

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES LEBEAU

Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 2 (1985), p. 145-216

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_2_145_0

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUXIÈME MICROLOCALISATION SUR LES SOUS-VARIÉTÉS ISOTROPES

par Gilles LEBEAU

I. INTRODUCTION

II. ÉCLATÉ SYMPLECTIQUE D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ISOTROPE

1. Rappels et notations.
2. Construction de $\tilde{\Gamma}$.
3. Structure symplectique homogène de $\tilde{\Gamma}$.

III. GÉNÉRALITÉS ET RAPPELS

1. Espaces de Sjöstrand avec paramètres.
2. Symboles analytiques.
3. Opérateurs pseudo-différentiels avec paramètres.
4. Lemme de propagation.
5. Géométrie.
6. Transformations canoniques.
7. Transformations canoniques quantifiées.

IV. DEUXIÈME MICRO-SUPPORT

1. Préparation géométrique.
2. Un Lemme.
3. Transformations F.B.I. de seconde espèce.
4. Deuxième micro-support.
5. Γ analyticité.
6. Retour aux hyperfonctions.

V. APPLICATION À UN PROBLÈME DE DIFFRACTION DÉGÉNÉRÉ

1. Introduction et notations.
2. Énoncé du résultat.
3. Preuve du Théorème.

VI. BIBLIOGRAPHIE

Mots-clés : Deuxième microlocalisation - Propagation des singularités - Diffraction.

I. INTRODUCTION

La notation de deuxième microlocalisation le long d'une sous-variété involutive régulière V de $T^*\mathbf{R}^n$, le fibré cotangent à $\mathbf{R}^n$, a été inventée par M. Kashiwara (cf. [5], [1]). Indépendamment et en utilisant ses propres méthodes J. Sjöstrand a défini, dans [11], § 16 la notion de deuxième front d'onde analytique sur une sous-variété lagrangienne réelle de $T^*\mathbf{R}^n$. Le but de ce travail est de montrer comment la belle théorie de J. Sjöstrand et les résultats géométriques de P. Shapira [9] permettent de construire naturellement une deuxième microlocalisation le long d'une sous-variété isotrope réelle Γ de $T^*\mathbf{R}^n$, indépendamment d'un éventuel plongement de Γ comme feuille d'une variété involutive V .

On utilise donc ici systématiquement les espaces H_φ de J. Sjöstrand [11] : si X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et φ une fonction continue sur X , à valeurs réelles, une fonction $u(x, \lambda)$ définie sur $X \times \mathbf{R}_+$, holomorphe en x , appartient à $H_\varphi(X)$ si, et seulement si :

$$1. \forall \varepsilon > 0, \exists \lambda(\varepsilon), \lambda \geq \lambda(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in X, |u(x, \lambda)| \leq e^{\lambda(\varphi(x) + \varepsilon)}.$$

Pour $u \in H_\varphi(X)$, on définit son spectre, $SS(u)$, comme étant le fermé de X , complémentaire des points au voisinage desquels on a une estimation 1 avec φ remplacé par $\varphi - C$, où C est strictement positif. Lorsque φ est strictement pluri-sous-harmonique, la 2 forme de Lévi $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$ munit X d'une structure symplectique réelle et les éléments de H_φ jouent le rôle des micro-fonctions sur $T^*\mathbf{R}^n$. Pour Γ sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$, on introduit en IV.5 la notion de Γ analyticité (l'analogue ici de l'holomorphic partielle) et c'est cette notion qui est (deux) microlocalis e en associant à tout élément u de H_φ un deuxième micro-support noté $S_\Gamma^2(u)$, qui est un fermé d'une variété analytique réelle de dimension $2n$, $\tilde{\Gamma}$ (construite en II) qu'on appelle l'éclaté symplectique de Γ ; $\tilde{\Gamma}$ est un quotient des vecteurs tangents d'ordre deux à Γ , est munie naturellement d'une structure symplectique homogène, et on a une injection canonique de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$.

Pour construire ce deuxième micro-support on procède comme suit : Γ étant fixée, on construit (cf. IV.3 pour les énoncés précis) des

transformations intégrales dépendant d'un petit paramètre réel positif μ :

$$2. \ u(x, \lambda) \rightarrow v(y, \mu, \lambda) = \int e^{\lambda g(y, x, \theta, \mu)} p(y, x, \theta, \mu, \lambda) u(x, \lambda) dx \wedge d\theta$$

où $y \in Y$ est une variété analytique complexe de même dimension que X et les variables θ des paramètres techniques auxiliaires, de sorte que pour $\mu > 0$ fixé, 2 est une transformation canonique quantifiée de $H_\Phi(X)$ dans $H_{\mu^2\Psi(y, \mu)}(Y)$, (où $\Psi(y, \mu)$ dépend analytiquement de μ et $\Psi_0(y) = \Psi(y, 0)$ est strictement pluri-sous-harmonique), de transformation canonique associée $y \rightarrow \chi_\mu(y)$. La transformation χ_μ dégénère lorsque $\mu = 0$, $\chi_0(Y) = \Gamma$, et en prenant la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin tracé dans X , $\mu \rightarrow \chi_\mu(y)$, on obtient alors une transformation canonique Δ de Y (muni de $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \Psi_0$) dans $\tilde{\Gamma}$, et on a :

$\Delta(y_0) \notin S_\Gamma^2(u)$ si, et seulement s'il existe $c > 0$ et W voisinage de y_0 tels que :

$$\exists \mu_0, \quad 0 \leq \mu \leq \mu_0, \quad \lambda \geq \lambda(\mu) \Rightarrow \forall y \in W \quad |v(y, \mu, \lambda)| \leq e^{\lambda \mu^2 [\Psi_0(y) - c]}$$

c'est-à-dire l'absence de spectre pour v en y_0 dans un espace de Sjöstrand avec paramètres (cf. [11], § 16).

Il est alors naturel de faire toutes les constructions en travaillant dès le départ avec des espaces de Sjöstrand avec paramètres, ce qui permet de traiter d'un coup les microlocalisations successives.

On a regroupé au III les rappels nécessaires de la théorie de J. Sjöstrand, la partie géométrique III.5 est directement inspirée de [9] et on a donné en III.3 le théorème d'inversion des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques avec paramètres, essentiel ici, et dû à Y. Laurent (cf. [7]).

Les parties IV.1 et 3 sont consacrées à la construction des transformations intégrales de type 2, et le lemme IV.2 explique pourquoi notre méthode est naturellement associée aux sous-variétés isotropes. En IV.4 on définit le deuxième micro-support et en IV.5 la Γ -analyticité; les résultats principaux sont les théorèmes IV.5.1 [prolongement analytique], IV.4.4 (Water melon) IV.5.2, (régularité microlocale).

Enfin, dans la partie V, on applique les résultats qui précèdent pour résoudre un problème de diffraction dégénérée qui permet d'étendre un résultat de Kataoka (cf. [5] et aussi [10]), à des géométries non strictement

convexes (c'est en fait ce problème qui nous a donné l'idée des constructions précédentes). Nous obtenons en particulier le résultat suivant comme cas particulier du théorème V.2 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$ analytique près de $x_0 \in \partial\Omega$. Soit D la droite dans $\mathbf{R}^N$:

$$D = \{X(s) = X_0 + s\xi_0, |\xi_0| = 1\}.$$

On suppose $D - \{x_0\} \subset \Omega$ près de x_0 . Alors si u est solution de l'équation des ondes $\square U = 0$ dans $\Omega \times \mathbf{R}_t$ et si les points de $T^*(\mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_t)$:

$$(x = x(s), t = s; \xi = \xi_0, \tau = -1)$$

ne sont pas dans $SS(u)$ pour $s \neq 0$ petit, alors le point de $T^*(\partial\Omega \times \mathbf{R}_t)$ défini par :

$$(x = x_0, t = 0, \eta = \pi(\xi_0), \tau = -1)$$

n'est pas dans le spectre des traces de u sur $\partial\Omega \times \mathbf{R}_t$. (π désigne la projection de $T^*\mathbf{R}^N/\partial\Omega$ sur $T^*\partial\Omega$).

Remarques générales.

Comme il est naturel d'après [11], § 16, les techniques de deuxième microlocalisation font intervenir des « petits paramètres ». Ici, pour condenser les notations, les « petits paramètres » seront remplacés par les éléments a d'un espace topologique A muni d'un filtre $\mathcal{F}$:

$$(0.1) \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A); \quad \emptyset \notin \mathcal{F}, \quad F_1 \in \mathcal{F} \text{ et } F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}; \\ F \in \mathcal{F}, \quad F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}.$$

Pour A' sous-espace de A , toutes les applications de A' dans $\mathbf{R}$ qui suivent seront supposées localement bornées.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, une fonction $\mathcal{F}$ analytique sur Ω sera une application $f(x, a)$ définie sur $\Omega \times F$ pour un $F \in \mathcal{F}$, analytique en x et qui vérifie que pour tout compact K de Ω , il existe $F_K \in \mathcal{F}$, $C_K > 0$ et $a \rightarrow B_K(a)$ de F_K dans $\mathbf{R}_+$ (loc. bornée) tels que

$$(0.2) \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}, \quad \forall a \in F_K \quad \sup_K |f^{(\alpha)}(x, a)| \leq B_K(a) C_K^{|\alpha|+1} |\alpha|!$$

[donc f admet un prolongement holomorphe dans un domaine

indépendant de a]. On ne distinguera pas entre deux fonctions qui coïncident sur un $F \in \mathcal{F}$, et on dira que f est F -bornée si on peut choisir $B_K(a) \equiv 1$ dans 0.2. Si $f_0(x)$ est analytique sur Ω , l'expression :

$$(0.3) \quad \lim_{\mathcal{F}} f = f_0$$

signifiera toujours pour tout compact K de Ω , il existe $C_K > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $F_{\varepsilon, K} \in \mathcal{F}$ tels que :

$$\forall \alpha, \quad \forall a \in F_{\varepsilon, K} \sup_K |f^{(\alpha)}(x, a) - f_0^{(\alpha)}(x)| \leq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha|! \varepsilon.$$

Alors f est $\mathcal{F}$ -bornée et on a la propriété de limite localement uniforme pour les prolongements holomorphes. On définit de même les fonctions $\mathcal{F}$ holomorphes. Pour $x_0 \in \Omega$, f non nul au voisinage de x_0 signifiera : il existe ω voisinage complexe de x_0 et $F \in \mathcal{F}$ tels que $\inf \{|f(z, a)|, z \in \omega\} = [B(a)]^{-1}$, ou $B(a)$ de F dans $\mathbf{R}_+^*$ est localement bornée. Alors $\frac{1}{f}$ est $\mathcal{F}$ analytique (mais pas nécessairement $\mathcal{F}$ bornée).

Lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on supprimera le préfixe $\mathcal{F}$. On aura à se servir du lemme suivant :

LEMME (0.4). — Soit $G(y, x, a)$ $\mathcal{F}$ -analytique sur $U_y \times U_x$ voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ telle que $\lim_{\mathcal{F}} G = g$. On suppose que $x \rightarrow g(0, x)$ a un point critique non dégénéré de signature (r_+, r_-) en $x = 0$. Alors il existe V_y, CCU_y, V_x, CCU_x voisinages ouverts respectifs des origines dans $\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n$ et $x(y, a)$ $\mathcal{F}$ -analytique de V_y dans V_x tels que l'unique point critique de $x \rightarrow G(y, x, a)$ dans V_x pour $y \in V_y$ soit $x(y, a)$; il est non dégénéré de signature (r_+, r_-) et $\lim_{\mathcal{F}} X(y, a) = X_0(y)$ où $X_0(y)$ est l'unique point critique de $x \rightarrow g(y, x)$ dans V_x pour $y \in V_y$.

Soit $f(x)$ analytique sur $\mathbf{R}^n$ près de 0 et admettant en 0 un point critique non dégénéré de signature (r_+, r_-) . Comme dans [11], on appelle bon contour pour f une application $t \rightarrow x(t)$ de $U = \{t \in \mathbf{R}^r, |t| \leq C_0\}$ dans $\mathbf{R}^n$, C^∞ injective à différentielle injective au voisinage de $\bar{U}$ telle qu'il existe $C_1 > 0$, de sorte qu'on ait :

$$(0.5) \quad x(0) = 0; \quad \forall t \in U, \quad f[x(t)] \leq f(0) - C_1 |t|^2.$$

Les contours (i.e. $\mathbf{R}^r$) seront toujours orientés.

II. ÉCLATÉ SYMPLECTIQUE D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ISOTROPE

II.1. Rappels et notations.

Soit M une variété analytique réelle, symplectique, de dimension $2n$. On note J l'isomorphisme canonique de TM dans T^*M déduit de la structure symplectique et pour $p \in M$, $u, v \in T_p M$ on note $\langle u, v \rangle$ le produit symplectique des vecteurs tangents u et v de sorte que $\langle u, v \rangle = J(v)[u]$. Pour $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ on notera H_f le champ hamiltonien de f défini par :

$$J(H_f) = df.$$

Si f et g sont deux éléments de $C^\infty(M, \mathbf{R})$, leur crochet de Poisson, noté $\{f, g\}$ est défini par :

$$\{f, g\} = H_f[g] = dg[H_f] = \langle H_f, H_g \rangle.$$

On a $H_{\{f, g\}} = [H_f, H_g]$ où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet des champs de vecteurs.

Soit Γ une sous-variété analytique isotrope de M , de dimension d [i.e. en tout point $p \in \Gamma$, $T_p \Gamma$ est un sous-espace isotrope de $T_p M$]. On a nécessairement $0 \leq d \leq n$. On notera $(T\Gamma)^\perp$ l'orthogonal pour la 2-forme symplectique de $T\Gamma$.

Dans la suite de ce paragraphe on fixe $p_0 \in \Gamma$ et les résultats qui suivent s'entendront localement au voisinage de p_0 ; toutes les fonctions utilisées seront supposées analytiques au voisinage de p_0 .

LEMME 1. — *Soit s une section de $(T\Gamma)^\perp$. Il existe alors une fonction f telle que $f|_\Gamma = 0$, $H_f|_\Gamma = s$.*

Preuve. — Pour $u \in T\Gamma$, $J(s)[u] = 0$. Il existe donc f telle que $f|_\Gamma = 0$ et $df|_\Gamma = J(s)$.

LEMME 2. — *Soient $s_1, \dots, s_l$, l sections de $T\Gamma$ [i.e. l champs de vecteurs sur Γ], linéairement indépendantes, telles que $[s_i, s_j] = 0$ pour tout*

ij. Il existe alors l fonctions $f_1, \dots, f_l$ telles que :

$$\forall i, j, \quad f_i|_{\Gamma} = 0; \quad \{f_i, f_j\} = 0; \quad H_{f_i}|_{\Gamma} = s_i.$$

Preuve. — Par récurrence sur l ; si $l = 1$ on applique le lemme 1 car $T\Gamma \subset (T\Gamma)^\perp$. Soient donc $s_1, \dots, s_{l+1}$ vérifiant les hypothèses et $f_1, \dots, f_l$ telles que $f_i|_{\Gamma} = 0$, $\{f_i, f_j\} = 0$, $H_{f_i}|_{\Gamma} = s_i$. Soit g telle que $g|_{\Gamma} = 0$, $H_g|_{\Gamma} = s_{l+1}$.

Posons $\theta_i = \{f_i, g\}$. Par l'identité de Jacobi on a $\{f_j, \theta_i\} = \{f_i, \theta_j\}$. De plus $\theta_i|_{\Gamma} = \langle s_i, s_{l+1} \rangle = 0$ car $T\Gamma$ est isotrope et

$$H_{\theta_i}|_{\Gamma} = [H_{f_i}, H_g]|_{\Gamma} = [s_i, s_{l+1}] = 0$$

par hypothèse. Soit alors Σ transverse aux champs H_{f_i} et h l'unique solution de :

$$\forall i \in \{1, l\}, \quad \{f_i, h\} = \theta_i; \quad h|_{\Sigma} = 0.$$

Alors comme θ_i est nul à l'ordre 2 sur Γ et les H_{f_i} tangents à Γ , h est nul à l'ordre deux sur Γ .

Alors $f_{l+1} = g - h$ convient.

Choisissons alors d sections comme dans le lemme 2 et soient $f_1, \dots, f_d$ les fonctions obtenues. Posons $V = \bigcap_{i=1}^d f_i^{-1}(0)$. Alors V est une sous-variété involutive de M de codimension d et Γ est la feuille de V passant par p_0 . i.e. la variété intégrale des champs H_{f_i} passant par p_0 .

DÉFINITION 1. — *Au voisinage de p_0 , un système de coordonnées locales symplectique $*$ de $M_1(x, \xi)$ est adapté à Γ si Γ est donné par les équations*

$$x_{d+1} = \dots = x_n = 0, \quad \xi = 0.$$

** [c'est-à-dire $\{x_i, x_j\} = \{\xi_i, \xi_j\} = 0$, $\{\xi_i, x_j\} = \delta_{i,j}$].*

On notera alors $x' = (x_1, \dots, x_d)$, $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $\xi'' = (\xi_{d+1}, \dots, \xi_n)$.

LEMME 3. — *Il existe un système de coordonnées locales symplectique, (x, ξ) adapté à Γ .*

Preuve. — Soit V comme précédemment. On peut alors trouver (x, ξ) tel que V soit donné par les équations $\xi_1 = \dots = \xi_d = 0$ et $p_0 = (0, 0)$ en posant $\xi_j = f_j$ pour $j = 1, \dots, d$ et en complétant en un système de coordonnées symplectiques. Comme Γ est la feuille de V passant par p_0 et $H_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a le résultat.

II.2. Construction de $\tilde{\Gamma}$.

On revient à la situation globale; jusqu'à la fin de I.1, Γ désignera une sous-variété analytique isotrope de M , de dimension d . On note E l'ensemble des fonctions $s \rightarrow \gamma(s)$ de $C^\infty(\mathbf{R}, M)$ vérifiant $\gamma(0) \in \Gamma$, $\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{ds} \gamma(s)|_{s=0} \in (Y_{\gamma(0)}\Gamma)^\perp$ et $E_{(2)}$ l'espace des jets à l'ordre 2 en $s = 0$ des éléments de E ; $E_{(2)}$ est une variété analytique de dimension $d + 2n - d + 2n = 4n$. On munit E de la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \\ 2) \forall f \in C^\infty(M, \mathbf{R}), \quad f|_\Gamma = 0 \Rightarrow (f \circ \gamma_1 - f \circ \gamma_2)(s) \in O(s^2) \\ 3) \forall f \in C^\infty(M, \mathbf{R}), \quad f|_\Gamma = 0, \quad Hf|_\Gamma \in T\Gamma \\ \quad \quad \quad \Rightarrow (f \circ \gamma_1 - f \circ \gamma_2)(s) \in O(s^3) \end{cases}$$

et on pose

DÉFINITION. — $\tilde{\Gamma} = E/\sim$.

Dans la définition de $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $O(s^2)$, $O(s^3)$ s'entend au voisinage de $s = 0$; la condition 2) signifie $\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) \in T_{\gamma_1(0)}\Gamma$. Si γ_1 et γ_2 ont un même jet dans $E_{(2)}$, on a $\gamma_1 \sim \gamma_2$ et donc $\tilde{\Gamma}$ s'identifie à un quotient de $E_{(2)}$. $\tilde{\Gamma}$ est une variété analytique de dimension $2n$; en effet soit $p_0 \in \Gamma$ et (x, ξ) un système de coordonnées symplectiques adapté à Γ au voisinage de p_0 ; notons $\gamma(0)$, $\dot{\gamma}(0)$, $\ddot{\gamma}(0)$ le jet à l'ordre deux en $s = 0$ de γ dans le système (x, ξ) , avec $\ddot{\gamma}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(0)}{s}$ s'identifiant à un vecteur tangent. Pour $f \in C^\infty$ on a alors :

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(s) &= f[\gamma(0)] + f'(\gamma(0))[\dot{\gamma}(0)]s + [f''(\gamma(0))[\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)]] \\ &\quad + f'(\gamma(0))[\ddot{\gamma}(0)]\frac{s^2}{2} + O(s^3). \end{aligned}$$

Donc pour $\gamma \in E$, $f|_{\Gamma} = 0$, $H_f|_{\Gamma} \in T\Gamma$:

$$f \circ \gamma(s) = \frac{s^2}{2} [f''_{\gamma(0)}[\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)] + f'_{\gamma(0)}[\ddot{\gamma}(0)]] + O(s^3).$$

On a alors $f = x'' \cdot a + \xi' \cdot b + \xi'' \cdot c$ avec $a|_{\Gamma} = 0$, $c|_{\Gamma} = 0$, d'où $f''|_{T\Gamma \times (T\Gamma)^{\perp}} = 0$. Par suite $\gamma_1 \sim \gamma_2$ est équivalent à :

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad \dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) \in T\Gamma, \quad \ddot{\gamma}_1(0) - \ddot{\gamma}_2(0) \in (T\Gamma)^{\perp}$$

ce qui prouve que $\tilde{\Gamma}$ est une variété analytique de dimension $4n - [d + 2n - d] = 2n$.

Pour $\gamma \in E$, on notera $\tilde{\gamma}$ sa classe dans $\tilde{\Gamma}$ et π désignera l'application canonique de $\tilde{\Gamma}$ dans $(T\Gamma)^{\perp}/T\Gamma$ induite par $\gamma \rightarrow (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$; π est surjective. Soit O la section nulle de $(T\Gamma)^{\perp}/T\Gamma$ et γ tel que $\tilde{\gamma} \in \pi^{-1}(O)$, i.e. $\dot{\gamma}(0) \in T\Gamma$. Alors $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} f[\gamma(s)]$, pour f vérifiant $f|_{\Gamma} = 0$, $H_f|_{\Gamma} \in T\Gamma$ ne dépend que de $\tilde{\gamma}$ et vaut dans un système de coordonnées adapté d'après ce qui précède : $-\langle H_f(\gamma(0), \ddot{\gamma}(0)) \rangle$ donc ne dépend que de $H_f[\gamma(0)]$. Par suite $\pi^{-1}(O)$ s'identifie à $T^*\Gamma$ et on notera j l'injection canonique de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$ obtenue. On a alors la « suite exacte » au-dessus de Γ :

$$0 \rightarrow T^*\Gamma \xrightarrow{j} \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\pi} (T\Gamma)^{\perp}/T\Gamma \rightarrow 0.$$

II.3. Structure symplectique homogène de $\tilde{\Gamma}$.

DÉFINITION. — On définit TE comme l'ensemble des $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}, TM)$, $s \rightarrow \Phi(s) = (\gamma(s), v(s))$ qui vérifient :

- {1) $v(0) \in T\Gamma$, $\gamma \in E$
- {2) $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, $f|_{\Gamma} = 0$, $H_f|_{\Gamma} \in T\Gamma \Rightarrow df_{(\gamma(s))}[v(s)] \in O(s^2)$.

Pour $\Phi \in TE$, on pose :

$$2\alpha(\Phi) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle \gamma'(s), v(s) \rangle$$

qui est bien défini puisque $\gamma'(0) \in (T\Gamma)^{\perp}$, $v(0) \in T\Gamma$.

Si $\Phi \in TE$, on note $\tilde{\Phi}$ l'élément du fibré tangent à $\tilde{\Gamma}$ qui lui correspond par la projection $E \rightarrow \tilde{\Gamma}$; alors $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_2$ si, et seulement si :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2, \quad v_1(0) = v_2(0)$$

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(M, \mathbf{R}), \quad f|_\Gamma = 0 &\Rightarrow df_{[\gamma_1(s)]}[v_1(s)] - df_{[\gamma_2(s)]}[v_2(s)] \in O(s^2) \\ \forall f \in C^\infty(M, \mathbf{R}), \quad f|_\Gamma = 0, \quad Hf|_\Gamma \in T\Gamma &\Rightarrow df_{[\gamma_1(s)]}[v_1(s)] - df_{[\gamma_2(s)]}[v_2(s)] \in O(s^3). \end{aligned}$$

LEMME 1. — $\alpha(\Phi)$ ne dépend que de $\tilde{\Phi}$ et définit une 1-forme sur $\tilde{\Gamma}$ qu'on notera α_Γ .

DÉFINITION 2. — On appelle α_Γ la 1-forme canonique de $\tilde{\Gamma}$.

Preuve du Lemme 1. — Plaçons-nous dans un système de coordonnées symplectique adapté et effectuons pour $\Phi(s) = (\gamma(s), v(s)) \in TE$ le développement de Taylor à l'ordre deux de $s \rightarrow df_{[\gamma(s)]}[v(s)]$.

Avec $\gamma(0) = p_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} df_{[\gamma(s)]}[v(s)] &= df_{p_0}(v(0)) + s[f'_{p_0}(\dot{v}(0)) + f''_{p_0}[\gamma \int (0), v(0)]] \\ &\quad + \frac{s^2}{2}[f'''_{p_0}[\gamma \int (0), \gamma \int (0), v(0)] + f''_{p_0}[\ddot{\gamma}(0), v(0)]] \\ &\quad + 2f''_{p_0}[\gamma \int (0), \dot{v}(0)] + f'_{p_0}[\ddot{v}(0)] + O(s^3) \end{aligned}$$

par suite $\dot{v}(0) \in (T\Gamma)^\perp$ et on a $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_2$, $\Phi_1 = (\gamma_1, v_1)$, $\Phi_2 = (\gamma_2, v_2)$ si, et seulement si $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $v_1(0) = v_2(0)$, $\dot{v}_2(0) - \dot{v}_1(0) \in T\Gamma$, $\ddot{v}_2(0) - \ddot{v}_1(0) \in (T\Gamma)^\perp$. Or dans ce système de coordonnées on a :

$$2\alpha(\Phi) = \langle \ddot{\gamma}(0), v(0) \rangle + \langle \gamma \int (0), \dot{v}(0) \rangle$$

de là résulte aisément que $\alpha(\Phi)$ ne dépend que de $\tilde{\Phi}$.

Précisons ce qui précède; soit (x, ξ) adapté à Γ .

Pour $(\tilde{x}', \tilde{x}'', \tilde{\xi}', \tilde{\xi}'') \in \mathbf{R}^{2n}$, soit $\gamma \in E$ défini par :

$$\gamma(s) = \left(\tilde{x}', s\tilde{x}'', \frac{s^2}{2}\tilde{\xi}', s\tilde{\xi}'' \right).$$

Alors l'application $(\tilde{x}', \tilde{x}'', \xi', \xi'') \rightarrow \tilde{\gamma}$ est un système de coordonnées locales sur $\tilde{\Gamma}$; soit $\Phi(s) = (\gamma(s), v(s))$ avec

$$v(s) = \left(\tilde{y}', s\tilde{y}'', \frac{s^2}{2} \tilde{\eta}', s\tilde{\eta}'' \right).$$

On a alors :

$$2\alpha(\Phi) = \xi' \cdot \tilde{y}' + \xi'' \cdot \tilde{y}'' - \tilde{x}'' \cdot \tilde{\eta}''$$

et donc dans ce système de coordonnées :

$$2\alpha_{\Gamma} = \xi' d\tilde{x}' + \xi'' d\tilde{x}'' - \tilde{x}'' d\xi'.$$

LEMME 2. — 1) $\omega_{\Gamma} = d\alpha_{\Gamma}$ est une 2-forme symplectique sur $\tilde{\Gamma}$ et $j^*(\alpha_{\Gamma})$ est la 1-forme canonique sur $T^*\Gamma$.

$$2) \omega_{\Gamma}(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \langle v_1(s), v_2(s) \rangle_{\gamma(s)} \text{ pour } \Phi_i = (\gamma, v_i).$$

Preuve. — Dans une carte adaptée on a :

$$2 d\alpha_{\Gamma} = d\xi' \wedge d\tilde{x}' + 2[d\xi'' \wedge d\tilde{x}'']$$

et l'injection canonique j de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$ est donnée par

$$T^*\Gamma \ni (x', v') \rightarrow (x', 0, v', 0) \in \tilde{\Gamma}.$$

On vérifie 2) dans une carte adaptée.

DÉFINITION 3. — On définit l'action de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\tilde{\Gamma}$ par :

$$\forall \mu \in \mathbf{R}_+^*, \quad \forall \tilde{\gamma} \in \Gamma, \quad \mu \cdot \tilde{\gamma} = \widetilde{\mu[\mu(s)]}.$$

LEMME 3. — α_{Γ} est homogène de degré 2.

Preuve. — Dans une carte adaptée

$$\mu \cdot (\tilde{x}', \tilde{x}'', \xi', \xi'') = (\tilde{x}', \mu\tilde{x}'', \mu^2\xi', \mu\xi'').$$

DÉFINITION 4. — Muni de sa structure symplectique homogène, on appellera $\tilde{\Gamma}$ l'éclaté symplectique de Γ .

Soit à présent M et M' deux variétés analytiques réelles symplectiques

de dimension $2n$, et Γ, Γ' deux sous-variétés analytiques isotropes de dimension d de M et M' et $\chi : M \rightarrow M'$ un isomorphisme symplectique de M sur M' tel que $\chi(\Gamma) = \Gamma'$; alors $d\chi$ envoie $T\Gamma$ sur $T\Gamma'$ et $(T\Gamma)^\perp$ sur $(T\Gamma')^\perp$ et induit une application $\tilde{\chi}$ de $\tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{\Gamma}'$ déduite de $\gamma \rightarrow \chi \circ \gamma$, qu'on appelle l'éclaté de χ .

PROPOSITION 1. — $\tilde{\chi}$ est un isomorphisme symplectique homogène de $\tilde{\Gamma}$ sur $\tilde{\Gamma}'$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & T^*\Gamma & \xrightarrow{j} & \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\pi} & (T\Gamma)^\perp/T\Gamma \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d[\chi|_\Gamma]^{*-1} & & \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow d\chi \\ 0 & \rightarrow & T/\Gamma' & \xrightarrow{j'} & \tilde{\Gamma}' & \xrightarrow{\pi'} & (T\Gamma')^\perp/T\Gamma' \rightarrow 0 \end{array}$$

Preuve. — Soit $\Phi \in TE$, $\Phi = (\gamma, v)$ et posons $\tilde{\Phi}' = d\tilde{\chi}(\tilde{\Phi})$. Alors

$$\tilde{\Phi}' = \widetilde{(\chi \circ \gamma, d\chi[v])}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\alpha_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\Phi}') &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle d\chi_{\gamma(s)}[\dot{\gamma}(s)], d\chi_{\gamma(s)}[v(s)] \rangle_{M'} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle \dot{\gamma}(s), v(s) \rangle_M \text{ car } \chi \text{ est symplectique donc } \tilde{\chi}^*(\alpha_{\tilde{\Gamma}}) = \alpha_\Gamma. \end{aligned}$$

Si $\gamma \in E$, $d\chi(\pi(\tilde{\gamma})) = d\chi[\dot{\gamma}(0)]$ modulo $(T\Gamma')$

et $\pi'(\tilde{\chi}(\tilde{\gamma})) = \widetilde{\chi \circ \gamma(0)}$ modulo $(T\Gamma')$.

Soit $\gamma \in E$ tel que $\dot{\gamma}(0) \in T\Gamma$ alors $d\chi_{\gamma(0)}[\dot{\gamma}(0)] \in T\Gamma'$. Si

$$g \in C^\infty(M', \mathbf{R}), \quad g|_{\Gamma'} = 0, \quad Hg|_{\Gamma'} \in T\Gamma'$$

et si on pose $f = g \circ \chi$ on a $f|_\Gamma = 0$, $H_f|_\Gamma \in T\Gamma$. Alors :

$$j'^{-1}(\tilde{\chi}(\tilde{\gamma})) \cdot Hg = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} g[\chi \circ \gamma(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2} f[\gamma(s)] = j^{-1}(\gamma) \cdot H_f$$

et $Hg = d\chi[H_f]$ ce qui achève la preuve.

III. GÉNÉRALITÉS ET RAPPELS

III.1. Espaces de Sjöstrand avec paramètres.

Soit X une variété analytique complexe, φ une fonction réelle continue sur X . Pour tout ouvert ω de X on note $H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $f(z, a, \lambda)$, $z \in X$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbf{R}$, à valeurs complexes, telles qu'il existe $F_0 \in \mathcal{F}$ et $a \rightarrow \lambda(a)$ application de F_0 dans $\mathbf{R}$ [loc. bornée] tels que $f(z, a, \lambda)$ soit défini pour $z \in \omega$, $a \in F_0$, $\lambda \geq \lambda(a)$, holomorphe en z et vérifie :

$$(1.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}, \forall a \in F_\varepsilon \cap F_0, \exists \lambda(a, \varepsilon) \in \mathbf{R} \text{ tel que}$$

$$\forall z \in \omega, \forall \lambda \geq \lambda(a, \varepsilon), \quad |f(z, a, \lambda)| \leq e^{\lambda[\varphi(z) + \varepsilon]}.$$

Ici $a \rightarrow \lambda(a, \varepsilon)$ est loc. bornée sur F_ε et on peut toujours choisir $\varepsilon \rightarrow F_\varepsilon$ croissante.

On notera $H_{\varphi, \mathcal{F}}^{\text{loc}}(\omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $f = f(z, a, \lambda)$ telles que pour tout $z \in \omega$, il existe un voisinage ω_z de z avec $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega_z)$, et pour $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}^{\text{loc}}(\omega)$, on notera $S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f)$ le sous-ensemble de ω défini par :

(1.2) $z \notin S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f)$ si, et seulement si, il existe ω_z voisinage de z et une constante $c > 0$ tels que $f \in H_{\varphi - c, \mathcal{F}}(\omega_z)$.

$S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f)$ est donc un fermé de ω . Lorsque $S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f) = \emptyset$, et s'il n'y a pas de confusions à craindre, on notera $f \sim 0$.

Remarque. — Si $\mathcal{F}'$ est un autre filtre sur A plus fin que $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ alors $H_{\varphi, \mathcal{F}}^{\text{loc}}(\omega) \subset H_{\varphi, \mathcal{F}'}^{\text{loc}}(\omega)$ et par suite pour tout $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}^{\text{loc}}(\omega)$ on a $S_{\varphi}^{\mathcal{F}'}(f) \subset S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f)$.

III.2. Symboles analytiques.

Par définition, les $\mathcal{F}$ -symboles analytiques sur ω seront les éléments de $H_{0, \mathcal{F}}(\omega)$ (ou symbole analytique s'il n'y a pas de confusion).

Soit $f_k(z, a)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $z \in \omega$, $a \in F_0 \subset \mathcal{F}$ une suite de fonctions holomorphes en z et telle que, il existe $F_1 \in \mathcal{F}$ et une constante $C > 0$ indépendante de $a \in F_1$ avec :

$$(2.1) \quad \forall a \in F_1 : \sup_{z \in \omega} |f_k(z, a)| \leq B(a) C^k k!$$

où $B(a)$ est une application de F_1 dans $\mathbf{R}_+$ loc. bornée. On dira alors que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \lambda^{-k}$ est un $(\mathcal{F})$.symbole analytique classique formel (de degré 0). Pour $z \in \omega$, $a \in F_1$, $\lambda \geq 1$ on pose comme dans [11], § 1.

$$(2.2) \quad \hat{f}(z, a, \lambda) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{\lambda}{2C}} f_k(z, a) \lambda^{-k}$$

alors f est un $\mathcal{F}$.symbole analytique car pour $a \in F_1$, $0 \leq k \leq \frac{\lambda}{2C}$ on a $|f_k(z, a) \lambda^{-k}| \leq B(a) C^k k! \lambda^{-k} \leq B(a) \left(\frac{Ck}{\lambda}\right)^k \leq B(a) 2^{-k}$.

D'où :

$$|\hat{f}(z, a, \lambda)| \leq 2B(a)$$

[et par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall a \in F_1, \quad \forall \lambda \geq \frac{1}{\varepsilon} \text{Log } 2B(a), \quad \sup_{z \in \omega} |\hat{f}(z, a, \lambda)| \leq e^{\lambda \varepsilon}].$$

De plus, si on remplace C par $C' > C$, l'inégalité

$$\left| \sum_{\frac{\lambda}{2C'} \leq k \leq \frac{\lambda}{2C}} f_k(z, a) \lambda^{-k} \right| \leq 2B(a) e^{-\frac{\lambda}{2C'} \text{Log } 2}$$

entraîne $\hat{f} \sim \hat{f}'$ sur ω . De plus on a :

$$(2.3) \quad \left| \hat{f}(z, a, \lambda) - \sum_{k=0}^N f_k(z, a) \lambda^{-k} \right| \leq 2B(a) (2C)^{N+1} (N+1)! \lambda^{-(N+1)}$$

pour tout $z \in \omega$, $a \in F_1$, $\lambda \geq 1$, $N \geq 0$.

Réciproquement, soit $f(z, a, \lambda)$ un $\mathcal{F}$.symbole analytique sur ω tel qu'il existe une suite $f_k(z, a)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, telle que (2.3) soit vérifié

pour $z \in \omega$, $a \in F_1 \in \mathcal{F}$, $\lambda \geq \lambda(a) \geq 1$ et $N \geq 0$. On dira alors que f est un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique; alors (2.3) entraîne que (2.1) est vérifié avec $B(a)$ [resp. C] remplacé par $2B(a)$ [resp. $2C$] et de plus si $\hat{f}$ est construit comme dans (2.2) on a pour tout N :

$$|\hat{f}(z, a, \lambda) - f(z, a, \lambda)| \leq 4B(a)(4C)^{N+1}(N+1)! \lambda^{-(N+1)}$$

pour $a \in F_1$, $z \in \omega$, $\lambda \geq \lambda(a)$, d'où si C' est assez grand:

$$(2.4) \quad |\hat{f}(z, a, \lambda) - f(z, a, \lambda)| \leq 4B(a)e^{-\lambda/C}$$

qui implique $\hat{f} \sim f$ sur ω . On écrira $f \sim \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z, a) \lambda^{-k}$.

III.3. Opérateurs pseudo-différentiels avec paramètres.

Soit $z_0^* = (z_0, \zeta^0) \in \mathbb{C}^{2n}$ et $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$ l'anneau réunion des $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, d}$ pour $d \in \mathbb{Z}$ avec:

$$(3.1) \quad \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, d} = \left\{ p = \lambda^d \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(z, \zeta, a) \lambda^{-k} \right\} / \{p, \exists F \in \mathcal{F}, p_k = 0 \text{ pour tout } k, \text{ et tout } a \in \mathcal{F}\}$$

où $p_k(z, \zeta, a)$ est holomorphe en $(z, \zeta) \in \omega$ voisinage de z_0^* et défini pour $a \in F_0 \in \mathcal{F}$, muni du produit:

$$p \circ q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} (i\lambda)^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial^\alpha q}{\partial z^\alpha}.$$

On définit alors $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$ comme étant le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$ formé des p tels que dans (3.1), $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k(z, \zeta, a) \lambda^{-k}$ soit un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique formel au voisinage de z_0^* . Afin de se replacer dans la situation habituelle des opérateurs pseudo-différentiels homogènes, à $p = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(z, \zeta, a) \lambda^{-k} \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, 0}$ on associe:

$$(3.2) \quad p(z, \xi, \tau, a) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(z, \xi/\tau, a) \tau^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(z, \xi, \tau, a)$$

et suivant [3] on pose : (avec $\eta = (\xi, \tau)$)

$$(3.3) \quad N(p, a, T) = \sum_{k, \alpha, \beta} \frac{2[2(n+1)]^{-k} k!}{(|\alpha| + k)! (|\beta| + k)!} |D_z^\alpha D_\eta^\beta p_k(z_0, \zeta^0, 1, a)| T^{2k + |\alpha| + |\beta|}.$$

Alors il résulte de la formule de Cauchy que pour $p \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, 0}$ on a $p \in \mathcal{E}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, 0}$ si, et seulement si, il existe $F_1 \in \mathcal{F}$ et $T_0 > 0$ tels que

$$(3.4) \quad a \rightarrow N(p, a, T_0) \text{ est loc. bornée de } F_1 \text{ dans } \mathbf{R}_+.$$

D'autre part, il résulte de [3] et [7], qu'on a :

PROPOSITION. — Soit $i \geq 0$, $j \geq 0$, $p \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, -i}$, $q \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, -j}$ alors :

$$(3.5) \quad N(p \circ q, a, T) \ll \Phi(i, j) N(p, a, T) \cdot N(q, a, T)$$

avec

$$(3.6) \quad \Phi(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \frac{(k+i)! (k+j)!}{k! (k+i+j)!}.$$

Alors de la Proposition et de (3.4) il résulte immédiatement que $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$ est un sous-anneau de $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^*$.

DÉFINITION. — Soit $p \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$, $p = \lambda^d \Sigma p_k \lambda^{-k}$. On dit que p est $\mathcal{F}$.elliptique si, et seulement si p_0 est non nul au voisinage de z_0^* .

THÉORÈME (3.7). — Soit $p \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$. Il y a équivalence entre :

- 1) p est $\mathcal{F}$.elliptique.
- 2) p est inversible.

Preuve. — 2) $\Rightarrow$ 1) est évident et pour montrer 1) $\Rightarrow$ 2) il suffit classiquement de prouver que si $z \in \hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}, -1}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ converge dans $\hat{\mathcal{E}}_{z_0^*}^{\mathcal{F}}$. D'après (3.5) on a :

$$\forall n \geq 1, \quad N(z^n, a, T) \ll u_n(N[z, a, T])^n$$

avec $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \Phi(1, k)$. Par hypothèse, il existe $T_0 > 0$ et $F_1 \in \mathcal{F}$ tels que $N(z, a, T_0) < +\infty$ pour tout $a \in F_1$. D'où :

$$\forall a \in F_1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} N(z^n, a, T_0) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n [N(z, a, T_0)]^n.$$

Il suffit donc de montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$ est $+\infty$ et ceci résulte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(1, n) = 0$ qui se voit sur (3.6.). □

III.4. Lemme de propagation.

On étudie ici certaines relations entre les propriétés de φ et de S_φ . (Voir aussi [11, Lemme 8.4].)

Avec les mêmes notations que précédemment, soit X un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$ muni du système de coordonnées $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, z')$. Soit d un réel strictement positif; on suppose que X contient le disque fermé K_d :

$$K_d = \{(z_1, z'), |z_1| \leq d, z' = 0\}$$

et que la fonction continue φ vérifie :

$$(4.1) \quad \varphi|_{K_d} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{|z_1| \rightarrow d \\ |z_1| > d}} \frac{\varphi(z_1, 0)}{|z_1| - d} = 0 \quad [\text{i.e. } \varphi(z_1, 0) \in o(|z_1| - d)].$$

LEMME. — Soit $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(X)$ alors

$$0 \notin S_\varphi^{\mathcal{F}}(f) \Rightarrow K_d \cap S_\varphi^{\mathcal{F}}(f) = \emptyset.$$

Preuve. — Il existe α , $0 < \alpha < d$ tel que pour $|z'| \leq \alpha$, $0 < z \leq d + \alpha$ le disque fermé $K_{z, z'} = \{(z_1, z'), |z_1| \leq z\}$ soit contenu dans X .

Soit $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(X)$ et supposons $0 \notin S_\varphi^{\mathcal{F}}(f)$. Alors avec α assez petit, il

existe $F_0 \in \mathcal{F}$ et $a \rightarrow \lambda(a)$ de F_0 dans $\mathbf{R}_+$ tel que :

$$(4.2) \quad |z'| \leq \alpha, \quad |z_1| \leq \alpha, \quad \lambda \geq \lambda(a) \Rightarrow |f(z, a, \lambda)| \leq e^{\lambda[\varphi(z) - \alpha]}$$

et

$$(4.3) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists F \in \mathcal{F}, \forall a \in F \cap F_0, \exists \lambda(a, \varepsilon) \in \mathbf{R} \text{ tel que}$$

$$|z'| \leq \alpha, \quad |z_1| \leq d + \alpha, \quad \lambda \geq \lambda(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(z, a, \lambda)| \leq e^{\lambda[\varphi(z) + \varepsilon]}.$$

Posons $\theta(z', z) = \sup_{|z_1| \leq z} \varphi(z_1, z')$, $\theta_0(z) = \theta(0, z)$. Alors d'après (4.1) on a $\theta_0(z) = 0$ pour $z \leq d$ et :

$$(4.4) \quad \theta_0(d + \rho) \in o(\rho)$$

et φ étant continue :

$$(4.5) \quad |\theta(z', z) - \theta_0(z)| \leq R(|z'|) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} R(t) = 0.$$

Posons pour $a \in F_0$, $\lambda \geq \lambda(a)$, $|z'| \leq \alpha$, $z \leq d + \alpha$:

$$(4.6) \quad g(z', a, z, \lambda) = \text{Log} \sup_{|z_1| \leq z} |f(z_1, z', a, \lambda)|.$$

D'après le théorème des trois cercles de Hadamard, g est fonction convexe de $\text{Log } z$. Alors soit ρ , $0 < \rho < \alpha$ et s tel que :

$$(4.7) \quad \text{Log} \left(d + \frac{\rho}{2} \right) = s \text{Log } \alpha + (1-s) \text{Log} (d + \rho).$$

Alors de (4.2), (4.3), (4.5) on en déduit :

$$(4.8) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists F \in \mathcal{F}, \quad |z'| \leq \alpha, \quad a \in F \cap F_0, \\ \lambda \geq \lambda(a, \varepsilon) \Rightarrow g \left(z', a, d + \frac{\rho}{2}, \lambda \right) \leq \lambda [R(|z'|) + (1-s)[\varepsilon + \theta_0(d + \rho)] - s\alpha].$$

Or on a d'après (4.7) : $s = \frac{\rho}{2d \text{Log } d/\alpha} + o(\rho^2)$. D'après (4.4), il existe alors $C > 0$ et ρ_0 , $0 < \rho_0 < \alpha$ tels que :

$$\theta_0(d + \rho_0) - s\alpha \leq -C$$

ρ_0 et C étant ainsi fixés pour $\varepsilon = C/4$ et β tel que $|z'| \leq \beta$ entraîne

$R(|z'|) \leq C/4$ on aura :

$$\exists F_1 \in \mathcal{F}, \quad a \in F_1, \quad |z'| \leq \beta,$$

$$\lambda \geq \lambda(a, C/4) \Rightarrow g\left(z', a, d + \frac{\rho_0}{2}, \lambda\right) \leq -\lambda C/2$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Revenant à la situation générale, on déduit alors du Lemme précédent par des arguments géométriques standards :

COROLLAIRE 1. — Soit $V \subset X$ une sous-variété holomorphe de X telle que $\varphi|_V = 0$. Alors pour tout $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega)$, $S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f) \cap V$ est réunion de composantes connexes de $V \cap \omega$.

COROLLAIRE 2. — Soit Γ une courbe analytique réelle, lisse, orientée, dans X et soit V un petit voisinage de Γ dans la complexifiée de Γ . On suppose $\varphi(z) = 0$ pour $z \in V^- = \{z \in V, \Im z \leq 0\}$ et $\varphi|_V \in o(\Im z)$. Alors pour $f \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega)$, $S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(f) \cap \Gamma$ est réunion de composantes connexes de $\Gamma \cap \omega$.

III.5. Géométrie.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On notera $X^{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente, $TX \simeq TX^{\mathbb{R}}$ le fibré tangent à X , $T^*X^{\mathbb{R}}$ le fibré cotangent à $X^{\mathbb{R}}$, T^*X le fibré cotangent à X . On identifiera T^*X et $T^*X^{\mathbb{R}}$ de la façon suivante : à la forme $\mathbb{C}$.linéaire $\zeta \in T_x^*X$ on associe la forme $\mathbb{R}$.linéaire $u \rightarrow -\Im \zeta(u)$. π désignera la projection $T^*X \xrightarrow{\pi} X$.

On notera d la différentielle sur $X^{\mathbb{R}}$, ∂ [resp. $\bar{\partial}$] la différentielle holomorphe [resp. anti-holomorphe], $\sigma = \partial[\zeta dz]$ la 2.forme canonique sur T^*X , $\text{Re } \sigma$ et $\Im \sigma$ ses parties réelles et imaginaires qui sont des 2.formes symplectiques sur $T^*X^{\mathbb{R}}$ identifié à T^*X ; alors $-\Im \sigma$ est la 2.forme canonique sur $T^*X^{\mathbb{R}}$. Suivant la terminologie de [9] pour une sous-variété de T^*X , on dira qu'elle est $\mathbb{R}$.symplectique (ou lagrangienne, ou isotrope ou involutive) (resp. $\mathbb{I}$.symplectique) si elle est symplectique pour la 2.forme $\text{Re } \sigma$ (resp. $\text{Im } \sigma$).

Soit φ une fonction sur X à valeurs réelles; on notera j_{φ} l'injection

de X dans T^*X :

$$(5.1) \quad j_\varphi(z) = \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) \right)$$

et

$$(5.2) \quad \Lambda_\varphi = j_\varphi(X).$$

Alors Λ_φ correspond par identification au sous-espace de $T^*X^{\mathbb{R}}$

$$\{(z, \xi) \in T^*X^{\mathbb{R}}, \xi = d\varphi(z)\}$$

et donc est I.lagrangienne. On a :

$$(5.3) \quad j_\varphi^*(\operatorname{Re} \sigma) = j_\varphi^*(\sigma) = j_\varphi^*(d[\zeta dz]) = (\partial + \bar{\partial}) \left(\frac{2}{i} \partial \varphi \right) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi.$$

Par suite Λ_φ est $\mathbb{R}$ symplectique si, et seulement si, $\bar{\partial} \partial \varphi$ est non dégénérée et dans ce cas cf. [9], T^*X est complexifié de Λ_φ . Pour $z^* \in \Lambda_\varphi$ on notera alors $u \rightarrow \bar{u}$ pour l'unique application $\mathbb{C}$ antilinéaire de $T_{z^*}(T^*X)$ dans lui-même égale à l'identité sur $T_{z^*}\Lambda_\varphi$ et $q(u) = \frac{1}{i} \sigma(u, \bar{u})$ qui est une forme hermitienne de signature (n, n) .

On notera $\mathcal{L}\varphi(u, v) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi(u, iv)$ la 2.forme hermitienne de type de Lévi associée à φ .

Dans la suite φ désignera une fonction analytique de X dans $\mathbb{R}$ strictement pluri-sous-harmonique, i.e. $\mathcal{L}_\varphi$ est définie positive. Alors Λ_φ est I.lagrangien et $\mathbb{R}$.symplectique, et X est muni de la 2.forme symplectique $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$.

LEMME 1. — Soit V un sous-espace $\mathbb{R}$.linéaire de $T_z X$, $V^\perp$ son orthogonal pour la 2.forme $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$. Alors

$$a) (iV)^\perp = i(V^\perp); \quad b) V^\perp \oplus iV = T_z X.$$

Si de plus V est involutif et si $H = V \cap iV$ alors

$$c) V^\perp \oplus H = V \quad \text{et} \quad V^\perp \oplus H \oplus iV^\perp = T_z X.$$

Preuve. — a) On a $\bar{\partial}\partial\varphi(u,v) = \bar{\partial}\partial\varphi(iu,iv)$.

b) Comme $\dim V^\perp = 2n - \dim V$, il suffit de prouver $V^\perp \cap iV = \{0\}$. Or si $u \in V$, $iu \in V^\perp$ on a $\mathcal{L}\varphi(u,u) = \frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi(u,iu) = 0$ donc $u = 0$.

c) Si V est involutif par définition $V^\perp \subset V$. Alors d'après b), $V^\perp \cap H = \{0\}$ donc $V^\perp \oplus H = V$ et toujours d'après b), $V \oplus iV^\perp = (V^\perp)^\perp \oplus iV^\perp = T_z X$.

Remarque. — Si $\Gamma \subset T_z X$ est isotrope alors $\Gamma^\perp$ est involutif et de c), on déduit :

$$\Gamma \oplus (\Gamma^\perp \cap i\Gamma^\perp) \oplus i\Gamma = T_z X.$$

En particulier : $\Gamma \cap i\Gamma = \{0\}$.

Soit Γ une sous-variété isotrope de X , i.e. en tout point $z \in \Gamma$, $T_z \Gamma$ est un sous-espace isotrope de $T_z X$ pour la 2-forme $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$; alors d'après la remarque précédente $T\Gamma \cap iT\Gamma = \{0\}$ (section nulle) et donc Γ est totalement réel. On notera Γ^c un complexifié de Γ (au voisinage de Γ).

PROPOSITION 1. — Soit Γ une sous-variété analytique totalement réelle de X , de complexifiée Γ^c . Il y a équivalence entre :

1) Γ est isotrope pour $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$.

2) $Tj_\bullet(\Gamma) \oplus iTj_\bullet(\Gamma)$ est isotrope pour q .

3) Il existe une fonction réelle h pluri-harmonique sur Γ^c telle que $\varphi|_{\Gamma^c} - h \geq 0$ et $(\varphi - h)|_\Gamma = 0$.

Si 3) est satisfait, h est uniquement déterminée et de plus

$$\varphi|_{\Gamma^c} - h \geq C^{te} [\text{dist}(z, \Gamma)]^2.$$

Preuve. — i) Γ isotrope dans X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$ équivaut à $j_\bullet(\Gamma)$ isotrope pour la 2-forme canonique σ de T^*X , et pour $(u,v) \in [Tj_\bullet(\Gamma)]^2$ on a $\sigma(u,v) = -\frac{1}{2} q(u+iv)$ d'où 1) $\Leftrightarrow$ 2).

ii) Supposons 3) et soit (localement) θ holomorphe sur Γ^c telle que

$2\operatorname{Re}\theta = h$, $\theta = u + iv$ avec u et v réelles sur Γ . Alors $\varphi|_{\Gamma} = 2u|_{\Gamma}$ donc u est le prolongement holomorphe à $\Gamma^{\mathbb{C}}$ de $\frac{\varphi}{2}|_{\Gamma}$; si $z \in \Gamma$, $d\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}(z) = 2\operatorname{Re} d\theta(z) = 2\operatorname{Re} du(z) - 2\operatorname{Im} dv(z)$ donc $\operatorname{Im} dv$ est connu sur Γ et par suite v est connu à une constante réelle près donc h est unique. $\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} - h \geq C^0[\operatorname{dist}(z, \Gamma)]^2$ résulte alors de ce que $\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} - h$ est strictement pluri-sous-harmonique sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$.

iii) Soit $\Gamma \xrightarrow{1} \Gamma^{\mathbb{C}}$ l'injection canonique. Alors Γ isotrope $\Leftrightarrow l^*[\bar{\partial}\partial(\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}})] = 0 \Leftrightarrow d[l^*\partial\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}] = 0 \Leftrightarrow$ il existe H analytique de Γ dans $\mathbb{C}$ telle que $l^*[\partial\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}] = dH$.

Soit θ le prolongement holomorphe à $\Gamma^{\mathbb{C}}$ de H . Alors

$$l^*[\partial\varphi|_{\Gamma^{\mathbb{C}}}] = dH \Leftrightarrow \forall z \in \Gamma, d\varphi(z) = 2\operatorname{Re} d\theta(z)$$

alors on peut toujours supposer $(2\operatorname{Re}\theta - \varphi)|_{\Gamma} = 0$ et $h = 2\operatorname{Re}\theta$ convient. D'où 1) $\Leftrightarrow$ 3).

Soit à présent V une sous-variété involutive de X . D'après le lemme 1, au voisinage de V , X s'identifie à $\tilde{V}$, réunion des complexifiées des feuilles isotropes de V et on appelle φ_V la fonction réelle sur X au voisinage de V déterminée par :

Pour Γ feuille de V , $\varphi_V|_{\Gamma^{\mathbb{C}}} = h$ où h est la fonction pluri-harmonique sur $\Gamma^{\mathbb{C}}$ de la proposition 1.

φ_V est analytique et $\varphi \geq \varphi_V$ avec égalité exactement sur V .

Soit $\widetilde{j\varphi(V)}$ la réunion dans T^*X des complexifiées des feuilles isotropes de $j\varphi(V)$; alors $\widetilde{j\varphi(V)} \cap \Lambda_{\varphi} = j\varphi(V)$.

Soit Γ une feuille de V , $z \in \Gamma$, $z^* = j\varphi(z)$. On a :

$$T_{z^*}\widetilde{j\varphi(V)} = T_{z^*}j\varphi(V) \oplus iT_{z^*}j\varphi(\Gamma)$$

et donc $T_{z^*}\widetilde{j\varphi(V)}$ est isotrope pour q , donc transverse à $\pi^{-1}(z)$ car $\pi^{-1}(z)$ est $\mathbb{C}$ lagrangien, transverse à Λ_{φ} , et $q|_{\pi^{-1}(z)}$ est définie négative [11], § 11. De plus $j\varphi(V)$ est I-lagrangienne. Par suite [11] il existe (localement) une fonction ψ réelle telle que :

$$\widetilde{j\varphi(V)} = \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial z}(z) \right) = \Lambda_{\psi}.$$

On a alors pour tout $z \in V$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ et on peut donc supposer :

$$A) \quad \psi = \varphi \text{ sur } V; \quad d[\psi - \varphi] = 0 \text{ sur } V.$$

Soit $l: \Gamma^c \xrightarrow{1} T^*X$ défini par $l(z) = \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$. On a $l(\Gamma^c) = [j\varphi(\Gamma)]^c$ (complexifié de $j\varphi(\Gamma)$) car π est holomorphe et $\pi(j\varphi(\Gamma)) = \Gamma$; d'autre part $j\varphi(\Gamma)$ est $\mathbf{R}$ et I isotrope donc $j\varphi(\Gamma)^c$ est isotrope pour σ , donc $l^*(\sigma) = 0$.

$$l^*(\sigma) = 0 \Leftrightarrow d[l^*(\zeta dz)] = 0 \Leftrightarrow d[\partial\psi|_{\Gamma^c}] = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}\partial[\psi|_{\Gamma^c}] = 0,$$

donc ψ est *pluri-harmonique* sur Γ^c et de A) il résulte alors

$$B) \quad \varphi - \psi \geq 0.$$

Or, d'après la Proposition 1, A) et B) déterminent uniquement φ_V . On a donc prouvé le :

LEMME 2. — $\Lambda\varphi_V = \widetilde{j\varphi(V)}$.

COROLLAIRE 1. — Soit Γ une sous-variété isotrope de X , V et V' deux sous-variétés involutives dont Γ est une feuille. Alors

$$\varphi_V - \varphi_{V'} \in 0 \text{ ([dist}(z, \Gamma^c)]^2).$$

Preuve. — Par construction $\varphi_V - \varphi_{V'} = 0$ sur Γ^c et d'après le lemme 2 :

$\Lambda\varphi_V$ et $\Lambda\varphi_{V'}$ coïncident sur $j\varphi(\Gamma)^c$ donc $d[\varphi_V - \varphi_{V'}] = 0$ sur Γ^c .

Exemple. — Avec $\varphi = (\text{Im } x)^2$, $V = \{\text{Im } x' = 0\}$, $x = (x', x'')$ on a $\varphi_V = (\text{Im } x'')^2$.

III.6. Transformations canoniques.

Soient X, Y deux variétés analytiques complexes de dimensions complexes respectives n_x, n_y ; σ_x et σ_y les 2-formes canoniques sur T^*X et T^*Y , ce qui suit sera local au voisinage de $(y_0, x_0) \in Y \times X$.

Pour $g(y, x, \theta)$ holomorphe au voisinage de $(y_0, x_0, \theta_0) \in Y \times X \times \mathbb{C}^N$ on notera $C_g = \{(y, x, \theta), g'_\theta = 0\}$ et $\Lambda(g)$ désignera l'image dans $T^*(X \times Y)$ de C_g par l'application :

$$(y, x, \theta) \rightarrow (y, x, g'_y, g'_x)$$

et $\tilde{\Lambda}(g) = \{(y, x, \eta, \xi), (y, x, \eta, -\xi) \in \Lambda(g)\}$.

Soit φ une fonction réelle sur X , strictement pluri-sous-harmonique (p.s.s.h. stricte en abrégé). Supposons :

A) $(x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g(y_0, x, \theta) + \varphi(x)$ a en (x_0, θ_0) un col [i.e. un point critique de signature $(n_x + N, n_x + N)$].

Alors pour y voisin de y_0 , $-\mathcal{J}m g + \varphi$ a un col en $\chi(y)$, $\Theta(y)$ où χ, Θ sont des fonctions analytiques de $y \in Y^{\mathbb{R}}$ et $\psi(y) = -\mathcal{J}m g[y, \chi(y), \Theta(y)] + \varphi[\chi(y)]$ est pluri-sous-harmonique [11, Lemme fondamental].

Sous l'hypothèse A), $\frac{\partial g}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \theta_N}$ sont indépendantes comme fonctions de (x, θ) ; en particulier C_g est lisse et $\Lambda(g)$ est une C-lagrangienne dans $T^*(Y \times X)$ au voisinage de $(y_0, x_0, \eta_0, \xi_0)$, $\xi_0 = -\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0)$, $\eta_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y}(y_0)$. Soit χ l'application de Λ_ψ dans Λ_φ définie par :

$$\chi(j_\psi(y)) = j_\varphi(\chi(y)).$$

Alors le graphe de χ est contenu dans $\tilde{\Lambda}(g)$ et donc

$$\chi^*[\sigma_x|_{\Lambda_\varphi}] = \sigma_y|_{\Lambda_\psi},$$

d'où :

$$\text{LEMME 1. — a) } \chi^*\left(\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi\right) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \psi,$$

b) si $n_x = n_y$ il y a équivalence entre :

i) ψ est p.s.s.h. stricte.

ii) χ est un isomorphisme.

Si i) est satisfait, T^*Y est complexifié de Λ_ψ et on note χ^c la complexification de χ qui est un symplectomorphisme holomorphe de T^*Y dans T^*Y , dont le graphe est $\tilde{\Lambda}(g)$.

Réciproquement, soient ψ, φ deux fonctions p.s.s.h. strictes sur Y et X ($n_x = n_y$) et χ un isomorphisme symplectique réel de $\Lambda\psi$ dans $\Lambda\varphi$, au voisinage de $\left(y_0, \eta_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial\psi}{\partial y}(y_0)\right)$, $\chi(y_0, \eta_0) = \left(x_0, \xi_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0)\right)$, χ^c son prolongement holomorphe de T^*Y dans T^*X , χ l'isomorphisme sous-jacent de (Y, y_0) dans (X, x_0) . Alors il est connu (cf. [4]) qu'il existe $g(y, x, \theta)$ holomorphe au voisinage de $(y_0, x_0, \theta_0) \in Y \times X \times \mathbb{C}^N$ telle que le graphe de χ^c soit $\tilde{\Lambda}(g)$, avec $g'_y(y_0, x_0, \theta_0) = \eta_0$, $g'_x(y_0, x_0, \theta_0) = -\xi_0$ et les $\frac{\partial g}{\partial \theta_i}$ indépendants en $(y_0, x_0, \theta_0) \in C_g$ (et même à y ou x fixé).

LEMME 2. — A) est satisfait.

Preuve. — Soit Θ l'application de (Y, y_0) dans $(\mathbb{C}^N, \theta_0)$ définie par $(y, \chi(y), \Theta(y)) \in C_g$ (qui se déduit de l'isomorphisme de C_g sur $\Lambda(g)$). Les points critiques de $(x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g(y, x, \theta) + \varphi(x)$ sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned} g'_\theta(y, x, \theta) &= 0 \\ g'_x(y, x, \theta) + \frac{2}{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) &= 0 \end{aligned}$$

qui sont équivalentes à : $x = \chi(y)$, $\theta = \Theta(y)$. La non-dégénérescence du point critique est équivalente à la transversalité de $\Lambda\varphi$ et $\chi^c(\pi_y^{-1}(y))$ en $\chi\left(y, \frac{2}{i} \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$ (où π_y est la projection de T^*Y sur Y) qui résulte de la transversalité de $\Lambda\psi$ et $\pi_y^{-1}(y)$ en $\left(y, \frac{2}{i} \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$. Notons (z_+, z_-) la signature du point critique, constante au voisinage de y_0 . On a $z_+ + z_- = 2(n_x + N)$ et $z_+ - z_- \geq 0$ [11]. ψ étant p.s.s.h. stricte, il existe $h(y)$ pluri-harmonique tel que $\psi - h$ ait en y_0 un point critique de signature $(2n_y, 0)$; $(y, x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g + \varphi - h$ a alors en (y_0, x_0, θ_0) un point critique de signature (l_+, l_-) avec $l_+ - l_- \leq 2n_x$ et $(y, x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g + \varphi - \psi$ a pour tout y , en $(y, \chi(y), \theta(y))$ un point critique de signature (z_+, z_-) et la valeur critique est constante. D'où $l_+ = z_+ + 2n_y$, $l_- = z_-$ et de $l_+ - l_- \leq 2n_x = 2n_y$ on déduit $z_+ = z_- = n_x + N$.

III.7. Transformations canoniques quantifiées.

Rappelons le théorème de la phase stationnaire, version analytique, tel qu'il est donné dans [11, § 2] :

THÉORÈME (7.1). — Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité fermée et $\tilde{B} = \{\lambda x, x \in B, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. Il existe une constante C_n telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ et toute fonction holomorphe u au voisinage de $\tilde{B}$:

$$I(\lambda) = \int_{|x| \leq 1} e^{-\lambda \frac{x^2}{2}} u(x) dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^k u(o) \lambda^{-k} + R_N(\lambda),$$

$$|R_N(\lambda)| \leq C_n \lambda^{-n/2} (N+1)^{n/2} \frac{N! 2^N}{\lambda^N} \sup_B |u(z)|.$$

Remplaçons u par un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique au voisinage de $\{z \in \mathbb{C}^n, |z| \leq 1\}$ (de degré 0).

$$(7.2) \quad \left| u(z, a, \lambda) - \sum_{k=0}^{N-1} u_k(z, a) \lambda^{-k} \right| \leq B(a) C^N N! \lambda^{-N}$$

pour $\lambda \geq \lambda(a) > 0$.

Alors on obtient :

$$(7.3) \quad \begin{aligned} I(\lambda)(a) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j+s=k} \frac{1}{j!} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^j u_s(0, a) \right) \lambda^{-k} + R_N(\lambda, a) \\ |R_N(\lambda, a)| &\leq C_n \lambda^{-n/2} B(a) (N+1)^{n/2+1} C^N N! \lambda^{-N} \end{aligned}$$

et donc $I(\lambda)(a)$ est un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique de degré $-n/2$. En particulier si $p(x, y, \eta, a, \lambda)$ est un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique près de (x_0, y_0, η_0) dans $\mathbb{C}^{3n}$, $y_0 = x_0$, $p \sim \sum p_k \lambda^{-k}$.

$$(7.4) \quad \hat{p}(x, \xi, a, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \int_{\substack{|y-x| < C_1 \\ \eta-\xi = -C_2 i(y-x)}} e^{i\lambda(x-y)(\eta-\xi)} p(x, y, \eta, a, \lambda) dy \wedge d\eta$$

est un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique près de $(x_0, \xi_0 = \eta_0) = x_0^*$ et

$$(7.5) \quad \hat{p} \sim \sum_{\alpha, k} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(i\lambda)^{|\alpha|}} (\partial_\eta^\alpha \partial_y^\alpha p_k) \lambda^{-k} \in \mathcal{O}_{x_0^*}^{\mathcal{F}}.$$

Soit à présent $G(y, x, \theta, a)$ holomorphe près de (y_0, x_0, θ_0) , telle que

$$(7.6) \quad \lim_{\mathcal{F}} G = g$$

où g vérifie I.2.6 A) et la valeur critique ψ p.s.s.h. stricte soit :

$$(7.7) \quad H_{\varphi, x_0} = \lim_{x_0 \in \omega} H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega); \quad \mathcal{H}_{\varphi, x_0} = H_{\varphi, x_0} / \{u, x_0 \notin S_{\varphi}^{\mathcal{F}}(u)\}$$

et on définit de même H_{ψ, y_0} , $\mathcal{H}_{\psi, y_0}$. Soit $q(y, x, \theta, a, \lambda)$ un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique de degré ℓ :

$$(7.8) \quad q \sim \lambda^{\ell} \sum_{k=0}^{+\infty} q_k(y, x, \theta, a) \lambda^{-k}.$$

Pour $u \in H_{\varphi, x_0}$ on pose

$$(7.9) \quad I(q)(u)(y, a, \lambda) = \int_{\Sigma \cap B} e^{i\lambda G(y, x, \theta, a)} q(y, x, \theta, a, \lambda) u(x, a, \lambda) dx \wedge d\theta$$

où Σ est un bon contour pour $(x, \theta) \rightarrow -\operatorname{Im} g(y_0, x, \theta) + \varphi(x)$ et B une petite boule de centre x_0 sur laquelle G, q, u sont bien définis. Alors de (7.6) et [11, § 3] il résulte que $I(q)$ définit un opérateur de $\mathcal{H}_{\varphi, x_0}$ dans $\mathcal{H}_{\psi, y_0}$, indépendant de Σ, B et ne dépendant que du symbole formel associé à $\underline{q}$ [cf. III.2]. On appelle $I(q)$ une transformation canonique quantifiée (T.C.Q. en abrégé) et $\chi: \Lambda_{\psi} \rightarrow \Lambda_{\varphi}$ (ou $x: Y \rightarrow X$) la transformation canonique sous-jacente (T.C).

On ne cherchera pas à définir un symbole principal pour $I(q)$, mais sous la forme (7.9) on dira que $I(q)$ est régulière si q_0 est non nul au voisinage de (y_0, x_0, θ_0) . Les T.C.Q. se composent entre elles et on a :

PROPOSITION. — Si $I(q)$ donné par (7.9) est régulière il existe une T.C.Q. $I(q')$ régulière de $\mathcal{H}_{\psi, y_0}$ dans $\mathcal{H}_{\varphi, x_0}$ telle que

$$I(q') \circ I(q) = 1, \quad I(q) \circ I(q') = 1$$

de T.C. sous-jacente χ^{-1} .

Preuve. — Tout d'abord, par composition et le lemme 0.4, on peut toujours supposer $\psi = \varphi$, $x_0 = y_0$ et que pour tout $a \in F \in \mathcal{F}$, $G_a(y, x, \theta) = G(y, x, \theta, a)$ induit l'identité de $\Lambda\varphi$ dans $\Lambda\varphi$, puis par le

théorème de phase stationnaire et l'astuce de Kuranishi se ramener au cas pseudo-différentiel où $G_a = (y-x)\zeta + H(a)$. La proposition est alors conséquence de (7.4), (7.5), du théorème (3.7) et de [11, § 4].

Remarque. — On a défini les T.C.Q. dans les germes; mais il est clair qu'une T.C.Q. $I(q)$ étant donnée sous la forme (7.9), elle définit une T.C.Q. de $\mathcal{H}_{\varphi,x}$ dans $\mathcal{H}_{\psi,y}$, $x(y) = x$ pour tout x près de x_0 .

IV. DEUXIÈME MICRO-SUPPORT

IV.1. Préparation géométrique.

Soit M une variété analytique réelle, N une sous-variété de M . On désigne par $\mu \in [0, \mu_0]$, $\mu_0 > 0$, un paramètre réel. Soit $f(m, \mu)$ une fonction analytique de $M \times [0, \mu_0]$ dans $\mathbb{R}$

$$(1.1) \quad f(m, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(m) \mu^k.$$

On fixe un point $m_0 \in N$ et on suppose :

A) $\forall m \in N$, $df_0(m) = 0$ et f_0 est transversalement non-dégénérée sur N , c'est-à-dire :

$$\forall m \in N, \text{rang Hessien } f(m) = \dim M - \dim N.$$

On note (ι_+, ι_-) la signature de $\text{Hess } f(m)$, constante au voisinage de m_0 .

$$\text{B) } f_1|_N = 0.$$

Sous les hypothèses A) et B) il existe alors un système de coordonnées locales (x, y) au voisinage de $m_0 = (0, 0)$, tel que $N = \{y=0\}$ et :

$$(1.2) \quad f_0(x, y) = \frac{1}{2} {}^t y Q(x, y) y; \quad f_1(x, y) = {}^t B(x, y) \cdot y$$

où $Q(x, y)$ est une matrice (q, q) symétrique, de signature (ι_+, ι_-) ,

$\varepsilon_+ + \varepsilon_- = q$ et $B(x, y) \in \mathbb{R}^q$. Alors Q étant non-dégénérée,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = {}^t y Q + \frac{1}{2} {}^t y \frac{\partial Q}{\partial y} + \mu {}^t B + \mu {}^t \frac{\partial B}{\partial y} \cdot y + \sum_{k \geq 2} \frac{\partial f_k}{\partial y} \mu^k = 0$$

possède une unique solution $y = Y(x, \mu)$ pour μ petit, y voisin de 0.

$$(1.3) \quad Y(x, \mu) = \mu Z(x, \mu), \quad Z(x, 0) = -Q_0^{-1}(x)b(x)$$

avec

$$Q_0(x) = Q(x, 0), \quad b(x) = B(x, 0)$$

et on a :

$$(1.4) \quad f(x, Y(x, \mu), \mu) = \mu^2 \left[\frac{1}{2} {}^t Z Q Z + {}^t B Z + \sum_{k \geq 2} f_k(x, Y(x, \mu)) \mu^{k-2} \right]$$

et on pose :

$$(1.5) \quad \Omega f(x) = -\frac{1}{2} {}^t b Q_0^{-1} b + f_2(x, 0)$$

qui est une fonction sur N qui ne dépend pas du choix des coordonnées locales car si $y' = C(x, y)y$, $C_0(x) = C(x, 0)$, $\det C_0 \neq 0$, Q_0 devient $Q'_0 = {}^t C_0^{-1} Q_0 C_0^{-1}$, b devient $b' = {}^t C_0^{-1} b$ et ${}^t b' Q'^{-1} b' = {}^t b Q_0^{-1} b$.

Supposons :

C) Ωf a un point critique non-dégénéré de signature (s_+, s_-) en m_0 .

LEMME 1. — Sous les hypothèses A), B), C), il existe W voisinage de m_0 dans M et $\mu_1 > 0$ tel que pour $0 < \mu \leq \mu_1$, $m \rightarrow f(m, \mu)$ ait un unique point critique dans W , soit $m(\mu)$, où $\mu \rightarrow m(\mu)$ est analytique sur $[0, \mu_1]$, $m(0) = m_0$. Ce point critique est non-dégénéré de signature $(\varepsilon_+ + s_+, \varepsilon_- + s_-)$.

Preuve. — Avec les notations précédentes, si (x, y) est point critique, on a $y = Y(x, \mu)$ et x est point critique de :

$$x \rightarrow f(x, Y(x, \mu), \mu) = \mu^2 [\Omega f(x) + O(\mu)];$$

d'où l'unicité et l'existence du point critique $m(\mu)$ dans un voisinage fixe de m_0 et l'analyticité de $\mu \rightarrow m(\mu)$. Si on pose :

$$y = Y[x, \mu] + \mu v, \quad x = x(\mu) + u, \quad m(\mu) = (x(\mu), y(\mu))$$

on obtient

$$f(x, y, \mu) = \mu^2 \left[F(\mu) + \frac{1}{2} ({}^t u \Omega'' f(0) u + {}^t v Q_0(0) v) \right. \\ \left. + O(|u|^3 + |u| |v|^2 + \mu |u|^2 + \mu |v|^2) \right]$$

avec $\mu^2 F(\mu) = f(m(\mu), \mu)$, d'où la signature. $\square$

Supposons que f dépende analytiquement d'un paramètre $w \in \mathbf{R}^n$ au voisinage de w_0 , de sorte que A) et B) sont vérifiés pour tout w , et C) en w_0 ; alors $\Omega f(x, w)$ aura un point critique de signature (s_+, s_-) en $x(w)$ pour w voisin de w_0 , et le lemme précédent reste vrai, avec point critique $(x(\mu, w), \mu Z(x(\mu, w), \mu, w))$ et valeur critique $\mu^2 F(\mu, w)$.

DÉFINITION. — Par « bon contour » pour $f(\cdot, w)$ on entend une application Σ de $U \times [0, \mu_1]$ dans M , $U = \{t \in \mathbf{R}^{s_+ + s_-}, |t| \leq \varepsilon\}$, C^∞ au voisinage de $U \times [0, \mu_1]$, de la forme :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Sigma(t, \mu) = (x(t, \mu), y(t, \mu) = \mu z(t, \mu)) \\ x(0, \mu) = x(\mu, w), \quad z(0, \mu) = Z(x(\mu, w), \mu, w) \end{cases}$$

avec $t \rightarrow (x(t, \mu), z(t, \mu))$ injective à différentielle injective au voisinage de U pour tout $\mu \in [0, \mu_1]$, et telle qu'il existe $C > 0$, indépendant de μ avec :

$$(1.7) \quad f[\Sigma(t, \mu), \mu, w] - \mu^2 F(\mu, w) \leq -C\mu^2 |t|^2.$$

Effectuons le changement de variable : $x = x$, $y = \mu z$ et posons :

$$(1.8) \quad \mu^2 \tilde{f}(x, z, \mu, w) = f(x, \mu z, \mu, w).$$

Alors $(x, z) \rightarrow \tilde{f}(x, z, 0, w_0)$ a un unique point critique non-dégénéré de signature $(z_+ + s_+, z_- + s_-)$ en $(x, z) = (0, Z[0, 0, w_0])$.

Par le lemme de Morse réel, il existe un changement de variable au voisinage de $(x, z, \mu, w) = (0, Z(0, 0, w_0), 0, w_0)$:

$$(1.9) \quad (x, z, \mu, w) \rightarrow (\alpha, \beta, \mu, w), \quad \alpha \in \mathbf{R}^{z_+ + s_+}, \quad \beta \in \mathbf{R}^{z_- + s_-}$$

tel que dans les nouvelles coordonnées on ait :

$$(1.10) \quad \tilde{f} = \alpha^2 - \beta^2 + F(\mu, w)$$

ce qui montre l'existence des bons contours. D'autre part, si Σ_0, Σ_1 sont deux bons contours pour $f(., w)$, μ_1 assez petit et w près de w_0 , il existe une déformation $\Sigma(t, \mu, s)$, C^∞ au voisinage de $U \times [0, \mu_1] \times [0, 1]$ avec $\Sigma(., 0) = \Sigma_0$, $\Sigma(., 1) = \Sigma_1$ et $\Sigma(., s)$ est une famille de bons contours pour $f(., w)$ avec une constante C (1.7) uniforme en s . [Pour cela, on effectue d'abord une homothétie sur t pour se ramener dans un voisinage où on peut appliquer le lemme de Morse, puis voir [11].]

Enfin, soit Σ_0 un bon contour pour $f(., w_0)$. Il existe alors Ω voisinage de w_0 et $C > 0$ tels que pour tout $w \in \Omega$ il existe une déformation $C^\infty \Sigma(., s)$ de Σ_0 à Σ_1 bon contour pour w , qui vérifie :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}[x(t, \mu, s), z(t, \mu, s)] - F(\mu, w_0) \leq -C/2 \quad \text{pour } |t| = \epsilon \\ \sup_{\Omega} |F(\mu, w) - F(\mu, w_0)| \leq C/2 \\ \tilde{f}[x(t, \mu, 1), z(t, \mu, 1)] - F(\mu, w) \leq -C|t|^2. \end{array} \right.$$

(On déforme d'abord Σ_0 sur $t \rightarrow (\alpha(t) = 0, \beta(t) = C_1(t))$, C_1 assez petit puis on utilise le changement de variable (1.9) et $s \rightarrow w_0 + s(w - w_0)$ fournit la déformation.)

Soit M' une autre variété analytique réelle, θ un morphisme de M dans M' et $g(m, m')$ analytique sur $M \times M'$, telle que $\frac{\partial g}{\partial m'}(m, \theta(m)) = 0$, le point critique $\theta(m)$ de $m' \rightarrow g(m, m')$ étant non-dégénéré de signature (σ_+, σ_-) ($\sigma_+ + \sigma_- = \dim M'$) et $g(m, \theta(m)) = 0$.

LEMME 2. — On pose $f'(m, m', \mu) = f(m, \mu) + g(m, m')$

$$N' = \{(m, m'), m \in N, m' = \theta(m)\}.$$

Alors A), B), C) sont vérifiés avec $\epsilon'_+ = \epsilon_+ + \sigma_+$, $\epsilon'_- = \epsilon_- + \sigma_-$ et $d' = d$.

Preuve. — Il existe un système de coordonnées locales (x, y, z) sur $M \times M'$ au voisinage de $(m_0, \theta(m_0)) = (0, 0, 0)$ tel que :

$$(1.12) \quad f' = \frac{1}{2} {}^t y Q y + \mu {}^t B \cdot y + \sum_{k \geq 2} f_k(x, y) \mu^k + {}^t z C z$$

où Q et B sont comme précédemment et C est symétrique à coefficients constants, de signature (σ_+, σ_-) , qui ramène θ à l'application constante $(x, y) \rightarrow 0 = z$. La preuve est alors évidente. $\square$

Remarque. — Soit Σ un bon contour pour f et Σ'_{m_0} un bon contour pour $g(m_0, \cdot)$, c'est-à-dire une application de $\{t' \in \mathbb{R}^{\sigma^-}, |t'| \leq 1\} = U'$ dans M' , C^∞ injective à différentielle injective au voisinage de U' , et

$$\Sigma'_{m_0}(0) = \theta(m_0), \quad g(m_0, \Sigma'_{m_0}(t')) \leq -C|t'|^2 \quad (C > 0).$$

Alors on peut déformer Σ'_{m_0} en Σ'_m , laissant $\partial\Sigma'_{m_0}$ fixe, de sorte que Σ'_m soit un bon contour pour $g(m, \cdot)$, uniformément en m au voisinage de m_0 . Soit $\Sigma \circ \Sigma'_m$ le contour composé :

$$\Sigma \circ \Sigma'_m(t, t', \mu) = (\Sigma(t, \mu), \Sigma'_{\Sigma(t, \mu)}(t')).$$

Il n'est pas bon en général, mais dès que $C > 0$ est assez petit

$$(t, t', \mu) \rightarrow \Sigma \circ \Sigma'_m(t, C\mu t', \mu)$$

est bon comme on le vérifie immédiatement sur (1.12) et

$$\forall C_0 > 0, \quad \exists C_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t \in U, \quad \forall \mu \in [0, \mu_1].$$

$$(1.13) \quad |t'| > C_0\mu \Rightarrow f'[\Sigma \circ \Sigma'_m(t, t', \mu), \mu] - \mu^2 F(\mu) \leq -C_1\mu^2.$$

Enfin, terminons par une remarque qui nous sera utile dans IV.3. Supposons f de la forme :

$$f = \frac{u^2}{2} + f' = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} {}^t y Q(x, u) y + \mu B(x, u) y + \mu^2 f_2(x, u, y) + \sum_{k \geq 3} \mu^k f_k(x, u, y)$$

où (u, y) sont les variables normales à N dans M . Alors on a le développement du point critique :

$$(1.14) \quad \begin{aligned} y &= Y(x, \mu) = \mu Z(x, \mu) = -\mu Q_{(x, 0)}^{-1} B(x, 0) + O(\mu^2) \\ u &= U(x, \mu) = -\frac{\partial}{\partial u} f'[x, u, Z(x, \mu)]|_{u=0} + O(\mu^3) \end{aligned}$$

avec $U(x, \mu) \in O(\mu^2)$.

IV.2. Un lemme.

Soit q une forme quadratique réelle sur $\mathbb{C}^n$, pluri-sous-harmonique $q = h + \ell$ avec $h(x) = \frac{1}{2} [q(x) - q(ix)]$, $\ell(x) = \frac{1}{2} [q(x) + q(ix)] \geq 0$. On

note B_q, B_h, B_l les formes bilinéaires symétriques associées et σ la 2-forme antisymétrique :

$$\sigma(u, v) = B_q(u, iv) - B_q(iu, v) = 2B_r(u, iv).$$

On note (z_+, z_-) la signature de q .

Soit N un sous-espace $\mathbf{R}$ linéaire de $\mathbf{C}^n$, de dimension d . On suppose $l|_N \gg 0$ et $N = \text{noyau } (B_q)$. Alors on a nécessairement $N \cap iN = \{0\}$ car si $x \in N \setminus \{0\}$, $q(x) = h(x) + 2\ell(x) = 0$ donc $q(ix) = -h(x) + l(x) = 2\ell(x) > 0$. Ainsi N est totalement réel et on pose $N^c = N \oplus iN$.

LEMME. — i) $(N)_\sigma^\perp = (N^c)_{B_q}^\perp$.

ii) $z_+ - z_- \geq d$.

Preuve. — i) $u \in (N)_\sigma^\perp \Leftrightarrow \forall v \in N, \sigma(u, v) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in N, B_q(u, iv) = 0$

$$\Leftrightarrow u \in (iN)_{B_q}^\perp \Leftrightarrow u \in (N^c)_{B_q}^\perp.$$

ii) Soit F un $\mathbf{R}$ sous-espace de $\mathbf{C}^n$ tel que $q|_F \ll 0$.

Alors $F \cap N = \{0\}$. Posons $G = iF \oplus iN$. Pour $v \in F, u \in N$

$$\begin{aligned} q(iv + iu) &= q(iv) + q(iu) + 2B_q(iv, iu) \\ &= -h(v) + l(v) + 2l(u) - 2B_h(v, u) + 2B_r(v, u) \\ &= -q(v) + 2\ell(v) + 4B_l(v, u) \\ &= -q(v) + 2l(u + v) \geq 0 \end{aligned}$$

et si $-q(v) + 2l(u + v) = 0$ on a $v = 0$ d'où $l(u) = 0$ donc $u = 0$, d'où $q|_G \gg 0$ et $\dim G = \dim F + d$. □

Remarque. — De i) il résulte que N est σ isotrope car $NC(N^c)_{B_q}^\perp$.

IV.3. Transformations F.B.I. de seconde espèce.

On conserve les notations de III.5, et φ est p.s.s.h. stricte sur X . Ce qui suit est local au voisinage de $x_0 \in X$ et Γ désigne une sous-variété

isotrope de X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$, de dimension d , au voisinage de x_0 . Soit Y une autre variété analytique complexe de même dimension que X , $y_0 \in Y$, et $g(y, x, \theta, \mu)$, $y \in Y$, $x \in X$, $\theta \in \mathbb{C}^m$, $\mu \in \mathbb{C}$, holomorphe au voisinage de $(y_0, x_0, \theta_0, 0)$. On pose

$$(3.1) \quad f(y, x, \theta, \mu) = -\mathcal{J}m g(y, x, \theta, \mu) + \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(y, x, \theta) \mu^k$$

et on se donne une application holomorphe Θ de (Γ^c, x_0) dans $(\mathbb{C}_m, \theta_0)$; on pose :

$$(3.2) \quad N = \{(x, \theta), x \in \Gamma, \theta = \Theta(x)\}, \quad N^c = \{(x, \theta), x \in \Gamma^c, \theta = \Theta(x)\}$$

et on fait les hypothèses suivantes :

$$H.1 : \forall y, f_0|_N = 0, \quad \left. \frac{\partial f_0}{\partial x} \right|_N = 0, \quad \left. \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right|_N = 0; \quad \text{et } (x, \theta) \rightarrow f_0(y_0, x, \theta)$$

est transversalement non-dégénéré sur N , de signature $(n_x + m, n_x + m - d)$ (d'après IV.2, lemme ii), $H.1$ impose le maximum de signes $-$ dans le hessien de f_0 .

$$H.2 : \forall y, f_1|_{N^c} = 0.$$

$H.3$: Si pour $x \in \Gamma$, y voisin de y_0 , on note $\Omega f(y, x)$ l'invariant associé à f (IV.1.5) alors $\frac{\partial \Omega f}{\partial x}(y_0, x_0) = 0$ et $\text{Hessien}_{(x)} \Omega f(y_0, x_0)$ est non dégénéré de signature $(0, d)$.

Sous les hypothèses $H.1$, $H.2$, $H.3$ et d'après IV.1, Lemme 1, il existe alors W voisinage fixe de (x_0, θ_0) dans $X \times \mathbb{C}^m$ et $\mu_1 > 0$ tels que pour $0 < \mu \leq \mu_1$ et y voisin de y_0 , $(x, \theta) \rightarrow f(y, x, \theta, \mu)$ est un unique point critique dans W , soit

$$(3.3) \quad (x = x(y, \mu), \theta = \theta(y, \mu))$$

qui est non dégénéré de signature $(n_x + m, n_x + m)$. On pose

$$(3.4) \quad \mu^2 \Psi(y, \mu) = f(y, x(y, \mu), \theta(y, \mu), \mu).$$

D'après III.6, Ψ est pluri-sous-harmonique en y et si on pose

$x_\mu(y) = x(y, \mu)$ on a :

$$(3.5) \quad x_\mu^* \left(\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi \right) = \mu^2 \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \Psi.$$

On posera $\psi(y) = \Psi(y, 0)$.

Soit y au voisinage de y_0 , $(x, \theta) = (x(y, 0), \theta(y, 0))$, $q = \text{Hess}_{(x, \theta)} f_0$ et $J = df_1(x, \theta)$. D'après IV.1.3 on a :

$$(3.6) \quad (x, \theta) \in N$$

et H_2 entraîne que J est perpendiculaire à $T_{(x, \theta)} N^C$, appliquant alors IV.2, Lemme i), à q et compte tenu de IV.1.3, on obtient :

$$\left(\frac{d}{d\mu} x(y, 0), \quad \frac{d}{d\mu} \theta(y, 0) \right) \in (N)_{\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial f_0}^\perp$$

et comme $\bar{\partial} \partial f_0 = \bar{\partial} \partial \varphi$ il vient :

$$(3.7) \quad \frac{d}{d\mu} x(y, 0) \in (T_x \Gamma)_{\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi}^\perp.$$

De (3.6) et (3.7), on déduit que $y \rightarrow \{\mu \rightarrow x(y, \mu)\}$ induit une application de Y dans $\tilde{\Gamma}$, l'éclaté symplectique de Γ , qu'on notera Δ .

$$\text{LEMME. — } \Delta^*(\omega_\Gamma) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \psi.$$

Preuve. — Soit y voisin de y_0 ; notons $\gamma(\mu)$ le chemin $\mu \rightarrow x(y, \mu)$ de sorte que $\tilde{\gamma} = \Delta(y) \in \tilde{\Gamma}$.

Pour $u_i \in T_y Y$, $i = 1, 2$ on a :

$$d\Delta(y)(u_i) = \tilde{\varphi}_i$$

avec $\varphi_i : \mu \rightarrow \left(\gamma(\mu), \frac{\partial x}{\partial y}(y, \mu) \cdot u_i \right) \in T_{\gamma(\mu)} X$.

D'après II.3, Lemme 2, on a :

$$\omega_\Gamma(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu^2} < \frac{\partial x}{\partial y} u_1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} u_2 > \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$$

d'où :

$$\begin{aligned}\omega_{\Gamma}(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu^2} \varpi_{\mu}^* \left(\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi \right) (u_1, u_2) \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \Psi(u_1, u_2) \\ &= \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \Psi(u_1, u_2).\end{aligned}$$

□

On introduit alors l'hypothèse :

H.4 : ψ est p.s.s.h. strict.

Alors, sous H.4, Δ est un isomorphisme symplectique de (Y, y_0) muni de $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \psi$ sur $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\gamma}_0)[\tilde{\gamma}_0 = \Delta(y_0)]$.

Exemple.

$$\begin{aligned}X = Y = \mathbb{C}^n, \quad \varphi &= \frac{1}{2} (\mathcal{J} m x)^2, \quad x_0 = 0 \\ x &= (x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_d), \quad x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n) \\ \Gamma &= \{x'' = 0, \mathcal{J} m x' = 0\}; \quad \Gamma^c: \{x'' = 0\} \\ \theta &\in \mathbb{C}^{n-d}, \quad \Theta = 0.\end{aligned}$$

Soit $g = i \frac{\mu^2}{2} (y' - x')^2 + (\mu y'' - x'') \cdot \theta$ alors $f = -\mathcal{J} m g + \varphi$ vérifie H.1, H.2, H.3 et

$$2\Psi(y, \mu) = (\mathcal{J} m y'')^2 + \frac{(\mathcal{J} m y')^2}{(1 + \mu^2)^2},$$

$\psi(y) = \frac{1}{2} (\mathcal{J} m y)^2$ donc H.4 est satisfait.

On va à présent adjoindre le paramètre μ au filtre $\mathcal{F}$ de la façon suivante :

Soit $\hat{A} = \mathbb{R}_+^* \times A$ et $\hat{\mathcal{F}}$ le filtre sur $\hat{A}$ engendré par la base de filtre formée des sous-ensembles $\hat{F}(\mu_0, \alpha)$ de $\hat{A}$ où $\mu_0 > 0$ et α application croissante de $]0, \mu_0]$ dans $\mathcal{F}$ ($\mu < \mu' \Rightarrow \alpha(\mu) C \alpha(\mu')$) avec :

$$(3.8) \quad \hat{F}(\mu_0, \alpha) = \{(\mu, a) \in \hat{A}, 0 < \mu \leq \mu_0, a \in \alpha(\mu)\}.$$

Soit $G(y, x, \theta, \mu, a) \in \mathcal{F}$ holomorphe près de $(y_0, x_0, \theta_0, 0)$, vérifiant :

$$(3.9) \quad g(y, x, \theta, \mu) = \lim_{\mathcal{F}} G(y, x, \theta, \mu, a)$$

telle que $f = -\mathcal{J} m g + \phi$ vérifie H.1, H.2, H.3, H.4; $\Psi(y, \mu)$, $\psi(y)$, Δ seront les fonctions introduites précédemment. On pose $H_{\phi, x_0}^1 = H_{\phi, x_0}$. $\mathcal{H}_{\phi, x_0}^1 = \mathcal{H}_{\phi, x_0}$ où H_{ϕ, x_0} , $\mathcal{H}_{\phi, x_0}$ sont définis en III.7 et

$$(3.10) \quad \Lambda = \mu^2 \lambda, \quad H_{\psi, y_0}^2 = \lim_{\omega \ni y_0} H_{\psi, \mathcal{F}}^2(\omega), \quad \mathcal{H}_{\psi, y_0}^2 = H_{\psi, y_0}^2 / \{v, y_0 \notin S_{\psi}^{\mathcal{F}}\}$$

avec $H_{\psi, \mathcal{F}}^2(\omega)$, $S_{\psi}^{\mathcal{F}}$ définis comme en III.1, mais avec le grand paramètre λ remplacé par $\Lambda = \mu^2 \lambda$.

Soit $p(y, x, \theta; \mu, a, \Lambda)$ un $\mathcal{F}$ symbole analytique classique de degré ℓ (III.2) au voisinage de (y_0, x_0, θ_0) et grand paramètre Λ :

$$(3.11) \quad p \sim \Lambda^{\ell} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(y, x, \theta, \mu, a) \Lambda^{-k}.$$

Soit enfin Σ_0 un bon contour pour $f(y_0, \cdot)$. Pour $u \in H_{\phi, x_0}^1$ on pose

$$(3.12) \quad \delta_{\Sigma, B}(p)(u)(y, \mu, a, \Lambda) = \int_{\Sigma \cap B} e^{i\Lambda G} p \cdot u \, dx \wedge d\theta$$

où pour tout $\mu > 0$ assez petit, l'intégrale est calculée sur l'intersection du contour (orienté)

$$\mathbf{R}^{n+m} \ni t \rightarrow \Sigma_0(t, \mu)$$

avec B , petite boule de centre (x_0, θ_0) sur laquelle G, p, u sont bien définis.

Comme $u \in H_{\phi, x_0}^1$, il existe une application $\varepsilon \in F_{\varepsilon}^1$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathcal{F}$, $\lambda(a, \varepsilon)$ défini pour $a \in F_{\varepsilon}^1$ et un voisinage ω de x_0 tels que :

$$(3.13) \quad \forall a \in F_{\varepsilon}^1, \quad \forall \lambda \geq \lambda(a, \varepsilon), \quad \forall x \in \omega, \quad |u(x, a, \lambda)| \leq e^{\lambda[\phi(x) + \varepsilon]}$$

et d'après (3.9) un voisinage U de $(y_0, x_0, \theta_0, 0)$, et $\varepsilon \rightarrow F_{\varepsilon}^2$ tels que :

$$(3.14) \quad \forall a \in F_{\varepsilon}^2, \quad \sup_U |G(\cdot, a) - g| < \varepsilon.$$

On peut supposer F^1 et F^2 croissantes; alors pour $(x, \theta) \in \Sigma(t, u)$,

$x \in \omega$, $(y_0, x, \theta) \in U$ l'intégrand dans (3.12) est majoré pour $y = y_0$, d'après IV.1.7, (3.13), (3.14) par :

$$(3.15) \quad \Lambda' B(\mu, a) e^{\lambda \mu^2 [\Psi(y_0, \mu) + 2\varepsilon - C|t|^2]}$$

dès que $a \in F_{\varepsilon\mu^2}^1 \cap F_{\varepsilon\mu^2}^2$ et $\Lambda = \mu^2 \lambda \geq \mu^2 \lambda(a, \varepsilon\mu^2)$. [On a utilisé la majoration $|p| \leq B(\mu, a) \Lambda'$.] Alors de III.2.4, 3.15, $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Psi(y, \mu) = \psi(y)$, IV.1.11 et la formule de Stokes on déduit :

LEMME. — $\delta_{\Sigma, B}(p)$ induit une application de $\mathcal{H}_{\Phi, x_0}^1$ dans $\mathcal{H}_{\Psi, y_0}^2$ indépendante de Σ, B , qu'on notera $\delta(p)$ et qui ne dépend que du symbole formel associé à p .

DÉFINITION. — On appelle $\delta(p)$ une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer de seconde espèce sur $\Gamma[\text{FBI}_\Gamma^2]$ en abrégé]. Pour $P = \delta(p)$, on notera Δ_p la transformation géométrique de $\underline{Y}$ dans $\tilde{\Gamma}$ correspondante. Sous la forme (3.12), on dira que $P = \delta(p)$ est régulière si, et seulement si, p_0 le premier terme du développement de (3.11) est non nul au voisinage de (y_0, x_0, θ_0) . On note $\delta(p)u \equiv \int e^{i\tilde{u}G} pu \, dx \wedge d\theta$.

PROPOSITION. — Soit $P = \delta(p)$ comme en 3.12 une FBI_Γ^2 de $\mathcal{H}_{\Phi, x_0}^1$ dans $\mathcal{H}_{\Psi, y_0}^2$ et

$$I(q)(v) = \int_{\Sigma'} e^{iJ(x, z, \xi, a)} q(x, z, \xi, a, \lambda) v(z, a, \lambda) \, dz \wedge d\xi$$

une T.C.Q. de $\mathcal{H}_{\Phi', z_0}$ dans $\mathcal{H}_{\Phi, x_0}$, de transformation canonique $\chi : X \rightarrow Z$. Alors :

i) $P'(v) = \delta(p) \circ I(q)(v) = \iint e^{i\lambda(G+J)} qpv \, dz \wedge d\xi \wedge dx \wedge d\theta$ est une $\text{FBI}_{\Gamma'}^2$, $\Gamma' = \chi(\Gamma)$.

ii) $\Delta_{p'} = \tilde{\chi} \circ \Delta_p$ où $\tilde{\chi} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}'$ est l'éclaté de $\chi : X \rightarrow Z$ (II.3, Proposition 1).

iii) P' est régulière si $\delta(p)$ et $I(q)$ le sont.

Preuve. — On considère (x, ξ, θ) comme les nouveaux paramètres, au voisinage de (x_0, ξ_0, θ_0) . Tout d'abord, comme q est un $\mathcal{F}$ -symbole

analytique classique avec λ comme grand paramètre, c'est *a fortiori* un $\mathcal{F}$ symbole analytique classique avec Λ comme grand paramètre. S'il est de degré l' et q_0 est son terme principal, le terme principal de qp est $\mu^{-2l'} q_0 p_0$ donc iii).

Soit $j = \lim_{\mathcal{F}} J$ et $E(z)$ défini par :

$$(z, \chi^{-1}(z), E(z)) \in C_j$$

et

$$\begin{aligned} N' &= \{(z, x, \xi, \theta); z \in \Gamma', z = \chi(x), \xi = E(z), \theta = \Theta(x)\} \\ N^C &= \{(z, x, \xi, \theta); z \in \Gamma'^C, z = \chi_\Gamma^C(x), \xi = E|_{\Gamma'}(z), \theta = \Theta(x)\} \end{aligned}$$

où $\chi|_{\Gamma'}^C, E|_{\Gamma'}^C$ sont les complexifications de $\Gamma \xrightarrow{\chi} \Gamma', E|_{\Gamma'}$.

Alors N'^C est complexifié de N' . Soit $f' = -\mathcal{J}m g - \mathcal{J}m j + \varphi'$.

Alors H.2 est évident et comme $f' = f + \varphi' - \varphi - \mathcal{J}m j$ d'après IV.1, Lemme 2, H.1 et H.3 sont vérifiés; H.4 est trivial car ψ ne change pas; la remarque qui suit le lemme 2 de IV.1 prouve alors i), et ii) est immédiat par définition de $\tilde{\chi}, \Delta p, \Delta p'$.

THÉORÈME. — *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, soit $P' = \delta(p')$ une $FBI_{\Gamma'}^2$ régulière de $\mathcal{H}_{\varphi', z_0}^1$ dans $\mathcal{H}_{\psi', w_0}^2$, telle que $\tilde{\chi}(\Delta p(y_0)) = \Delta p'(w_0)$.*

Alors il existe une T.C.Q., $I(q')$ de $\mathcal{H}_{\psi', w_0}^2$ dans $\mathcal{H}_{\psi, w_0}^2$ (régulière si $\delta(p)$ et $I(q)$ le sont) telle que :

$$I(q') \circ \delta(p') = \delta(p) \circ I(q)$$

et la transformation canonique sous-jacente à $I(q')$, de Y dans W est $\Delta_p^{-1} \circ \tilde{\chi} \circ \Delta p$.

Preuve. — D'après la proposition précédente, on peut supposer $\varphi = \frac{1}{2}(\mathcal{J}m x)^2, \varphi' = \frac{1}{2}(\mathcal{J}m z)^2, I(q) = \text{Id}$, avec

$$x = (x', x'') \in \mathbb{C}^n, \quad x' = (x_1, \dots, x_d)$$

et $\Gamma' = \Gamma = \{x', x'', x''=0, \mathcal{J}m x' = 0\}$ et on travaille localement au voisinage de $x = 0$. On peut de plus choisir $\delta(p')$ arbitrairement. On

pose avec $\rho = \frac{\mu^2}{1 - \mu^2}$:

$$(3.16) \quad \delta(p')u = \int e^{-\lambda \frac{\rho}{2}(w'-x')^2 + i\lambda(\mu w'' - x'') \cdot \theta''} u(x, a, \lambda) dx \wedge d\theta''$$

et $w_0 = (w'_0, w''_0) \in \mathbb{C}^n$ est tel que la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin :

$$x'' = \mu w''_0, \quad \operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} w'_0 = 0, \quad \mathcal{J}m x' = \mu^2 \mathcal{J}m w'_0$$

soit $\Delta p(y_0)$. On a alors $\psi'(w) = \frac{1}{2}(\mathcal{J}m w)^2$ [cf. exemple, p. 181].

Dans la suite C_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ désignent des constantes strictement positives choisies dans cet ordre; à part C_0 , elles seront toutes supposées être très petites devant les précédentes. On fixe $\varepsilon_0 > 0$ petit, $\omega = \{|x| < \varepsilon_0\}$ et on travaille avec $u \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(\omega)$.

1^{ère} étape : Étude précise de l'intégrale (3.16).

Pour $w \in \mathbb{C}^n$, on note $\Sigma_{w, \mu}$, le contour :

$$(3.17) \quad \begin{cases} x'' = \mu(w'' + t'') & \theta'' = -\mu \mathcal{J}m w'' - i\mu C_0 \overline{t''} \\ \operatorname{Re} x' = \operatorname{Re} w' + t' & \mathcal{J}m x' = \mu^2 \mathcal{J}m w' \end{cases}$$

avec $C_0 \gg 1/2$, $t'' \in \mathbb{C}^{n-d}$, $t' \in \mathbb{R}^d$, $|t''|^2 + |t'|^2 \leq C_1$ (w étant fixé, c'est un « bon contour »).

On définit alors $\delta_w(u)$ par l'intégrale (3.16), prise sur le contour $\Sigma_{w, \mu}$, ce qui a un sens pour tout μ , $0 < \mu \leq \mu_0 < 1$, μ_0 , C_1 petit si :

$$(3.18) \quad \mu^2 |\mathcal{J}m w'| \leq C_2, \quad |\operatorname{Re} w'| \leq C_2, \quad \mu |w''| \leq C_2.$$

Pour $(x, \theta) \in \Sigma_{w, \mu}$, on a :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} (z' - x')^2 - \mathcal{J}m (\mu z'' - x'') \cdot \theta'' + \frac{1}{2} (\mathcal{J}m x)^2 \\ & = \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J}m z)^2 - \frac{\mu^2}{2(1-\mu^2)} [\operatorname{Re} z' - \operatorname{Re} w' - t']^2 \\ & + \frac{\mu^4}{2(1-\mu^2)} (\mathcal{J}m z' - \mathcal{J}m w')^2 - \mu^2 [C_0 |t''|^2 - \frac{1}{2} (\mathcal{J}m t'')^2] \\ & - \frac{\mu^2}{2} [\mathcal{J}m z'' - \mathcal{J}m w'']^2 + C_0 \mu^2 \operatorname{Re} (z'' - w'') \cdot \overline{t''}. \end{aligned}$$

Posons :

$$(3.20) \quad D(\mu, C_3)$$

$$= \{w \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Re} w'| < C_3, |\mathcal{J} m w' - \mathcal{J} m w'_0| < \frac{C_3}{\mu}, |w'' - w''_0| < C_3\}.$$

Alors de (3.19) et de la formule de Stokes, il résulte pour $w, z \in D(\mu, C_3)$:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} |[\delta_w(u) - \delta_z(u)](z)| &\leq \frac{1}{C_4} \mu^{2n-2d} e^{-\frac{\lambda \mu^2}{2} (\operatorname{Im} z)^2} e^{-\mu^2 \lambda C_4} \sup_{\omega} |ue^{-\lambda \varphi}| \\ |\delta_z(u)(z)| &\leq \frac{1}{C_4} \mu^{2n-2d} e^{\frac{\lambda \mu^2}{2} (\operatorname{Im} z)^2} \sup_{\omega} |ue^{-\lambda \varphi}|. \end{aligned}$$

Par construction, $\delta(p')(u)$ est la classe de $\delta_{w_0}(u)$ dans $\mathcal{H}_{\varphi, w_0}^2$, donc d'après (3.21), c'est aussi la classe de $\delta_w(u)$ dans $\mathcal{H}_{\varphi, w_0}^2$ pour tout $w \in \bigcup_{\mu > 0} D(\mu, C_3)$.

Construisons à présent un inverse approximatif pour $\delta(p')$. Posons :

$$(3.22) \quad \Omega(\mu, C_6)$$

$$= \{x \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Re} x'| < C_6, |\mathcal{J} m x' - \mu^2 \mathcal{J} m w'_0| < \mu C_6, |x'' - \mu w''_0| < \mu C_6\}$$

et pour tout $z \in D(\mu, C_3)$:

$$(3.23) \quad \begin{cases} K_x[\delta_z(u)](y, a, \mu, \lambda) \\ = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n-d} (i\rho)^d \mu^{n-d} \int_{\Sigma'_{x, \mu}} e^{\frac{\lambda}{2} \rho(y' - w')^2 + i\lambda(y'' - \mu w'') \cdot \xi''} \delta_z(u) dw \wedge d\xi'' \\ K^0[\delta_z(u)](y, a, \mu, \lambda) \\ = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n-d} (i\rho)^d \mu^{n-d} \int_{\Sigma_{1,0}^1} e^{\frac{\lambda}{2} \rho(y' - w')^2 + i\lambda(y'' - \mu w'') \cdot \xi''} \delta_z(u) dw \wedge d\xi'' \end{cases}$$

où $\Sigma'_{x, \mu}$ est le contour :

$$(3.24) \quad \begin{cases} w'' = \frac{x''}{\mu} + s'' & \xi'' = -\mathcal{J} m x'' - iC_0 \mu \overline{s''} \\ \operatorname{Re} w' = \operatorname{Re} x' & \mathcal{J} m w' = \frac{\mathcal{J} m x'}{\mu^2} + \frac{s'}{\mu} \end{cases}$$

et $\Sigma_\mu^{1,0}$ le contour :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} w'' &= w_0'' + s'' & \xi'' &= -\mu \mathcal{J}m w'' - iC_0 \mu \overline{s''} \\ \operatorname{Re} w' &= \operatorname{Re} w_0' & \mathcal{J}m w' &= \mathcal{J}m w_0' + \frac{s'}{\mu} \end{aligned}$$

avec $s'' \in \mathbb{C}^{n-d}$, $s' \in \mathbb{R}^d$, $|s''|^2 + s'^2 \leq C_5$. Notons que les images de ces contours sont contenues dans $D(\mu, C_3) \times \mathbb{C}_\xi^{n-d}$, mais qu'ils ne sont pas bornés uniformément en μ . On a aussi $\Sigma_\mu^{1,0} = \Sigma'_{x^0(\mu), \mu}$ avec $\operatorname{Re} x'^0(\mu) = \operatorname{Re} w_0'$, $\mathcal{J}m x'^0(\mu) = \mu^2 \mathcal{J}m w_0'$, $x''^0(\mu) = \mu w_0''$.

Sur $\Sigma'_{x, \mu}$ on a :

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} (y' - w')^2 - \mathcal{J}m (y'' - \mu w'') \cdot \xi'' + \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J}m w)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{J}m y)^2 + \frac{\mu^2}{2(1-\mu^2)} (\operatorname{Re} y' - \operatorname{Re} x')^2 \\ & - \frac{1}{2(1-\mu^2)} (\mathcal{J}m y' - (\mathcal{J}m x' + \mu s'))^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{J}m x'' - \mathcal{J}m y'')^2 \\ & - \mu^2 \left[C_0 |s''|^2 - \frac{1}{2} (\mathcal{J}m s'')^2 + \mu C_0 \operatorname{Re} (y'' - x'') \cdot \overline{s''} \right]. \end{aligned} \right.$$

En utilisant (3.21), (3.26), et la formule de Stokes, on trouve alors pour $x, y \in \Omega(\mu, C_6)$, $z \in D(\mu, C_3)$:

(3.27)

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \begin{aligned} & |K_x(\delta_z(u)) - K_y(u)(x)| \\ & |K^0(\delta_z(u)) - K_x(\delta_z(u))(x)| \end{aligned} \right\} \right| \leq \frac{(\lambda \mu^2)}{C_7 \mu^d} e^{-\lambda \mu^2 C_7} e^{\frac{\lambda}{2} (\operatorname{Im} x)^2} \sup_{\omega} |u e^{-\lambda \Phi}| \\ & |K_x(\delta_z(u))(x)| \leq \frac{(\lambda \mu^2)^{2n-d}}{C_7 \mu^d} e^{\frac{\lambda}{2} (\operatorname{Im} x)^2} \sup_{\omega} |u e^{-\lambda \Phi}|. \end{aligned}$$

Montrons alors le lemme suivant :

LEMME (3.28). — Il existe $C_8 > 0$ tel que pour $x \in \Omega(\mu, C_6)$ et $\lambda \mu^2 \geq 1$ on ait :

$$|K^0 \delta_{w_0}(u)(x) - u(x)| \leq \frac{(\lambda \mu^2)^{2n-d}}{C_8 \mu^d} e^{\frac{\lambda}{2} (\operatorname{Im} x)^2 - \lambda \mu^2 C_8} \sup_{\omega} |u e^{-\lambda \Phi}|.$$

Preuve. — D'après (3.21), (3.27), pour calculer $K^0 \delta_{w_0}(u)$ à l'approximation imposée par le lemme (3.28), il suffit de choisir la composition des contours (3.24), (3.17), dans l'intégrale composée. Après avoir effectué le changement de variable :

$$\begin{aligned} y &= x + \mu\alpha, & \theta'' &= -\mathcal{J}m x'' + \mu\gamma'' & \xi'' &= -\mathcal{J}m x'' + \mu\delta'' \\ w' &= \left(\operatorname{Re} x' + i \frac{\mathcal{J}m x'}{\mu^2} \right) + i \frac{\beta'}{\mu} & w'' &= \frac{x''}{\mu} + \beta''. \end{aligned}$$

On a à calculer l'intégrale :

$$e^{\frac{\lambda}{2}(\operatorname{Im} x)^2} (-\rho)^d \mu^{4n-4d} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{2n-d} \int e^{-\frac{\lambda}{2} \rho [\mu^2 \alpha'^2 - 2i\beta' \cdot \alpha'] + i\lambda \mu^2 [\beta'' \gamma'' - \beta'' \delta'' - \alpha'' \gamma'']} \cdot v(\alpha, \mu, a, \lambda) d\beta \wedge d\delta'' \wedge d\alpha \wedge d\gamma''$$

où :

$$v(\alpha, \mu, a, \lambda) = e^{-\frac{\lambda}{2}(\operatorname{Im} x)^2 + i\lambda \mu \alpha \cdot \mathcal{J}m x} u(x + \mu\alpha, a, \lambda)$$

sur le contour :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= s'' + t'', & \alpha' &= \frac{t'}{\mu} + is', & \beta' &= s', & \beta'' &= s'', & \delta'' &= -iC_0 \overline{s''} \\ \gamma'' &= -(\mathcal{J}m s'' + iC_0 \overline{t''}), & t'^2 + |t''|^2 &\leq C_1, & s'^2 + |s''|^2 &\leq C_5. \end{aligned}$$

On opère alors la déformation de contour définie par :

$$\alpha' = K \frac{t'}{\mu} + is', \quad \beta' = s' + i \frac{\mu}{2K} (1 - K^2) t'$$

où K est réel, décroissant de 1 à μ ; comme le long de cette déformation on a :

$$\rho \operatorname{Re} (\mu^2 \alpha'^2 - 2i\beta' \cdot \alpha') - \mu^2 (\mathcal{J}m \alpha')^2 = \rho [s'^2 + t'^2]$$

qui est indépendant de K , la contribution du bord des contours d'intégration de la déformation est négligeable à l'approximation du lemme (3.28) d'après (3.19) et (3.26). Lorsque $K = \mu$, le contour obtenu est uniformément borné en μ et il suffit alors d'appliquer le théorème de la phase stationnaire III.7.1.

2^e étape. — Soit $\delta(p)(u)$ sous la forme (3.12). Par changement de

variable en θ dans (3.12), on peut supposer $\Theta \equiv 0$ donc

$$(3.29) \quad N = \{x''=0, \mathcal{J}m x'=0, \theta=0\}, \quad N^C = \{x''=0, \theta=0\}.$$

Alors par le choix de φ et les hypothèses H.1, H.2, on a nécessairement :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} g_0(y, x, \theta) &= {}^t(x'', \theta) Q(y, x, \theta)(x'', \theta); \\ g_1(y, x, \theta) &= B(y, x, \theta)(x'', \theta) \end{aligned}$$

et on désigne toujours par $x(y, \mu)$, $\theta(y, \mu)$ le point critique de $(x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g + \varphi$. Pour $|y - y_0| < C_0$ on a $x(y, \mu) \in \Omega(\mu, C_6)$ pour μ assez petit et on peut aussi supposer que si Σ est le bon contour choisi dans (3.12), l'image de $\Sigma(\cdot, \mu)$ est dans $\Omega(\mu, C_6) \times C_6^m$. On fait le changement de variable :

$$(3.32) \quad x'' = \mu \tilde{x}'', \quad \theta = \mu \tilde{\theta}$$

et on pose

$$(3.32') \quad \mu^2 \tilde{G} = G(y, x', \mu \tilde{x}'', \mu \tilde{\theta}, \mu, a), \quad \mu^2 \tilde{g} = g(y, x', \mu \tilde{x}'', \mu \tilde{\theta}, \mu).$$

Alors par le choix de $\mathcal{F}$ on a évidemment :

$$(3.33) \quad \lim_{\mathcal{F}} \tilde{G} = \tilde{g}, \quad \lim_{\mathcal{F}} \tilde{G} = \tilde{g}|_{\mu=0}$$

et pour $v \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(D(C_3))$

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \delta(p)_0 K^0 v &= \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{2n-d} (-i\rho)^d \mu^{4(n-d)} \\ &\int_{\Sigma_0 \Sigma'_0} e^{i\Lambda \left[\tilde{G} - \frac{i}{2(1-\mu^2)} (x' - w')^2 + (\tilde{x}'' - w'').\tilde{\xi}'' \right]} \end{aligned}$$

$$p(y, x', \mu \tilde{x}'', \mu \tilde{\theta}, \mu, a, \Lambda) v(w, a, \mu, \Lambda) dw \wedge d\tilde{\xi}'' \wedge dx' \wedge d\tilde{x}'' \wedge d\tilde{\theta}$$

après avoir posé $\mu \tilde{\xi}'' = \xi''$ dans (3.23). On pose :

$$(3.34') \quad \Phi = \tilde{g} - \frac{i}{2(1-\mu^2)} (x' - w')^2 + (\tilde{x}'' - w'').\tilde{\xi}''.$$

D'après (3.28) et comme (3.34) se présente formellement sous la forme d'une transformation canonique, il suffit de vérifier que

$-\mathcal{J}m\Phi + \frac{1}{2}(\mathcal{J}mw)^2$ a un col et qu'on peut remplacer le contour $\Sigma \circ \Sigma_\mu^{1,0}$ (qui est non uniformément borné en μ) par un bon contour pour $-\mathcal{J}m\Phi + \frac{1}{2}(\mathcal{J}mw)^2$. Alors par construction même, la transformation canonique sous-jacente sera $\Delta_p^{-1} \circ \Delta p$, et $I(q')$ donné par (3.34) est régulière si $\Delta(p)$ l'est.

3^e étape : *Déformation du contour*. On fixe $y = y_0$.

Tout d'abord on choisit le bon contour Σ pour $\delta(p)$. D'après H.1 et (3.30) :

$$(3.35) \quad (\tilde{x}'', \tilde{\theta}) \rightarrow -\mathcal{J}m\tilde{g} + \frac{1}{2}(\mathcal{J}m\tilde{x}'')^2$$

a un point critique non-dégénéré de signature $(n-d+m, n-d+m)$ en $\tilde{x}''(x', \mu)$, $\tilde{\theta}(x', \mu)$ dépendant analytiquement de μ au voisinage de 0 et de x' près de 0 dans Γ^c . On note $l(x', \mu)$ la valeur critique (p.s.s.h en x'). On choisit $t'' \rightarrow \Sigma''_{(x', \mu)}$ un bon contour pour (3.35), $t'' \in \mathbf{R}^{n-d+m}$, $|t''| \leq C_{10}$ et sur $\Sigma''_{(x', \mu)}$.

$$(3.36) \quad -\mathcal{J}m\tilde{g} + \frac{1}{2}(\mathcal{J}m\tilde{x}'')^2 \leq l(x', \mu) - C_{11}t''^2.$$

Alors d'après H.3, si on pose $x' = \text{Re } \tilde{x}' + i\mu \mathcal{J}m\tilde{x}'$

$$(3.37) \quad \tilde{x}' \rightarrow l(\tilde{x}', \mu) + \frac{1}{2}(\mathcal{J}m x')^2$$

a un col en $\tilde{x}'(\mu)$, et voir [IV.1.14), $\mathcal{J}m x'(\mu) \in 0(\mu^2)$, $x'(0) = 0$ et la valeur critique est $\Psi(y_0, \mu)$. Alors nécessairement :

$$(3.38) \quad x' \rightarrow l(x', 0)$$

a un col en $x' = 0$ et est défini négatif sur Γ .

On choisit donc comme bon contour Σ :

$$(3.39) \quad \begin{array}{l} t = (t', t'') \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d+m} \\ |t'| \leq C_{12} |t''| \leq C_{10} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x'_\mu(t) = x'(\mu) + t' \\ (x''(t), \theta(t)) = \mu \Sigma''_{(x'_\mu(t), \mu)}(t'') \end{cases}$$

et d'après (3.27), on peut remplacer $\Sigma_\mu^{1,0}$ par $\Sigma'_{x(t), \mu}$ de sorte qu'on calcule

l'intégrale (3.34) sur le contour :

$$(3.40) \quad \Sigma \circ \Sigma'_{(x(t), \mu)},$$

qui est par construction centré au point critique de $-\mathcal{J}m\Phi + \frac{1}{2}(\mathcal{J}mw)^2$. Lions les variables d'intégration de (3.34) par les relations :

$$(3.41) \quad \begin{cases} w'' = \tilde{x}'' + s''\xi'' = -\mathcal{J}m\tilde{x}'' - iC_0\overline{s''} & |s''|^2 + s'^2 \leq C_5 \\ \operatorname{Re} w' = \operatorname{Re} x', \quad \mathcal{J}m w' = \frac{\mathcal{J}m x'(\mu)}{\mu^2} + \frac{s'}{\mu} \\ (x''(t), \theta(t)) = \mu \Sigma''_{(x'_\mu(\tilde{t}'), \mu)}(t'') & |t''| \leq C_{10} \\ x'_\mu(\tilde{t}') = x'(\mu) + \tilde{t}', \quad \tilde{t}' \in \mathbb{C}^d, \quad |\operatorname{Re} \tilde{t}'| \leq C_{12}, |\mathcal{J}m \tilde{t}'| \leq C_{13}. \end{cases}$$

Le contour $\Sigma_0 \Sigma'_{x(t), \mu}$ est défini par (3.41) et $\mathcal{J}m \tilde{t}' = 0$. Alors sous les relations (3.41) on a : $(x' = x'_\mu(\tilde{t}'))$.

$$(3.42)$$

$$\begin{cases} -\mathcal{J}m\Phi + \frac{1}{2}(\mathcal{J}mw)^2 \leq \Psi(y_0, \mu) - C_{11}t''^2 - \left[C_0|s''|^2 - \frac{1}{2}(\mathcal{J}ms'')^2 \right] \\ + l(x', \mu) + \frac{1}{2\mu^2}(\mathcal{J}mx')^2 - \frac{1}{2\mu^2(1-\mu^2)}[(\mathcal{J}mx') - \mathcal{J}mx'(\mu)]^2 - \Psi(y_0, \mu) \\ - \frac{s'^2}{2(1-\mu^2)} + \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{s'}{\mu} (\mathcal{J}mx' - \mathcal{J}mx'(\mu)). \end{cases}$$

Or de (3.37), (3.38) il résulte qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que :

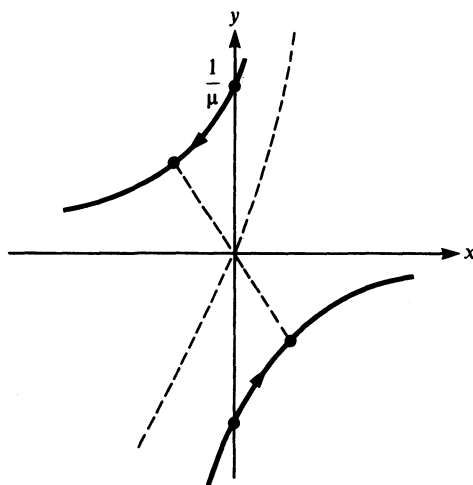
$$(3.43) \quad l(x', \mu) + \frac{1}{2\mu^2}(\mathcal{J}mx')^2 - \frac{1}{2\mu^2(1-\mu^2)}(\mathcal{J}m\tilde{t}')^2 \\ \leq \Psi(y_0, \mu) - \alpha(\operatorname{Re} \tilde{t}')^2 + \beta(\mathcal{J}m\tilde{t}')^2.$$

Alors effectuons la déformation de $\Sigma \circ \Sigma'_{(x(t), \mu)}$:

$$(3.44) \quad \begin{cases} \mathcal{J}m w' = \frac{\mathcal{J}m x'(\mu)}{\mu^2} + \frac{\varepsilon s'}{\mu} \\ \mathcal{J}m \tilde{t}' = \frac{-\mu}{2\varepsilon} (1 - \varepsilon^2) s' \end{cases}$$

(en conservant les autres relations de (3.4)), ε variant de 1 à μ/C_{14} . Alors sur cette déformation $|\mathcal{J}m\tilde{t}'| \leq \frac{C_{14}C_5}{2}$ donc reste petit et la contribution du bord des contours déformés (en appliquant Stokes à (3.34)) sera négligeable pourvu que $\beta C_{12}^2 < 2$. Donc $-\mathcal{J}m\Phi + \frac{1}{2}(\mathcal{J}mw)^2$ possède un col (uniformément en μ) et pour $\varepsilon = \mu/C_{14}$ le contour obtenu est un bon contour d'après (3.42), (3.44), ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque. — Intuitivement, l'inversion de $\delta(p')$ nous a conduit au mauvais contour $x = 0$, $y = \frac{s}{\mu}$ pour la forme quadratique $-\mu^2 y^2 + xy$ dans $\mathbf{R}^2$.



Mais il est facile de déformer comme sur la figure d'où (3.44), et la déformation du lemme (3.28).

IV.4. Deuxième micro-support.

DÉFINITION (4.1). — Soit Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ où φ est p.s.s.h. stricte sur X . Pour $u \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(X)$ on définit son Γ (deuxième) micro-support, noté $S_{\Gamma}^2(u)$ comme le sous-ensemble de $\tilde{\Gamma}$ défini

par : $\tilde{\gamma} \notin S_F^2(u)$ si, et seulement s'il existe une FBI_F^2 , $P = \delta(p)$ de $\mathcal{H}_{\varphi, x_0}^1$ dans $\mathcal{H}_{\Psi, y_0}^2$ avec $x_0 = \gamma(0)$, $\Delta_p(y_0) = \tilde{\gamma}$ et $y_0 \notin S_{\Psi}^{\mathcal{F}}(Pu)$. On pose :

$$\begin{aligned} SS_F^2(u) &= S_F^2(u) \cap T^*\Gamma \\ \tilde{S}S_F^2(u) &= S_F^2(u) \cap (T^*\Gamma \setminus \Gamma). \end{aligned}$$

On appelle $\tilde{S}S_F^2(u)$ le Γ (deuxième) micro-support singulier de u .

D'après le théorème de IV.3, la définition ne dépend pas du choix de la FBI_F^2 , $\delta(p)$, et si $I(q)$ est une T.C.Q. régulière de $H_{\varphi, \mathcal{F}}$ dans $H_{\varphi', \mathcal{F}}$ de T.C. sous-jacente χ on a :

$$(4.2) \quad S_F^2(u) = \tilde{\chi}[S_F^2(I(q)(u))] \quad \text{avec} \quad \Gamma = \chi(\Gamma').$$

THÉORÈME (4.3). — 1) $S_F^2(u)$ est fermé homogène dans $\tilde{\Gamma}$.

$$2) \quad S_F^2(u) = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma \cap S_{\Phi}^{\mathcal{F}}(u) = \emptyset.$$

Preuve. — 1) Que $S_F^2(u)$ soit fermé résulte de sa définition. Si $\delta(p)(u) = v$ et $t > 0$, on pose $v^t(y, a, \mu, \lambda) = v(y, a, t\mu, \lambda)$. On a $v^t = \delta^t(p)(u)$ où on désigne par $\delta^t(p)$ la FBI_F^2 déduite de $\delta(p)$ en remplaçant μ par $t\mu$ dans l'expression intégrale de $\delta(p)$.

Alors $v^t \in H_{t^2\Psi, \mathcal{F}}^2$ et il est immédiat que $S_{\Psi}^{\mathcal{F}}(v) = S_{t^2\Psi}^{\mathcal{F}}(v^t)$. Comme $\Delta_{\delta^t(p)} = t \cdot \Delta_{\delta(p)}$ où $\cdot$ désigne l'homogénéité de $\tilde{\Gamma}$, $S_F^2(u)$ est homogène.

2) Si $S_{\Phi}^{\mathcal{F}}(u) \cap \Gamma = \emptyset$, il est clair que $S_F^2(u) = \emptyset$. Réciproquement si $S_F^2(u) = \emptyset$ (ce qui est équivalent d'après 1) à $S_F^2(u) \cap \Gamma = \emptyset$), on a d'après la preuve du théorème et en conservant les notations de celle-ci, avec $w_0 = 0$ [cf. (3.28), et puisqu'on a une hypothèse de décroissance sur tout le contour (3.25)]

$$|u(x)| \leq e^{\lambda\Phi(x)} \sup_{\omega} |ue^{-\lambda\Phi}| e^{-\lambda\mu^2 C(\mu)}$$

pour $\lambda \geq \lambda(\mu)$, $|\Im m x'| < \mu C_6$, $|x''| < \mu C_6$, $|\Re x'| < C_6$, $0 < \mu \leq \mu_0$ avec $C(\mu) > 0$. En fixant μ , on obtient $0 \notin S_{\Phi}^{\mathcal{F}}(u)$. $\square$

Soit à présent ι une fonction analytique réelle sur Γ , telle que l'hypersurface $\iota = 0$ de Γ soit lisse ($\iota = 0 \Rightarrow d\iota \neq 0$).

Si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ et θ est un vecteur tangent, alors la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin

$s \rightarrow \gamma(s) + \frac{s^2}{2} \theta$ ne dépend que de la classe de θ modulo $(T\Gamma)^\perp$ donc définit une action (additive) de $T^*\Gamma$ sur $\tilde{\Gamma}$.

THÉOREME (4.4) (Water melon). — Soit u tel que $\Gamma \cap S_\Phi^{\mathcal{F}}(u) \cap z < 0 = \emptyset$, alors $S_\Gamma^2(u)|_{r=0}$ est invariant par $d\iota$.

Preuve. — On recopie la preuve telle qu'elle est dans [11]. Tout d'abord, par transformation canonique, on se ramène au cas $\varphi = \frac{1}{2}(\text{Im } x)^2$,

$$\Gamma = \{(x', x''), x'' = 0, \mathcal{I} \text{ m } x' = 0\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_d), \quad z = x_d$$

et on choisit comme FBI_Γ^2 celle qui est donnée par (3.16). Soit $\varepsilon > 0$. On découpe alors l'intégrale (3.16) sur le contour (3.17) en deux parties, suivant que $\text{Re } X'_d \leq -\varepsilon$ où $\text{Re } X'_d > -\varepsilon$. Par hypothèse, il existe alors $\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < \mu_0 \leq \mu(\varepsilon)$

$$\int_{\text{Re } w'_d + t'_d \leq -\varepsilon} \in H_{\varphi - C_\varepsilon/\mu_0, \mathcal{F}}^2; \quad \int_{\text{Re } w'_d + t'_d > -\varepsilon} \in H_{\tilde{\varphi}_\varepsilon, \mathcal{F}}^2$$

avec $\tilde{\varphi}_\varepsilon = \varphi$ si $\text{Re } z'_d > -\varepsilon$, $\tilde{\varphi}_\varepsilon = -\frac{1}{2}(\text{Re } z'_d + \varepsilon)^2$ si $\text{Re } z'_d + \varepsilon < 0$.

De (4.5), il résulte alors par le choix du filtre $\mathcal{F}$:

$$\delta(p')(u) \in H_{\tilde{\varphi}, \mathcal{F}}^2$$

avec $\tilde{\varphi} = \varphi$ si $\text{Re } z'_d \geq 0$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{2}(\text{Re } z'_d)^2$ si $\text{Re } z'_d \leq 0$ et on applique III.4, corollaire 2 à $\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}z_d'^2$ et à la courbe: $z'' = z_0''$, $z'_i = z_{i,0}'$, $i = 1, \dots, d-1$, $\text{Re } z'_d = \text{Re } z'_{d,0}$, $\mathcal{I} \text{ m } z'_d = t \mathcal{I} \text{ m } z'_{d,0}$.

IV.5. Γ -(micro)analyticité.

DÉFINITION. — Soit Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i}\bar{\partial}\partial\varphi$, où φ est p.s.s.h. stricte sur X , $x_0 \in \Gamma$. Soit V une sous-variété involutive dont Γ est une feuille, près de x_0 . On dit que $u \in H_{\varphi, \mathcal{F}}(X)$ est Γ -

analytique en x_0 si, et seulement s'il existe $M \geq 0$ et ω voisinage de x_0 tels que $u \in H_{\tilde{\phi}, \mathcal{F}}(\omega)$ avec $\tilde{\phi} = \phi_V + M \text{dist}^2(z, \Gamma^C)$ où ϕ_V est défini en III.5. D'après III.5, corollaire 1, cette définition ne dépend pas du choix de V . On note $\Gamma\text{-support sing}(u)$ l'ensemble des x_0 de Γ où u n'est pas Γ -analytique; c'est un fermé de Γ et $\Gamma\text{supp sing}(u) \subset S_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(u) \cap \Gamma$ trivialement.

THÉORÈME (5.1) (prolongement analytique). — Si $\Gamma\text{-supp sing}(u) = \emptyset$ alors $S_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(u) \cap \Gamma$ est réunion de composantes connexes de Γ .

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de III.4, corollaire 1, car $\tilde{\phi}|_{\Gamma^C} = \phi_V|_{\Gamma^C}$ est pluri-harmonique.

PROPOSITION. — Soit $I(q)$ une T.C.Q. de $H_{\phi, \mathcal{F}}$ dans $H_{\Psi, \mathcal{F}}$ de T.C. sous-jacente χ , $\chi(\Gamma') = \Gamma$. Alors

$$\chi[\Gamma'\text{-supp sing } I(q)(u)] \subset \Gamma\text{-supp sing } u$$

[i.e. la notion de Γ analyticité est invariante par transformation canonique].

Preuve. — On conserve les notations de III.5 et III.6 et supposons, quitte à restreindre X , $\Gamma\text{-supp sing } u = \emptyset$. Par un choix de coordonnées, on peut supposer $\Gamma = \{(z', z''), z'' = 0, \mathcal{J}m z' = 0\}$. Alors $u \in H_{\tilde{\phi}, \mathcal{F}}(X)$ avec $\tilde{\phi} = \phi_V + M|z''|^2$; près de Γ , les feuilles de V sont paramétrées par z'' et si $z \in \Gamma_{z''}^C$ on a $\phi(z) \leq \phi_V(z) + C \text{dist}^2(z, \Gamma_{z''})$. Par le principe du maximum et comme $u \in H_{\phi, \mathcal{F}}(X)$ on peut supposer M petit en se restreignant à un petit voisinage de V . Alors si g est la phase de la T.C.Q. comme en III.7.6, $(x, \theta) \rightarrow -\mathcal{J}m g(y_0, x, \theta) + \tilde{\phi}$ a un col en (x_0, θ_0) . Soit $\tilde{\Psi}(y)$ la valeur critique. On a $I(q)(u) \in H_{\Psi, \mathcal{F}}(Y)$, $\tilde{\Psi} = \Psi$ sur Γ' , $\chi^C(\Lambda_{\Psi_V}) = \Lambda_{\phi_V}$ d'après III.5, lemme 2 avec $\chi(V') = V$ et $\chi^C(\Lambda_{\Psi}) = \Lambda_{\tilde{\phi}}$. Comme $\Lambda_{\tilde{\phi}}$ et Λ_{ϕ_V} co cident sur $j_{\phi}(\Gamma)^C = j_{\phi_V}(\Gamma^C)$, Λ_{Ψ} et Λ_{Ψ_V} co cident sur $j_{\Psi_V}(\Gamma'^C)$ donc $\tilde{\Psi} \leq \Psi_V + N \text{dist}^2(y, \Gamma'^C)$. $\square$

THÉORÈME (5.2). — Soit π la projection de $T^*\Gamma \setminus \Gamma$ sur Γ .

$$\pi(SS^2(u)) = \Gamma\text{support sing}(u).$$

Preuve. — Par transformation canonique, on se ramène à

$$\phi = \frac{1}{2}(\mathcal{J}m x)^2$$

$$\Gamma = \{(x', x''), x'' = 0, \mathcal{J}m x' = 0\}$$

et on utilise une version légèrement modifiée de IV.3.16 : pour ω ouvert de Γ on pose : $\left(\rho = \frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right)$.

$$(5.3) \quad \tilde{u}_\omega(z, a, \mu, \lambda) = \int_{x' \in \omega} e^{-\frac{\lambda}{2} \rho (z' - x')^2} u(x', \mu z'', a, \lambda) dx'$$

alors avec $\Delta(z) = \{s \rightarrow (\operatorname{Re} z' + is^2 \mathcal{J} m z', sz'')\}$ on a $\Delta(z) \notin S_\Gamma^2(u)$, si, et seulement si, $z \notin S_{\Gamma(\operatorname{Im} z)^2}^{\mathcal{J}}(\tilde{u}_\omega)$ pour $\operatorname{Re} z' \in \omega$. Soit $x'_0 \in \omega$ fixé et $\Psi \in C_0^\infty(\omega)$ telle que $0 \leq \Psi^2 \leq \|\Psi\|$, $\Psi = \|\Psi\|$ si $|x' - x'_0| \leq \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon = \operatorname{dist}(x'_0, C\omega)$. Soit $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}^d$, x', y' réels, tel que $|x' - x'_0| \leq \varepsilon/2$. Comme u est holomorphe au voisinage de ω dans $\mathbb{C}^n$, pour $\|\Psi\|$ assez petit, on peut choisir comme nouveau cycle d'intégration dans (5.3) :

$$(5.4) \quad \omega \ni t' \rightarrow t' + i\Psi(t')y'.$$

Alors dans (5.3), on découpe l'intégrale qu'on note I en deux : $I = I_1 + I_2$ avec

$$(5.5) \quad I_1 = \int_{|t' - x'_0| \geq \varepsilon}, \quad I_2 = \int_{|t' - x'_0| \leq \varepsilon}.$$

Alors compte tenu de $f \in H_{1/2}(\operatorname{Im} x)^2, \mathcal{J}$ pour $a \in F_\varepsilon^1$ et $\lambda \geq \lambda^1(a, \varepsilon)$ on obtient les majorations des intégrands de (5.5) :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \text{pour } I_1 : e^{\varepsilon\lambda + \lambda \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J} m z'')^2 - \frac{\lambda}{2} \rho \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\lambda}{2} \rho (\mathcal{J} m z')^2 + \frac{\lambda}{2} \|\Psi\|^2 (\mathcal{J} m z')^2} \\ \text{pour } I_2 : e^{\varepsilon\lambda + \lambda \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J} m z'')^2 + \frac{\lambda}{2} \rho (\mathcal{J} m z')^2 [1 - \|\Psi\|^2] + \frac{\lambda}{2} \|\Psi\|^2 (\mathcal{J} m z')^2} \end{cases}$$

et si f est Γ -analytique au voisinage de ω les majorations

$$(5.7) \quad \begin{cases} \text{avec } V = \{\mathcal{J} m x'\} = 0 \text{ on a } \varphi_V = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} x'')^2 \\ \text{pour } I_1 : e^{\lambda\varepsilon + \lambda \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J} m z'')^2 + M\mu^2 |z''|^2 - \frac{\lambda}{2} \rho \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\lambda}{2} \rho (\mathcal{J} m z')^2} \\ \text{pour } I_2 : e^{\lambda\varepsilon + \lambda \frac{\mu^2}{2} (\mathcal{J} m z'')^2 + \lambda M\mu^2 |z''|^2 + \frac{\lambda}{2} \rho (\mathcal{J} m z')^2 [1 - \|\Psi\|^2]} \end{cases}$$

Soit alors $\|\Psi\|$ assez petit fixé. Il existe $C > 0$, $\mu_0 > 0$, tels que pour tout $0 < \mu \leq \mu_0$ et si $|\mathcal{J} m z'|$ est près de $\sqrt{2}$, $|z''|$ près de 0, on ait :

$$(5.8) \quad \left[\frac{\lambda}{2} \mu^2 - \frac{\lambda}{2} \rho(1 - \|\Psi\|)^2 \right] (\mathcal{J} m z')^2 - \lambda M \mu^2 |z''|^2 \geq c \lambda \mu^2.$$

Alors de (5.7), (5.8), on déduit $\pi(\mathcal{S}\mathcal{S}_\Gamma^2(u)) \subset \Gamma\text{-support sing}(u)$. Pour montrer la réciproque, montrons d'abord :

LEMME (5.9).

$$(5.10) \quad u(x', x'', a, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^d \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\lambda \rho} \left[\frac{1}{2} \tilde{u}_\omega - \frac{i}{4\lambda \rho} \frac{\partial \tilde{u}_\omega}{\partial z'} \cdot \alpha_{\xi'} \right] d\xi'$$

où dans l'intégrale on a posé $x'' = \mu z''$, $z' = x' - i\alpha_{\xi'}$ avec $|\alpha_{\xi'}| = \sqrt{2}$, $\xi' = \rho \alpha_{\xi'}$, l'égalité (5.10) ayant lieu au voisinage de $\omega \subset \Gamma$ dans $\mathbf{C}^n$.

Preuve. — Un calcul élémentaire montre que le membre de droite de (5.10) est égal à :

$$(5.11) \quad \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^d \int_{\mathbf{R}^d} d\xi' \int_{y' \in \omega} e^{i\lambda \left[(x' - y') \xi' + \frac{i}{2\sqrt{2}} (x' - y') |\xi'| \right]} \left(1 + \frac{i}{2\sqrt{2}} (x' - y') \frac{\xi'}{|\xi'|} \right) u(y', x'', a, \lambda) dy'$$

et on reconnaît pour x' réel une représentation de $\delta_{x'=y'}$.

Mais d'autre part, les estimations (5.6), entraînent l'absolue convergence de l'intégrale (5.10), d'où le lemme. $\square$

LEMME (5.12). — Soit $0 < \mu_0 < 1$ et $\Lambda_0 > 0$, $\rho_0 = \frac{\mu_0^2}{1 - \mu_0^2}$. Si dans (5.10), on remplace l'intégration sur $\mathbf{R}^d$ par, soit l'intégration pour $|\xi'| \geq \sqrt{2}\rho_0$, soit l'intégration pour $\frac{|\xi'|}{\sqrt{2} + |\xi'|} \leq \frac{\Lambda_0}{\Lambda}$, alors la fonction obtenue est Γ -analytique sur ω .

Preuve. — En utilisant les majorations (5.6), on obtient le résultat dans le premier cas en choisissant $\|\Psi\|$ vérifiant $\rho_0 \frac{\lambda^2}{4} > 2\|\Psi\|^2$ et

$\rho_0[1 - (1 - \|\Psi\|)^2] > \|\Psi\|^2$ (la fonction obtenue est alors sans support au voisinage de ω) et pour le deuxième cas il suffit de choisir $\Psi = 0$ car alors $\rho\lambda$ est borné. $\square$

LEMME (5.13). — Supposons $\dot{S}S_F^2(u) = \emptyset$ au-dessus de ω . Alors il existe $\alpha > 0$, $C > 0$, $\mu_1 > 0$, tels que pour $|z''| \leq \alpha$, $\text{dist}(\text{Re } z'', C\omega) \geq \alpha$, $|\text{Im } z'| - \sqrt{2}| \leq \alpha$, $0 < \mu \leq \mu_1$, $a \in F_\varepsilon$, $\lambda \geq \lambda(a, \varepsilon)$ on ait :

$$(5.14) \quad |\tilde{u}_\omega(z, a, \mu, \lambda)| \leq e^{2\varepsilon\lambda + \lambda \frac{\mu^2}{2} [(\mathcal{J}_m z)^2 - C]}.$$

Preuve. — D'après (5.6), pour $a \in F_\varepsilon^1$, $\lambda \geq \lambda^1(a, \varepsilon)$, $0 < \mu \leq \mu_2$ assez petit, on a (en choisissant $\|\Psi\| = \mu^2$)

$$(5.15) \quad |\tilde{u}_\omega(z, a, \mu, \lambda)| \leq e^{\varepsilon\lambda + \lambda \frac{\mu^2}{2} [\mathcal{J}_m z]^2}$$

et par l'hypothèse $\dot{S}S_F^2(u) = \emptyset$ au-dessus de ω , si $\alpha > 0$ est assez petit, $|z''| \leq \alpha$, $\text{dist}(\text{Re } z', C\omega) \geq \alpha$, $|\mathcal{J}_m z' - \sqrt{2}| \leq \alpha$, $0 < \mu \leq \mu_3$, $a \in F_\mu^2$, $\mu^2\lambda \geq \Lambda^2(a, \mu)$ on a, avec une constante $C > 0$:

$$(5.16) \quad |\tilde{u}_\omega(z, a, \mu, \lambda)| \leq e^{\frac{\mu^2\lambda}{2} [(\mathcal{J}_m z)^2 - C]}.$$

Posons $F_\varepsilon = F_\varepsilon^1 \cap F_{\left(\frac{2\varepsilon}{C}\right)^{1/2}}^2$, $\lambda^2(a, \varepsilon) = \sup_{\mu_3 \geq \mu^2 \geq \frac{2\varepsilon}{C}} \left[\frac{1}{\mu^2} \Lambda^2(a, \mu) \right]$ pour

$a \in F_\varepsilon$ (ce qui est possible puisque Λ^2 est loc. bornée), et $\lambda(a, \varepsilon) = \sup [\lambda^1, \lambda^2]$. Alors (5.14) est conséquence de (5.15) si $\mu^2 \leq \frac{2\varepsilon}{C}$

car alors $2\varepsilon\lambda - \frac{\lambda\mu^2}{2} C \geq \varepsilon\lambda$, et de (5.16) lorsque $\mu^2 \geq \frac{2\varepsilon}{C}$. $\square$

Soit alors u tel que $\dot{S}S_F^2(u) = \emptyset$ au-dessus de ω . Pour montrer que u est Γ -analytique sur ω , il suffit d'estimer d'après les lemmes (5.9) et (5.12) :

$$(5.17) \quad J = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^d \int_{\frac{\Lambda_0}{\lambda} \leq \mu^2 \leq \mu_1^2} e^{-\lambda\rho} \left[\frac{1}{2} \tilde{u}_\omega - \frac{i}{4\lambda\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\omega}{\partial z'} \cdot \alpha_{\xi'} \right] d\xi'.$$

On décompose à nouveau J en $J_1 + J_2$ avec :

$$(5.18) \quad J_1 = \int_{\mu \geq \frac{|x''|}{\alpha}}, \quad J_2 = \int_{\mu \leq \frac{|x''|}{\alpha}}$$

où $\alpha > 0$ est déduit du lemme (5.13). Pour J_1 on a $|z''| \leq \alpha$ et on peut utiliser l'estimation (5.14) pour $|\mathcal{J}m x'|$ assez petit d'où :

$$(5.19) \quad |J_1| \leq C^{te} e^{2\varepsilon\lambda + \frac{\lambda}{2}(\mathcal{J}m x')^2} \quad \text{pour} \quad a \in F_\varepsilon, \quad \lambda \geq \lambda(a, \varepsilon).$$

Pour J_2 on utilise l'estimation (5.15) et l'inégalité $\alpha\mu < |x''|$ d'où :

$$(5.20) \quad |J_2| \leq C^{te} e^{\varepsilon\lambda + \frac{\lambda}{2}(\mathcal{J}m x')^2 + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{|x''|^2}{\alpha^2} (|\mathcal{J}m x'| 2\sqrt{2} + |\mathcal{J}m x'|^2) \right]}$$

pour $a \in F_\varepsilon$, $\lambda \geq \lambda(a, \varepsilon)$ ce qui achève la preuve car $\text{dist}(x, \Gamma^c) \simeq |x''|$.

Remarque. — En apparence, l'estimation (5.20), est meilleure que celle qui est imposée par la Γ -analyticité. Mais $u \in H_{\frac{1}{2}(\text{Im } x)^2, \mathcal{J}}$ et u , Γ -analytique entraînent une estimation du type (5.20) par le principe du maximum.

IV.6. Retour aux hyperfonctions.

On désigne par $\mathcal{A}'(\mathbf{R}^n)$ les fonctionnelles analytiques sur $\mathbf{R}^n$ (i.e. les hyperfonctions à support compact). Pour $u \in \mathcal{A}'(\mathbf{R}^n)$ soit :

$$(6.1) \quad T^1 u(z, \lambda) = \int e^{-\frac{\lambda}{2}(z-x)^2} u(x) dx.$$

Alors $T^1 u \in H_{1/2(\mathcal{J}m z)^2} = H_{1/2(\mathcal{J}m z)^2, \mathcal{J}}$ avec A réduit à un point, donc $\mathcal{J}$ trivial et on a l'équivalence :

$$(6.2) \quad z = x - i\xi \in S_{1/2(\text{Im } z)^2}(T_u^1) \Leftrightarrow x, \xi \in \text{SS}(u)$$

où SS est le spectre de Sato de u .

Soit $\Gamma \subset \dot{T}^*\mathbf{R}^n$ la sous-variété isotrope de dimension $d < n$:

$$(6.3) \quad \Gamma = \{(x', x'', \xi', \xi''), x'' = 0, \xi' = 0, \xi'' = \xi_0'' \neq 0\}$$

avec

$$\begin{aligned} x' &= (x_1, \dots, x_d), & x'' &= (x_{d+1}, \dots, x_n) \\ \xi' &= (\xi_1, \dots, \xi_d), & \xi'' &= (\xi_{d+1}, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Par définition on pose :

$$(6.4) \quad S_{\Gamma}^2(u) = S_{\Gamma'}^2(T_u^1) \subset \tilde{\Gamma}' \simeq \tilde{\Gamma}$$

avec $\Gamma' = \{z \in \mathbb{C}^n, z'' = -i\xi_0'', \mathcal{J}m z' = 0\} \subset \mathbb{C}^n$.

Si on pose pour $\mu > 0$

$$(6.5) \quad T^2 u(z, \mu, \lambda) = \int e^{-\lambda \frac{\mu^2}{2} (z' - x')^2 - i\lambda x'' \cdot \xi_0'' - \frac{\lambda}{2} (\mu z'' - x'')^2} u(x) dx$$

on a $T^2 u \in H_{1/2(\mathcal{J}m z)^2, \mathcal{F}}^2$ avec $\hat{A} = \mathbf{R}_+^*$ et $\mathcal{F}$ le filtre des voisinages à droite de 0 dans $\mathbf{R}$. Comme on a :

$$(6.6) \quad \int_{Z' \in \mathbb{R}^d} e^{-\lambda \frac{\mu^2}{2(1-\mu^2)} (z' - Z')^2 - \frac{\lambda}{2} (Z' - x')^2} dZ' = \left[\frac{2\pi(1-\mu^2)}{\lambda} \right]^{d/2} e^{-\lambda \frac{\mu^2}{2} (z' - x')^2}$$

alors en posant pour $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\Delta(z) = (s \rightarrow (\operatorname{Re} z', s \operatorname{Re} z'', -s^2 \mathcal{J}m z', \xi_0'' - s \mathcal{J}m z'')) \in \tilde{\Gamma}$$

on déduit de (6.6), T^2 étant la composée de T^1 et d'une $\operatorname{FBI}_{\Gamma'}^2$, sous la forme IV.5.3 :

$$(6.7) \quad \Delta(z) \in S_{\Gamma}^2(u) \Leftrightarrow z \in S_{1/2(\operatorname{Im} z)^2}^{\mathcal{F}}(T^2 u).$$

Soit z_0 fixé dans $\mathbb{C}^n$ avec $z_0 = (z'_0, 0)$ et $p(z, y, \mu, \Lambda)$ un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique, avec grand paramètre Λ , défini pour z près de z_0 et y près de $\operatorname{Re} z_0$. Pour $u \in \mathcal{A}'(\mathbb{R}^n)$ ou plus généralement pour u hyperfonction sur $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$(6.8) \quad T_p^2(u) = \int e^{-\lambda \frac{\mu^2}{2} (z' - x')^2 - i\lambda x'' \cdot \xi_0'' - \frac{\lambda}{2} (\mu z'' - x'')^2} p\left(z, x', \frac{x''}{\mu}, \mu, \Lambda\right) u_{\mu}(x) dx$$

où $u_{\mu}(x)$ est une famille dans $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^n)$, pour $\mu > 0$ telle que si

$$\Omega_{\Lambda}^{\mu} = \{(x', x''), |x' - \operatorname{Re} z'_0| < \Lambda |x''| < \mu \Lambda\},$$

il existe $0 < A < B$ tels que

- (6.9) 1) $u_\mu = u$ dans Ω_A^μ ; $u_\mu = 0$ hors de Ω_B^μ .
 2) p est défini au voisinage de $z_0 \times \{|y' - \operatorname{Re} z'_0| \leq B, |y''| \leq B\}$.
 3) Pour tout $k \geq 0$, $u_\mu = u_{\mu'}$ si $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \mu \leq \mu' < \frac{1}{2k}$.

[Pour construire une telle famille, on choisit $B > 0$ tel que 2) soit vérifié, puis avec $A = \frac{B}{4}$ on construit les $u_{2^{-k}}$ par troncature arbitraire, alors les u_μ sont imposés par 3) et 1) est vérifié avec $A = B/2$.]

Si u_μ et u'_μ sont deux familles qui vérifient (6.9), alors pour z assez voisin de z_0 , la différence des intégrales (6.8) calculées avec u_μ et u'_μ sera majorée pour tout $\varepsilon > 0$ et tout k par :

$$(6.10) \quad \Lambda^d \cdot C_{k,\varepsilon} e^{\varepsilon\lambda + \frac{\lambda}{2}\mu^2(\operatorname{Im} z)^2 - C\lambda\mu^2},$$

où $d = \text{degré}(p)$, $C > 0$, $2^{-(k+1)} \leq \mu < 2^{-k}$ et $C_{k,\varepsilon}$ est une constante sur laquelle on a aucun contrôle, mais (6.10) entraîne l'égalité des deux intégrales calculées, dans $\mathcal{H}_{1/2(\mathcal{I}m z)^2, z_0}^2$ (cf. IV.3.10).

Par suite, $u \rightarrow T_\ell^2(u)$ définit une application de $\mathcal{A}'(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{H}_{1/2(\operatorname{Im} z)^2, z_0}^2$. Or sur ce dernier espace, on a aussi les opérateurs pseudo-différentiels qui opèrent. Soit donc

$$(6.11) \quad Qv = \left(\frac{2\pi}{\lambda\mu^2}\right)^{-n} \int e^{i\lambda\mu^2(w-z) \cdot \eta} q(w, \eta, \mu, \Lambda) v[z, a, \Lambda] dz \wedge d\eta$$

un opérateur pseudo-différentiel, avec $q(w, \eta, \mu, \Lambda)$, $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique avec grand paramètre Λ , défini près de $w = z_0$, $\eta = -\mathcal{I}m z_0$. Alors le théorème de la phase stationnaire entraîne aussitôt :

$$(6.12) \quad Q \circ T_1^2 = T_p^2$$

avec

$$(6.13) \quad p(w, y, \mu, \Lambda) \simeq \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(2\Lambda)^{|\alpha|}} \partial_\eta^{2\alpha} q(w, i(w-y), \mu, \Lambda).$$

En particulier, si $q_0(w, \eta, \mu)$ est le symbole principal de q et p_0 celui de $\underline{p}$ on a :

$$(6.14) \quad q_0(w, \eta, \mu) = p_0(w, w + i\eta, \mu)$$

et (6.13) permet de reconstruire $\underline{q}$ connaissant $\underline{p}$.

V. APPLICATION A UN PROBLÈME DE DIFFRACTION DÉGÉNÉRÉ

V.1. Introduction et notations.

Pour $(\bar{X}, \bar{\xi}) \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$ on pose :

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \bar{X} = (X_1, \dots, X_{n+1}) & \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \\ X = (X_1, \dots, X_n) & \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \\ X' = (X_2, \dots, X_{n+1}) & \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \\ X'' = (X_2, \dots, X_n) & \xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_n). \end{array}$$

On fixe $\xi''_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ de norme euclidienne $|\xi''_0| = 1$ et on note

$$(2) \quad \begin{array}{l} \xi_0 = (0, \xi''_0), \quad \bar{\xi}_0 = (\xi_0, 0), \quad \xi'_0 = (\xi''_0, 0) \\ \bar{\Gamma} = \{(\bar{X}, \bar{\xi}), \bar{\xi} = \bar{\xi}_0, X' = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1} \\ \Gamma = \{(X, \xi), \xi = \xi_0, X'' = 0\} \subset T^*\mathbb{R}^n. \end{array}$$

Par $\bar{\gamma}(s)$ (resp $\gamma(s)$) on désigne le point de $\bar{\Gamma}$ (resp Γ) dont la coordonnée X_1 vaut s .

Soit P un opérateur différentiel de degré deux, à coefficients analytiques, défini près de $X_1 \in [a, b]$, $a < b$, $X' = 0$, de la forme :

$$(3) \quad P = -D_{X_{n+1}}^2 + Q_0(X, D_X) + X_{n+1}Q_1(X, D_X) + X_{n+1}^2Q_2(\bar{X}, D_X)$$

de symbole principal :

$$(4) \quad p = -\xi_{n+1}^2 + q_0(X, \xi) + X_{n+1}q_1(X, \xi) + X_{n+1}^2q_2(\bar{X}, \xi).$$

On suppose p réel et :

$$(5) \quad \left. \frac{\partial q_0}{\partial x} \right|_{\Gamma} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial q_0}{\partial \xi_1} \right|_{\Gamma} \equiv 1, \quad \left. \frac{\partial q_0}{\partial \xi''} \right|_{\Gamma} \equiv 0, \quad \left. q_1 \right|_{\Gamma} \equiv 0$$

de sorte que Γ est bicaractéristique nulle de p et x_1 est le paramètre sur la bicaractéristique Γ .

Si u est une hyperfonction solution de $Pu \sim 0$ dans $X_{n+1} > 0$, on note $\bar{u}$ l'unique prolongement de u qui vérifie [cf. 9]

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{u} = u & \text{dans } X_{n+1} > 0 \\ \bar{u} = 0 & \text{dans } X_{n+1} < 0 \\ P\bar{u} = f_0 \otimes \delta_{x_{n+1}=0} + f_1 \otimes \delta'_{x_{n+1}=0} \end{cases}$$

et on note

$$(7) \quad SS_{\partial}(u) = SS(f_0) \cup SS(f_1) \subset T^*\mathbf{R}^n$$

où SS est le spectre singulier de Sato. Rappelons qu'on a :

$$(8) \quad \bar{\gamma}(s) \in SS(\bar{u}) \Leftrightarrow \gamma(s) \in SS_{\partial}(u).$$

Soit $\tilde{\Gamma}$ l'éclaté symplectique de Γ , muni du système de coordonnées canonique $(\tilde{X}, \tilde{\xi})$

$$(9) \quad \begin{cases} \tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}'), & \tilde{X}' = (\tilde{X}'', \tilde{X}_{n+1}), & \tilde{X}'' = (\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n) \\ \tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}'), & \tilde{\xi}' = (\tilde{\xi}'', \tilde{\xi}_{n+1}), & \tilde{\xi}'' = (\tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n) \end{cases}$$

où les fonctions tildées sur $\tilde{\Gamma}$ sont définies par : pour $\tilde{\rho} \in \tilde{\Gamma}$ et $\mu \rightarrow \rho(\mu)$ chemin dans la classe d'équivalence de $\tilde{\rho}$ on a :

$$(10) \quad \begin{cases} \tilde{X}_1(\tilde{\rho}) = X_1(\rho(0)) \\ \tilde{X}'(\tilde{\rho}) = \frac{d}{d\mu} X'[\rho(\mu)]|_{\mu=0} \\ \tilde{\xi}'(\tilde{\rho}) = \frac{d}{d\mu} \xi'[\rho(\mu)]|_{\mu=0} \\ \tilde{\xi}_1(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} \xi_1[\rho(\mu)]|_{\mu=0}. \end{cases}$$

Dans cette carte, la 2-forme canonique de $\tilde{\Gamma}$ est $d\tilde{\xi} \wedge d\tilde{x}$. On note $\tilde{\Sigma}_{\mu}$

l'application de $\tilde{\Gamma}$ dans $T^*\mathbf{R}^{n+1}$:

$$(11) \quad \begin{cases} X_1 = \tilde{X}_1 & X' = \mu \tilde{X}' \\ \xi_1 = \mu^2 \tilde{\xi}_1 & \xi' = \xi'_0 + \mu \tilde{\xi}' \end{cases}$$

de sorte que le chemin $\mu \rightarrow \bar{\Sigma}_\mu(\tilde{\rho})$ est un représentant de $\tilde{\rho}$.

Soit ϖ la projection de $\Gamma|_{\tilde{x}_{n+1}=0}$ sur $\tilde{\Gamma}$, l'éclaté symplectique de Γ , déduite de la projection de $T^*\mathbf{R}^{n+1}|_{x_{n+1}=0}$ sur $T^*\mathbf{R}^n$. Alors ϖ permet de considérer $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}'')$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}'')$ comme une carte sur $\tilde{\Gamma}$, et on notera Σ_μ l'application de $\tilde{\Gamma}$ dans $T^*\mathbf{R}^n$:

$$(12) \quad \begin{cases} X_1 = \tilde{X}_1 & X'' = \mu \tilde{X}'' \\ \xi_1 = \mu^2 \tilde{\xi}_1 & \xi'' = \xi''_0 + \mu \tilde{\xi}'' \end{cases}$$

On note $S^*\Gamma^+$ le sous-espace de $T^*\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$:

$$(13) \quad S^*\Gamma^+ = \{(\tilde{X}, \tilde{\xi}), \tilde{X}'' \doteq 0, \tilde{\xi}'' \doteq 0, \tilde{\xi}_1 \equiv 1\}.$$

Des relations $p|_\Gamma = 0$, $H_p|_\Gamma \in T\tilde{\Gamma}$, on déduit que $\underline{p}$ définit une fonction $\tilde{p}$ sur $\tilde{\Gamma}$. Si on pose :

$$(14) \quad \hat{p}_\mu(\tilde{X}, \tilde{\xi}) = \frac{1}{\mu^2} p(\bar{\Sigma}_\mu(\tilde{X}, \tilde{\xi}))$$

on a :

$$(15) \quad \tilde{p}(\tilde{X}, \tilde{\xi}) = \hat{p}_0(\tilde{X}, \tilde{\xi}).$$

De 5, on déduit :

$$(16) \quad \tilde{p} = -\xi_{n+1}^2 + \xi_1 + Q(\tilde{X}_1, \tilde{X}', \xi'')$$

où Q est quadratique en $(\tilde{X}', \xi'')$. On posera :

$$(16') \quad \hat{p}_\mu = -\xi_{n+1}^2 + \xi_1 + \hat{Q}_\mu(\tilde{X}, \tilde{\xi}).$$

V.2. Énoncé du résultat.

Pour $a \leq S_1 < S_2 \leq b$ introduisons l'hypothèse suivante :

(17) $(\mathcal{H}_{S_1, S_2})$. Pour tout $\tilde{\rho} \in \tilde{\Gamma}|_{\tilde{x}_{n+1}=0}$ tel que $\tilde{p}(\tilde{\rho}) = 0$, $\varpi(\tilde{\rho}) \in S^*\Gamma^+$, $\tilde{S}_1 < \tilde{X}_1(\tilde{\rho}) < \tilde{S}_2$, la courbe intégrale de $H_{\tilde{p}}$ dans $\tilde{\Gamma}$ issue de $\tilde{\rho}$ ne recoupe pas l'hypersurface $\tilde{X}_{n+1} = 0$ dans l'ouvert $\tilde{S}_1 < \tilde{x}_1 < \tilde{S}_2$.

(18) THÉORÈME 1. — Soit u solution de $Pu = 0$ dans $X_{n+1} > 0$. On suppose $(\mathcal{H}_{s_1, s_2})$ vérifiée et $\gamma(S_i) \notin SS_\partial(u)$ pour $i = 1, 2$. Alors pour tout $s \in [S_1, S_2]$ on a $\gamma(s) \notin SS_\partial(u)$.

Notons que (16) entraîne qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $(\mathcal{H}_{s_1, s_2})$ soit vérifiée dès que $S_2 - S_1 < C$. Alors du théorème 1 et de [8] on déduit le théorème 2 qui étend à des géométries non strictement convexes un résultat de Kataoka :

(19) THÉORÈME 2. — Soit $C \in [a, b]$ et u solution de $Pu = 0$ dans l'ouvert $X_{n+1} + \theta(x) > 0$ avec $\theta \geq 0$, $\theta(C, 0) = 0$, $\theta(x_1, 0) > 0$ si $x_1 \neq C$. Si $\bar{\gamma}(s) \notin SS(u)$ pour $s < C$ et $s > C$, alors $\gamma(C) \notin SS_{\partial'}(u)$, où $SS_{\partial'}$ désigne le spectre des traces de u sur le bord $X_{n+1} + \theta(x) = 0$.

V.3. Preuve du théorème 1.

On suppose $a = s_1$, $b = s_2$.

A. Paramétrix pour P .

Soit $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ la solution de :

$$(20) \quad \begin{cases} p(\bar{y}, -\Phi'_{\bar{y}}) = \theta_1 |\bar{\theta}| \\ \Phi|_{y_1=x_1} = (x' - y')\theta' + iC_0(x' - y')^2 |\bar{\theta}| \end{cases}$$

où C_0 est une constante strictement positive, $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta') \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\theta = (\theta'', \theta_{n+1})$, $\theta'' = (\theta_2, \dots, \theta_n)$ où $\theta_1, \dots, \theta_{n+1}$ sont près de 0, θ'' près de ξ''_0 , $|\bar{\theta}| = (\bar{\theta}^2)^{1/2}$ avec la détermination positive sur le réel x' près de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et x_1 près de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On notera $\bar{\xi}$ le vecteur déterminé par :

$$(21) \quad p(\bar{x}, \bar{\xi}) = \theta_1 |\bar{\theta}|, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \xi'), \quad \xi' = \theta', \quad \xi_1 \text{ près de } 0.$$

Alors $(\bar{x}, \bar{\xi})$ est près de $\bar{\Gamma}$. Par la théorie classique des équations de Hamilton Jacobi, Φ est uniquement déterminée au voisinage de $\bar{y} = \bar{x}$.

(22) LEMME 1. — Pour $(\bar{x}, \bar{\xi})$ assez près de $\bar{\Gamma}$, Φ se prolonge au voisinage de $y' = 0$, $y_1 \in [a, b]$.

Preuve. — Rappelons l'argument de [11]. Notons Λ_Φ la lagrangienne réunion des courbes intégrales de H_p rencontrant $\{(\bar{y}, -\Phi'_{\bar{y}})\}$ pour $\bar{y}$ près de $\bar{x}$. On a $z_\ell = \exp \ell H_p(\bar{x}, \bar{\xi}) \in \Lambda_\Phi$ et il suffit de montrer que $T_{z_\ell} \Lambda_\Phi$ est

transverse à la fibre de la projection canonique π de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$, lorsque $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in \bar{\Gamma}$ et ℓ réel. Alors $z_\ell \in \bar{\Gamma} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Notons h la forme hermitienne sur $T_{z_\ell}(T^*\mathbb{C}^{n+1})$:

$$h(u) = \frac{1}{2i} \Omega(u, \bar{u})$$

où Ω est la 2-forme canonique sur $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ et $u \rightarrow \bar{u}$ est la conjugaison complexe. Comme $T_{z_\ell} \Lambda_\Phi$ est image par le flot de H_p de $T_{z_0} \Lambda_\Phi$, $z_0 = (\bar{X}, \bar{\xi})$, que H_p est réel et $C_0 > 0$ la restriction de h à $T_{z_\ell} \Lambda_\Phi$ est négative de rang n et dégénère exactement sur $H_p(z_\ell)$. Or la restriction de h à la fibre de π est nulle et $H_p(z_\ell)$ est transverse à cette fibre. D'où le lemme. $\square$

La fonction Φ est homogène de degré 1 en $\bar{\theta}$, et par la méthode de l'optique géométrique, il existe un symbole analytique classique $\sigma(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ de degré 0 en $\bar{\theta}$, elliptique, tel que :

$$(23) \quad t_{P(\bar{y}, D_{\bar{y}})}(e^{i\Phi} \sigma) = \theta_1 |\bar{\theta}| e^{i\Phi} \sigma$$

et d'après (20), si $(\bar{x}, \bar{\xi})$ est réel, on a pour $\bar{y}$ réel :

$$(24) \quad \mathcal{J} m \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}) \geq C^{te} \text{dist}^2[\bar{y}, \pi \exp \ell H_p(\bar{x}, \bar{\xi})]$$

$$(25) \text{ et si } \bar{y} = \pi \exp \ell H_p(\bar{x}, \bar{\xi}) \text{ alors } (\bar{y}, -\Phi'_{\bar{y}}) = \exp \ell H_p(\bar{x}, \bar{\xi}) \text{ et } \Phi'_{\bar{\theta}} = -\ell \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} (\theta_1 |\bar{\theta}|).$$

Soit à présent U un petit voisinage ouvert réel de $x_1 \in [a, b]$, $x' = 0$ et $T(\bar{x}, |\bar{\theta}|)$ la troncature analytique habituelle :

$$(26) \quad T(\bar{x}, |\bar{\theta}|) = \left(\frac{|\bar{\theta}|}{2\pi} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int_{\beta \in U} e^{-(\bar{x}-\beta)^2 |\bar{\theta}|} d\beta.$$

La fonction T est holomorphe, et par le théorème de la phase stationnaire, on a au sens des développements asymptotiques analytiques en $|\bar{\theta}|$:

$$(27) \quad \begin{cases} T(\bar{x}, |\bar{\theta}|) \sim 1 & \text{pour } \bar{x} \text{ au voisinage (complexe) de } U \\ T(\bar{x}, |\bar{\theta}|) \sim 0 & \text{pour } \bar{x} \text{ au voisinage (complexe) de } C\bar{U} \end{cases}$$

et pour $\text{Re } |\bar{\theta}| \geq 0$:

$$(28) \quad |T(\bar{x}, |\bar{\theta}|)| \leq \text{vol}(U) \left| \frac{|\bar{\theta}|}{2\pi} \right|^{\frac{n+1}{2}} e^{(\mathcal{J} m \bar{x})^2 \text{Re } |\bar{\theta}| + \mathcal{J} m |\bar{\theta}| \cdot |\mathcal{J} m \bar{x}| \cdot [|\text{Re } \bar{x}| + C^{te}]},$$

Posons $\bar{\theta} = |\bar{\theta}|\bar{\alpha}$ et soit V un petit voisinage réel de $(0, \xi_0'', 0)$ dans S^n la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$, à bord ∂V analytique, transverse à $\alpha_1 = 0$. Soit χ la fonction sur S^n égale à 1 dans V , 0 hors de V et $(\alpha_1)_{\pm}^{-1}$ les valeurs au bord de $\frac{1}{\alpha_1}$ dans $\mp \mathcal{J}m \alpha_1 > 0$. On pose :

$$(29) \quad s_{\pm}(\bar{x}, \bar{y}, |\bar{\theta}|) = T(\bar{x}, |\bar{\theta}|) \int_{S^n} e^{i\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha})|\bar{\theta}|} \sigma(\bar{x}, \bar{y}, |\bar{\theta}|\bar{\alpha}) (\alpha_1)^{-1} \chi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}$$

$$S_{\pm}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_1^{+\infty} s_{\pm}(\bar{x}, \bar{y}, |\bar{\theta}|) d|\bar{\theta}|.$$

Alors $S_{\pm}$ est holomorphe près de $\text{Re } \bar{x} \in \bar{U}$, $\mathcal{J}m \bar{x} = t\xi_0$, $0 < t \leq t_0$, $y_1 \in [a, b]$, $y' = 0$ et près de $\bar{x}$ réel, $\bar{x} \notin \bar{U}$, $y_1 \in [a, b]$, $y' = 0$. Soit pour $\varepsilon > 0$ petit :

$$(30) \quad \omega_{\varepsilon} = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^{n+1}, y_1 \in]a - \varepsilon, b + \varepsilon[, |y'| < \varepsilon\}$$

et pour v hyperfonction à support compact dans ω_{ε} :

$$(31) \quad S_{\pm}v = \int S_{\pm}(\bar{x}, \bar{y})v(\bar{y}) d\bar{y}.$$

Alors $S_{\pm}v$ est holomorphe près de $\text{Re } \bar{x} \in \bar{U}$, $\mathcal{J}m \bar{x} = t\xi_0$, $0 < t \leq t_0$ et analytique réelle dans $C\bar{U}$. Par suite, on sait prendre la valeur au bord (usuelle) de $S_{\pm}v$, qui est une hyperfonction analytique hors de $\bar{U}$ [ce qui justifie d'introduire T dans le calcul : on évite d'avoir à parler de valeur au bord cohomologique].

D'après (24) et (25), la relation canonique induite par Φ est l'identité et celle de $\Phi|_{\partial V}$ ne rencontre pas $\bar{\Gamma}$, et par (23), (27), il existe un opérateur pseudo-différentiel elliptique H tel que au voisinage des points $\bar{\gamma}(s)$ de $\bar{\Gamma}$ avec $s \in [a, b]$ on ait :

$$(32) \quad S_{\pm}.Pv = Hv.$$

D'où nécessairement pour v à support dans ω_{ε} :

$$(33) \quad PH^{-1}S_{\pm}v = v \text{ au voisinage de } \bar{\gamma}([a, b])$$

car par le calcul du spectre de (29) si $SSv \cap \bar{\Gamma} \subset \bar{\gamma}([s_0, +\infty[)$ on a :

$$(34) \quad SS(S_{+}v) \cap \bar{\gamma}([a, +\infty[) \subset \bar{\gamma}([s_0, +\infty[)$$

i.e. S_{+} propage à droite et de même S_{-} propage à gauche.

B. Réduction au bord.

Soit u solution de $Pu = 0$ dans $x_{n+1} > 0$, $\bar{u}$, f_0 , f_1 comme dans (6) et supposons $\gamma(a) \notin SS_\delta(u)$, $\gamma(b) \notin SS_\delta(u)$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, soient g_0, g_1 deux hyperfonctions à support compact dans $\omega_\varepsilon \cap x_{n+1}=0$ telles que $g_i = f_i$ microlocalement au voisinage de $\bar{\gamma}([a,b])$. Posons :

$$(35) \quad W_\pm = H^{-1} S_\pm (g_0 \otimes \delta_{x_{n+1}=0} + g_1 \otimes \delta'_{x_{n+1}=0}) - \bar{u}$$

qui sont deux microfonctions bien définies au voisinage de $\bar{\gamma}([a,b])$. On a $\bar{\gamma}([a,b]) \cap Pw_\pm = \emptyset$ et d'après (34) et (8),

$$\bar{\gamma}(a) \notin SS(w_+), \quad \bar{\gamma}(b) \notin SS(w_-),$$

d'où par propagation des singularités $\bar{\gamma}([a,b]) \cap SS(W_\pm) = \emptyset$. Soit alors

$$(36) \quad W = H(W_+ - W_-) = (S_+ - S_-)(g_0 \otimes \delta_{x_{n+1}=0} + g_1 \otimes \delta'_{x_{n+1}=0})$$

on a

$$(37) \quad SS(W) \cap \bar{\gamma}([a,b]) = \emptyset$$

et nous allons montrer que cela entraîne $SS(g_i) \cap \bar{\gamma}([a,b]) = \emptyset$, $i = 0, 1$ ce qui prouvera le théorème. Soit $S = S_+ - S_-$; le noyau de S est

$$(38) \quad 2i\pi \int_1^{+\infty} T(\bar{x}, |\bar{\theta}|) \int_{S^{n-1}} e^{i\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \alpha)|\bar{\theta}|} \sigma(\bar{x}, \bar{y}, \alpha|\bar{\theta}) \chi(\alpha) d\alpha d|\bar{\theta}|$$

avec $\alpha = (0, \alpha)$, $\alpha \in S^{n-1} = S^n \cap \{\alpha_1 = 0\}$ et on note toujours χ la fonction sur S^{n-1} égale à 1 sur $V \cap \{\alpha_1 = 0\}$, et à 0 en dehors. Alors par (20), (24), (25), on a :

$$(39) \quad \text{Im } \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \alpha) = 0 \Rightarrow p(\bar{x}, \Phi'_\alpha) = 0 \quad (\alpha \in S^{n-1})$$

et donc pour tout v , $SS[Sv] \subset p^{-1}(0)$ et on peut prendre les traces usuelles de Sv sur $x_{n+1} = 0$. En particulier :

$$(40) \quad SS(w|_{x_{n+1}=0}) \cap \gamma([a,b]) = SS\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} w|_{x_{n+1}=0}\right) \cap \gamma([a,b]) = \emptyset.$$

On introduit donc la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

$$(41) \quad M_i(g) = S(g \otimes \delta_{x_{n+1}=0}^{i-1})|_{x_{n+1}=0} \quad i = 1, 2$$

$$M_i(g) = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} S(g \otimes \delta_{x_{n+1}}^{i-3})|_{x_{n+1}=0} \quad i = 3, 4.$$

Soit alors $a < x_{1,0} < \bar{b}$ et $z_0 = (z_{1,0}, 0) \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z_{1,0} = x_{1,0}$, $\operatorname{Im} z_{1,0} = -1$ et T_1^2 la transformation des hyperfonctions sur $\mathbb{R}^n$, dans $\mathcal{H}_{1/2(\operatorname{Im} z)^2, z_0}^2$ introduite en IV.6.8, dont on conserve les notations. Alors pour ε assez petit on a :

(42) LEMME 2. — Il existe une matrice elliptique $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ d'opérateurs pseudo-différentiels (de la forme I.3.6.11) telle que :

$$(43) \quad N \circ T_1^2(g) = T_1^2 \circ M(g)$$

pour tout g compactement supporté dans $\omega'_\varepsilon = \omega_\varepsilon \cap x_{n+1} = 0$.

Le théorème se déduit du lemme car $S^*\Gamma^+$ (13) étant l'image par l'application Δ (IV.6.7) des $z_0 = (z_{1,0}, 0) \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Im} z_{1,0} = -1$, on déduit de (40), (43) et en inversant N :

$$(44) \quad SS_T^2(g_i) \cap S^*\Gamma^+ \cap \{a < \tilde{x}_1 < b\} = \emptyset, \quad i = 0, 1$$

d'où en appliquant les théorèmes IV.4.3, IV.4.4 et $SS(g_i) \cap \Gamma \subset \gamma[a, b]$, on déduit $SS(g_i) \cap \Gamma = \emptyset$.

C. Preuve du Lemme 2.

On va calculer $T_1^2 \circ M_1$, les trois autres cas étant similaires. On pose $U' = U \cap x_{n+1} = 0$, $\theta = (\theta'', \theta_{n+1})$ et on désigne par $\Phi(x, y, \theta)$ la restriction de $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ à $\theta_1 = 0$, $x_{n+1} = 0$, $y_{n+1} = 0$, et on choisit V tel que $\operatorname{Support}(\chi) \subset \{\alpha \in S^{n-1}, |\alpha - \xi'_0| \leq \varepsilon\}$.

On choisit $\Psi \in C_0^\infty$, $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi = 1$ au voisinage de $\bar{U}'$ et Σ un contour d'intégration : $u \rightarrow u + i\rho(u)\xi_0$, $u \in \mathbb{R}^n$ avec $\rho \in C_0^\infty$, $0 \leq \rho \leq \|\rho\|$, $\rho = 0$ au voisinage de $\{\Psi < 1\}$ et $\rho = \|\rho\|$ au voisinage

de $\bar{U}'$. Comme Φ'_x est près de $\xi_0|\theta|$ on a pourvu que $\|\rho\|$ soit assez petit :

$$(45) \quad \mathcal{J}m \Phi(u + i\rho(u)\xi_0, y, \theta) \geq \mathcal{J}m \Phi(u, y, \theta) + C^{te} \rho|\theta|.$$

Alors pour g à support dans ω'_ε :

$$(46) \quad T_1^2 \circ M_1(g) = \int F(z, y, \mu, \lambda) g(y) dy$$

avec

$$(47) \quad F(z, y, \mu, \lambda) = 2i\pi\lambda \int_{\substack{|\theta| \geq 1/\lambda \\ x \in \Sigma}} e^{i\lambda\varphi} \Psi(x) T(x, \lambda|\theta|) \sigma(x, y, \lambda\theta) \chi\left(\frac{\theta}{|\theta|}\right) |\theta|^{1-n} d\theta dx$$

où

$$(48) \quad \varphi = \Phi(x, y, \theta) - x'' \cdot \xi_0'' + \frac{i}{2} (\mu z'' - x'')^2 + i \frac{\mu^2}{2} (z_1 - x_1)^2$$

car T_1^2 et T^2 coïncident sur les hyperfonctions à support compact et on a tronqué par Ψ aux points d'analyticité de $M_1(g)$. Notons que par (45) et (28), F est holomorphe en (z, y) . Si on a une décomposition $F = F_1 + F_2$ avec

$$|F_2| \leq e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}[(\mathcal{J}m z)^2 - C]},$$

avec $C > 0$, pour z près de z_0 , $0 < \mu \leq \mu_0$, $\lambda\mu^2 = \Lambda \geq \Lambda(\mu)$ et $y \in W_{\mu, \varepsilon}$, (μ) voisinage complexe de ω'_ε , alors F_2 est un noyau négligeable, i.e. :

$$\int F_2(z, y, \mu, \lambda) g(y) dy$$

est toujours nul dans $\mathcal{H}_{1/2(\text{Im } z)^2, z_0}^2$, pour g à support dans ω'_ε et on écrira (par abus) $F = F_1$.

Avec cette convention, par (45) et (28), on peut restreindre l'intégrale (47) à

$$(49) \quad \theta \in \left\{ \theta \in \mathbf{R}^n \left| \frac{\theta}{|\theta|} - \xi_0' \leq \varepsilon, \frac{1}{\lambda} \leq |\theta| \leq M \right. \right\}$$

où M est une grande constante positive. On peut alors redéformer Σ en le contour réel (i.e. ramener ρ à 0), puis d'après (48) restreindre l'intégrale à :

$$(50) \quad |x_1 - x_{1,0}| < \varepsilon |x''| < \mu \varepsilon.$$

Alors on peut restreindre l'intégrale à

$$(51) \quad \theta \in \Theta_\varepsilon = \left\{ \theta \in \mathbf{R}^n, \left| \frac{\theta}{|\theta|} - \xi'_0 \right| \leq \varepsilon, \frac{1}{M} \leq |\theta| \leq M \right\};$$

car pour $|\theta| \leq \frac{1}{M}$ on aura d'après (48) et (50), $\varphi'_{x''}$ près de $-\xi''_0$ et on conclut par déformation en x'' seul. Maintenant on peut pour ε petit éliminer Ψ et T dans (47). L'hypothèse $\mathcal{H}_{a,b}$ entraîne (pour ε petit) le lemme suivant, qui va permettre de déformer le contour (50) et (51) pour l'intégrale (47) :

(52) LEMME 3. — Il existe $\mu_0 > 0$, $\tau_0 > 0$, et pour $0 < \tau \leq \tau_0$, $C_\tau > 0$ avec $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} C_\tau = 0$, tels que pour $0 < \mu \leq \mu_0$,

$$(53) \quad x \in \mathbf{C}^n, \quad \operatorname{Re} \theta \in \Theta_\varepsilon, \quad |\mathcal{J} m \theta| \leq \varepsilon, \quad \operatorname{Re} y \in \omega'_\varepsilon, \quad |\mathcal{J} m y| < \varepsilon,$$

les inégalités :

$$(54) \quad \begin{cases} |x_1 - x_{1,0}| \leq \tau, & |x''| \leq \mu \tau, & |\Phi'_{x''} - \xi''_0| \leq \mu \tau \\ |\Phi'_{x_1} - \mu^2| \leq \mu^2 \tau, & |\Phi'_\theta| \leq \mu \tau \end{cases}$$

entraînent :

$$(55) \quad |y_1 - x_{1,0}| \leq C_\tau, \quad |y''| \leq \mu C_\tau$$

et

$$(56) \quad |\theta'' - \xi''_0| \leq \mu C_\tau, \quad [|\theta_{n+1} - \mu| \leq \mu C_\tau \text{ ou } |\theta_{n+1} + \mu| \leq \mu C_\tau].$$

Aussi, de (24) et puisque $\Phi'_{\tilde{x}}$ est constant le long de la courbe

$l \rightarrow \pi \exp l H_p(\tilde{x}, \tilde{\xi})$, on déduit pour ε petit :

(57) LEMME 4. — Il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C} \times \Theta_\varepsilon$, voisinage de $\theta'' = \xi''_0$, $\theta_{n+1} = 0$ et $C_1 > 0$, tel que $\operatorname{Re} y \in \omega'_\varepsilon$, $|\mathcal{J} m y| \leq \varepsilon$, $|x_1 - x_{1,0}| \leq \varepsilon$,

$|x''| \leq \varepsilon$, $|\mathcal{J}m \theta| \leq \varepsilon$ et $\operatorname{Re} \theta \in \Theta_\varepsilon \setminus \Omega$ entraîne :

$$(58) \quad |\Phi'_{x''} - \xi''_0| \geq C_1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{J}m \Phi \geq C_1.$$

A présent on fixe $\varepsilon = \varepsilon_0$, et on choisit $\mu_0 > 0$, $\tau > 0$ ($\tau \leq \tau_0$) très petits devant C_1 , ε_0 et on choisit comme contour d'intégration dans (47) :

$$(59) \quad \Sigma_{0,\tau} = \left\{ \theta \in \Theta_{\varepsilon_0}, x \in \mathbb{R}^n, |x_1 - x_{1,0}| \leq \frac{\tau}{4}, |x''| \leq \mu \frac{\tau}{4} \right\}.$$

On pose $x'' = \mu \tilde{x}''$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}'')$, et on choisit $\Psi_1(\tilde{x}) \in C_0^\infty$, $0 \leq \Psi_1 \leq 1$, $\Psi_1 = 1$ près de $(x_{1,0}, 0)$, $\operatorname{Support} \Psi_1 \subset \left\{ |\tilde{x}_1 - x_{1,0}| < \frac{\tau}{4}, |\tilde{x}''| < \frac{\tau}{4} \right\}$, $\Psi_2(\theta) \in C_0^\infty(\dot{\Theta}_{\varepsilon_0})$, $0 \leq \Psi_2 \leq 1$; $\Psi_2 = 1$ près de $\bar{\Omega}$ et dans le domaine (complexe) :

$$(60) \quad \tilde{x} \in \mathbb{C}^n, |\tilde{x}_1 - x_{1,0}| \leq \tau/4, \operatorname{Re} \theta \in \Theta_{\varepsilon_0}, |\mathcal{J}m \theta| \leq \varepsilon_0.$$

On considère le champ de vecteur réel $\vec{X} = \vec{X}_{\tilde{x}} + \vec{X}_\theta$.

$$(61) \quad \begin{cases} (\mu^4 + |\vec{\nabla}_{\tilde{x}} \mathcal{J}m \varphi|^2)^{1/2} \vec{X}_{\tilde{x}} = \psi_1(\operatorname{Re} \tilde{x}) \vec{\nabla}_{\tilde{x}} \mathcal{J}m \varphi \\ (\mu^2 + |\nabla_\theta \mathcal{J}m \varphi|^2)^{1/2} \vec{X}_\theta = \psi_2(\operatorname{Re} \theta) \mu \vec{\nabla}_\theta \mathcal{J}m \varphi \end{cases}$$

où $\vec{\nabla}$ désigne les gradients respectifs en $\tilde{x}$ et θ . Soit pour $t > 0$ petit (indépendant de μ), $\Sigma_{t,\tau}$ l'image par le flot de $\vec{X}$ de $\Sigma_{0,\tau}$, qui reste contenu dans le domaine (60). Notons que $\mathcal{J}m \varphi$ est croissant le long du flot de $\vec{X}$, et $\partial \Sigma_{t,\tau} = \partial \Sigma_{0,\tau}$. Dans (47), on remplace donc $\Sigma_{0,\tau}$ par $\Sigma_{t,\tau}$.

D'après (48) on a :

$$(62) \quad \begin{aligned} \varphi'_{\tilde{x}''} &= \mu \Phi'_{x''} - \mu \xi''_0 + i\mu^2(\tilde{x}'' - z'') \\ \varphi'_{\tilde{x}_1} &= \Phi'_{x_1} + i\mu^2(\tilde{x}_1 - z_1) \\ \varphi'_\theta &= \Phi'_\theta. \end{aligned}$$

Notons $\chi(t, \tilde{x}, \theta)$ le flot de $\vec{X}$.

Alors pour $\operatorname{Re} y \in \omega'_\varepsilon$, $|\mathcal{J}m y| < \varepsilon_0$, $|y_1 - x_{1,0}| > C_\tau$ ou $|y''| > \mu C_\tau$, lorsque $(\tilde{x}, \theta)$ vérifie (60), on a d'après (54), (55), (62), soit $|\varphi'_\tilde{x}| \geq \mu^2 \frac{\tau}{2}$

soit $|\varphi'_0| \geq \mu\tau$ pour z près de z_0 . Si de plus y est réel, on a $\mathcal{J}m\Phi \geq 0$ sur $\Sigma_{0,\tau}$ et il existe alors $C_2 > 0$, indépendant de μ , tel que :

$$(63) \quad \mathcal{J}m\varphi|_{\Sigma_{t,\tau}} \geq \frac{\mu^2}{2} [-(\mathcal{J}m z)^2 + C_2 t].$$

Donc pour z près de z_0 et $y \in W_\mu^1$ voisinage complexe (dépendant de $\mu, t, \tau, \varepsilon_0$) de $\{y \in \omega'_{\varepsilon_0}, |y''| > \mu C_\tau, |y_1 - x_{1,0}| > C_\tau\}$, on a pour $\lambda \geq \lambda(\mu)$:

$$(64) \quad |F| \leq e^{\frac{\lambda\mu^2}{2} \left[(\mathcal{J}m z)^2 - \frac{1}{2} C_2 t \right]}.$$

Maintenant supposons $|y_1 - x_{1,0}| < C_\tau$, $|y''| \leq \mu C_\tau$; on posera $y'' = \mu \tilde{y}''$ et $\tilde{y} = (y_1, \tilde{y}'')$. Pour $(\tilde{x}, \theta) \in \Sigma_{0,\tau}$, et θ ne vérifiant pas (56) avec C_τ remplacé par $2C_\tau$, la composante θ de $\chi(t, \tilde{x}, \theta)$ pour $0 \leq t \leq t_0$ (indépendant de μ) ne vérifie pas (56) (avec constante C_τ) d'après (61). Donc pour $y \in W_\mu^2$ voisinage complexe de :

$$(65) \quad \{y \in \omega'_{\varepsilon_0}, |y''| < \mu C_\tau, |y_1 - x_{1,0}| < C_\tau\}$$

les contributions non négligeables pour (47) se calculent aux points de $\Sigma_{t_0,\tau}$ paramétrés par les θ vérifiant :

$$(66) \quad \begin{aligned} \theta'' &= \xi_0'' + \mu \tilde{\theta}'', & |\tilde{\theta}''| &\leq 2C_\tau \\ \theta_{n+1} &= \mu \tilde{\theta}_{n+1} & \text{ou} & \begin{cases} |\tilde{\theta}_{n+1} - 1| \leq 2C_\tau \\ |\tilde{\theta}_{n+1} + 1| \leq 2C_\tau. \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le lemme 3, C_τ est aussi petit qu'on veut et (66) découpe en deux le domaine d'intégration. Alors avec $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}'', \tilde{\theta}_{n+1})$ on obtient pour $y \in W_\mu^2$, z près de z_0 :

$$(67) \quad F(z, \tilde{y}, \mu, \lambda) = 2i\pi\lambda\mu^{2n-1} \int e^{-i\lambda\mu\tilde{y}'' \cdot \xi_0'' + i\lambda\mu^2\tilde{\Phi}} \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}, \lambda) d\tilde{\theta} d\tilde{x}$$

avec

$$(68) \quad \tilde{\Phi} = \frac{i}{2} (z - \tilde{x})^2 + \tilde{\Phi}; \quad \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}, \lambda) = \sigma(x, y, \lambda\theta)$$

et où $\tilde{\Phi}$ est la restriction à $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} = 0$ de la solution des équations de Hamilton-Jacobi :

$$(69) \quad \begin{cases} \tilde{p}_\mu(\tilde{y}, -\tilde{\Phi}'_{\tilde{y}}) = 0 \\ \tilde{\Phi}|_{\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1} = (\tilde{x}' - \tilde{y}')\tilde{\theta} + iC_0(\tilde{x}' - \tilde{y}')^2|\theta| \end{cases}$$

où $\hat{p}_\mu$ est introduit en (14). Maintenant par (15) et (16), on peut appliquer le théorème de la phase stationnaire à (67), avec grand paramètre $\Lambda = \lambda\mu^2$. D'où :

(70) LEMME 5. — Soit σ^0 le symbole principal de $\sigma|\theta|^{1-n}$ (de degré 0). Pour $y \in W_\mu^2$ et z près de z_0 on a :

$$(71) \quad F(z, \mu, \lambda) = e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(z_1 - y_1)^2 - i\lambda y'' \cdot \xi_0'' - \frac{\lambda}{2}(\mu z'' - y'')^2} q_1(z, \mu, \Lambda)$$

où q_1 est un $\mathcal{F}$ -symbole analytique classique, de degré $1 - n$, de symbole principal :

$$(72) \quad q_1^0 = i(2\pi)^{n+1} \Lambda^{1-n} \mu^{2n-3} [\sigma^0(y, y, \beta'^+) + \sigma^0(y, y, \beta'^-)]$$

où $\beta'^\pm = (\theta'', \theta_{n+1}^\pm)$, $\theta'' = \xi_0'' + i\mu(z'' - \tilde{y}'')$ et $\theta_{n+1}^\pm = \mu\tilde{\theta}_{n+1}^\pm$ où $\tilde{\theta}_{n+1}^\pm$ sont les deux racines de l'équation :

$$[\tilde{\theta}_{n+1}^\pm]^2 = \tilde{\eta}_1 + \tilde{Q}_\mu(\tilde{\eta})$$

avec $\hat{Q}_\mu$ défini par (16'), et $\tilde{\eta} = i(z - \tilde{y})$.

Preuve. — Les points stationnaires de $\tilde{\phi}$ sont donnés par les équations :

$$(73) \quad \text{i) } \tilde{\Phi}_\theta = 0, \quad \text{ii) } \tilde{\Theta}'_{\tilde{x}} = i(z - \tilde{x}) = \tilde{\eta}.$$

D'après (69) et (16), (16'), i) entraîne pour μ assez petit $\tilde{x} =$ et ii) permet alors de calculer les deux valeurs correspondantes de $\tilde{\theta}$.

Soit alors ρ_i , $i = 2, 3, 4$ les $\mathcal{F}$ -symboles analytiques classiques qui correspondront au calcul de $T_1^2 \circ M_i$. On obtient :

$$(74) \quad \rho_2^0 = -\rho_3^0 = (2\pi)^{n+1} \Lambda^{2-n} \mu^{2n-5} [\sigma^0(y, y, \beta'^+) \theta_{n+1}^+ + \sigma^0(y, y, \beta'^-) \theta_{n+1}^-]$$

$$(75) \quad \rho_4^0 = +i(2\pi)^{n+1} \Lambda^{3-n} \mu^{2n-7} [\sigma^0(y, y, \beta'^+) (\theta_{n+1}^+)^2 + \sigma^0(y, y, \beta'^-) (\theta_{n+1}^-)^2].$$

Le lemme 2 est alors conséquence de (64), (71), (72), (74), (75), des résultats de I.6, et du fait que la multiplication par μ est un pseudo-différentiel elliptique dans $\mathcal{H}^2_{1/2(\mathcal{M}z)^2, z_0}$.

Preuve du lemme 3. — On pose $\bar{y} = (y, 0)$, $\bar{x} = (x, 0)$, $\bar{\theta} = (0, \theta)$. On a $p(\bar{y}, -\Phi'_y) = 0$ (car $\theta_1 = 0$). Soit l tel que :

$$(76) \quad (\bar{u}, \bar{\eta}) = \exp - lH_p(\bar{y}, -\Phi'_y)$$

vérifie $u_1 = x_1$. Alors

$$(77) \quad \begin{cases} \Phi'_\theta(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \Phi'_\theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}) \\ \Phi'_x(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \Phi'_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}). \end{cases}$$

Il en résulte d'après (54), $|x' - u'| \in O(\mu\tau)$, d'où $|u'| \in O(\mu\tau)$, $|u_{n+1}| \in O(\mu\tau)$ et

$$(78) \quad \theta'' = \xi''_0 + O(\mu\tau).$$

De plus, $\Phi'_{x_l}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = -\Phi'_{u_l}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta})$ et $p(\bar{u}, -\Phi'_u)$. Comme

$$\Phi'_{u''} - \Phi'_{x''} \in O(\mu\tau)$$

on en déduit :

$$(79) \quad \theta_{n+1} = \pm \mu + O(\mu\tau)$$

$$(80) \quad (\bar{u}, \bar{\eta}) = \bar{\Sigma}_\mu(\tilde{u}, \tilde{\eta})$$

avec $\tilde{\eta}_1 - 1 \in O(\tau)$, $\tilde{\eta}'' \in O(\tau)$, $\tilde{\eta}_{n+1} \pm 1 \in O(\tau)$

$$\tilde{u}_1 = x_1 = x_{1,0} + O(\tau), \quad \tilde{u}'' \in O(\tau), \quad \tilde{u}_{n+1} \in O(\tau).$$

Alors de (76), (80), et de l'hypothèse $\mathcal{H}_{a,b}$, on a : puisque $Y_{n+1} = 0$,

$$(81) \quad 1 \in O(\tau)$$

ce qui achève la preuve.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BONY, Extension du théorème de Holmgren, *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1975-1976, exposé 17.
- [2] L. BOUTET de MONVEL, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques, *Séminaire à Grenoble*, 1975-1976.
- [3] L. BOUTET de MONVEL, P. KREE, Pseudo-differential operators and Gevrey-Classes, *Ann. Inst. Fourier*, 17 (1967), 295-303.
- [4] L. HÖRMANDER, Fourier integrals operators I, *Acta Math.*, 127 (1971), 70-183.

- [5] M. KASHIWARA, T. KAWAI, Second microlocalisation and asymptotic expansions, *Springer Lec. Notes in Physics*, (126), 21-76.
- [6] K. KATAOKA, Microlocal theory of boundary value problems II, and a theorem on regularity of diffractive operators.
- [7] Y. LAURENT, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe*, Thèse, Orsay, 1982.
- [8] G. LEBEAU, Une propriété d'invariance pour le spectre des traces, *C.R.A.S.*, t. 294 (21 juin 1982), I. 723-725.
- [9] P. SCHAPIRA, Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e Série, 14 (1981), 121-139.
- [10] J. SJÖSTRAND, Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet Problems. I et II, *Comm. P.D.E.*, 5(1) (1980), 41-94 et *Comm. P.D.E.*, 5(2) (1980), 187-207.
- [11] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Cours à Orsay*, (1981).

Manuscrit reçu le 13 février 1984.

Gilles LEBEAU,
École Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05.