

RYUICHI ISHIMURA

**Existence locale de solutions holomorphes pour  
les équations différentielles d'ordre infini**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 35, n° 3 (1985), p. 49-57

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1985\\_\\_35\\_3\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_49_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# EXISTENCE LOCALE DE SOLUTIONS HOLOMORPHES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

par Ryuichi ISHIMURA

## Introduction.

Un morphisme du faisceau des germes de fonctions holomorphes est défini par un opérateur différentiel d'ordre infini s'il satisfait une condition de continuité naturelle ([3]). Par ailleurs pour transformer microlocalement un système d'équations pseudo-différentielles homogènes en un système très simple, on demande l'aide des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini (Sato-Kawai-Kashiwara [12]). Donc il est naturel de s'intéresser à une équation différentielle d'ordre infini  $Pu = f$ . Pour une équation d'ordre infini à coefficients constants Martineau [11] a démontré l'existence locale de solutions holomorphes (voir aussi [4]) et pour une équation pseudo-différentielle d'ordre infini Aoki [1] a montré que sous une condition de croissance du symbole un opérateur pseudo-différentiel donne un automorphisme du faisceau des germes de microfonctions. Par contre Korobeïnik [8] a étudié une équation différentielle d'ordre infini d'une variable dans un cadre de fonctions entières.

Dans cet article on se propose d'étudier l'existence locale de solutions holomorphes d'équations différentielles d'ordre infini à coefficients variables d'un type spécial.

## 1. Préliminaires.

Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  contenant l'origine  $0$ ,  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans  $X$  et  $\mathcal{O}_0$  la

*Mots-clés* : Equations différentielles d'ordre infini – Existence locale des solutions.

tige de  $\mathcal{O}_X$  à l'origine.  $\mathcal{O}_0$  est un espace (DFS) dont le dual s'identifie avec  $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$  l'espace des hyperfonctions holomorphes sur  $\mathbf{C}^n$  par rapport à la sous-variété  $\{0\}$  (voir Kashiwara-Kawai [6], p. 953 et Sato-Kawai-Kashiwara [12]). Tout élément  $\phi$  de  $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$  est de la forme  $\sum_{\mu \in \mathbf{Z}_+^n} \phi_\mu \delta^{(\mu)}(\xi)$  tel que la fonction  $\sum_{\mu} \phi_\mu \xi^\mu$  soit entière et du type minimal, où  $\delta(\xi)$  désigne l'élément défini par  $(2\pi\sqrt{-1})^{-n} \xi_1^{-1} \xi_2^{-1} \dots \xi_n^{-1}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{O}_0$  en désignant par  $f = \sum_{\mu} f_\mu x^\mu / \mu!$  son développement taylorien en 0, la dualité sera donnée par

$$(1) \quad \langle f, \phi \rangle = \sum_{\mu} (-1)^{|\mu|} \phi_\mu f_\mu.$$

Soit  $P$  un endomorphisme continu de  $\mathcal{O}_X$ , c'est-à-dire que, d'après [3],  $P$  est un opérateur différentiel éventuellement d'ordre infini  $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$  tel que la fonction  $\sum_{\alpha} a_\alpha(x) \xi^\alpha \alpha!$  soit holomorphe pour tous  $x \in X$  et  $\xi \in \mathbf{C}^n$ . On utilise le mot "opérateur différentiel" uniquement pour tel opérateur.

Pour tout  $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ , soit  $\sum_{\beta} a_\alpha^\beta x^\beta$  le développement taylorien de  $a_\alpha(x)$  en  $x = 0$ . Alors on a pour  $f = \sum_{\mu} f_\mu x^\mu / \mu! \in \mathcal{O}_0$ ,

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \sum_{\gamma} a_{\gamma}(x) \left( \sum_{\mu > \gamma} \frac{f_{\mu}}{(\mu - \gamma)!} x^{\mu - \gamma} \right) \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\alpha < \mu} a_{\mu - \alpha}(x) \frac{f_{\mu}}{\alpha!} x^{\alpha} \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\alpha < \mu} \sum_{\beta} \frac{a_{\mu - \alpha}^{\beta}}{\alpha!} x^{\alpha + \beta} f_{\mu} \\ &= \sum_{\nu} \left( \sum_{\mu} \sum_{\alpha < \nu, \mu} \frac{a_{\mu - \alpha}^{\nu - \alpha}}{\alpha!} f_{\mu} \right) x^{\nu}. \end{aligned}$$

Si on pose  $c_\mu^\nu = \nu! \sum_{\alpha \leq \nu, \mu} a_{\mu-\alpha}^{\nu-\alpha} / \alpha!$  pour tous  $\nu$  et  $\mu$ ,

$$P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha}$$

peut s'écrire dans  $\mathcal{O}_0$  sous la forme d'une "matrice" infinie

$$f = \sum_{\mu} f_{\mu} x^{\mu} / \mu! \mapsto g = \sum_{\mu} g_{\mu} x^{\mu} / \mu! \text{ avec } g_{\nu} = \sum_{\mu} c_{\mu}^{\nu} f_{\mu}.$$

## 2. Surjectivité pour l'opérateur de Korobeïnik.

Korobeïnik [8] a étudié un opérateur différentiel du type suivant :  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha}$  où chaque  $a_{\alpha}(x)$  est un polynôme de la forme  $\sum_{\lambda \leq \alpha} a_{\alpha}^{\lambda} x^{\lambda}$ .

*Remarque.* — En réalité Korobeïnik [8] a traité un opérateur un peu moins général  $P = 1 + \sum_{\lambda < \alpha} a_{\alpha}^{\lambda} x^{\lambda} D_x^{\alpha}$  et étudié la résolubilité de l'équation différentielle  $Pu = f$  dans un cadre de fonctions entières.

Dans ce cas la matrice infinie associée à  $P$  se réduit à une matrice "triangulaire" :

$$c_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} \nu! \sum_{\alpha \leq \nu} \frac{a_{\mu-\alpha}^{\nu-\alpha}}{\alpha!} & \text{pour } \nu \leq \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tel opérateur on montre le théorème suivant :

**THEOREME 1.** — *Pour un opérateur de Korobeïnik  $P$ , supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(2) *Il existe  $A_0 > 0$  tel que l'on ait pour tout  $\mu$*

$$|c_{\mu}^{\mu}| \geq A_0.$$

(3) *Pour tout  $R \gg 1$ , il existe  $\epsilon > 0$ ,  $r > 0$  et  $A > 0$  tels que pour  $\lambda < \mu$  on ait*

$$|c_\mu^\lambda| \leq A \frac{\epsilon^{|\mu-\lambda|}}{(\mu-\lambda)!} r^{|\lambda|}$$

et  $\epsilon R + r < 1$ .

Alors  $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$  est surjectif.

*Remarque.* — Notons que pour un opérateur de Korobeïnik quelconque  $P = \sum_{\lambda < \alpha} a_\alpha^\lambda x^\lambda D_x^\alpha$ , on a toujours la condition suivante plus faible que (3) : Pour tout  $C > 1$  il existe une fonction entière et du type minimal  $G = \sum_\alpha G_\alpha \zeta^\alpha$  telle que pour  $\lambda \leq \mu$ , on ait

$$|c_\mu^\lambda| \leq C^{|\lambda|} G_{\mu-\lambda}.$$

*Démonstration du théorème.* — Puisque la matrice associée à  $P$  est triangulaire et d'après (2) chaque  $c_\mu^\mu$  est non nul,  ${}^tP : \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^n} - \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$  est injectif. Pour que  $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$  soit surjectif, il suffit de montrer que l'image  ${}^tP(\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^n})$  est fermée : Soit  $(\phi^k)_{k \geq 0}$  une suite de  $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$  telle que la suite  $(\chi^k)_{k \geq 0}$  avec  $\chi^k = {}^tP \phi^k$  converge vers  $\chi$  dans  $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$ . Si on pose pour tous  $k$  et  $k'$ ,

$$\phi^{kk'} = \phi^k - \phi^{k'} = \sum_\mu \phi_\mu^{kk'} \delta^{(\mu)}(\xi),$$

$$\chi^{kk'} = \chi^k - \chi^{k'} = \sum_\mu \chi_\mu^{kk'} \delta^{(\mu)}(\xi),$$

on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_0^{kk'} = \frac{\chi_0^{kk'}}{c_0^0} \\ \phi_\mu^{kk'} = \frac{1}{c_\mu^\mu} \left( \chi_\mu^{kk'} - \sum_{\lambda < \mu} (-1)^{|\mu-\lambda|} c_\mu^\lambda \phi^{kk'} \right) \text{ pour } \mu > 0. \end{array} \right.$$

On montre par récurrence que pour tout  $R > 0$  il existe  $B^{kk'}(R) > 0$  tel que l'on ait pour tous  $k, k'$  et  $\mu$ ,

$$(5) \quad |\phi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! < B^{kk'}(R)$$

et que la suite  $(B^{kk'}(R))_{k, k' \geq 0}$  converge vers 0 lorsque  $k$  et  $k'$  tendent vers  $\infty$  : Prenons  $m \in \mathbb{Z}_+$  le plus petit tel que

$$\frac{A}{A_0} ((\epsilon R + r)^m - r^m) < \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs (4), (2) et (3) nous montrent qu'on a

$$\begin{aligned} (6) \quad & |\phi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! \\ & \leq \frac{1}{A_0} (|\chi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! + A \sum_{\lambda < \mu} \frac{\mu!}{(\mu - \lambda)!} \epsilon^{|\mu - \lambda|} r^{|\lambda|} R^{|\mu|} |\phi_\lambda^{kk'}|) \\ & \leq X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda < \mu} \binom{\mu}{\lambda} (\epsilon R)^{|\mu - \lambda|} r^{|\lambda|} |\phi_\lambda^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda! \end{aligned}$$

où on a posé pour tout  $k \geq 0$  et tout  $R > 0$ ,

$$X^{kk'}(R) = A_0^{-1} \sup_{\lambda} |\chi_\lambda^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda!.$$

Par récurrence (3) montre que pour tout  $\mu$ , il existe un polynôme  $Q_\mu(x, y, z)$  de degré au plus  $2^{|\mu|}$  tel que l'on ait

$$|\phi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! \leq X^{kk'}(R) Q_\mu\left(\epsilon R, r, \frac{A}{A_0}\right).$$

On prend  $B^{kk'}(R) = 2 X^{kk'}(R) \max \left[ 1, \max_{|\mu| < m} Q_\mu\left(\epsilon R, r, \frac{A}{A_0}\right) \right]$ ,

alors bien-entendu  $B^{kk'}(R)$  converge vers 0 lorsque  $k$  et  $k'$  tendent vers  $\infty$  et pour tout  $\mu$  tel que  $|\mu| < m$  on a (5). Pour  $\mu$  tel que  $|\mu| \geq m$  on a d'après (6)

$$\begin{aligned} |\phi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! & \leq \frac{1}{2} B^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0} ((\epsilon R + r)^{|\mu|} - r^{|\mu|}) B^{kk'}(R) \\ & < B^{kk'}(R) \end{aligned}$$

d'où on a (5) aussi. Donc  $(\phi^k)$  est une suite de Cauchy dans  $B_{\{0\}}|_{\mathbb{C}^n}$  et par conséquent converge vers un élément  $\phi \in B_{\{0\}}|_{\mathbb{C}^n}$  dans  $B_{\{0\}}|_{\mathbb{C}^n}$ .

### 3. Bijectivité pour un opérateur du type singulier régulier.

Korobeïnik [9] et van der Steen [14] ont étudié un opérateur du type  $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha}$  où chaque  $a_{\alpha}(x)$  est de la forme  $x^{\alpha} \tilde{a}_{\alpha}(x)$  avec une fonction holomorphe  $\tilde{a}_{\alpha}(x)$ . Ici on appellera un tel opérateur qui est un opérateur différentiel *un opérateur différentiel du type singulier régulier*.

*Remarque.* — [9] et [14] ont cherché une solution fonction entière.

Dans ce cas la matrice associée à  $P$  se réduit à une matrice triangulaire :

$$c_{\mu}^{\gamma} = \begin{cases} \gamma! \sum_{\alpha \leq \mu} \frac{a_{\mu-\alpha}^{\gamma-\alpha}}{\alpha!} & \text{pour } \gamma \geq \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que pour tous  $\epsilon$  et  $R > 0$  il existe  $N > 0$  tel que pour tous  $\gamma$  et  $\mu$  avec  $\gamma \geq \mu$  on ait

$$|c_{\mu}^{\gamma}| \leq N \frac{\gamma!}{\mu!} (R^{-1} + \epsilon)^{|\mu|} \epsilon^{-|\gamma|}.$$

**THEOREME 2.** — *Pour un opérateur différentiel du type singulier régulier*  $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} = \sum_{\lambda \geq \alpha} a_{\alpha}^{\lambda} x^{\lambda} D_x^{\alpha}$  *supposons les conditions*

*suivantes satisfaites :*

(7) *Il existe*  $r > 0$  *tel que*  $0 < r < 1$  *et que l'on ait pour tout*  $\mu$

$$|c_{\mu}^{\mu}| \geq r^{|\mu|}.$$

(8) *Pour tous*  $\delta$  *et*  $\epsilon > 0$  *il existe*  $N_{\delta, \epsilon} > 0$  *tel que pour tous*  $\gamma$  *et*  $\mu$  *avec*  $\gamma > \mu$  *on ait*

$$|c_{\mu}^{\gamma}| \leq N_{\delta, \epsilon} \frac{\gamma!}{\mu!} \delta^{|\mu|} \epsilon^{-|\gamma|}.$$

*Alors*  $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$  *est un automorphisme d'espace de Fréchet.*

*Démonstration.* — Soit  $f = \sum f_\gamma x^\gamma / \gamma! \in \mathcal{O}_0$  quelconque et on pose pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $M_\epsilon = \sup_{|x| < \epsilon} |f(x)|$ . On a pour tout  $\gamma$

$$(9) \quad |f_\gamma| \leq \gamma! M_\epsilon \epsilon^{-|\gamma|}.$$

On doit chercher  $g = \sum g_\gamma x^\gamma / \gamma! \in \mathcal{O}_0$  satisfaisant  $Pg = f$ , c'est-à-dire pour tout  $\gamma$

$$\sum_{\mu < \gamma} c_\mu^\gamma g_\mu = f_\gamma,$$

donc on a

$$(10) \quad \begin{cases} g_0 = \frac{f_0}{c_0^0} \\ g_\gamma = \frac{1}{c_\gamma^\gamma} \left( f_\gamma - \sum_{\mu < \gamma} c_\mu^\gamma g_\mu \right) \text{ pour } \gamma > 0. \end{cases}$$

On montre par récurrence qu'il existe  $R > 0$  tel que l'on ait  $|g_\gamma| \leq R^{|\gamma|}$  pour tout  $\gamma \geq 0$ : On a pour tous  $\delta$  et  $\epsilon > 0$  assez petits d'après (10), (9), (7) et (8) et par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} |g_\gamma| &\leq r^{-|\gamma|} \left[ M_\epsilon \epsilon^{-|\gamma|} + N_{\delta, \epsilon} \sum_{\mu < \gamma} \delta^{|\mu|} \epsilon^{-|\mu|} R^{|\mu|} \right] \\ &= \left[ M_\epsilon (r\epsilon R)^{-|\gamma|} + N_{\delta, \epsilon} \sum_{\mu < \gamma} (r\epsilon R)^{-|\gamma-\mu|} \left( \frac{\delta}{r\epsilon} \right)^{|\mu|} \right] R^{|\gamma|}. \end{aligned}$$

Prenons  $\delta > 0$  plus petit que  $r\epsilon < 1$  et  $R > 0$  plus grand que  $\max[\delta^{-1}, 2\epsilon^{-1} M_\epsilon]$ , alors on a

$$\begin{aligned} |g_\gamma| &\leq \left[ \frac{1}{2} + N_{\delta, \epsilon} \sum_{\mu < \gamma} (r\epsilon R)^{-|\gamma-\mu|} \right] R^{|\gamma|} \\ &\leq \left[ \frac{1}{2} + N_{\delta, \epsilon} (r\epsilon R)^{-1} n \sum_{\nu \geq 0} (r\epsilon R)^{-|\nu|} \right] R^{|\gamma|} \\ &\leq \left[ \frac{1}{2} + N_{\delta, \epsilon} (r\epsilon R)^{-1} n \left( \frac{1}{1 - (r\epsilon R)^{-1}} \right)^n \right] R^{|\gamma|}. \end{aligned}$$

En outre en choisissant  $R > 0$  si grand que l'on ait



$$N_{\delta, \epsilon} (r \in \mathbb{R})^{-1} n \left( \frac{1}{1 - (r \in \mathbb{R})^{-1}} \right)^n < \frac{1}{2}$$

qui est possible, on a  $|g_\gamma| \leq R^{|\gamma|}$  et la récurrence s'avance.

#### 4. Opérateur d'Euler.

Dans cette section on énonce des résultats concernant l'opérateur différentiel du type suivant sans démonstration :

$P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} D^{\alpha}$  avec  $a_{\alpha}$  nombre complexe. Un tel opérateur sera appelé *un opérateur d'Euler*.

Dans ce cas la condition de surjectivité devient simplement (7) :

PROPOSITION — *Pour qu'un opérateur d'Euler soit surjectif :  $\Theta_0 \longrightarrow \Theta_0$  la condition (7) est nécessaire et suffisante.*

En outre on peut montrer le théorème suivant en faisant un changement de variable du type  $x_{j_1} = e^{t_{j_1}}$ ,  $x_{j_2} = e^{t_{j_2}}$   
 $x_{j_m} = e^{t_{j_m}}$  :

THEOREME 3. — *Sous la condition (7),  $P : \Theta_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \Theta_{\mathbb{C}^n}$  est une surjection.*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. AOKI, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. I, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 33-4 (1983), 227-250.
- [2] L. HÖRMANDER, On the range of convolution operators, *Ann. Math.*, 76 (1962), 148-170.
- [3] R. ISHIMURA, Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même et opérateurs différentiels II, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 34 (1980), 131-145.
- [4] R. ISHIMURA, Théorèmes d'existence et d'approximation pour les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 16 (1980), 393-415.

- [5] R. ISHIMURA, Sur les équations différentielles dans l'espace des polynômes et dans l'espace des séries formelles, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 37 (1983), 87-97.
- [6] M. KASHIWARA and T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 17 (1981), 813-979.
- [7] M.G. KHAPLANOV, Linear differential equations of infinite order with analytic coefficients, *Dokl. Acad. Nauk, SSSR*, 105-6 (1955), 1162-1165.
- [8] Yu. F. KOROBEĬNIK, Investigations of differential equations of infinite order with polynomial coefficients by means of operator equations of integral type, *Mat. Sb.*, 49-2 (1959), 191-206.
- [9] Yu. F. KOROBEĬNIK, On a class of differential equations of infinite order with variable coefficient, *Izv. Vyss. Uchebn. Zaved. Mat.*, 4 (29) (1962), 73-80.
- [10] B. MALGRANGE, Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 6 (1955-1956), 271-354.
- [11] A. MARTINEAU, Equations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. France*, 95 (1967), 109-154.
- [12] M. SATO, T. KAWAI and M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture notes in Math.*, 287, Springer, (1973), 263-529.
- [13] M. SATO, M. KASHIWARA and T. KAWAI, Linear differential equations of infinite order and theta functions, *Adv. in Math.*, 47 (1983), 300-325.
- [14] P. VAN DER STEEN, Note on a class of differential equations of infinite order, *Indag. Math.*, 33 (1971), 361-364.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1984

révisé le 4 septembre 1984.

Ryuichi ISHIMURA,  
Université du Kyushu  
Département de Mathématiques  
Fukuoka 812 (Japon).