mais se montre de la même manière —géométrique— que les théorèmes de Fuks, voir 7.9).

Nous aurons aussi besoin de

1.8. Les classes b_{2k}, β_{2k} sont déjà dans $H^{4k+1}(\Lambda_n; \mathbb{Z})$ pour $n \geq 2k + 1$; et l'application naturelle $H^*(\Lambda; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Lambda_n; \mathbb{Z})$ est surjective pour $* \leq n - 1$.

Voici pour finir deux applications immédiates de 0.2, dont nous aurons besoin dans la suite :

1.9. $L_* \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre extérieure sur un générateur en chaque dimension congrue à 1 modulo 4.

(On applique 0.2 et 1.4; cette remarque est déjà dans [9].)

1.10. $L_2 = 0$.

(On regarde la cohomologie $H^* \widetilde{M\lambda}$ pour $* \leq 3$.)

2. Le cas non-orienté : calcul de $\mathfrak{L}L_n$.

Les groupes $\pi_n(M\lambda)$ ont été calculés par Smith et Stong [17], bien avant que les travaux d'Arnold et Eliashberg leur aient donné l'interprétation "lagrangienne" dont nous sommes partis.

2.1. THEOREME (Smith et Stong [17]). -

i) $\pi_* M\lambda$ est un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}/2$, avec un générateur en chaque dimension impaire qui ne soit pas de la forme $2^k - 1$:

$$\pi_* M\lambda \cong \mathbb{Z}/2 [X_5, X_9, X_{11}, \dots].$$

ii) L'application naturelle d'oubli qui, à une immersion lagrangienne $V \rightarrow \mathbb{C}^n$, associe la classe de cobordisme non-orienté abstraite de la variété V est une injection $\mathfrak{L}L_n \xrightarrow{\theta} \mathfrak{L}_n$, et de plus

$$\mathfrak{L}_* \cong \theta (\mathfrak{L}L_*) \otimes_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2 [X_2, \dots, X_{2l}, \dots].$$

2.2. COROLLAIRE. — a) La classe dans $\mathcal{H}L_*$ de l'immersion $V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ne dépend pas de l'immersion choisie, mais seulement de la classe de cobordisme abstraite de V .

b) Cette classe est déterminée par les nombres de Stiefel-Whitney de V .

c) Plus précisément, si V_1 et V_2 sont cobordantes et possèdent des immersions lagrangiennes (exactes) dans $\mathbb{C}^n$, alors ces immersions sont cobordantes (au sens lagrangien). $\square$

Voici une esquisse de démonstration de 2.1.

• $\pi_* M\lambda$ est 2-primaire (c'est particulièrement évident pour $\mathcal{H}L_*$), donc on peut calculer $\pi_* M\lambda$ en considérant la cohomologie modulo 2 de $M\lambda$.

• L'application naturelle $\Lambda_n \xrightarrow{j} BO_n$ induit un homomorphisme surjectif $j^* : H^*(BO_n, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^*(\Lambda_n; \mathbb{Z}/2)$, et son noyau est exactement l'idéal engendré par les carrés (1.6). Si ω est une partition de n , soient $s_\omega \in H^n(BO; \mathbb{Z}/2)$ les éléments de la base de Thom [18]. Alors, les $j^* s_\omega$ où ω parcourt les partitions de n en entiers impairs forment une $\mathbb{Z}/2$ -base de $H^n(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$: on voit facilement que les éléments indiqués engendrent $H^n(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$, et comme il y a autant de partitions de n en entiers impairs qu'en entiers distincts, l'ensemble des $j^* s_\omega$ a le bon cardinal.

• Par isomorphisme de Thom, on a ainsi une $\mathbb{Z}/2$ -base de $H^*(M\lambda; \mathbb{Z}/2)$. Maintenant, tout le reste suit des calculs de Thom [18] pour $\mathcal{H}_*$ et du

2.3. LEMME. — $H^*(M\lambda; \mathbb{Z}/2)$ est libre sur l'algèbre de Steenrod.

En effet, soit U la classe de Thom dans $H^0(M\lambda; \mathbb{Z}/2)$. D'après un théorème de Milnor et Moore [14], il suffit de montrer que l'application

$$\alpha \xrightarrow{\psi} H^*(M\lambda; \mathbb{Z}/2)$$

$$\theta \mapsto \theta(U)$$

est injective. Voici un argument géométrique :

Soit $B\mathcal{B}_n$ le classifiant du groupe des tresses $\mathcal{B}_n$ sur n brins, et $\xi_n \longrightarrow B\mathcal{B}_n$ le fibré vectoriel associé à la représentation $\mathcal{B}_n \longrightarrow O(n)$ via le groupe symétrique. D.B. Fuks a donné une trivialisation naturelle de $\xi_n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ [11]. On en déduit une application $B\mathcal{B}_n \xrightarrow{\varphi} \Lambda_n$, et au niveau des espaces de Thom, une application $M\varphi: M\xi_n \longrightarrow M\lambda_n$. La composition

$$\alpha \xrightarrow{\psi} H^*(M\lambda) \xrightarrow{(M\varphi)^*} H^*(M\xi)$$

est: $((M\varphi)^* \circ \psi)(\theta) = \theta((M\varphi)^* U) = \theta(V)$ où V est la classe de Thom dans $H^*(M\xi)$.

Il ressort des calculs de Fuks que l'application $\theta \longmapsto \theta(V)$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf [11]. On en déduit que ψ est injective. $\square$

Nous allons maintenant caractériser les éléments de $\mathcal{R}_*$ qui contiennent des variétés possédant des immersions lagrangiennes, c'est-à-dire l'image de $\mathcal{R}L_*$ dans $\mathcal{R}_*$.

2.4. THEOREME. — *Une variété est cobordante (au sens non-orienté) à une variété possédant une immersion lagrangienne si et seulement si tous ses nombres de Stiefel-Whitney contenant des carrés sont nuls.*

La démonstration de 2.4 est basée sur le théorème de Dold [8] et le lemme 2.5.

Soit

$$\tau_*: \mathcal{R}L_* \longrightarrow H_*(\Lambda; \mathbf{Z}/2)$$

$$V \longmapsto \tau_*[V]$$

où $\tau: V \longrightarrow \Lambda$ est l'application de Gauss de V . D'après 2.2.b), τ_* est injective.

2.5. LEMME. — *x est dans l'image de τ_* si et seulement si $\langle Sq^b + vb, x \rangle = 0$ pour tout $b \in H^*(\Lambda)$, où*

$$Sq = \sum_{i \geq 0} Sq^i, \quad v = Sq^{-1}a,$$

et $a = \sum_{i \geq 0} a_i$ est la classe de Stiefel-Whitney totale.

Démonstration de 2.5. — Le théorème de Dold décrit l'image de l'application analogue $\tau'_* : \mathcal{N}_* \longrightarrow H_* \text{BO}$. Il est fondé sur le fait que $H^* \text{MO}$ est libre sur $\mathcal{A}$. Nous allons donc imiter la démonstration de ce théorème, grâce à 2.3. La condition est nécessaire (relations de Wu). Réciproquement, $x \in \text{Im } \tau_*$ si et seulement si $\langle y, x \rangle = 0$ dès que

$$y \in \Phi^{-1}(\bar{\mathcal{A}} \cdot H^* M\lambda),$$

où Φ est l'isomorphisme de Thom et $\bar{\mathcal{A}}$ les éléments de degrés strictement positifs dans $\mathcal{A}$. Donc :

$$x \in \text{Im } \tau_* \iff \forall y \in H^* \Lambda, \langle \Phi^{-1}(SqUy + Uy), x \rangle = 0$$

$$\text{(N.B. } Sqz + z = \sum_{i>0} Sq^i z) .$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{-1}(SqUy + Uy), x \rangle &= \langle \Phi^{-1}(SqU \cup Sqy + Uy), x \rangle \\ &= \langle \Phi^{-1}(U(aSqy + y)), x \rangle \\ &= \langle aSqy + y, x \rangle \\ &= \langle Sq(ySq^{-1}a) + y, x \rangle \\ &= \langle Sq(ySq^{-1}a) + Sq^{-1}a(ySq^{-1}a), x \rangle \\ &= \langle Sqb + vb, x \rangle \end{aligned}$$

où $b = ySq^{-1}a$. (On a $(Sq^{-1}a)^2 = 1$ puisque les carrés des éléments de degrés positifs sont nuls.)

Donc, si $\langle Sqb + vb, x \rangle = 0, x \in \text{Im } \tau_*$. $\square$

Démonstration de 2.4. — La condition est nécessaire. Soit réciproquement V une variété dont les nombres caractéristiques contenant des carrés sont nuls. Appelons x la classe de V dans $\mathcal{N}_*$. On veut montrer que $x \in \text{Im } \theta$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_* L & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{N}_* \\ \tau_* \downarrow & & \downarrow \tau_* \\ H_* \Lambda & \xrightarrow{j_*} & H_* \text{BO} \end{array}$$

dans lequel toutes les applications sont injectives. L'hypothèse sur les nombres de Stiefel-Whitney de V est exactement $\langle y, \tau'_* x \rangle = 0$ quand $y \in \ker j^*$, soit $\tau'_* x \in \text{Im } j_*$. On écrit $\tau'_* x = j_* z$.

Les nombres caractéristiques de V sont liés par les relations de Wu, soit : $b \in H^* \text{BO}, v' = Sq^{-1} w$ la classe de Wu

$$0 = \langle Sq b + v' b, \tau'_* x \rangle = \langle Sq b + v' b, j_* z \rangle = \langle Sq(j^* b) + v j^* b, z \rangle.$$

Comme j^* est surjective, on a :

$$\langle Sq c + v c, z \rangle = 0, \forall c \in H^* \Lambda,$$

soit (2.5) $z \in \text{Im } \tau_*$.

Soit W avec $z = \tau_* [W]$. On a : $\tau'_* \theta [W] = j_* \tau_* [W] = \tau'_* x$, et donc $x = \theta [W] \in \text{Im } \theta$. $\square$

3. Une "suite exacte de Rokhlin" ; l'anneau SL_* .

Il ne peut y avoir de suite exacte de Rokhlin liant $\mathcal{R}L_*$ et L_* : par exemple, $L_1 = \mathbb{Z}, \mathcal{R}L_1 = 0$ [2]. Ceci est lié au fait que $\pi_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$, ce qui fait que le revêtement double $\tilde{\Lambda}$ a aussi un groupe fondamental infini cyclique, en particulier $H^1(\tilde{\Lambda}; \mathbb{Z}) \neq 0$: les fibrés "lagrangiens" orientés ont une classe caractéristique en dimension 1, la classe de Maslov β_0 . Nous allons tuer ce groupe pour obtenir une suite exacte de Rokhlin ; pour cela nous allons définir une nouvelle notion de cobordisme, liée au revêtement universel de Λ .

3.1. *Remarque.* — Le revêtement universel de Λ_n est

$$\mathbb{R} \times (\text{SU}(n)/\text{SO}(n)).$$

En effet, on a un homéomorphisme : $S^1 \times \text{SU}(n) \longrightarrow \text{U}(n)$ qui induit un homéomorphisme :

$$S^1 \times (\text{SU}(n)/\text{SO}(n)) \longrightarrow \text{U}(n)/\text{SO}(n)$$

et donc $\mathbb{R} \times (\text{SU}(n)/\text{SO}(n))$ est le revêtement universel de $\tilde{\Lambda}_n$ et donc aussi celui de Λ_n .

Ce revêtement universel a donc le type d'homotopie de $\text{SU}(n)/\text{SO}(n)$.

Appelons $S_{\pm}U(n)$ le sous-groupe de $U(n)$ formé des matrices de déterminant égal à ± 1 , et $S_{\pm}U$ le sous-groupe de U correspondant.

3.2. DEFINITIONS. — a) Une $S_{\pm}U$ -trivialisatıon d'un fibré vectoriel réel $\xi \rightarrow X$ est une homotopie à l'application constante de la composition $X \xrightarrow{\xi} BO \rightarrow BS_{\pm}U$.

b) Une SU -trivialisatıon d'un fibré vectoriel réel orienté $\xi \rightarrow X$ est une homotopie à l'application constante de la composition $X \xrightarrow{\xi} BSO \rightarrow BSU$.

c) Une variété (resp. orientée) est dite $S_{\pm}U$ -parallélisée (resp. SU -parallélisée) si on a donné une $S_{\pm}U$ -trivialisatıon (resp. une SU -trivialisatıon) de son fibré tangent.

3.3. Remarque. — Un fibré $S_{\pm}U$ trivialisé est orientable.

En effet $S_{\pm}U$ a deux composantes connexes, donc l'application $BO \rightarrow BS_{\pm}U$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux. Donc, si la composition

$$X \xrightarrow{\xi} BO \rightarrow BS_{\pm}U$$

est triviale, $\xi_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(BO)$ est nulle et ξ possède un relèvement à BSO .

En particulier, les variétés $S_{\pm}U$ -parallélisées sont orientables.

3.4. DEFINITIONS. — a) On appelle SL_k le groupe de cobordisme des variétés SU -parallélisées de dimension k .

b) On note $SA_n = SU(n)/SO(n)$, $S\lambda_n$ le fibré vectoriel réel de rang n déduit de λ_n sur SA_n , $MS\lambda_n$ son espace de Thom, $MS\lambda$ le spectre de Thom associé, $S\Lambda = SU/SO$.

Une construction de Thom-Pontrjagin donne :

3.5. PROPOSITION. — $SL_k \cong \pi_k(MS\lambda)$.

On a des applications naturelles : $SL_* \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}L_*$ et $SL_* \xrightarrow{F} L_*$.

L'intérêt de l'introduction de SL_* , comme intermédiaire dans le calcul de L_* , provient des résultats suivants :

3.6. THEOREME. — La suite $SL_* \xrightarrow{\times 2} SL_* \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}(L_*)$ est exacte.

3.7. THEOREME. — a) Le groupe SL_* est facteur direct dans L_* ; plus précisément, on a une suite exacte de groupes munie d'un scindage naturel

$$0 \longrightarrow SL_* \xrightarrow{F} L_* \xrightarrow[\sigma]{d} SL_{*-1} \longrightarrow 0.$$

b) Si X est le générateur de L_1 , F et σ induisent un isomorphisme d'anneaux : $SL_* \oplus SL_* \cdot X \rightarrow L_*$, la multiplication sur $SL_* \oplus SL_* \cdot X$ étant définie par celle de SL_* et $X^2 = 0$.

Démonstration de 3.6. — Soit V une variété SU-parallélisée; on suppose qu'elle est le bord d'une variété U-parallélisée W .

Soit h la composition : $W \xrightarrow{\tau} \Lambda \xrightarrow{D} S^1$, où $D: \Lambda \rightarrow S^1$ est la fibration déduite de $U(n) \xrightarrow{\det^2} S^1$ (la fibre de D est $S_{\pm} U/O \cong SU/SO = SA$), et τ classe la U-parallélisation de W .

Comme V est SU-parallélisée, on a un relèvement de $\tau|_V$ à SA , donc $h|_V$ est constante égale à 1.

Soit $z \in S^1 - \{1\}$ une valeur régulière de h , et soit L la sous-variété $h^{-1}(z) \subset W$.

Si $L \neq \emptyset$, L est de codimension 1 dans W et son fibré normal est trivial par définition. Soit N l'intérieur d'un voisinage tubulaire de L dans W , et soit $M = W - N$.

Comme $S^1 - \{z\}$ se rétracte sur le point $1 \in S^1$, la variété M est $S_{\pm} U$ -parallélisable. On peut alors choisir (d'après 3.3) une orientation, puis une SU-parallélisation de M , compatible avec la U-parallélisation donnée de W et induisant sur $V \subset \partial M$ la SU-parallélisation donnée de V .

Cette SU-parallélisation de M induit une SU-parallélisation de l'autre partie du bord de M ; c'est-à-dire $\partial \bar{N} = L \amalg L$. Comme L est $S_{\pm} U$ -parallélisable en même temps que M , les SU-parallélisations obtenues sur les deux exemplaires de L formant le bord de $\bar{N}$ sont, soit identiques, soit opposées (mêmes $S_{\pm} U$ -parallélisations, orientations opposées).

M réalise donc un cobordisme SU-parallélisé entre V et $L \pm L$, et donc la classe de V est dans l'image de la multiplication par 2. $\square$

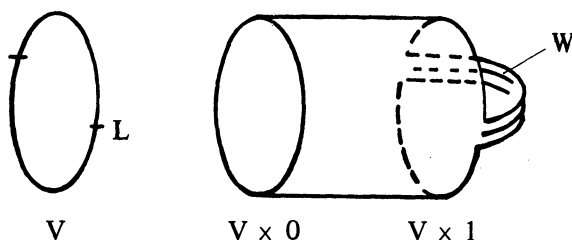
Démonstration de 3.7. — a) Soit $\tilde{D} : \tilde{\Lambda} \rightarrow S^1$ la fibration déduite de $U(n) \xrightarrow{\det} S^1$ (la fibre de $\tilde{D}$ est $S\Lambda$).

Définissons $d : L_* \rightarrow SL_{*-1}$. Si V est une variété U-parallélisée de dimension n , on lui associe la variété SU-parallélisée $L = f^{-1}(1)$ où f est la composition $V \xrightarrow{\tau} \Lambda \xrightarrow{\tilde{D}} S^1$ supposée régulière le long de $f^{-1}(1)$ (L représente la classe de Maslov de V).

Exactitude de $SL_* \xrightarrow{F} L_* \xrightarrow{d} SL_{*-1}$. Soit V une variété U-parallélisée, $f : V \xrightarrow{\tau} \tilde{\Lambda} \xrightarrow{\tilde{D}} S^1$ et $L = f^{-1}(1)$, sous-variété de codimension 1 de V . On suppose que L est le bord d'une variété SU-parallélisée W , on veut montrer que V est cobordante à une variété SU-parallélisée.

Le fibré normal de L dans V est trivialisé. Soit $N = L \times [0, 1]$ un voisinage tubulaire de L dans V . Définissons

$$M = V \times [0, 1] \cup W \times [0, 1] / (N \times \{1\}) \\ \cong L \times [0, 1] \times \{1\} \cong \partial W \times [0, 1].$$



La variété (lissée) M possède une U-parallélisation naturelle, son bord est formé de $V \times 0$ et d'une variété P dont il suffit de vérifier qu'elle est SU-parallélisée. Elle est formée de $V - N$, qui possède une SU-parallélisation naturelle (L est la classe de Maslov de V) et de $W \times 0 \cup W \times 1$ qui ont une SU-parallélisation déduite de celle de W . Ces deux SU-parallélisations coïncident sur l'intersection $(W \times 0 \cup W \times 1) \cap (V - N) \cong L \sqcup L$ (elles induisent toutes les deux la SU-parallélisation naturelle de L).

Définissons le scindage σ . Soit $X \in L_1$ le générateur, on définit $\tilde{\sigma} : L_{*-1} \rightarrow L_*$, la multiplication par X , et $\sigma : SL_{*-1} \rightarrow L_*$ de la même façon. Si V est une variété SU-parallélisée, et si S^1 est muni de la U-parallélisation déduite du plongement standard $S^1 \subset \mathbb{C}$, on associe la variété U-parallélisée $V \times S^1$ à V .

On a : $d \circ \sigma = \text{id}_{SL_{*-1}}$: Si V est SU-parallélisée, on doit vérifier que $V \times \{1\} \subset V \times S^1$ est la classe de Maslov de la variété U-parallélisée $V \times S^1$, autrement dit que $V \times \{1\} = f^{-1}(1)$, où f est la composition

$$V \times S^1 \xrightarrow{\tau'} \tilde{\Lambda} \xrightarrow{\tilde{D}} S^1.$$

L'application classifiante τ' se décompose en :

$$V \times S^1 \xrightarrow{\tau \times 1} SA \times S^1 \xrightarrow{m} \tilde{\Lambda}$$

où τ est l'application classifiante de V , et $m : SA \times S^1 \rightarrow \tilde{\Lambda}$ est l'homéomorphisme déduit de :

$$SU(n) \times S^1 \rightarrow U(n)$$

$$(A, z) \mapsto A \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1_z \end{pmatrix}$$

et la composition $SA \times S^1 \xrightarrow{m} \tilde{\Lambda} \xrightarrow{\tilde{D}} S^1$ est la projection sur le facteur S^1 .

On a donc une suite exacte, scindée par σ :

$$SL_* \xrightarrow{F} L_* \xrightleftharpoons[\sigma]{d} SL_{*-1} \rightarrow 0.$$

Il reste à montrer que F est l'inclusion d'un facteur direct. Considérons la composition $d\tilde{\sigma} : L_* \rightarrow SL_*$. Il suffit de montrer que $d\tilde{\sigma}F = \text{id}_{SL_*}$; or, $\tilde{\sigma}F = \sigma$ par définition donc $d\tilde{\sigma}F = d\sigma = \text{id}_{SL_*}$.

On a donc bien une suite exacte :

$$0 \rightarrow SL_* \xrightleftharpoons[d\tilde{\sigma}]{F} L_* \xrightleftharpoons[\sigma]{d} SL_{*-1} \rightarrow 0.$$

b) Tout élément x de L_* s'écrit donc de façon unique sous la forme $x = y + \sigma(z)$ où $y, z \in SL_*$. Comme F est injective, on peut considérer SL_* comme un sous-anneau de L_* et écrire $\sigma(z) = zX$; pour montrer 3.7.b), il suffit donc de vérifier que $X^2 = 0$ dans L_* , ceci est clair puisque $L_2 = 0$ (1.10) (je ne connais pas de démonstration directe de l'égalité $X^2 = 0$). $\square$

Dans la suite, nous calculerons donc avec SL_* et nous utiliserons 3.7.b) pour en déduire des résultats sur L_* .

4. Partie 2-primaire de L_* .

Nous allons montrer qu'il existe une équivalence d'homotopie 2-primaire

$$\widetilde{M\lambda} \longrightarrow \bigvee_{\alpha} K(\mathbb{Z}/2, * + n_{\alpha}) \vee \bigvee_I K(\mathbb{Z}, * + n_I),$$

et étudier l'image de L_* dans $\mathcal{H}L_*$ et dans Ω_*^{SO} (cobordisme des variétés orientées).

Utilisant les résultats précédents, nous devons calculer la cohomologie modulo 2 de $MS\lambda$.

Rappelons qu'un module sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}$ est dit "simple" s'il se décompose en une somme de $\mathcal{A}$ -modules "de type $\mathcal{G}$ " c'est-à-dire engendrés par un générateur y avec l'unique relation $Sq^1 y = 0$ (le modèle-type est $H^*(K(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2)$) et de $\mathcal{A}$ -modules libres.

4.1. PROPOSITION. — i) $H^*(MS\lambda; \mathbb{Z}/2)$ est un $\mathcal{A}$ -module simple.

ii) Si on écrit $H^*(MS\lambda; \mathbb{Z}/2) = L \oplus M$, où L est libre et M "de type $\mathcal{G}$ ", on peut choisir une " $\mathcal{A}$ -base" de M formée des réductions modulo 2 des classes

$$Ub_{2i_1} \dots b_{2i_k} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_k),$$

où U est la classe de Thom et les b_{2j} sont les classes de Fuks.

Démonstration. — i) Wall a donné un critère algébrique très pratique [21]: Un $\mathcal{A}$ -module B est simple s'il entre

dans une suite exacte de $\mathcal{A}$ -modules :

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0,$$

où C est libre, f de degré 1, et g de degré 0.

Soit $i: S\Lambda \longrightarrow \Lambda$ l'inclusion naturelle (rappelons qu'au type d'homotopie près, c'est le revêtement universel), et soit $\varphi: MS\Lambda \longrightarrow M\Lambda$ l'application "thomifiée". On a une suite exacte de $\mathcal{A}$ -modules :

$$0 \longrightarrow \ker \varphi^* \longrightarrow H^*(M\Lambda; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(MS\Lambda; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0,$$

et un isomorphisme de degré 1, $f: H^*(MS\Lambda; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \ker \varphi^*$

$$Ux \longmapsto Ua_1x$$

(en effet, $a_1^2 = 0$ et donc la notation a bien un sens ; l'application f est un morphisme de $\mathcal{A}$ -modules aussi parce que $a_1^2 = 0$, c'est un isomorphisme pour la même raison). On a donc :

$$0 \longrightarrow H^*(MS\Lambda; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{f} H^*(M\Lambda; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{g} H^*(MS\Lambda; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

et $H^*(M\Lambda; \mathbb{Z}/2)$ est $\mathcal{A}$ -libre d'après 2.3.

ii) Wall a aussi remarqué qu'on pouvait choisir comme " $\mathcal{A}$ -base" de M un système de représentants d'une $\mathbb{Z}/2$ -base de $\ker Sq^1 / \text{Im } Sq^1$ dans $H^*(MS\Lambda; \mathbb{Z}/2)$. Ecrivons, pour simplifier, a_i pour $\varphi^* a_i$ ($i \geq 2$). A l'aide des formules de Wu, il est facile de constater que $Sq^1(Ua_{i_1} \dots a_{i_k}) = 0$ si et seulement si $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ est un produit de termes d'une des deux formes :

$$\begin{cases} a_{2j+1} \\ a_{2\ell} a_{2\ell+1} \end{cases}$$

Remarquons aussi que, si $Sq^1 x = 0$, alors

$$Sq^1(a_{2j}x) = a_{2j+1}x,$$

et donc, si $Ua_{i_1} \dots a_{i_k} \in \ker Sq^1$ et contient un terme a_{2j+1} isolé, alors $Ua_{i_1} \dots a_{i_k} \in \text{Im } Sq^1$. Pour démontrer (ii), il ne reste plus qu'à vérifier que $Ua_{2\ell_1} a_{2\ell_1+1} \dots a_{2\ell_k} a_{2\ell_k+1}$ n'est pas dans l'image de Sq^1 . $\square$

Soit maintenant $(x_\alpha)_\alpha$ une $\mathcal{A}$ -base de la partie libre L de $H^*(MS\lambda; \mathbb{Z}/2)$, et

$$f: MS\lambda \longrightarrow \bigvee_{\alpha} K(\mathbb{Z}/2, * + n_{\alpha}) \quad (n_{\alpha} = \deg(x_{\alpha}))$$

l'application décrivant ces classes. Pour toute suite I (éventuellement vide) d'entiers distincts $(I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad 1 \leq i_1 < \dots \leq i_k)$, soit $g_I: MS\lambda \longrightarrow K(\mathbb{Z}, * + n_I)$ ($n_I = \sum (4i_q + 1)$) l'application associée à la classe $U b_{2i_1} \dots b_{2i_k} \in H^*(MS\lambda; \mathbb{Z})$.

En faisant le bouquet de f et des g_I , on obtient une application :

$$F: MS\lambda \longrightarrow \bigvee_{\alpha} K(\mathbb{Z}/2, * + n_{\alpha}) \vee \bigvee_I K(\mathbb{Z}, * + n_I).$$

4.2. THEOREME. — F est une équivalence d'homotopie 2-primaire.

Démonstration. — F induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle, et en cohomologie modulo 2. $\square$

4.3. COROLLAIRE. — La torsion 2-primaire de SL_* et de L_* est d'ordre 2 exactement. $\square$

4.4. COROLLAIRE. — Les éléments de SL_* et de L_* sont déterminés, modulo la torsion impaire, par leurs nombres de Stiefel-Whitney et leurs nombres caractéristiques de Fuks. $\square$

4.5. COROLLAIRE. — Les inclusions de la fibre $S^k \hookrightarrow MS\lambda_k$, $S^k \hookrightarrow \widetilde{M}\lambda_k$ induisent des homomorphismes :

$$\alpha: \Omega_n^{fr} \longrightarrow SL_n; \quad F \circ \alpha: \Omega_n^{fr} \longrightarrow L_n$$

qui annulent la torsion 2-primaire de Ω_n^{fr} .

Démonstration. — Si V est stablement parallélisée, son image est V , munie de la SU-parallélisation complexifiée de la SO-parallélisation donnée. Or, il est clair que les classes de Fuks d'un fibré dont la U-trivialisation est complexifiée d'une trivialisation réelle sont nulles. $\square$

En calculant un peu plus, on peut montrer

4.6. THEOREME. — Pour tout $k \geq 1$, on peut trouver un élément $X_{4k+1} \in SL_{4k+1}$, tel que $b_{2k}(X_{4k+1})$ est impair et

a) Les X_{4k+1} ($k \geq 1$) engendrent (rationnellement) l'algèbre extérieure $SL_* \otimes \mathbb{Q}$.

b) Les images $\rho(X_{4k+1})$ peuvent être choisies comme générateurs polynômiaux de dimension $4k+1$ de $\mathfrak{N}L_*$.

(Les éléments X_{4k+1}^2 sont alors d'ordre 2 exactement dans SL_* . On obtient un énoncé analogue pour L_* en rajoutant le générateur X de L_1 , dont le carré est nul, par 3.7.)

La démonstration est basée sur le

4.7. LEMME. — Le polynôme de Newton s_{2k+1} s'écrit, dans $H^*(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$:

$$s_{2k+1} = a_{2k+1} + a_1 a_{2k} + \dots + a_k a_{k+1},$$

de plus :

$$\begin{cases} s_{4k+1} \equiv a_{2k} a_{2k+1} = \rho b_{2k} \pmod{\text{Im } Sq^1} \\ s_{4k+3} \in \text{Im } Sq^1. \end{cases}$$

□

On en déduit 4.6, sachant que $L_* \otimes \mathbb{Q}$ est extérieure (1.0), et $\mathfrak{N}L_*$ polynômiale. On déduit aussi de 4.7 que, dans $H^*(MS\lambda; \mathbb{Z}/2)$, $Us_{4k+3} \in \text{Im } Sq^1$, et donc, comme cette classe détecte le générateur de degré $4k+3$ dans $\mathfrak{N}L_*$, celui-ci ne peut être choisi dans l'image de SL_* .

4.8. THEOREME. — i) Un élément de $\mathfrak{N}L_*$ est dans l'image de l'application naturelle $L_* \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathfrak{N}L_*$ si et seulement si tous ses nombres de Stiefel-Whitney contenant w_1 sont nuls.

ii) Un élément de Ω_*^{SO} est dans l'image de l'application naturelle $L_* \xrightarrow{\tilde{\theta}} \Omega_*^{SO}$ si et seulement si tous ses nombres de Pontrjagyn, et tous ses nombres de Stiefel-Whitney contenant des carrés sont nuls.

iii) Les noyaux des deux applications naturelles $L_* \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathfrak{N}L_*$ et $L_* \xrightarrow{\tilde{\theta}} \Omega_*^{SO}$ coïncident et sont égaux à

$$2L_* + \sigma(SL_{*-1}) \subset L_*.$$

Démonstration. — i) On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{SL}_* \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\tau''_*} & \mathrm{H}_*(\mathrm{SA}; \mathbb{Z}/2) \\
 \rho_2 \downarrow & & \downarrow i_* \\
 \mathfrak{N}L_* & \xrightarrow{\tau_*} & \mathrm{H}_*(\Lambda; \mathbb{Z}/2)
 \end{array}$$

où τ''_* est défini comme τ_* (cf. 2.4). L'application ρ_2 est injective d'après 3.6, i_* est injective (c'est la transposée de

$$\mathrm{H}^*(\Lambda; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^*(\mathrm{SA}; \mathbb{Z}/2)$$

dont le noyau est précisément l'idéal engendré par a_1), et τ''_* est injective d'après 4.4.

Donc, si $x \in \mathfrak{N}L_*$, $x \in \mathrm{Im} \rho_2$ si et seulement si tous les nombres de Stiefel-Whitney de x contenant a_1 sont nuls. Il est clair que $\mathrm{Im} \rho_2 = \mathrm{Im} \rho$, $\rho : \mathrm{SL}_* \rightarrow \mathfrak{N}L_*$, et que $\mathrm{Im} \rho = \mathrm{Im} \tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} : L_* \rightarrow \mathfrak{N}L_*$ d'après 3.7.

ii) De même, soit $\theta' : \mathrm{SL}_* \rightarrow \Omega_*^{\mathrm{SO}}$.

Comme $L_* = \mathrm{SL}_* \oplus \sigma(\mathrm{SL}_{*-1})$, $\mathrm{Im} \tilde{\theta} = \mathrm{Im} \theta$, θ est à valeurs dans la torsion (les nombres de Pontrjagyn sont nuls), et donc l'image de $\tilde{\theta}$ s'identifie à l'image de :

$$\theta'_2 : \mathrm{SL}_* \otimes \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Z}/2.$$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{SL}_* \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\rho_2} & \mathfrak{N}L_* \\
 \theta'_2 \downarrow & & \downarrow \theta \\
 \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{N}_*
 \end{array}$$

où toutes les applications sont injectives. On déduit donc le résultat de 2.4.

iii) Les noyaux de $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$ s'identifient donc à

$$\sigma(\mathrm{SL}_{*-1}) \oplus K_*,$$

où K_* est le noyau de $\mathrm{SL}_* \longrightarrow \mathrm{SL}_* \otimes \mathbb{Z}/2$, soit l'image de la multiplication par 2. $\square$

5. Des informations sur la partie impaire de L_* .

Les résultats précédents, particulièrement les parties 2 et 4, montrent que (en dehors de la torsion impaire), $\mathcal{H}L_*$ et L_* se comportent comme les groupes de cobordisme classiques $\mathcal{H}_*$ et Ω_*^{SO} : ils sont entièrement détectés par les nombres caractéristiques ad hoc.

Nous allons montrer qu'il en est tout autrement de la torsion impaire de L_* . En particulier, L_* contient (au moins 2 fois) la partie impaire des groupes d'homotopie des sphères.

La remarque de base pour cette partie est une évidence : les fibrés λ_n , $\tilde{\lambda}_n$ ou $S\lambda_n$ ont, par définition, des complexifiés triviaux, en particulier, dans la K-théorie réelle des espaces considérés, ils définissent des éléments d'ordre 2.

Nous allons donc démontrer

5.1. THEOREME. — *Il existe une équivalence d'homotopie (en dehors de 2) :*

$$S^\infty(\mathrm{SA}^+) \longrightarrow \mathrm{MS}\lambda.$$

5.2. COROLLAIRE. — a) $\alpha : \Omega_n^{\mathrm{fr}} \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \longrightarrow \mathrm{SL}_n$ est injective ($n > 0$) et $\mathrm{SL}_n \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \cong \mathrm{Im}(\alpha) \oplus \pi_n^s(\mathrm{SA}) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$.

b) $\sigma \circ \alpha : \Omega_{n-1}^{\mathrm{fr}} \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \longrightarrow L_n$ est injective ($n > 1$) et

$$L_n \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \cong \mathrm{Im}(\alpha) \oplus \pi_n^s(\mathrm{SA}) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \\ \oplus \mathrm{Im}(\sigma \circ \alpha) \oplus \pi_{n-1}^s(\mathrm{SA}) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right].$$

Démonstration de 5.2. — C'est une conséquence immédiate de 5.1 et 4.5 pour a), de 5.2.a) et de 3.7 pour b). $\square$

La suite de cette partie est consacrée à la démonstration de 5.1.

Considérons la multiplication :

$$\mu : S\Lambda_n \times S\Lambda_n \longrightarrow S\Lambda_{2n}$$

$$(P, Q) \mapsto P \oplus Q$$

(où l'on pense à $S\Lambda_n \subset \tilde{\Lambda}_n$, grassmannienne des lagrangiens orientés de $\mathbf{C}^n$), et la diagonale :

$$\Delta : S\Lambda_n \longrightarrow S\Lambda_n \times S\Lambda_n.$$

On a : $\Delta^* \mu^* S\Lambda_{2n} = S\Lambda_n \oplus S\Lambda_n \cong_{\mathbf{R}} S\Lambda_n \otimes \mathbf{C} \cong_{\mathbf{R}} \epsilon^{2n}$. On en déduit une application $\varphi_n = (M\mu) \circ (M\Delta)$ au niveau des espaces de Thom :

$$\varphi_n : S^{2n} \wedge (S\Lambda_n^+) = M\epsilon^{2n} \xrightarrow{M\Delta} MS\Lambda_n \wedge MS\Lambda_n \xrightarrow{M\mu} MS\Lambda_{2n}.$$

Désignons par A un anneau dans lequel 2 est inversible.

5.3. LEMME. — $\varphi_n^* : \tilde{H}^{2n+k}(MS\Lambda_{2n}; A) \longrightarrow \tilde{H}^{2n+k}(S^{2n} \wedge (S\Lambda_n^+); A)$ est un isomorphisme pour $k \leq n - 1$.

Démonstration. — On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{2n+k}(MS\Lambda_{2n}; A) & \xrightarrow{\varphi_n^*} & \tilde{H}^{2n+k}(S^{2n} \wedge (S\Lambda_n^+); A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^k(S\Lambda_{2n}; A) & \xrightarrow{(\mu \circ \Delta)^*} & H^k(S\Lambda_n; A) \end{array} \quad (*)$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes de Thom.

Il suffit donc de montrer que $(\mu \circ \Delta)^*$ est un isomorphisme pour $k \leq n - 1$.

Appelons encore $\mu : S\Lambda \times S\Lambda \longrightarrow S\Lambda$. Le lemme suivant suffit à finir la démonstration de 5.3.

5.4. LEMME. — $\mu^* \beta_{2j} = \beta_{2j} \otimes 1 + 1 \otimes \beta_{2j} \in H^{4j+1}(S\Lambda \times S\Lambda; A)$.

On a alors $(\mu \circ \Delta)^* \beta_{2j} = 2\beta_{2j}$ et 2 est inversible dans A . $\square$

Démonstration de 5.4. — On peut déduire ce résultat de la thèse de Borel [6]: les β_{2j} sont construits à l'aide des générateurs universellement transgressifs de H^*U , qui sont primitifs pour la structure de coalgèbre définie par la multiplication du groupe U , et il est classique que les deux structures de coalgèbre coïncident.

Comme ce lemme permet de montrer que $H_*(SA; A)$ muni du produit défini par μ_* est une algèbre extérieure (1.4) (résultat que nous avons déjà utilisé avec $A = \mathbb{Q}$), nous allons en donner une démonstration directe (mais pas fondamentalement différente des arguments ci-dessus!).

Remarquons tout d'abord que β_{2j} est parfaitement défini par $\tau\beta_{2j} = 2c_{2j+1}$ où τ est la transgression de la fibration $SA \longrightarrow BSO \xrightarrow{p} BSU$; deux choix possibles ne peuvent différer que par l'image d'un élément de $H^{4j+1}(BSO; A) = 0$ (car $\frac{1}{2} \in A$).

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 SA \times SA & \xrightarrow{j \times j} & BSO \times BSO & \xrightarrow{p \times p} & BSU \times BSU \\
 \mu \downarrow & & \mu \downarrow & & \mu \downarrow \\
 SA & \xrightarrow{j} & BSO & \xrightarrow{p} & BSU
 \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\delta \mu^* \beta_{2j} = \tilde{p}^* (2c_{2j+1} \otimes 1 + 1 \otimes 2c_{2j+1}),$$

$$\text{où } p^* : H^*(BSU; A) \cong H^*(BSU, pt; A) \longrightarrow H^*(BSO, SA; A)$$

$$\text{et } \delta : H^*(SA; A) \longrightarrow H^{*+1}(BSO, SA; A)$$

sont les applications évidentes définissant la transgression (on a $\delta\beta_{2j} = \tilde{p}^*(2c_{2j+1})$).

Connaissant

$$\mu^* c_{2j+1} = c_{2j+1} \otimes 1 + \sum_{k+l=2j+1} c_k \otimes c_l + 1 \otimes c_{2j+1},$$

il suffit de vérifier que, si $k, \ell > 0$,

$$p \widetilde{\times} p^* (2c_{2k} \otimes c_{2\ell+1}) = 0.$$

On contemple le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{4k}(\text{BSU}) \otimes H^{4\ell+2}(\text{BSU}) & \xrightarrow{\quad \times \quad} & H^{4k+4\ell+2}(\text{BSU} \times \text{BSU}) \\
 \downarrow p^* \otimes \widetilde{p}^* & & \downarrow p \widetilde{\times} p^* \\
 H^{4k}(\text{BSO}) \otimes H^{4\ell+2}(\text{BSO}, \text{SA}) & & \\
 \downarrow \times & & \\
 H^{4k+4\ell+2}(\text{BSO} \times \text{BSO}, \text{BSO} \times \text{SA}) & \xrightarrow{j^*} & H^{4k+4\ell+2}(\text{BSO} \times \text{BSO}, \text{SA} \times \text{SA}) \\
 \uparrow \delta' & & \uparrow \delta \\
 H^{4k+4\ell+1}(\text{BSO} \times \text{SA}) & \xrightarrow{j'^*} & H^{4k+4\ell+1}(\text{SA} \times \text{SA})
 \end{array}$$

où l'on voit $(p \widetilde{\times} p)^* (c_{2k} \otimes 2c_{2\ell+1}) = j^* (p_k \times \widetilde{p}^* (2c_{2\ell+1}))$ (où $p_k = p^* c_{2k}$ est la classe de Pontrjagyn). On a :

$$p_k \times \widetilde{p}^* (2c_{2\ell+1}) = \delta' (p_k \otimes \beta_{2\ell}) \text{ par définition de } \beta_{2\ell},$$

et donc :

$$(p \widetilde{\times} p)^* (c_{2k} \otimes 2c_{2\ell+1}) = j^* \delta' (p_k \otimes \beta_{2\ell}),$$

$$= \delta j'^* (p_k \otimes \beta_{2\ell})$$

$$= 0 \text{ car } p_k \text{ s'annule dans SA.} \quad \square$$

Finissons maintenant la démonstration de 5.1.

Les applications φ_n entrent dans des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^2 (S^{2n} \wedge (S\Lambda_n^+)) & \xrightarrow{\Sigma^2 \varphi_n} & \Sigma^2 MS\lambda_{2n} \\
 \downarrow & & \downarrow (*) \\
 S^{2n+2} \wedge (S\Lambda_n^+) & & \\
 \downarrow (*) & & \\
 S^{2n+2} \wedge (S\Lambda_{n+1}^+) & \xrightarrow{\varphi_n} & MS\lambda_{2(n+1)}
 \end{array}$$

où les deux flèches (*) sont induites par les inclusions

$$S\Lambda_n \longrightarrow S\Lambda_{n+1} \quad \text{et} \quad S\Lambda_{2n} \longrightarrow S\Lambda_{2(n+1)}$$

respectivement.

Autrement dit, les φ_n définissent une application $\varphi: E \longrightarrow F$ de spectres, où E est le spectre décrit par la flèche verticale de gauche, équivalent à $S^\infty(S\Lambda^+)$, et F celui décrit par la flèche verticale de droite, équivalent à $MS\lambda$. Le lemme 5.3 dit alors précisément que φ est une équivalence d'homotopie en dehors de 2. $\square$

Le théorème 5.1 montre que la structure d'anneau de SL_* (et L_*) est assez compliquée, en particulier $L_*/\text{Torsion}$ n'est pas une algèbre extérieure. En effet, en utilisant les méthodes et résultats de [16], on peut vérifier :

5.5. Remarque. — Soient $X_{4n+1}, X_{4n+2p-1}$ des éléments de $SL_{4n+1}, SL_{4n+2p-1}$ (p nombre premier impair) vérifiant les propriétés de 4.6. Alors, le produit $X_{4n+1} X_{4n+2p-1}$ est divisible par p (modulo torsion). $\square$

(Cette remarque est due à Lionel Schwartz.)

En particulier, si Y_5, Y_9 sont les générateurs de L_5 et L_9 respectivement, il existe un élément Z de L_{14} tel que $Y_5 Y_9 = 3Z \pmod{\text{torsion}}$.

6. Les sphères lagrangiennes.

Considérons la trivialisisation stable de TS^n , déduite du plongement usuel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On en déduit une U-parallélisation de S^n , notée $\mathfrak{V}$.

Toute autre U-parallélisation de S^n se déduit de $\mathfrak{V}$ par multiplication par une application : $S^n \longrightarrow U(n)$.

L'application qui, à une trivialisisation complexe de $TS^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, associe la classe de cobordisme correspondante sera notée :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{C}} : \pi_n U \longrightarrow L_n.$$

On peut la décrire en termes de spectre de la façon suivante : Soit $f : S^n \longrightarrow U(k)$ ($k \geq n+1$) ; on considère la composition :

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{f} & U(k) & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\Lambda}_k \\ & & & & \downarrow \tilde{\lambda}_k \\ & & & & \tilde{\Lambda}_k \end{array}$$

(π est la projection canonique). Le fibré $(\pi \circ f)^* \tilde{\lambda}_k$ est le fibré tangent (stable) de S^n , il est donc trivial.

On en déduit une application :

$$S^{n+k} = S^n \wedge S^k = M((\pi \circ f)^* \tilde{\lambda}_k) \longrightarrow M\tilde{\lambda}_k$$

dont la classe d'homotopie est $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}[f]$.

Remarquons que l'application analogue dans $\mathcal{H}L_n$ est nulle d'après 2.2.a).

De même que pour le J-homomorphisme classique, on a facilement (comme conséquence du théorème de Gromov-Lees) :

6.1. PROPOSITION. — *L'image de $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ décrit exactement l'ensemble des classes de cobordisme qui peuvent se représenter par des sphères.* $\square$

Il est clair que $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ est un homomorphisme de groupes. Appelons $\mathfrak{S}_n$ son image : c'est donc le groupe des classes de cobordisme qui peuvent se représenter par des sphères.

On a immédiatement :

6.2. *Remarque.* — $\mathfrak{S}_n$ est nul si n est pair.

En effet $\pi_n U = 0$ dans ce cas. $\square$

Donc, toutes les immersions lagrangiennes de S^{2n} dans $\mathbb{C}^{2n}$ sont cobordantes à zéro.

On a aussi, pratiquement par définition

6.3. *Remarque.* — Soit $J : \pi_n(\mathrm{SO}) \rightarrow \Omega_n^{fr}$ le J -homomorphisme, et soit $c : \pi_n \mathrm{SO} \rightarrow \pi_n U$ l'application naturelle de complexification. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathrm{SO}) & \xrightarrow{J} & \Omega_n^{fr} \\ \downarrow c & & \downarrow \alpha \\ \pi_n(U) & \xrightarrow{\mathcal{I}_c} & L_n \end{array}$$

est commutatif. $\square$

Or, dans le cas où $n \equiv 1 \pmod{4}$, c est nulle, par contre, si $n \equiv 3 \pmod{4}$, c est une injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Donc, les études de $\mathfrak{S}_{4k+1}$ et $\mathfrak{S}_{4k+3}$ sont très différentes. Commençons par $\mathfrak{S}_{4k+1}$.

6.4. *THEOREME.* — $\mathcal{I}_c : \pi_{4k+1} U \rightarrow L_{4k+1}$ est injective ; plus précisément, le nombre caractéristique associé à β_{2k} définit un homomorphisme injectif $\beta_{2k} : \mathfrak{S}_{4k+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ dont l'image est $2(2k)! \mathbb{Z}$.

6.5. *COROLLAIRE.* — On peut choisir des sphères pour engendrer l'algèbre extérieure $L_* \otimes \mathbb{Q}$. $\square$

Démonstration de 6.4. — Comme $\pi_{4k+1} U \cong \mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_{4k+1}$ est un quotient de $\mathbb{Z}$; il suffit donc de montrer la deuxième assertion.

Soit $f : S^{4k+1} \rightarrow U$ une application, et soit $\pi : U \rightarrow \tilde{\Lambda}$ la projection.

On considère la composition :

$$j \circ \pi \circ f : S^{4k+1} \longrightarrow U \xrightarrow{\pi} \tilde{\Lambda} \subset BSO.$$

$j \circ \pi \circ f$ est homotope à l'application constante dans BSO . On peut donc trouver un prolongement de $j \circ \pi \circ f$,

$$F : (D^{4k+2}, S^{4k+1}) \longrightarrow (BSO, \tilde{\Lambda}).$$

Soit aussi $\bar{f} : S^{4k+2} \longrightarrow BU$ l'application déduite de F par $\tilde{p} : (BSO, \tilde{\Lambda}) \longrightarrow (BU, pt)$. On contemple le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{4k+1}(S^{4k+1}) & \xleftarrow{(\pi \circ f)^*} & H^{4k+1}(\tilde{\Lambda}) \\ \delta \downarrow \cong & & \delta \downarrow \\ H^{4k+2}(D^{4k+2}, S^{4k+1}) & \xleftarrow{F^*} & H^{4k+2}(BSO, \tilde{\Lambda}) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \tilde{p}^* \\ H^{4k+2}(S^{4k+2}) & \xleftarrow{\bar{f}^*} & H^{4k+2}(BU) \end{array}$$

et on constate :

$$\begin{aligned} \langle (\pi \circ f)^* \beta_{2k}, [S^{4k+1}] \rangle &= \langle F^* \delta \beta_{2k}, [D^{4k+2}, S^{4k+1}] \rangle \\ &= \langle F^* \tilde{p}^* (2c_{2k+1}), [D^{4k+2}, S^{4k+1}] \rangle \\ &= 2 \langle \bar{f}^* c_{2k+1}, [S^{4k+2}] \rangle. \end{aligned}$$

Il est clair par ailleurs que l'application :

$$\begin{aligned} \pi_{4k+1} U &\longrightarrow \pi_{4k+2} BU \\ [f] &\longrightarrow [\bar{f}] \end{aligned}$$

est l'isomorphisme naturel. L'image de β_{2k} est donc, à un facteur 2 près, l'image de $c_{2k+1} : \pi_{4k+2}(BU) \longrightarrow \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $(2k)! \mathbb{Z}$ (par exemple par intégralité du caractère de Chern). $\square$

D'après 1.5, b_{2k} définit, au signe près, le même homomorphisme $\mathfrak{S}_{4k+1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que β_{2k} ; il y a donc lieu de corriger par un facteur 2 la formule annoncée dans [4].

De même, il y a dans [4] une estimation fautive des groupes $\mathfrak{S}_{4k+3}$, dont nous étudions maintenant le cas.

6.6. PROPOSITION. — $\alpha: \Omega_{4k+3}^{fr} \longrightarrow L_{4k+3}$ induit un isomorphisme $\text{Im } J \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \longrightarrow \mathfrak{S}_{4k+3}$.

En effet, dans ce cas, l'application c est la multiplication par 2 si k est pair et un isomorphisme si k est impair. On n'a plus qu'à appliquer 5.2 et 6.3. $\square$

Grâce aux résultats d'Adams [1] sur $\text{Im } J$, on a :

6.7. COROLLAIRE. — $\mathfrak{S}_{4k+3}$ est cyclique d'ordre $m(2(k+2))$, où $m(2s)$ est la partie impaire du dénominateur de $\frac{B_{2s}}{4s}$, les B_t étant les nombres de Bernoulli définis par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum B_t \frac{x^t}{t!} . \quad \square$$

Remarquons qu'on peut montrer 6.6 sans utiliser les résultats de la partie 5. En effet, l'invariant e_R d'Adams, qui permet de calculer $\text{Im } J$, factorise dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n \text{SO} & \xrightarrow{J} & \Omega_n^{fr} & \xrightarrow{e_R} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow c & & \downarrow \alpha & \nearrow & \\ \pi_n \text{U} & \xrightarrow{\mathcal{J}_c} & L_n & & \end{array}$$

(nous expliciterons cette remarque dans la partie suivante).

7. Des exemples.

En étudiant la cohomologie de $MS\lambda$, et l'opération des algèbres de Steenrod, on obtient facilement les valeurs des groupes SL_* et donc de L_* en petites dimensions.

On remarque en particulier que l'isomorphisme de Thom

$$H^*(SA; \mathbb{Z}/p) \longrightarrow \tilde{H}^*(MS\lambda; \mathbb{Z}/p)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{A}_p$ -modules si p est impair; ceci est particulièrement clair sur le diagramme (*) de 5.3 (ou bien en utilisant le théorème de Wu : Si U est la classe de Thom et $\theta \in \mathcal{A}_p$, $\theta(U)$ est un polynôme dans les classes de Pontrjagyn de $S\lambda_n$, qui sont nulles). C'est bien sûr cette propriété qui fait apparaître les groupes d'homotopie stable $\text{Im}(\alpha)$.

Nous ne donnons pas les détails; voici les valeurs de L_n pour $n \leq 10$.

7.1. THEOREME. — $L_1 = \mathbb{Z}[2]$, $L_2 = 0$, $L_3 = L_4 = \mathbb{Z}/3$, $L_5 = \mathbb{Z}$, $L_6 = \mathbb{Z}$, $L_7 = L_8 = \mathbb{Z}/15$, $L_9 = \mathbb{Z}$, $L_{10} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$. $\square$

Nous allons consacrer la suite de cette partie à décrire les générateurs de ces groupes (sauf celui de L_9 et celui de la partie libre de L_{10}). Rappelons tout d'abord [2] que L_1 est engendré par une immersion lagrangienne exacte de S^1 dans $\mathbb{C}$, la U -parallélisation de S^1 associée est celle déduite du plongement standard de S^1 dans $\mathbb{C}$: c'est ce que nous avons utilisé dans la partie 3.

7.2. PROPOSITION. — L_3 est engendré par une immersion lagrangienne de S^3 ; L_7 est engendré par une immersion lagrangienne de S^7 . Les U -parallélisations correspondantes sont les complexifiées des parallélisations stables de S^3 et S^7 (respectivement) qui engendrent Ω_3^{fr} et Ω_7^{fr} .

7.3. COROLLAIRE. — L_4 est engendré par une immersion lagrangienne de $S^1 \times S^3$, L_8 par une immersion lagrangienne de $S^1 \times S^7$.

Démonstration. — 7.2 est une conséquence de 7.1 et de 5.2; on en déduit 7.3 par multiplication par le générateur de L_1 grâce à 3.7. Nous allons néanmoins expliciter la remarque finale de la partie 6 dans le cas de L_3 , utilisant l'invariant $e_{\mathbb{R}}$ d'Adams pour retrouver ce résultat. Nous utilisons la description de $e_{\mathbb{R}}$ donnée par Conner et Floyd [7].

Soit V^3 une variété stablement parallélisée. Elle est le bord d'une variété orientée de dimension 4, W^4 .

Cette variété possède une classe de Pontrjagyn relative,

$$p_1 \in H^4(W, V) \xleftarrow{\tau^*} H^4(BSO, pt; \mathbb{Z}) \cong H^4(BSO; \mathbb{Z})$$

où $\tau: (W, V) \longrightarrow (BSO, pt)$ décrit le fibré tangent de W .

Soit W' une autre variété dont le bord est V ; on a :

$$\langle p_1(W, V), [W, V] \rangle - \langle p_1(W', V), [W', V] \rangle = \langle p_1(X), [X] \rangle,$$

où X est la variété fermée orientée obtenue en recollant W et $(-W')$ sur leur bord commun V . Le nombre de Pontrjagyn $\langle p_1(X), [X] \rangle$ est alors un multiple de 3, et donc $\langle p_1(W, V), [W, V] \rangle$ est bien défini (i.e. ne dépend pas du choix de W) modulo 3. On obtient ainsi l'invariant $e_R: \Omega_3^{\text{fr}} \longrightarrow \mathbb{Z}/3$, qui détecte la partie impaire de $\text{Im } J$ (ici J est surjectif).

Il est clair que cette flèche factorise dans L_3 :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_3^{\text{fr}} & \xrightarrow{e_R} & \mathbb{Z}/3 \\ \alpha \downarrow & \nearrow \tilde{e}_R & \\ L_3 & & \end{array}$$

En effet, on peut aussi bien définir une classe de Pontrjagyn relative dans $H^4(BSO, \tilde{\Lambda}; \mathbb{Z})$ (en fait, elle n'est bien définie que modulo la torsion paire, mais ce n'est pas très gênant puisque nous voulons l'évaluer sur la classe fondamentale d'une variété orientée).

On sait [1] que e_R est surjective, et $L_3 \cong \mathbb{Z}/3$ (d'après 7.1); donc $\tilde{e}_R$ est un isomorphisme. Maintenant, toujours d'après Adams, $\tilde{e}_R$ détecte $\text{Im } J$, donc $\tilde{e}_R$ détecte $\text{Im } \mathcal{J}_C$, et L_3 est bien engendré par une sphère. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de L_5 , qui est engendré par une variété U -parallélisée qui ne possède aucune parallélisation stable.

7.4. THEOREME. — *Il existe des immersions lagrangiennes de $SU(3)/SO(3)$ dans C^5 dont l'une est le générateur de L_5 .*

7.5. COROLLAIRE. — L_6 est engendré par une immersion lagrangienne de $S^1 \times \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3) = \mathrm{U}(3)/\mathrm{SO}(3)$; la partie de torsion de L_{10} est engendrée par une immersion lagrangienne de $(\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)) \times (\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3))$.

Démonstration de 7.5. — C'est une conséquence de 3.7, 7.1 et 7.4 pour la première assertion, de 4.6, 7.1 et 7.4 pour la deuxième $\square$

La démonstration de 7.4 va être un peu longue : nous n'avons encore rencontré aucun exemple de variété qui ne soit pas stablement parallélisable. En fait, tous les "espaces universels" de la théorie sont des exemples :

7.6. PROPOSITION. — Les variétés $\Lambda_n, \tilde{\Lambda}_n, \mathrm{S}\Lambda_n$ possèdent des U-parallélisations, et donc des immersions lagrangiennes dans les espaces $\mathbb{C}^N$ ad hoc.

Démonstration de 7.6. — Il est facile de voir que

$$\mathrm{T}\Lambda_n \cong \lambda_n \circ \lambda_n,$$

le produit symétrique du fibré tautologique. Donc,

$$\mathrm{T}\Lambda_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong (\lambda_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \circ_{\mathbb{C}} (\lambda_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C});$$

on a donc 7.6 pour Λ_n , pour son revêtement double $\tilde{\Lambda}_n$ et aussi pour $\mathrm{S}\Lambda_n$ par stabilité puisque $S^1 \times \mathrm{S}\Lambda_n \cong \tilde{\Lambda}_n$ et TS^1 est trivial. $\square$

Comme on sait (7.1) que L_5 est infini cyclique et qu'on dispose d'un homomorphisme $\beta_2 : L_5 \rightarrow \mathbb{Z}$, il suffit, pour montrer 7.4, de vérifier que β_2 prend la valeur 1 pour une U-parallélisation de $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$. Nous allons utiliser plutôt la classe b_2 de Fuks, qui est plus accessible géométriquement. Comme il n'y a pas d'éléments décomposables dans $H^5(\Lambda; \mathbb{Z})$, on a une conséquence immédiate de 1.5. :

7.7. LEMME. — Les homomorphismes β_2 et $b_2 : L_5 \rightarrow \mathbb{Z}$ sont égaux au signe près. $\square$

Nous allons donc montrer qu'il existe une U-parallélisation de $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$ avec $b_2 = \pm 1$.

Voici la remarque géométrique de base :

7.8. LEMME. — Soit $i : \Sigma\Lambda_3 \subset \Lambda_3 \subset \Lambda$, l'inclusion naturelle. Alors, $\langle i^* b_2, [\Sigma\Lambda_3] \rangle = \pm 1$.

Démonstration de 7.8. — $\Sigma\Lambda_3$ est la fibre de $\Lambda_3 \xrightarrow{\det^2} S^1$; comme la classe b_2 est déjà dans $H^5(\Lambda_3; \mathbb{Z})$ (1.8), il suffit de montrer qu'on peut trouver une sous-variété de Λ_3 , duale à la classe b_2 , et qui rencontre $\Sigma\Lambda_3$ transversalement et en exactement un point. Or, la classe b_2 de Fuks est précisément définie comme classe duale à un cycle de Schubert qui, dans Λ_3 , est :

$$B_Y = \{\lambda \in \Lambda_3 \mid \lambda \supset Y\}$$

où Y est un sous-espace isotrope de $\mathbb{C}^3$, de dimension 2).

Appelons (e_1, e_2, e_3) la base (complexe) canonique de $\mathbb{C}^3$, et choisissons pour Y le sous-espace (réel) engendré par (ie_2, ie_3) . La sous-variété B_Y est alors l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de $\mathbb{C}^3$ qui admettent une base orthonormée de la forme (ze_1, ie_2, ie_3) ($z \in S^1$). La restriction à B_Y de l'application "dét²" est donc :

$$B \longrightarrow S^1$$

$$\lambda = \mathbb{R} \cdot \langle ze_1, ie_2, ie_3 \rangle \longmapsto z^2,$$

c'est-à-dire le difféomorphisme habituel de $P^1(\mathbb{R})$ dans S^1 . Comme $\Sigma\Lambda_3$ est la fibre, on a fini. $\square$

(Il y a une remarque analogue concernant le générateur de $H^5(\Lambda; \mathbb{R})$ dans [15]. Bien que 7.8 en soit logiquement indépendant, c'est cette remarque qui nous en a donné l'idée).

Nous allons comparer les nombres b_2 des U-parallélisations de $SU(3)/SO(3)$ au nombre b_2 considéré dans 7.8. Pour cela, nous aurons besoin de la réduction modulo 2 de b_2 . Nous allons donc démontrer 1.7 dans ce cas particulier (la démonstration générale est identique).

7.9. LEMME. — Si ρ est la réduction modulo 2, on a :

$$\rho b_2 = a_2 a_3 \in H^5(\Lambda; \mathbb{Z}/2).$$

Démonstration de 7.9. — Comme $H^5(\Lambda) \longrightarrow H^5(\Lambda_3)$ est un isomorphisme, il suffit de le vérifier dans Λ_3 . Soient P et Q les

sous-espaces (réels) de $\mathbf{C}^3$ de bases respectives (e_2, ie_3) et (ie_2) . D'après [10], les classes a_2 et a_3 sont duales (modulo 2) respectivement aux cycles de Schubert :

$$A_2 = \{\lambda \in \Lambda_3 \mid \dim \lambda \cap P \geq 1\}$$

$$A_3 = \{\lambda \in \Lambda_3 \mid \dim \lambda \cap Q \geq 1\} = \{\lambda \in \Lambda_3 \mid \lambda \supset Q\}.$$

A_3 est une sous-variété ; $A_2 \cap A_3 = \{\lambda \in \Lambda_3 \mid \lambda \supset \langle ie_2, ie_3 \rangle\}$ est contenu dans la partie lisse de A_2 ; l'intersection est transverse et égale à la variété B_Y considérée en 7.8. $\square$

Démonstration de 7.4. — Calculons les classes de Stiefel-Whitney de la variété $S\Lambda_3$. Le fibré tangent $T\Lambda_3 \cong \lambda_3 \circ \lambda_3$ se restreint en $i^* T\Lambda_3 = TS\Lambda_3 \oplus \epsilon^1$ puisque TS^1 est trivial. Calculons donc $w(\lambda_3 \circ \lambda_3)$.

On sait que, si $w(\lambda_3) = \prod_{1 \leq i \leq 3} (1 + t_i)$ formellement, alors :

$$\begin{aligned} w(\lambda_3 \circ \lambda_3) &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq 3} (1 + t_i + t_j) \\ &= 1 + a_2 + (a_1 a_2 + a_3) \end{aligned}$$

tous calculs faits ;

et donc : $w_2 w_3(\lambda_3 \circ \lambda_3) = a_2 a_3$.

Puis : $w_2 w_3(\text{SU}(3)/\text{SO}(3)) = \langle i^* a_2 a_3, [S\Lambda_3] \rangle$
 $= \langle \rho(i^* b_2), [S\Lambda_3] \rangle$
 $= 1$ d'après 7.9 et 7.8.

Il existe donc une U-parallélisation de $\text{SU}(3)/\text{SO}(3)$ dont le nombre b_2 est impair. Par modification de cette U-parallélisation au voisinage d'un point, on peut rajouter à ce nombre b_2 toute valeur prise par b_2 sur le groupe $\mathfrak{S}_5$ des sphères, soit tout multiple de 4 d'après 6.4. (Cette opération correspond à faire la somme connexe de l'immersion lagrangienne avec une immersion lagrangienne de S^5 .) On peut donc transformer le nombre impair obtenu en 1 ou -1 . $\square$

Une autre conséquence de 7.4 est

7.10 Remarque. — Le générateur de $\mathfrak{K}L_5$ est $\text{SU}(3)/\text{SO}(3)$; $\square$

et une conséquence du calcul précédent est

7.11 Remarque. — Le générateur de Ω_5^{SO} est $\text{SU}(3)/\text{SO}(3)$. $\square$

8. Applications à la théorie énumérative des singularités lagrangiennes.

Dans cette partie, nous utiliserons les résultats de [19], avec les notations de [19] et de [5].

8.1. PROPOSITION. — *Soit $i: V^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne générique, alors (que V soit orientable ou non),*

- a) *si $n = 2$, le nombre de points de type A_3 sur V est pair [20];*
- b) *si $n = 3$, le nombre de points de type A_4 ou D_4 sur V est pair;*
- c) *si $n = 4$, le nombre de points de type A_5 sur V est pair;*
- d) *si $n = 6$, le nombre de points de type A_7 sur V est pair.*

Démonstration. — Vassiliev a montré dans [19] que les “nombres de points” considérés sont des invariants de cobordisme, plus précisément des nombres caractéristiques (i.e. provenant de la cohomologie de Λ ; cette remarque est sans doute un peu plus explicitée dans [5]). La proposition 8.1 est alors une conséquence de 7.2 $\square$

Voici un résultat un peu plus sérieux. Vassiliev a montré aussi:

8.2. PROPOSITION [19]. — *La classe caractéristique associée à la singularité A_6 ou E_6 est $3b_2$; la classe caractéristique associée à la singularité P_8 est $\beta_0 b_2$, celle associée à E_7 est $-3\beta_0 b_2$. $\square$*

Or, nous avons calculé les valeurs possibles du nombre b_2 sur les immersions lagrangiennes de S^5 dans 6.4, et sur le générateur de L_5 dans 7.4. En ajoutant à ces résultats l'isomorphisme $\tilde{\sigma}: L_5 \longrightarrow L_6$, et la valeur de la classe de Maslov $\beta_0 \in H^1(\Lambda; \mathbb{Z})$ sur le générateur de L_1 [2], nous pouvons répondre à une question posée par V.I. Arnold [3].

8.3. PROPOSITION. — a) *L'image des nombres caractéristiques A_6 et $E_6: L_5 \longrightarrow \mathbb{Z}$ est exactement $3\mathbb{Z}$. De plus, on peut réaliser comme nombre de points de type A_6 ou E_6 , tous les multiples impairs de 3 par des immersions lagrangiennes de $SU(3)/SO(3)$*

dans $\mathbf{C}^5$, tous les multiples de 12 par des immersions lagrangiennes de S^5 dans $\mathbf{C}^5$.

b) L'image du nombre caractéristique $P_8 : L_6 \longrightarrow \mathbf{Z}$ est exactement $2\mathbf{Z}$. De plus, on peut réaliser comme nombre de points de type P_8 tous les multiples impairs de 2 par des immersions lagrangiennes de $U(3)/SO(3)$ dans $\mathbf{C}^6$, tous les multiples de 8 par des immersions lagrangiennes de $S^1 \times S^5$ dans $\mathbf{C}^6$. $\square$

(L'énoncé analogue pour E_7 est clair à partir de 8.2 et 8.3 b).)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.F. ADAMS, On the groups $J(X)$, IV, *Topology*, 5 (1966), 21-27.
- [2] V.I. ARNOLD, Cobordismes lagrangiens et legendriens, I et II, *Funkt. Anal. Ego Prilozh.*, 14 n° 3, (1980), 1-13 et n° 4, p. 8-17.
- [3] V.I. ARNOLD, Singularités des systèmes de rayons, *Uspekhi Math. Nauk.*, 38 n° 2, (1983), 77-147.
- [4] M. AUDIN, Remarques sur les nombres caractéristiques entiers de certaines immersions lagrangiennes, *C.R.A.S.*, Paris, 297 (1983), 561-563.
- [5] M. AUDIN, Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (d'après V.A. Vassiliev), *Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, I*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984).
- [6] A. BOREL, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 115-207.
- [7] P. CONNER, E.E. FLOYD, The relations of cobordism to K-theories, *Lecture Notes in Math.*, 28, Springer (1966).
- [8] A. DOLD, Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschenzahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.*, 65 (1956), 200-206.
- [9] J. ELIASBERG, Cobordisme des solutions de relations différentielles, *Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, I*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984).

- [10] D.B. FUKS, Classes caractéristiques de Maslov-Arnold, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 178 (1968), 303-306.
- [11] D.B. FUKS, Cohomologie modulo 2 du groupe des tresses, *Funkt. Anal. Ego Prilozh.*, 4 n° 2 (1970), 62-73.
- [12] M. GROMOV, A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities, *Actes Congrès Intern. Math.*, Nice, (1970), tome 2, p. 221-225.
- [13] J.A. LEES, On the classification of Lagrange immersions, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 217-224.
- [14] J. MILNOR, J.C. MOORE, On the structure of Hopf algebras, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 211-264.
- [15] J.-M. MORVAN, Une obstruction à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens, *Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, II*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984).
- [16] L. SCHWARTZ, K-théorie et homotopie stable, *thèse d'Etat*, Université Paris VII, 1983.
- [17] L. SMITH, R. STONG, Exotic cobordism theories associated with classical groups, *J. of Math. Mech.*, 17 (1968), 1087-1102.
- [18] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentielles, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 17-86.
- [19] V.A. VASSILIEV, Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes et legendriennes duales aux caustiques et aux fronts d'onde, *Funkt. Anal. Ego Prilozh.*, 15 n° 3, (1981), 10-22.
- [20] V.A. VASSILIEV, Auto-intersections de fronts d'onde et nombres caractéristiques legendriens (lagrangiens), *Funkt. Anal. Ego. Prilozh.*, 16 n° 2 (1982), 68-69.
- [21] C.T.C. WALL, A characterization of simple modules over the Steenrod algebra mod 2, *Topology*, 1 (1962), 249-254.

Manuscrit reçu le 16 avril 1984.

Michèle AUDIN,
 Université de Paris-Sud
 Mathématiques
 bât. 425
 F - 91405 Orsay Cedex.