ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

JEAN-PAUL MOHSEN

Transversalité quantitative en géométrie symplectique: sous-variétés et hypersurfaces

Tome XXVIII, nº 4 (2019), p. 655-706.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2019_6_28_4_655_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVIII, n° 4, 2019
pp. 655-706

Transversalité quantitative en géométrie symplectique: sous-variétés et hypersurfaces (*)

Jean-Paul Mohsen (1)

Résumé. — Le principal résultat de cet article est une extension d'un théorème de transversalisation dû à Donaldson et Auroux: nous construisons des sections approximativement holomorphes dont la restriction à une sous-variété compacte donnée est quantitativement transversale à la section nulle.

Abstract. — The main result of this paper is an extension of a transversality theorem due to Donaldson and Auroux: we construct approximately holomorphic sections whose restriction to some given compact submanifold is quantitatively transverse to the zero section.

1. Enoncé du théorème

Un théorème de Donaldson et Auroux ([1], [2]) permet de perturber une section approximativement holomorphe d'un fibré très positif afin de rendre son annulation quantitativement transversale. Ce théorème admet une variante relative à une sous-variété, c'est-à-dire qu'on peut rendre quantitativement transversale l'annulation de la restriction de la section à une sous-variété donnée.

Afin d'énoncer précisément ce résultat, donnons plusieurs définitions. Soit une application linéaire u entre deux espaces euclidiens E et F. On appelle *module d'injectivité* de u le nombre :

$$\mathrm{MI}(u) = \min \|u(v)\|$$

où v décrit la sphère unité de l'espace de départ E. De façon duale, on appelle *module de surjectivité* de u le nombre :

$$\mathrm{MS}(u) = \min \|\lambda \circ u\|$$

(*) Reçu le 17 octobre 2016, accepté le 20 juillet 2017.

(1) CMI, LATP, Université d'Aix-Marseille, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France — jean-paul.mohsen@univ-amu.fr

Article proposé par Stepan Orevkov.

où λ décrit la sphère unité de l'espace dual F^* de l'espace d'arrivée (autrement dit : $\mathrm{MS}(u) = \mathrm{MI}(u^*)$, où u^* désigne l'adjoint de u).

Soient une application lisse f d'un ouvert $U \subset E$ vers F et x un point de U. On appelle *module de transversalité* de f en x le nombre :

$$\mathrm{MT}(f,\, x) = \max \left\{ \|f(x)\| \,,\ \mathrm{MS}(df(x)) \right\}.$$

Etendons la définition du module de transversalité aux sections : soit un fibré vectoriel V sur une variété X, muni d'une connexion ∇. On suppose la base et la fibre munies de métriques. Alors on appelle module de transversalité d'une section s de V en un point x de X le nombre :

$$\mathrm{MT}(s,\, x) = \max \left\{ \|s(x)\| \,,\ \mathrm{MS}(\nabla s(x)) \right\}$$

et on appelle module (global) de transversalité de s le nombre : $\mathrm{MT}(s) = \inf \mathrm{MT}(s,\, x)$.

Si Y désigne une sous-variété de X, on s'intéressera au module de transversalité de s le long de Y, c'est-à-dire au module de transversalité de la restriction de s à Y. Enfin, il existe de cette notion de module de transversalité une version pondérée : le module de transversalité de poids $(a,\, b)$, avec a et $b > 0$, est défini par :

$$\mathrm{MT}(s,\, x;\ a,\, b) = \max \left\{ a \times \|s(x)\| \,,\ b \times \mathrm{MS}(\nabla s(x)) \right\}$$

et les modules pondérés global et relatif à une sous-variété se définissent de façon analogue.

Rappelons aussi quelques définitions de géométrie symplectique (ou de géométrie presque kählérienne). Une variété presque kählérienne est une variété de dimension (réelle) paire munie d'une forme symplectique ω, d'une structure presque complexe J et d'une métrique riemannienne g, ces trois données vérifiant :

$$g(v,\, w) = \omega(v,\, Jw).$$

pour tous champs de vecteurs v et w.

Le contexte de la théorie de Donaldson–Auroux est une variété presque kählérienne $(X,\, \omega,\, J,\, g)$ munie d'un fibré en droites *positif.* Plus précisément, il s'agit d'un fibré en droites hermitiennes de base X, muni d'une connexion unitaire de courbure F reliée à la forme symplectique par la formule :

$$F = -i2\pi\omega.$$

Un tel fibré positif L est appelé une *pré-quantification.* Pour les grandes valeurs de l'entier k, le fibré en droites L^k sera considéré comme *très positif* ainsi que le fibré vectoriel $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ (de rang r). Certaines estimées, omniprésentes dans cette théorie, donnent lieu aux définitions suivantes.

Soient un réel $K > 0$ et trois entiers $m_{\max} \geqslant 0$, $r > 0$ et $k > 0$. Une section s du fibré hermitien $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ sera dite $(K, m_{\max})-$contrôlée si elle vérifie :

$$\|\nabla^m s\| \leqslant K \times k^{\frac{m}{2}}$$

pour tout entier m compris entre 0 et $m_{\max}$. Elle sera dite $(K, m_{\max})-$approximativement holomorphe si elle vérifie :

$$\left\|\nabla^m \overline{\partial} s\right\| \leqslant K \times k^{\frac{m}{2}}$$

pour tout entier m compris entre 0 et $m_{\max}$.

Précisons que $\overline{\partial}$ désigne la partie anti-linéaire de ∇ et que toutes les métriques et connexions qui interviennent dans les deux définitions précédentes sont déduites des métriques de X et de L, de la connexion de L et de la connexion de Levi-Civita.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat du présent article :

Théorème de Donaldson–Auroux relatif (à une sous-variété). *Soient une variété presque kählérienne X, une pré-quantification L, une sous-variété compacte $Y \subset X$, deux réels $\varepsilon > 0$ et $K > 0$ et deux entiers $m_{\max} \geqslant 0$ et $r > 0$.*

Alors il existe un réel $\eta > 0$ et un entier $k_0 > 0$ tels que, pour tout entier $k \geqslant k_0$ et toute section $(K, 2)-$contrôlée et $(K, 1)-$approximativement holomorphe s de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$, il existe une section $(\varepsilon, m_{\max})-$contrôlée et $(\varepsilon, m_{\max})-$approximativement holomorphe t de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ telle que le module de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ de la restriction de $s + t$ à Y soit supérieur à η.

Quoiqu'assez longue, la démonstration de ce théorème n'a rien de mystérieux : il s'agit d'une adaptation de la preuve originale de Donaldson.

Le principal intérêt de la version relative du théorème de Donaldson–Auroux est de retrouver comme corollaires les deux résultats suivants :

- Le théorème de D. Auroux sur l'unicité à isotopie près des sections quantitativement transversales de Donaldson [1]. La démonstration originale reposait sur un argument de « grande composante connexe ». Celle proposée ici en diffère donc sur ce point.
- Le théorème de A. Ibort, D. Martínez-Torres et F. Presas [5], analogue en géométrie de contact du théorème de Donaldson–Auroux.

En fait, ces deux résultats sont des conséquences du théorème de Donaldson–Auroux relatif aux *hypersurfaces réelles*. Dans le cas des hypersurfaces réelles, le point important est qu'une section (approximativement) holomorphe qui s'annule transversalement (avec une estimée) s'annulera transversalement *le long de la distribution de Levi*.

Plan de l'article

La première partie de l'article (chapitres 2 et 3) est consacrée aux corollaires du théorème de Donaldson–Auroux relatif et la seconde partie (chapitres 4 et suivants) est consacrée à la démonstration de ce théorème.

Le chapitre 2 traite le cas de la transversalisation le long d'une hypersurface réelle puis en déduit le théorème d'Ibort, Martínez-Torres et Presas. De même, dans le chapitre 3, le théorème d'unicité d'Auroux est déduit du résultat sur les hypersurfaces et ce chapitre contient aussi un contre-exemple simple qui prouve qu'il n'y a pas unicité dans le cas relatif.

Le chapitre 4 expose la théorie des variations de Vitushkin et l'applique à l'étude de la complexité des hypersurfaces algébriques (d'après [6]). L'objet du chapitre 5 est un théorème de Bertini quantitatif (inspiré de [3]). Par souci de complétude, on donne, dans les chapitres suivants, la fin de la démonstration du théorème de Donaldson–Auroux relatif qui est très semblable à la démonstration classique de [1], [2] et [3].

Remerciements

L'auteur remercie Emmanuel Giroux et Bruno Sévennec pour leur soutien et pour de nombreuses discussions. Merci aussi à Nicolas Dutertre et à Stéphane Rigat pour des indications bibliographiques.

2. Application à la géométrie de contact

Ce chapitre permet, en ce qui concerne les techniques de transversalité quantitative, de regarder la théorie de contact comme une application de la théorie symplectique relative.

2.1. Hyperplan réel et hyperplan complexe

LEMME 2.1. — *Soient deux espaces hermitiens E et F de dimensions finies, une application $u : E \mapsto F$ et un hyperplan réel $H \subset E$. Notons K l'hyperplan complexe inclus dans H (autrement dit $K = H \cap iH$). On désignera par u_H et u_K les restrictions respectives de u à H et à K. Alors :*

(i) *si u est $\mathbb{C}-$linéaire, elle vérifiera l'identité :*

$$\mathrm{MS}(u_K) = \mathrm{MS}(u_H),$$

(ii) *si u est $\mathbb{R}-$linéaire, elle vérifiera l'encadrement :*

$$\mathrm{MS}(u_H) - 2\|u^{0,1}\| \leqslant \mathrm{MS}(u_K) \leqslant \mathrm{MS}(u_H)$$

où $u^{0,1}$ désigne la partie $\mathbb{C}-$antilinéaire de u.

Démonstration. — Dans les cas (i) et (ii), l'inégalité $\mathrm{MS}(u_K) \leqslant \mathrm{MS}(u_H)$ est vérifiée car K est inclus dans H.

Cas (i). Écrivons la décomposition :

$$H = \mathbb{R}v_0 \oplus K$$

où v_0 désigne un vecteur orthogonal à K. Par définition du module de surjectivité, il existe une forme linéaire réelle $\lambda : F \to \mathbb{R}$ de norme 1 vérifiant :

$$\|\lambda \circ u_K\| = \mathrm{MS}(u_K).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit un réel θ qui vérifie :

$$\lambda(e^{i\theta}u(v_0)) = 0.$$

Notons λ_θ la forme linéaire réelle définie sur F par :

$$\lambda_\theta(v) = \lambda(e^{i\theta}v).$$

Sa norme est égale à celle de λ, c'est-à-dire vaut 1. Par définition du module de surjectivité, on en déduit l'inégalité :

$$\mathrm{MS}(u_H) \leqslant \|\lambda_\theta \circ u_H\|.$$

Comme $\lambda_\theta \circ u$ est nulle sur $\mathbb{R}v_0$, le membre de droite est égal à $\|\lambda_\theta \circ u_K\|$. En appliquant la $\mathbb{C}-$linéarité de u_K puis la définition de λ, on peut écrire :

$$\|\lambda_\theta \circ u_K\| = \|\lambda \circ u_K\| = \mathrm{MS}(u_K).$$

On obtient donc l'inégalité suivante :

$$\mathrm{MS}(u_H) \leqslant \mathrm{MS}(u_K).$$

Le cas (i) du lemme est démontré par double inégalité.

Cas (ii). L'application u est désormais $\mathbb{R}-$linéaire. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{MS}(u_K) &\geqslant \mathrm{MS}((u^{1,0})_K) - \|(u^{0,1})_K\| \\ &\qquad\qquad \text{(car le module de surjectivité est 1}-\text{lipschitzien)} \\ &= \mathrm{MS}((u^{1,0})_H) - \|(u^{0,1})_K\| \\ &\qquad\qquad \text{(d'après (i) appliqué à } u^{1,0}) \\ &\geqslant \mathrm{MS}(u_H) - \|(u^{0,1})_H\| - \|(u^{0,1})_K\| \\ &\qquad\qquad \text{(car le module de surjectivité est 1}-\text{lipschitzien)} \\ &\geqslant \mathrm{MS}(u_H) - 2\|u^{0,1}\|.\end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

2.2. Cas d'une hypersurface réelle : transversalité dans la direction de Levi

THÉORÈME 2.2 (Théorème de transversalisation le long d'une hypersurface réelle). — *Sous les hypothèses du théorème de Donaldson–Auroux relatif, on suppose de plus que Y est une hypersurface réelle.*

Alors il existe (comme d'habitude) un réel $\eta > 0$ et un entier $k_0 > 0$ tels que, pour tout entier $k \geqslant k_0$ et toute section $(K,2)-$contrôlée et $(K,1)-$approximativement holomorphe s de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$, il existe une section t de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ qui est comme d'habitude $(\varepsilon, m_{\max})-$contrôlée et $(\varepsilon, m_{\max})-$approximativement holomorphe mais qui vérifie, pour tout $x \in Y$, l'estimation suivante :

$$\max\left\{\|(s+t)(x)\|\,,\ k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{\mathrm{Levi}})\right\} \geqslant \eta$$

où $\nabla(s+t)(x)_{\mathrm{Levi}}$ désigne la restriction de $\nabla(s+t)(x)$ à l'hyperplan (complexe) de Levi $T_xY \cap J_x(T_xY)$.

Démonstration. — Le théorème de Donaldson–Auroux relatif fournit une section t satisfaisant les majorations demandées et la minoration suivante :

$$\max\left\{\|(s+t)(x)\|\,,\ k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{T_xY})\right\} \geqslant \eta_1$$

pour un certain réel $\eta_1 > 0$. Posons $\eta = \frac{\eta_1}{2}$. Dans le cas particulier d'une hypersurface réelle, le lemme 2.1 implique :

$$\begin{aligned}\mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{\mathrm{Levi}}) &\geqslant \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{T_xY}) - 2\|\overline{\partial}(s+t)(x)\| \\ &\geqslant \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{T_xY}) - 2(K+\varepsilon).\end{aligned}$$

La quantité

$$\max\left\{\|(s+t)(x)\|\,,\ k^{-\frac{1}{2}}\times \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{\mathrm{Levi}})\right\}$$

est donc minorée par :

$$\max\left\{\|(s+t)(x)\|\,,\ k^{-\frac{1}{2}}\times \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(x)_{T_xY})\right\}-2(K+\varepsilon)k^{-\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant 2\eta-2(K+\varepsilon)k^{-\frac{1}{2}}\geqslant \eta$$

pour k assez grand. □

2.3. Construction de sous-variétés de contact

Soit une variété compacte Y munie d'une forme de contact α. Notons X la symplectisée, i.e. le produit $\mathbb{R}\times Y$ muni de la forme symplectique $\omega=d(e^t\alpha)$. On identifie Y à l'hypersurface $\{0\}\times Y$. Munissons X d'une structure presque complexe J, compatible avec ω et préservant la direction de contact en tout point de Y, autrement dit la direction de contact sera égale à la direction de Levi. Comme pré-quantification sur X, choisissons le fibré trivial en droites hermitiennes, muni de la connexion suivante :

$$\nabla=d-i2\pi e^t\alpha.$$

Comme précedemment, on suppose donnés deux réels $\varepsilon>0$ et $K>0$ et deux entiers $m_{\max}\geqslant 0$ et $r>0$.

Théorème 2.3 (Théorème d'Ibort, Martínez-Torres et Presas). — *Pour tout entier k assez grand et toute section $(K,2)-$contrôlée et $(K,1)-$approximativement holomorphe s de $L^k\otimes\mathbb{C}^r$, il existe une section $(\varepsilon,m_{\max})-$contrôlée et $(\varepsilon,m_{\max})-$approximativement holomorphe t de $L^k\otimes\mathbb{C}^r$ telle que le lieu des zéros de la restriction de $s+t$ à Y soit une sous-variété de contact de codimension $2r$ dans Y.*

Démonstration. — Le théorème 2.2 fournit une section approximativement holomorphe $\sigma=s+t$ qui s'annule transversalement le long de la direction de Levi (avec une estimée). Posons $Y_1=Y\cap\sigma^{-1}(0)$. Pour k assez grand, on vérifie immédiatement les trois points suivants :

(1) L'annulation transversale de la restriction à Y implique que Y_1 est une sous-variété lisse d'espace tangent $TY\cap\ker\nabla\sigma$.

(2) La forme α n'est pas nulle sur TY et la restriction de $\nabla\sigma$ à la direction de Levi $TY\cap\ker\alpha$ est surjective. Ces deux faits équivalent à la surjectivité, sur TY, de l'application linéaire $(\alpha,\nabla\sigma)$, elle-même équivalente aux deux faits suivants : $\nabla\sigma$ est surjective sur TY et α n'est pas nulle sur $TY\cap\ker\nabla\sigma$ $(=TY_1)$.

(3) L'application $\mathbb{R}-$linéaire $\nabla\sigma_{\text{Levi}}$ est approximativement $\mathbb{C}-$linéaire en ce sens que la norme de sa partie antilinéaire est très petite comparée au module de surjectivité. On en déduit que le noyau de $\nabla\sigma_{\text{Levi}}$ est un sous-espace approximativement $J-$invariant et, en particulier, symplectique.

Bilan : Nous avons prouvé que Y_1 est une sous-variété lisse sur laquelle la forme α ne s'annule pas et que $(TY_1 \cap \ker\alpha,\, d\alpha)$ est un espace vectoriel symplectique donc Y_1 est une sous-variété de contact. $\square$

Remarque. — Dans [5], cette construction que nous avons faite pour $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ était faite plus généralement pour la version twistée $L^k \otimes V$, où V désigne un fibré vectoriel hermitien, mais le théorème de Donaldson–Auroux relatif admet bien sûr une telle version twistée.

3. Le théorème d'unicité

Ce chapitre a deux objets : premièrement déduire le théorème d'unicité d'Auroux (valable dans le cas absolu) du théorème de Donaldson–Auroux relatif et deuxièmement donner un contre-exemple qui prouve qu'il n'y a pas unicité dans le cas relatif.

Disons un mot d'une idée sous-jacente dans les preuves des théorèmes 2.2 et 3.1. En général, le fait qu'une famille de sections s'annule transversalement n'implique pas que chaque section de la famille s'annule transversalement. Pourtant, c'est le cas dans la situation qui nous intéresse : si une famille à 1 paramètre réel de sections (approximativement) holomorphes s'annule transversalement (avec des estimées), chaque section s'annulera transversalement.

3.1. Sections au-dessus de la sphère de Riemann

Notons $L_{\mathbb{C}P^1}$ le fibré hyperplan sur la sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$. C'est une pré-quantification de $\mathbb{C}P^1$ (pour les métriques usuelles de la base et de la fibre et la connexion de Chern).

Alors les sections holomorphes de $L^k_{\mathbb{C}P^1}$, pour $k \geqslant 1$, sont les polynômes homogènes de degré k en deux variables notées z_0 et z_1. Voici quatre exemples de sections de ce fibré. Les sections polaires :

$$N_k = z_0^k$$
$$S_k = z_1^k$$

et les sections équatoriales :

$$E_k = 2^{\frac{k}{2}} \times z_0^{\mathrm{Ent}\left(\frac{k}{2}\right)} \times z_1^{k-\mathrm{Ent}\left(\frac{k}{2}\right)}$$
$$F_k = 2^{\frac{k}{2}} \times z_0^{1+\mathrm{Ent}\left(\frac{k}{2}\right)} \times z_1^{k-1-\mathrm{Ent}\left(\frac{k}{2}\right)}$$

où Ent désigne la partie entière. Alors pour tout entier $m_{\max} \geqslant 0$, il existe un réel $K > 0$ indépendant de k tel que ces quatre sections soient $(K, m_{\max})-$contrôlées (cela résulte d'un calcul que nous omettons).

3.2. Unicité dans le cas absolu

Théorème 3.1 (Théorème d'unicité d'Auroux). — *Soient une variété presque kählérienne X compacte et munie d'une pré-quantification L, deux réels K et $\eta > 0$ et deux entiers $r > 0$ et $m_{\max} \geqslant 2$.*

Alors il existe un entier $k_0 > 0$ et des réel $K' \geqslant K$ et $\eta' \in \,]0, \eta[$ tels que, pour tout entier $k \geqslant k_0$ et toutes sections s_0 et s_1 de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$, si s_0 et s_1 sont $(K, m_{\max})-$contrôlées, $(K, m_{\max})-$approximativement holomorphes et s'annulent transversalement sur X avec un module de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ supérieur à η, elles seront isotopes parmi les sections $(K', m_{\max})-$contrôlées, $(K', m_{\max})-$approximativement holomorphes qui s'annulent transversalement avec un module de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ supérieur à η'.

Démonstration. — On munit le produit $\mathbb{C}P^1 \times X$ de la structure presque kählérienne produit et de la pré-quantification produit, i.e. le fibré en droites $\overline{L}$ défini par $\overline{L} = L_{\mathbb{C}P^1} \otimes L$. On définit une section s de $\overline{L}^k$ par :

$$s = N_k \otimes s_0 + S_k \otimes s_1$$

où N_k et S_k désignent les sections polaires de $L^k_{\mathbb{C}P^1}$ définies au paragraphe 3.1.

Notons $\mathbb{R}P^1$ le cercle méridien formé des éléments de $\mathbb{C}P^1$ de la forme $[r_0 : r_1]$ avec r_0 et r_1 réels et $\mathbb{R}P^1_+$ le demi-cercle méridien formé des éléments de $\mathbb{R}P^1$ de la même forme avec $r_0 \geqslant 0$ et $r_1 \geqslant 0$. On trivialise $L_{\mathbb{C}P^1}$ au-dessus de $\mathbb{R}P^1_+$ en identifiant à 1 la section unitaire $\sqrt{1+(\frac{r_1}{r_0})^2} \times z_0$ (prolongée par la valeur z_1 au-dessus du point $[0 : 1]$). Cette trivialisation permet, en un point $(p, x) \in \mathbb{R}P^1_+ \times X$, d'identifier les fibres $L^k_x \otimes \mathbb{C}^r$ et $\overline{L}^k_{(p,\,x)} \otimes \mathbb{C}^r$. Ainsi, une section de $\overline{L}^k \otimes \mathbb{C}^r$ au-dessus de $\mathbb{R}P^1_+ \times X$ pourra être vue comme une famille à 1 paramètre de sections de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ (au-dessus de X).

En appliquant le théorème 2.2 à l'hypersurface $\mathbb{R}P^1 \times X$ de $\mathbb{C}P^2 \times X$, à la section s et à la précision $\frac{\eta}{2}$, on obtient une section t de $\overline{L}^k \otimes \mathbb{C}^r$

qui est $(\frac{\eta}{2},\, m_{\max})-$contrôlée, $(\frac{\eta}{2},\, m_{\max})-$approximativement holomorphe et telle que $s+t$ vérifie, pour un certain réel $\eta'' > 0$ indépendant de k, la minoration suivante :

$$\max\left\{\|(s+t)(p,\, x)\|\,,\; k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla(s+t)(p,\, x)_X)\right\} \geqslant \eta''$$

où $\nabla(s+t)(p,\, x)_X$ désigne la restriction de $\nabla(s+t)(p,\, x)$ au second facteur T_xX de $T_{(p,\, x)}(\mathbb{C}P^1 \times X)$ (en effet, ce facteur T_xX est égal a l'hyperplan complexe de Levi). On obtient donc une famille à 1 paramètre de sections de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$, qui s'annulent transversalement sur X avec un module de poids $(1,\, k^{-\frac{1}{2}})$ supérieur à η''. Nous noterons bien sûr $s_0 + t_0$ et $s_1 + t_1$ les deux sections extrêmes de cette famille. Elles sont isotopes parmi les sections de module de transversalité pondéré supérieur à η''.

Par ailleurs, isotopons les sections s_0 et $s_0 + t_0$ par les sections barycentres $\sigma_\theta = s_0 + \theta \times t_0$, avec $\theta \in [0,\, 1]$. Alors le module de transversalité pondéré de σ_θ vérifie, en tout point $x \in X$, la minoration suivante :

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\|\sigma_\theta(x)\|\,,\; k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla\sigma_\theta(x))\right\}\\
&\quad\geqslant \max\left\{\|s_0(x)\| - \theta \times \|t_0(x)\|,\; k^{-\frac{1}{2}} \times (\mathrm{MS}(\nabla s_0(x)) - \theta \times \|\nabla t_0(x)\|)\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{(car le module de surjectivité est } 1-\text{lipschitzien)}\\
&\quad\geqslant \max\left\{\|s_0(x)\|\,,\; k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla s_0(x))\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad - \theta \times \max\left\{\|t_0(x)\|,\; k^{-\frac{1}{2}} \times \|\nabla t_0(x)\|\right\}\\
&\quad\geqslant \eta - \theta \times \frac{\eta}{2}\\
&\quad\geqslant \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Les sections s_0 et $s_0 + t_0$ sont donc isotopes parmi les sections de module de transversalité pondéré supérieur à $\frac{\eta}{2}$. Bien sûr, il en va de même pour s_1 et $s_1 + t_1$.

Bilan. Posons $\eta' = \min\left\{\frac{\eta}{2}, \eta''\right\}$. Les quatre sections s_0, $s_0 + t_0$, $s_1 + t_1$ et s_1 sont isotopes parmi les sections de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ de module de transversalité pondéré $\geqslant \eta'$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Remarque. — Dans [1], les hypothèses d'holomorphie approximative faites respectivement sur s_0 et s_1 font intervenir deux structures presque complexes J_0 et J_1 non nécessairement égales (mais compatibles avec une même forme symplectique). Cette généralisation peut être obtenue en modifiant la démonstration précédente. En effet la sphère de paramètres qui intervenait dans cette démonstration peut être utilisée pour interpoler (en un certain sens que nous ne préciserons pas) entre J_0 et J_1.

3.3. Un contre-exemple à l'unicité dans le cas relatif

La partie $\mathcal{E}$ de la sphère $\mathbb{C}P^1$ d'équation $|z_0| = |z_1|$ est appelée le cercle équateur. Les sections équatoriales E_k et F_k définies au (3.1) étant unitaires au-dessus de $\mathcal{E}$, les modules de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ de leurs restrictions à $\mathcal{E}$ sont $\geqslant 1$ (en fait, ils sont égaux à 1).

Notons $L^k_{\mathcal{E}}$ le fibré L^k restreint au cercle équateur $\mathcal{E}$. Fixons une trivialisation unitaire de $L^k_{\mathcal{E}}$. Dans cette trivialisation, les restrictions à $\mathcal{E}$ des deux sections E_k et F_k sont des applications continues de $\mathcal{E} = S^1$ vers S^1. Comme leurs degrés topologiques diffèrent d'une unité, ces deux applications ne sont pas isotopes parmi les applications de S^1 vers $\mathbb{C}$ qui ne s'annulent pas.

Remarquons que la dimension réelle de $\mathcal{E}$ (égale à 1) est strictement inférieure au rang réel du fibré $L^k_{\mathcal{E}}$ (égal à 2) et que par conséquent, pour une section de ce fibré, *s'annuler transversalement* signifie *ne pas s'annuler.* Les sections E_k et F_k ne sont donc pas isotopes parmi les sections de L^k dont les restrictions à E s'annulent transversalement.

Ce contre-exemple prouve que le théorème d'unicité d'Auroux, valable dans le cas absolu, n'admet pas d'analogue dans le cas relatif.

4. Variations de Vitushkin

Ce chapitre décrit la théorie des variations de Vitushkin et l'applique à l'étude de la complexité des hypersurfaces algébriques (il est inspiré de [6]).

4.1. Partie espacée

Dans un espace euclidien, une partie finie sera dite *$\varepsilon-$espacée* si deux quelconques de ses points vérifient : $d(x, y) \geqslant \varepsilon$.

4.2. Partie espacée dans une hypersurface

Rappelons sans démonstration un résultat élémentaire de géométrie des hypersurfaces :

Proposition 4.1. — *Soit une hypersurface A compacte à bord dans un espace euclidien de dimension n. Alors il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et toute partie finie $\varepsilon-$espacée F de A le cardinal de F soit majoré par $C\varepsilon^{1-n}$.*

4.3. Partie espacée dans une hypersurface algébrique

On veut comprendre comment C dépend de A, dans le cas d'une hypersurface algébrique. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.2. — *Soit un espace euclidien E de dimension n. Notons B_E la boule unité fermée de E. Alors il existe un polynôme $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tel que pour toute hypersurface algébrique $A \subset E$, tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$, et toute partie finie $\varepsilon-$espacée F de $A \cap B_E$, le cardinal de F soit majoré par $P(\deg A)\varepsilon^{1-n}$.*

Cette majoration est notamment vraie pour une $\varepsilon-$discrétisation, c'est à dire une partie $\varepsilon-$espacée maximale.

L'outil qui nous permettra de démontrer ce théorème s'appelle les variations de Vitushkin. Nous allons les définir au paragraphe 4.7 puis en donner quelques propriétés et en déduire le théorème.

4.4. Mesure sur une grassmannienne linéaire

Soit E un espace euclidien. Notons $\mathrm{Gr}(k, E)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension k. Il existe sur $\mathrm{Gr}(k, E)$ une mesure invariante par isométries linéaires, unique à multiplication par un réel près. Notons $\mathrm{Mes}(k, E)$ cette mesure, normalisée par la condition :

$$\int_{\mathrm{Gr}(k,\, E)} 1 = 1.$$

Par convention, on supposera toujours $\mathrm{Gr}(k, E)$ munie de cette mesure.

4.5. Mesure sur une grassmannienne affine

Notons $\mathrm{AffGr}(k, E)$ la grassmannienne des sous-espaces affines de E de dimension k. Si F désigne un sous-espace vectoriel de E et p un point de l'orthogonal $F^\perp$, on notera $p + F$ le sous-espace affine de E parallèle à F passant par p. Par convention, on supposera toujours $\mathrm{AffGr}(k, E)$ munie de la mesure $\mathrm{AffMes}(k, E)$ définie par la relation :

$$\int_{F \in \mathrm{AffGr}(k,\, E)} \phi(F)\, dF = \int_{F \in \mathrm{Gr}(k,\, E)} \left(\int_{p \in F^\perp} \phi(p + F)\, dp \right) dF.$$

Cette relation est valable pour toute fonction mesurable $\phi : \mathrm{AffGr}(k, E) \to [0, +\infty]$.

Remarque. — Cette mesure $\mathrm{AffMes}(k, E)$ est l'unique mesure sur $\mathrm{AffGr}(k, E)$ invariante par isométries affines, à multiplication par un réel près.

4.6. La formule de Cauchy–Crofton

Rappelons sans démonstration que, pour une sous-variété X d'un espace euclidien E, la formule de Cauchy–Crofton s'énonce ainsi :

$$\int_{F\in \mathrm{AffGr}(n-d,\, E)} \mathrm{Card}(X\cap F)\, dF = c_{d,\,n} \mathrm{Vol}_d\, X$$

où d désigne la dimension de X et n celle de E, où $c_{d,\,n}$ désigne un réel strictement positif qui ne dépend que de ces dimensions, où $\mathrm{Card}(X\cap F)$ désigne le cardinal de l'intersection $X\cap F$ et où $\mathrm{Vol}_d\, X$ désigne le volume ($d-$dimensionnel) de la sous-variété X.

4.7. Les variations de Vitushkin dans le cas absolu

Soit E un espace euclidien de dimension n. Les variations de Vitushkin d'une partie compacte A de E sont des sortes de mesures d dimensionnelles de cet ensemble pour d compris entre 0 et n. Plus précisément :

Définition 4.3. — *La $d-$*ème variation de Vitushkin *de A est l'intégrale sur la grassmannienne des sous-espaces affines de dimension $n-d$ de E du nombre de composantes connexes de $A\cap F$. On la note $V_d^E(A)$ ou plus simplement $V_d(A)$.*

Exemple 1. — Le nombre $V_0(A)$ est le nombre de composantes connexes de A.

Exemple 2. — Le nombre $V_n(A)$ est le volume de A.

Exemple 3. — D'après la formule de Cauchy–Crofton et le lemme de Sard, toute sous-variété A de dimension d vérifie :

$$V_d(A) = c_{d,\,n} \mathrm{Vol}_d(A)$$

où $\mathrm{Vol}_d(A)$ désigne le volume $d-$dimensionnel de A et où $c_{d,\,n} > 0$ désigne un réel ne dépendant que des dimensions d et n.

4.8. Les variations de Vitushkin dans le cas relatif

Nous utiliserons plutôt la version relative :

Définition 4.4. — *Soient, dans E, une partie compacte A et une partie fermée B. Notons d un entier compris entre 0 et n. La $d-$*ème variation de Vitushkin *du couple $(A,\, B)$ est l'intégrale sur la grassmannienne des sous-espaces affines de dimension $n-d$ de $\mathbb{R}^n$ du nombre de composantes connexes de $A\cap F$ disjointes de B. On la note $V_d^E(A,\, B)$ ou plus simplement $V_d(A,\, B)$.*

Exemple 1. — Le nombre $V_0(A, B)$ est le nombre de composantes connexes de A disjointes de B.

Exemple 2. — Le nombre $V_n(A, B)$ est le volume de
$$A\backslash B = \{a \in A \,|\, a \notin B\}.$$

4.9. Un lemme sur les composantes connexes

Soient un espace topologique séparé X, une partie $Y \subset X$ et un point $y \in Y$. Notons $C_X(y)$ et $C_Y(y)$ les composantes connexes respectives de y dans X et dans Y. En général, elles vérifient l'inclusion :
$$C_Y(y) \subset C_X(y).$$
L'autre inclusion est vérifiée sous certaines hypothèses.

Lemme 4.5. — *On suppose que la partie Y est compacte avec $C_Y(y) \subset \operatorname{Int} Y$. Alors les composantes $C_X(y)$ et $C_Y(y)$ coïncident.*

Démonstration. — Comme Y est compacte, la composante connexe $C_Y(y)$ est l'intersection des parties à la fois fermées et ouvertes dans Y qui contiennent le point y. Écrivons :
$$C_Y(y) = \bigcap_i Z_i.$$
La frontière de Y étant compacte et disjointe de $C_Y(y)$, elle est disjointe d'une intersection finie $Z = Z_{i_1} \cap \cdots \cap Z_{i_k}$. Cette intersection Z est fermée dans le fermé Y donc dans X. Par ailleurs Z est ouverte dans Y et incluse dans l'intérieur de Y donc elle est ouverte dans X. Enfin Z contient le point y. De ces trois propriétés, on déduit que la composante $C_X(y)$ est incluse dans Z et, par transitivité de l'inclusion, dans Y. Comme $C_X(y)$ est connexe, on en déduit l'inclusion :
$$C_X(y) \subset C_Y(y)$$
et la proposition en découle car, comme nous l'avons dit, l'autre inclusion est évidente. □

4.10. Additivité des variations de Vitushkin

Proposition 4.6. — *Soient des boules fermées $B_i \subset E$ en nombre fini, d'intérieurs disjoints et une partie compacte A de E. Notons S_i les sphères bordant les B_i, et posons :*
$$B = E\backslash \bigcup_i \operatorname{Int} B_i.$$

Alors on a :
$$V_d(A,\, B) = \sum_i V_d(A \cap B_i,\, S_i)$$
pour tout entier d compris entre 0 et n.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $d = 0$. En effet, le cas général s'y ramène grâce à la formule suivante :
$$V_d^E(X,\, Y) = \int_{F \in \mathrm{AffGr}(n-d,\, E)} V_0^F(X \cap F,\, Y \cap F)\, dF$$
qui est une simple reformulation de la définition de $V_d^E(X,\, Y)$.

Toute composante connexe de A disjointe de B est incluse dans la réunion des boules ouvertes $\operatorname{int} B_i$ et donc, par connexité, dans l'une de ces boules. D'après le lemme 4.5, les composantes connexes de A incluses dans la boule ouverte $\operatorname{int} B_i$ sont exactement les composantes connexes de $A \cap B_i$ incluses dans $\operatorname{int} B_i$. En les comptant, on obtient l'identité recherchée :
$$V_0(A,\, B) = \sum_i V_0(A \cap B_i,\, S_i). \qquad \square$$

4.11. Majoration des variations de Vitushkin dans le cas d'une hypersurface algébrique

Proposition 4.7. — *Notons B_E la boule unité fermée de l'espace euclidien E. Soit un entier d compris entre 0 et n. Il existe un polynôme $P_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour toute hypersurface algébrique A et toute partie fermée B de E, l'inégalité :*
$$V_d(A \cap B_E,\, B) \leqslant P_d(\deg A).$$

Démonstration. — Soit F un sous-espace affine. Notons $f(F)$ le nombre de composantes connexes de $A \cap B_E \cap F$. Il est majoré par une fonction polynomiale de $\deg A$. Pour une borne explicite, le lecteur consultera [6, p. 49].

Le support de f est inclus dans l'ensemble des sous-espaces qui intersectent la boule B_E et cet ensemble est un domaine de mesure finie. Donc l'intégrale de f est majorée par une fonction polynomiale de $\deg A$. $\square$

4.12. Hyperplans et intersections

Proposition 4.8. — *Soient A une partie compacte et B une partie fermée de l'espace euclidien E. On suppose A non incluse dans B et on suppose* *que le nombre $V_0(A,\, B)$ est nul. Notons ε et a un réel strictement positif et un point de A vérifiant :*

$$\forall\, b \in B \qquad d(a,\, b) \geqslant \varepsilon.$$

Notons $\mathcal{H}$ la partie de $\mathrm{Gr}(n-1,\, E)$ contenant les hyperplans affines H pour lesquels l'intersection $A \cap H$ contient un point a_H vérifiant :

$$d(a_H,\, a) \leqslant \varepsilon.$$

Alors la mesure de cet ensemble $\mathcal{H}$ vérifie la minoration suivante :

$$\mathrm{mes}(\mathcal{H}) \geqslant c_{1,n}\varepsilon,$$

la constante $c_{1,\,n}$ étant celle de la formule de Cauchy–Crofton.

Démonstration. — Notons A' l'ensemble des points x de A qui vérifient $d(a,\, x) \leqslant \varepsilon$ et notons S la sphère des points x de E qui vérifient $d(a,\, x) = \varepsilon$. L'hypothèse :

$$V_0(A,\, B) = 0$$

implique :

$$V_0(A',\, S) = 0$$

(cette implication est une conséquence du lemme 4.5). Il existe donc un point $b \in S$ appartenant à la même composante connexe de A' que le point a. Tout hyperplan séparant a et b rencontre A' et appartient donc à $\mathcal{H}$. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des hyperplans séparant a et b. Appliquons la formule de Cauchy–Crofton au segment $[a\ b]$:

$$\mathrm{mes}(\mathcal{K}) = c_{1,\,n} d(a,\, b) = c_{1,\,n}\varepsilon.$$

Alors, l'inclusion de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ permet de conclure. □

4.13. Changement d'espace euclidien

Proposition 4.9. — *Soient un espace euclidien E de dimension n, un sous-espace affine F de dimension k et un entier naturel $d \leqslant k$. Notons U l'ouvert de $\mathrm{AffGr}(n-d,\, E)$ formé des sous-espaces affines de direction transversale à celle de F.*

Alors toute fonction mesurable $\phi : \mathrm{AffGr}(k-d,\, F) \to [0,\, +\infty]$ vérifie la relation :

$$\int_{X \in \mathrm{AffGr}(k-d,\, F)} \phi(X)\, dX = c_{d,\,k,\,n} \int_U \phi(X \cap F)\, dX$$

où $c_{d,\,k,\,n}$ désigne une constante strictement positive ne dépendant que des dimensions.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que les deux membres de cette identité s'interprètent comme les intégrales de la fonction ϕ sur $\mathrm{AffGr}(k-d,\, F)$ par rapport à des mesures invariantes par les isométries affines de F et que deux telles mesures sont égales, à multiplication près par un réel. □

COROLLAIRE 4.10. — *Soient A une partie compacte et B une partie fermée du sous-espace affine F. Alors les $d-$èmes variations de Vitushkin de la paire $(A,\, B)$ dans E et dans F vérifient la relation suivante :*

$$V_d^F(A,\, B) = c_{d,\, k,\, n}\, V_d^E(A,\, B).$$

Démonstration. — Pour tout sous-espace affine X de E, notons $\phi(X)$ le nombre de composantes connexes de $A \cap X$ disjointes de B.

$$\begin{aligned} V_d^F(A,\, B) &= \int_{X \in \mathrm{AffGr}(k-d,\, F)} \phi(X)\, dX \\ &= c_{d,\, k,\, n} \int_{X \in U} \phi(X \cap F)\, dX \\ &= c_{d,\, k,\, n} \int_{X \in \mathrm{AffGr}(n-d,\, E)} \phi(X \cap F)\, dX \\ &= c_{d,\, k,\, n}\, V_d^E(A,\, B) \end{aligned}$$

La deuxième identité est une application de la proposition et la troisième identité découle du fait que la mesure du complémentaire de U dans $\mathrm{AffGr}(n-d,\, E)$ est nulle. □

4.14. Une application du théorème de Fubini

PROPOSITION 4.11. — *Soient deux entiers naturels k_1 et k_2 avec $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dim E$. Alors toute fonction mesurable $\phi : \mathrm{AffGr}(k_1,\, E) \to [0,\, +\infty]$ vérifie la relation suivante :*

$$\int_{F_1 \in \mathrm{AffGr}(k_1,\, E)} \phi(F_1)\, dF_1 = \int_{F_2 \in \mathrm{AffGr}(k_2,\, E)} \left(\int_{F_1 \in \mathrm{AffGr}(k_1,\, F_2)} \phi(F_1)\, dF_1 \right) dF_2.$$

Démonstration. — Commençons par indiquer une formule analogue pour les grassmanniennes linéaires. Toute fonction mesurable $\phi : \mathrm{Gr}(k_1,\, E) \to [0,\, +\infty]$ vérifie :

$$\int_{F_1 \in \mathrm{Gr}(k_1,\, E)} \phi(F_1)\, dF_1 = \int_{F_2 \in \mathrm{Gr}(k_2,\, E)} \left(\int_{F_1 \in \mathrm{Gr}(k_1,\, F_2)} \phi(F_1)\, dF_1 \right) dF_2.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que les deux membres de cette identité s'interprètent comme les intégrales de la fonction ϕ sur $\mathrm{Gr}(k_1,\, E)$ par rapport à des mesures et que ces mesures sont égales par unicité sur $\mathrm{Gr}(k_1,\, E)$ de la mesure normalisée invariante par isométries linéaires.

Passons au cas affine. Une fonction mesurable $\phi : \mathrm{AffGr}(k_1,\, E) \to [0, +\infty]$ vérifie :

$$\begin{aligned}
&\int_{F_1 \in \mathrm{AffGr}(k_1,\, E)} \phi(F_1)\, dF_1 \\
&= \int_{F_1 \in \mathrm{Gr}(k_1,\, E)} \left(\int_{p_1 \in F_1^{\perp}} \phi(p_1 + F_1)\, dp_1 \right) dF_1 \\
&= \int_{F_2 \in \mathrm{Gr}(k_2,\, E)} \left(\int_{F_1 \in \mathrm{Gr}(k_1,\, F_2)} \left(\int_{p_1 \in F_1^{\perp}} \phi(p_1 + F_1)\, dp_1 \right) dF_1 \right) dF_2 \\
&= \int_{F_2 \in \mathrm{Gr}(k_2,\, E)} \Bigg(\int_{F_1 \in \mathrm{Gr}(k_1,\, F_2)} \\
&\qquad \left(\int_{(p_1,\, p_2) \in (F_1^{\perp} \cap F_2) \oplus F_2^{\perp}} \phi(p_1 + p_2 + F_1)\, dp_1\, dp_2 \right) dF_1 \Bigg) dF_2 \\
&= \int_{F_2 \in \mathrm{Gr}(k_2,\, E)} \left(\int_{p_2 \in F_2^{\perp}} \left(\int_{F_1 \in \mathrm{AffGr}(k_1,\, F_2)} \phi(p_2 + F_1)\, dF_1 \right) dp_2 \right) dF_2 \\
&= \int_{F_2 \in \mathrm{AffGr}(k_2,\, E)} \left(\int_{F_1 \in \mathrm{AffGr}(k_1,\, F_2)} \phi(F_1)\, dF_1 \right) dF_2.
\end{aligned}$$

La dernière identité découle du fait que la translation de vecteur p_2 induit un isomorphisme d'espaces mesurés entre $\mathrm{AffGr}(k_1,\, F_2)$ et $\mathrm{AffGr}(k_1,\, p_2 + F_2)$. La proposition est démontrée. □

Corollaire 4.12. — *Soient A une partie compacte et B une partie fermée de E et soient k et d deux entiers naturels vérifiant $0 \leqslant n-k \leqslant d \leqslant n$. Alors :*

$$V_d^E(A,\, B) = \int_{F \in \mathrm{AffGr}(k,\, E)} V_{d+k-n}^F(A \cap F,\, B \cap F)\, dF.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème pour $k_1 = n-d$, pour $k_2 = k$ et pour la fonction ϕ qui associe à un sous-espace affine X de E de dimension $n-d$ le nombre de composantes connexes de $A \cap X$ disjointes de B. □

4.15. Minoration de la somme des variations de Vitushkin

Enonçons le théorème principal de cette théorie.

Théorème 4.13. — *Soient A une partie compacte et B une partie fermée de l'espace euclidien E. On suppose A non incluse dans B. Notons ε un réel strictement positif vérifiant :*

$$\exists\, a \in A \quad \forall\, b \in B \qquad d(a,\, b) \geqslant \varepsilon.$$

Alors la minoration suivante est vérifiée :

$$\sum_{d=0}^{n} \varepsilon^{-d}\, V_d^E(A,\, B) \geqslant \alpha_n$$

où α_n désigne un réel strictement positif ne dépendant que de la dimension n de l'espace E.

Démonstration par récurrence. — En dimension 0, c'est clair. Supposons le théorème démontré en dimension $n-1$.

Par hypothèse, nous pouvons choisir un point $a \in A$ vérifiant :

$$\forall\, b \in B \qquad d(a,\, b) \geqslant \varepsilon.$$

Nous allons distinguer deux cas selon que $V_0^E(A,\, B)$ est nul ou non. Il est clair que, si nous obtenons dans chacun des deux cas une inégalité du type recherché (avec des réels strictement positifs respectifs α'_n et α''_n), le théorème sera démontré (il suffira de poser $\alpha_n = \min\{\alpha'_n,\, \alpha''_n\}$).

Le cas $V_0^E(A,\, B) \neq 0$ est très facile. Comme $V_0^E(A,\, B)$ est un entier strictement positif, on peut écrire :

$$1 \leqslant V_0^E(A,\, B) \leqslant \sum_{d=0}^{n} \varepsilon^{-d}\, V_d^E(A,\, B)$$

et le réel $\alpha'_n = 1$ convient.

Désormais, on suppose $V_0^E(A,\, B)$ nul. Comme précédemment, nous noterons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans affines H pour lesquels l'intersection $A \cap H$ contient un point a_H vérifiant :

$$d(a_H,\, a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire :

$$\forall\, b \in B \qquad d(a_H,\, b) \geqslant d(a,\, b) - d(a_H,\, a) \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence (dans l'hyperplan H) et le corollaire 4.10 :

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1} &\leqslant \sum_{d=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-d} V_d^H(A\cap H,\, B\cap H)\\ &= \sum_{d=0}^{n-1} c_{d,\,n-1,\,n} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-d} V_d^E(A\cap H,\, B\cap H).\end{aligned}$$

En intégrant sur $\mathcal{H}$ et en appliquant la proposition 4.8 et le corollaire 4.11, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n-1}c_{1,\,n}\varepsilon}{2} &\leqslant \sum_{d=0}^{n-1} c_{d,\,n-1,\,n} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-d} \int_{H\in\mathcal{H}} V_d^E(A\cap H,\, B\cap H)\, dH\\ &\leqslant \sum_{d=0}^{n-1} c_{d,\,n-1,\,n} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-d} V_{d+1}^E(A,\, B).\end{aligned}$$

On obtient bien une inégalité du type :

$$\alpha_n'' \leqslant \sum_{d=1}^{n} \varepsilon^{-d}\, V_d^E(A,\, B)$$

avec $\alpha_n'' > 0$. Comme nous l'avons dit, cela suffit à démontrer le théorème. □

4.16. Le cas d'un ensemble de mesure nulle

PROPOSITION 4.14. — *Soient A une partie fermée de l'espace euclidien E et B_r une boule fermée de E, de rayon r compris entre 0 et 1 et centrée en un point de A. Notons S_r la sphère bordant B_r. On suppose A de volume nul.*

Alors la minoration suivante est vérifiée :

$$\alpha_n r^{n-1} \leqslant \sum_{d=0}^{n-1} V_d(A\cap B_r,\, S_r)$$

où α_n désigne un réel strictement positif ne dépendant que de la dimension n de l'espace E

Démonstration. — Le théorème 4.13 donne :

$$\alpha_n \leqslant \sum_{d=0}^{n} r^{-d} V_d(A\cap B_r,\, S_r).$$

Le dernier terme est nul car le volume de A est supposé nul. Pour les autres termes, l'inégalité $r^{n-1} \leqslant r^d$ permet de conclure. $\square$

4.17. Démonstration du théorème 4.2

Pour tout point x de F, notons B_x la boule fermée de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrée en x et notons S_x la sphère bordant B_x. Comme la partie F est $\varepsilon-$espacée, les intérieurs des boules B_x seront disjoints. Partitionnons l'ensemble F en deux sous-ensembles F' et F'' définis respectivement par les inégalités $\|x\| \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $1 - \frac{\varepsilon}{2} < \|x\|$.

La proposition 4.6 implique :

$$V_d(A \cap B_E,\, B) = \sum_{x \in F'} V_d\left(A \cap B_x,\, S_x\right)$$

où B désigne le complémentaire de la réunion des intérieurs des B_x, $x \in F'$. La proposition 4.7 donne :

$$V_d(A \cap B_E,\, B) \leqslant P_d(\deg A).$$

Et la proposition 4.14 donne :

$$\alpha_n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} \leqslant \sum_{d=0}^{n-1} V_d(A \cap B_x,\, S_x).$$

En assemblant ces trois résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} \operatorname{Card} F' \leqslant \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{x \in F'} V_d(A \cap B_x,\, S_x) = \sum_{d=0}^{n-1} V_d(A \cap B_E,\, B) \\ \leqslant \sum_{d=0}^{n-1} P_d(\deg A).\end{aligned}$$

donc Card F' est majoré par $\varepsilon^{1-n} P(\deg A)$ où P désigne un polynôme.

Par ailleurs le cardinal de F'' est facile à majorer. En effet F'' est une partie $\varepsilon-$espacée et les boules B_x centrées en les points x de F'' sont incluses dans la couronne définie par l'encadrement $1-\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}$. Comme le volume de cette couronne est majoré par une fonction linéaire de ε et que les volumes des boules sont en ε^n, le cardinal de F'' est majoré par une fonction linéaire de ε^{1-n} indépendante de A.

Le cardinal de $F = F' \cup F''$ est donc majoré et le théorème 4.2 est démontré.

5. Hypersurface de Bertini proche des images des points ε−critiques

5.1.

Soit une application polynomiale $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et un $\varepsilon > 0$. Un point de $\mathbb{R}^m$ est dit ε−critque si le module de surjectivité de la différentielle de F en ce point est majoré par ε.

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.1. — *Il existe une hypersurface $H \subset \mathbb{R}^n$, définie par un polynôme non nul $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré $\leqslant P(D)$ telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^m$, ε−critique de norme $\leqslant 1$, il existe un point de H qui est $\varepsilon P(D)$−proche de $F(X)$.*

Convention. — *Dans tout ce chapitre, on note D un majorant du degré des données et $P(D)$ un polynôme en D (les dimensions étant fixées), qui peut varier d'un énoncé à l'autre.*

L'article [3] contient un résultat analogue (pour les applications polynomiales complexes) et en donne une démonstration que nous allons suivre.

5.2.

Nous allons énoncer une généralisation du théorème précédent. En effet, afin de démontrer le théorème 5.1 par récurrence sur la dimension n de l'espace d'arrivée de F, il est utile de lui ajouter des paramètres et des contraintes.

Désormais, les données seront donc deux applications polynomiales $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et un réel $\varepsilon > 0$. Si n est égal à 1, la fonction F sera notée f. Les indéterminées de $F(X, T)$ (qui sont aussi celles de $G(X, T)$) se séparent en deux familles que nous appelerons les variables X et les paramètres T. Voici le théorème généralisé dont la démonstration par récurrence occupera toute la suite de ce chapitre :

Théorème 5.2 (Théorème généralisé). — *Il existe une hypersurface $H \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, définie par un polynôme non nul $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de degré $\leqslant P(D)$ telle que pour tout paramètre $T \in \mathbb{R}^p$, si X désigne un point de $\mathbb{R}^m$ de norme $\leqslant 1$ en lequel :*

(1) *$G(\cdot\,, T)$ s'annule transversalement,*

(2) *le module de surjectivité du gradient de la restriction de* $F(\,\cdot\,, T)$ *au lieu d'annulation de* $G(\,\cdot\,, T)$ *est majoré par* ε,

alors il existe un point $Y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon P(D)-$*proche de* $F(X, T)$ *tel que* (Y, T) *appartienne à* H.

5.3. Générique implique général

Affirmation. — *Il suffit de prouver le théorème 5.2 pour presque tous* F, G, ε *et* T *(pour un* n *donné).*

Remarque. — Presque tout F *(ou* G*)* signifie *presque tout* F *(resp.* G*) parmi les applications polynomiales de degré* $\leqslant D$.

Démonstration de l'affirmation. — Soient des données F, G, X, T et ε satisfaisant les hypothèses du théorème. Donnons-nous une suite (F_n, G_n, T_n) qui converge vers (F, G, T) et une suite (ε_n) qui converge vers 2ε telles le théorème soit vérifié pour les données $(F_n, G_n, \varepsilon_n, T_n)$ sur une boule concentrique de rayon 2, disons. Alors, le théorème fournit une hypersurface H_n définie par un polynôme h_n non nul de degré majoré par $P(D)$. Comme le degré est majoré, on peut (quitte à extraire) supposer que la suite (h_n) converge projectivement vers un polynôme h non nul de degré majoré par $P(D)$. Notons H l'hypersurface définie par h.

Une annulation transversale est nécessairement stable. Il existera donc une suite (X_n) convergeant vers X telle que, pour tout n assez grand, l'application G_n s'annule au point (X_n, T_n). Notons Y_n un point de $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon_n P(D)-$proche de $F_n(X_n, T_n)$ tel que (Y_n, T_n) appartienne à H_n. La suite (Y_n) est bornée et donc, quitte à extraire, elle converge. Sa limite Y est $2\varepsilon P(D)-$proche de $F(X, T)$ et le point (Y, T) appartient à H. □

5.4.

Pour initialiser la récurrence, on suppose n égal à 1.

On veut travailler sur le lieu défini par $G = 0$. Quand est-il lisse ? Un paramètre T sera dit $G-$*régulier* si l'application $G(\,\cdot\,, T)$ s'annule transversalement. Nous noterons alors A la sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$ définie par $G = 0$.

Le lemme de Sard assure que presque toute application polynomiale s'annule transversalement. On a donc le résultat suivant.

Proposition 5.3. — *Quel que soit le paramètre* T, *pour presque tout* G *(parmi les applications polynomiales de degré* $\leqslant D$*), ce paramètre est* $G-$*régulier.*

5.5.

Posons :

$$D_1(X,\,T) = \det\left(\frac{\partial G}{\partial X}(X,\,T) \circ \frac{{}^t\partial G}{\partial X}(X,\,T)\right).$$

Les points d'annulation $(X,\,T)$ de D_1 sont ceux où la différentielle partielle $\frac{\partial G}{\partial X}(X,\,T)$ n'est pas surjective.

Posons :

$$\begin{aligned} D_2(X,\,T) &= \det\left(\frac{\partial(f,\,G)}{\partial X}(X,\,T) \circ \frac{{}^t\partial(f,\,G)}{\partial X}(X,\,T)\right) \\ g_\varepsilon(X,\,T) &= D_2(X,\,T) - \varepsilon^2 D_1(X,\,T) \end{aligned}$$

L'intérêt de cette fonction g_ε est de repérer des points $\varepsilon-$critiques. En effet, un point X de A est un point $\varepsilon-$critique de f_A si et seulement s'il vérifie :

$$g_\varepsilon(X,T) \leqslant 0.$$

Les deux types de points d'annulation $(X,\,T)$ de g_ε sont :

(1) Les points où la différentielle partielle $\frac{\partial G}{\partial X}(X,\,T)$ n'est pas surjective.

(2) Parmi les points où cette différentielle partielle est surjective (et en lesquels la fibre de $G(\,\cdot\,,\,T)$ est donc lisse), ceux en lequels la norme du gradient de la restriction de f à la fibre de $G(\,\cdot\,,\,T)$ vaut ε.

Posons :

$$\overline{G}_\varepsilon(X,\,T) = (g_\varepsilon(X,\,T),\,G(X,\,T)).$$

Un paramètre T sera dit $\overline{G}_\varepsilon-$*régulier* si l'application $\overline{G}_\varepsilon(\,\cdot\,,\,T)$ s'annule transversalement. Nous noterons alors $\overline{A}_\varepsilon$ la sous-variété de $\mathbb{R}^m$ définie par $\overline{G}_\varepsilon = 0$.

Proposition 5.4. — *Quel que soit le paramètre T, pour presque tous G, f et ε, ce paramètre est $\overline{G}_\varepsilon-$régulier.*

Démonstration. — Soient G s'annulant transversalement et f quelconque. Il suffit de prendre ε égal à une valeur régulière > 0 de la fonction qui associe à tout point de la sous-variété A la norme du gradient en ce point de la restriction de f à A. D'après le théorème de Sard, presque tout ε convient. □

5.6. La fonction de Morse $\| \cdot \|^2$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^m$, on pose $\eta(X) = \|X\|^2$. Un paramètre $G-$régulier sera dit $(G, \eta)-$*régulier* si la restriction de la fonction η à la sous-variété A est une fonction de Morse. De même, un paramètre $\overline{G}_\varepsilon-$régulier sera dit $(\overline{G}_\varepsilon, \eta)-$*régulier* si la restriction de la fonction η à la sous-variété $\overline{A}_\varepsilon$ est une fonction de Morse.

Proposition 5.5. — *Quel que soit le paramètre T, pour presque tout G, ce paramètre est $(G, \eta)-$régulier.*

Démonstration. — Le paramètre T est supposé fixé. Notons $\mathcal{P}(G)$ la propriété à démontrer. Supposons G choisie de telle sorte que T soit $G-$régulier. Étant donné $C \in \mathbb{R}^m$, on posera $G_C(X, T) = G(X + C, T)$.

Il est bien connu qu'étant donnée une sous-variété d'un espace euclidien, la fonction « carré de la distance » à un point générique de l'espace est une fonction de Morse sur la sous-variété. Autrement dit, pour presque tout $C \in \mathbb{R}^m$, la propriété $\mathcal{P}(G_C)$ est vraie. D'après le théorème de Fubini, $\mathcal{P}(G_C)$ est donc vraie pour presque tout couple (G, C) (où G décrit l'espace des applications polynomiales de degré $\leqslant D$).

Remarquons que l'image réciproque d'un ensemble de mesure non nulle par la surjection $(G, C) \mapsto G_C$ est un ensemble de mesure non nulle. Donc la propriété $\mathcal{P}(G)$ est vraie pour presque tout G. Le résultat est démontré. □

Proposition 5.6. — *Quel que soit le paramètre T, pour presque tous G, f et ε, ce paramètre est $(\overline{G}_\varepsilon, \eta)-$régulier.*

Démonstration. — C'est presque pareil que la preuve précédente. On note $\mathcal{P}(G, f, \varepsilon)$ la propriété à démontrer. On pose $G_C(X, T) = G(X + C, T)$ et $f_C(X, T) = f(X + C, T)$. Etc. □

5.7.

Le théorème de Fubini permet bien sûr de déduire des deux résultats précédents que pour presque tout G, presque tout paramètre T est $(G, \eta)-$régulier et que pour presque tous G, f et ε, presque tout paramètre T est $(\overline{G}_\varepsilon, \eta)-$régulier.

5.8.

Faisons un peu de théorie classique de l'élimination. Il est évident que l'image d'un ensemble fini est un ensemble fini. La version à paramètres est un peu moins évidente. En voici l'énoncé :

Proposition 5.7. — *Soit une application polynomiale $K : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Alors il existe une hypersurface $H \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ définie par un polynôme non nul $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de degré $\leqslant P(D)$ telle que, pour tout point (X, T) en lequel $K(X, T)$ est nul et $\frac{\partial K}{\partial X}(X, T)$ est bijective, le point $(f(X, T), T)$ appartienne à H.*

Démonstration. — Comme le nombre de composantes des applications polynomiales K, f et T est strictement supérieur au nombre des indéterminées X, T, il existe une relation algébrique :

$$h_1(K, f, T) = 0$$

avec h_1 polynôme non nul de degré $\leqslant P(D)$. Les $m+1+p$ indéterminées de h_1 seront notées U, V et T. On peut mettre h_1 sous la forme :

$$h_1(U, V, T) = \sum_\beta U^\beta h_\beta(V, T).$$

où $\beta \in \mathbb{N}^m$ décrit un ensemble (non vide) d'exposants et où les $h_\beta(V, T)$ sont des polynômes non nuls. Notons α le plus petit des β pour l'ordre lexicographique et vérifions que le polynôme $h = h_\alpha$ convient.

Soit (X_0, T_0) un point pour lequel $K(X_0, T_0)$ est nul et $\frac{\partial K}{\partial X}(X_0, T_0)$ est bijective. Posons :

$$U = K(X, T).$$

Alors, d'après le théorème d'inversion locale, les U et les T forment un système local de coordonnées et les X sont des fonctions analytiques des U et des T.

$$X = \varphi(U, T)$$

Alors on peut écrire :

$$0 = h_1(U, f(\varphi(U, T), T), T) = \sum_\beta U^\beta h_\beta(f(\varphi(U, T), T), T).$$

On simplifie par le facteur $U_1^{\beta_1}$ et on spécifie $U_1 = 0$ puis on simplifie par le facteur $U_2^{\beta_2}$ et on spécifie $U_2 = 0$ et ainsi de suite. Cela démontre la relation :

$$0 = h_\alpha(f(\varphi(0, T), T), T).$$

Enfin on spécifie $T = T_0$ pour obtenir :

$$0 = h_\alpha(f(X_0, T_0), T_0).$$

Le résultat est démontré. □

5.9. Elimination et valeurs critiques d'une fonction de Morse

PROPOSITION 5.8. — *Soit un polynôme* $\eta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. *Il existe une hypersurface* $H \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ *définie par un polynôme non nul* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *de degré* $\leqslant P(D)$ *telle que, pour tout paramètre* G−*régulier* T *et tout point critique* X *de Morse de la restriction de* $\eta(\,\cdot\,, T)$ *à* A*, le point* $(f(X, T), T)$ *appartienne à* H.

Démonstration. — Notons I un q−uplet vérifiant $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant m$. Travaillons sur l'ouvert U_I où la différentielle partielle $\frac{\partial G}{\partial X_I}(X, T)$ est bijective. Notons J le complémentaire de I.

Afin d'appliquer la proposition 5.7, choisissons l'application K égale à :

$$\left(G, \frac{\partial \eta}{\partial X_J} - \frac{\partial \eta}{\partial X_I} \circ \left(\frac{\partial G}{\partial X_I}\right)^{-1} \circ \frac{\partial G}{\partial X_J}\right).$$

Alors on obtient un polynôme h_I qui convient sur l'ouvert U_I. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels ouverts (et que ce nombre ne dépend que des dimensions), il suffit de prendre le produit h des h_I et le résultat est démontré. □

Remarque. — Le résultat reste évidemment vrai si on remplace G par $\overline{G}_\varepsilon$ et A par $\overline{A}_\varepsilon$.

5.10.

Les données G, f, ε et un paramètre G−régulier T étant fixées, on notera $\mathrm{Crit}_\varepsilon$ l'ensemble des points ε−critiques de la restriction de f à A, de norme $\leqslant 1$. Comme on l'a remarqué au paragraphe 5.5 :

$$\mathrm{Crit}_\varepsilon = \{X \in A\,;\; g_\varepsilon(X, T) \leqslant 0 \text{ et } \|X\| \leqslant 1\}.$$

PROPOSITION 5.9. — *Pour presque tous* f, G *et* ε, *il existe une hypersurface* $H \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ *définie par un polynôme non nul* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *de degré* $\leqslant P(D)$ *telle que, pour presque tout paramètre* G−*régulier* T, *dans toute composante connexe de* $\mathit{Crit}_\varepsilon$ *il se trouve (au moins) un point* X *tel que l'image* $f(X, T)$ *appartienne à* H.

Démonstration. — On choisit f, G et ε de telle sorte que presque tout paramètre T soit à la fois (G, η)−régulier et $(\overline{G}_\varepsilon, \eta)$−régulier.

Notons C une composante connexe de $\mathrm{Crit}_\varepsilon$. Par compacité de C, la restriction à C de la fonction $\eta = \|\cdot\|^2$ atteint son minimum en un point X. Distinguons deux cas.

1er cas : $X \in A \backslash \overline{A}_\varepsilon$. Alors le point X est un minimum local de la restriction à A de la fonction de Morse η. Par élimination, l'image $f(X, T)$ appartient à une hypersurface H_1.

2nd cas : $X \in \overline{A}_\varepsilon$. Alors le point X est un minimum local de la restriction à $\overline{A}_\varepsilon$ de la fonction de Morse η. Par élimination, l'image $f(X, T)$ appartient à une hypersurface H_2.

On conclut en prenant H égale à la réunion $H_1 \cup H_2$. □

5.11. Démonstration du théorème 5.2 dans le cas $n = 1$

Notons H l'hypersurface donnée par le résultat précédent qui assure que pour presque tout paramètre $G-$régulier T, dans toute composante C de $\mathrm{Crit}_\varepsilon$, il existe un $X \in C$ tel que $f(X, T)$ appartienne à H. Il suffit donc de prouver que, pour tout $X' \in C$, on a $|f(X', T) - f(X, T)| < \varepsilon P(D)$. C'est alors l'inégalité des accroissements finis qui permet de conclure. En effet, d'une part, la norme du gradient de la restriction de f à A est $\leqslant \varepsilon$ sur $\mathrm{Crit}_\varepsilon$ et d'autre part le diamètre par arcs d'une composante connexe C de $\mathrm{Crit}_\varepsilon$ est $\leqslant P(D)$ d'après le lemme 28 énoncé dans [3] (variante de la proposition 29 de [2]).

Le cas $n = 1$ de la récurrence est donc démontré, *a priori* pour presque tous f, G, ε et T mais, comme nous l'avons remarqué (cf. paragraphe 5.3), ça implique qu'il est vrai pour *tous* f, G, ε et T.

5.12.

Il reste bien sûr à démontrer l'hérédité. On suppose $n \geqslant 2$ et on note $f_1, \ldots, f_n$ les composantes de l'application F.

Notation. — Étant donnés un paramètre T et un point X d'annulation transversale de $G(\,\cdot\,, T)$, on notera $L(X, T)$ la différentielle en X de la restriction de $F(\,\cdot\,, T)$ au lieu d'annulation de $G(\,\cdot\,, T)$. On notera $l_i(X, T)$ la $i-$ème composante de $L(X, T)$, c'est-à-dire la différentielle en X de la restriction de $f_i(\,\cdot\,, T)$ au lieu d'annulation de $G(\,\cdot\,, T)$.

Proposition 5.10. — *Il existe une hypersurface $H_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, définie par un polynôme non nul $h_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de degré $\leqslant P(D)$ telle que pour tout paramètre $T \in \mathbb{R}^p$, si $X \in \mathbb{R}^m$ désigne un point d'annulation transversale de $G(\,\cdot\,, T)$ vérifiant $l_i(X, T) \leqslant \varepsilon$ pour (au moins) un i compris entre* 1 *et n, alors il existe un point $Y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon P(D)-$proche de $F(X, T)$ tel que (Y, T) appartienne à H_0.*

Démonstration. — Pour chaque i, on applique le cas $n = 1$ du théorème à f_i. On obtient donc une hypersurface de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. Son image réciproque dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par la projection $(Y, T) \mapsto (Y_i, T)$ est une hypersurface $H_{0,i}$. Alors la réunion, quand i varie entre 1 et n, de ces hypersurfaces $H_{0,i}$ convient. □

5.13. Utilisation de l'hypothèse de récurrence

On note $F^{(i)} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-1}$ l'application obtenue à partir de F en gardant toutes les composantes sauf la i−ème. En un point X d'annulation transversale de $G(\,\cdot\,, T)$, on note $L^{(i)}(X, T)$ la restriction de $\frac{\partial F^{(i)}}{\partial X}(X, T)$ à $\ker \frac{\partial G}{\partial X}(X, T)$. Un point X d'annulation transversale de $G(\,\cdot\,, T)$ sera dit (G, i)−régulier si $l_i(X, T)$ n'est pas nul. Si X est (G, i)−régulier, on note $\overline{L}^{(i)}(X, T)$ la restriction de $L^{(i)}(X, T)$ à $\ker l_i(X, T)$.

Proposition 5.11. — *Il existe une hypersurface $H_i \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, définie par un polynôme non nul $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de degré $\leqslant P(D)$ telle que pour tout paramètre $T \in \mathbb{R}^p$, si $X \in \mathbb{R}^m$ désigne un point (G, i)−régulier en lequel le module de surjectivité de $\overline{L}^{(i)}(X, T)$ est majoré par ε, alors il existe un point $Y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon P(D)$−proche de $F(X, T)$ tel que (Y, T) appartienne à H_i.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème au rang $n - 1$ aux données suivantes :

(1) On prend m variables. Ce sont les X.

(2) On prend $p + 1$ paramètres. Ce sont les T mais aussi une nouvelle indéterminée que nous noterons Y_i.

(3) On prend $q + 1$ contraintes. Ce sont les composantes de $G(X, T)$ mais aussi $f_i(X, T) - Y_i$.

(4) On prend comme application $F^{(i)}$ dont l'espace d'arrivée est bien de dimension $n - 1$.

Alors on obtient, dans l'espace $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{p+1}$ identitfié à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, une hypersurface H_i qui convient. □

5.14.

Les deux résultats précédents fournissent, pour l'un, une hypersurface H_0 et, pour l'autre, n hypersurfaces H_i. Notons H la réunion de ces $n + 1$ hypersurfaces. Nous allons voir que cette hypersurface convient et le théorème sera donc démontré.

5.15.

Faisons peu d'algèbre linéaire. On rappelle que MS désigne le *module de surjectivité.*

Lemme 5.12. — *Soit une application linéaire u entre deux espaces euclidiens E et F. On suppose que F est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces F_1 et F_2. Notons u_1 et u_2 les deux composantes de u et notons $(u_2)_{\ker u_1}$ la restriction de u_2 à $\ker u_1$.*

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathrm{MS}(u_1)\,\mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1} \leqslant \mathrm{MS}(u)\,(\mathrm{MS}(u_1) + \mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1} + \|u_2\|)\,.$$

Remarque. — Ce lemme peut être regardé comme une version quantitative du fait que si u_1 et $(u_2)_{\ker u_1}$ sont surjectives, u le sera aussi.

Démonstration du lemme. — Soit une forme linéaire $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in F^* = F_1^* \oplus F_2^*$. La relation :

$$\lambda \circ u = \lambda_1 \circ u_1 + \lambda_2 \circ u_2$$

implique, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\|\lambda_1\|\,\mathrm{MS}(u_1) &\leqslant \|\lambda_1 \circ u_1\|\\ &\leqslant \|\lambda \circ u\| + \|\lambda_2\|\|u_2\|.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda_2\|\,\mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1} &\leqslant \|(\lambda_2 \circ u_2)_{\ker u_1}\|\\ &= \|(\lambda \circ u)_{\ker u_1}\|\\ &\leqslant \|\lambda \circ u\|.\end{aligned}$$

Appliquons à nouveau l'inégalité triangulaire :

$$\|\lambda\| \leqslant \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|.$$

Rassemblons les trois inégalités précédentes :

$$\begin{aligned}&\|\lambda\|\,\mathrm{MS}(u_1)\,\mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1}\\ &\qquad\leqslant (\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|)\ \mathrm{MS}(u_1)\,\mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1}\\ &\qquad\leqslant (\|\lambda \circ u\| + \|\lambda_2\|\|u_2\| + \|\lambda_2\|\ \mathrm{MS}(u_1))\ \mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1}\\ &\qquad\leqslant \|\lambda \circ u\|\ (\mathrm{MS}(u_2)_{\ker u_1} + \|u_2\| + \mathrm{MS}(u_1))\end{aligned}$$

On conclut en appliquant cette inégalité à une forme λ de norme 1 réalisant le minimum de $\|\lambda \circ u\|$ (c'est-à-dire vérifiant : $\mathrm{MS}(u) = \|\lambda \circ u\|$). $\square$

Proposition 5.13. — *Soit X un point $(G,\, i)-$régulier. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}&\|l_i(X,\,T)\|\,\mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T))\\&\qquad\leqslant \mathrm{MS}(L(X,\,T))\left(\|l_i(X,\,T)\| + \mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T)) + \|L^{(i)}(X,\,T))\|\right).\end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme en remarquant que $l_i(X,\,T)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que son module de surjectivité est donc simplement égal à sa norme $\|l_i(X,\,T)\|$. □

5.16.

Revenons à la démonstration des théorèmes 5.1 et 5.2.

Soit X un point d'annulation transversale de $G(\,\cdot\,,\,T)$. Choisisssons un i compris entre 1 et n qui maximise la norme de $l_i(X,\,T)$. Alors l'identité de Pythagore implique :

$$\|L^{(i)}(X,\,T)\| \leqslant \sqrt{n-1}\;\|l_i(X,\,T)\|.$$

Notons $H(T)$ (resp. $H_0(T)$ et $H_i(T)$) l'ensemble des $Y \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels $(Y,\,T)$ appartient à H (resp. à H_0 et à H_i). On suppose que $F(X,\,T)$ n'est « pas trop proche » de $H(T)$ (en un sens que nous allons préciser). Alors $F(X,\,T)$ n'est « pas trop proche » de $H_0(T)$ et l'inégalité suivante est donc vérifiée :

$$\|l_i(X,\,T)\| \geqslant \varepsilon.$$

Notamment, le point X est $(G,\, i)-$régulier. De même, le point $F(X,\,T)$ n'est « pas trop proche » de $H_i(T)$ et l'inégalité suivante est donc vérifiée :

$$\mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T)) \geqslant \varepsilon.$$

Afin de s'assurer que toutes ces inégalité soient vraies, il suffit de choisir un polynôme P convenable et de dire que l'expression « $F(X,\,T)$ n'est pas trop proche de $H(T)$ » signifie qu'il n'est $\varepsilon P(D)-$proche d'aucun point de $H(T)$.

La proposition 5.13 permet d'écrire :

$$\begin{aligned}&\|l_i(X,\,T)\|\,\mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T))\\&\qquad\leqslant \mathrm{MS}(L(X,\,T))\left((1+\sqrt{n-1})\|l_i(X,\,T)\| + \mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T))\|\right).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{MS}(L(X,\,T)) &\geqslant (2+\sqrt{n-1})^{-1} \times \min\left\{\|l_i(X,\,T)\|,\, \mathrm{MS}(\overline{L}^{(i)}(X,\,T))\right\}\\&\geqslant (2+\sqrt{n-1})^{-1} \times \varepsilon.\end{aligned}$$

Bien sûr, on peut faire disparaître la constante $(2+\sqrt{n-1})^{-1}$ quitte à changer de polynôme $P(D)$.

Ouf ! Le théorème 5.2 est démontré ainsi que le théorème 5.1 qui en est un cas particulier.

6. Transversalité quantitative pour les applications polynomiales et holomorphes

6.1. Volume du voisinage d'une hypersurface

PROPOSITION 6.1. — *Soit une hypersurface H définie dans $\mathbb{R}^n$ par une fonction polynomiale non nulle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Notons B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et posons :*

$$V_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \exists\, y \in H \ \ \|x-y\| \leqslant \varepsilon\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Alors le volume de $B \cap V_\varepsilon$ est majoré par :

$$\varepsilon \times P(\deg f)$$

où $P(\deg f)$ désigne une fonction polynomiale du degré de f (la dimension n étant fixée).

Démonstration. — L'ensemble $B \cap V_\varepsilon$ est formé de deux types de points :

(1) Certains sont $\varepsilon-$proches du bord de B et leur volume est majoré par le produit d'ε et d'une constante (le volume $(n-1)-$dimensionnel de la sphère unité).

(2) Les autres sont $\varepsilon-$proches de $B \cap H$. Ils sont donc $2\varepsilon-$proches d'une $\varepsilon-$discrésitsation F. Le volume étudié est donc majoré par le produit du cardinal de F et du volume d'une boule de rayon 2ε. Le volume d'une telle boule est bien sûr de l'ordre de ε^n et, d'après la proposition 4.1, le cardinal d'une discrétisation admet une majoration du type : $\varepsilon^{1-n} \times P(\deg\, f)$. Cela donne la majoration recherchée. □

6.2. Point pas trop proche d'une hypersurface

PROPOSITION 6.2. — *Avec les mêmes notations, il existe un point de $\mathbb{R}^n$ de norme $\leqslant \varepsilon$ dont la distance à H soit supérieure à :*

$$\frac{\varepsilon}{P(\deg f)}$$

où P désigne une fonction polynomiale à valeurs strictement positives (la dimension n étant fixée).

Démonstration. — On se ramène par une homothétie au cas $\varepsilon = 1$. Ensuite d'après la proposition 6.1, le volume de l'ensemble V_η des points $\eta-$proches de H est majoré par $\eta \times P(\deg f)$ pour un certain polynôme P. Quitte à changer de polynôme P, si on prend η égal à $(P(\deg f))^{-1}$ le volume de V_η sera strictement inférieur à une constante donnée, par exemple égale au volume de la boule unité. Alors, par un argument évident de volume, la boule unité n'est pas incluse dans V_η. □

6.3. Transversalisation quantitative d'une application polynomiale

Proposition 6.3. — *Soit une application polynomiale f entre deux espaces euclidiens X et Y. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une « bonne » valeur régulière, c'est-à-dire un point $y \in Y$ de norme $\leqslant \varepsilon$ tel que, pour tout point $x \in X$ de norme $\leqslant 1$, le module de transversalité en x de l'application $f - y$ vérifie la minoration suivante :*

$$\mathrm{MT}(f-y,\, x) \geqslant \frac{\varepsilon}{P(\deg f)}$$

où $P(\deg f)$ désigne une fonction polynomiale de $\deg f$ (les dimensions de X et Y étant fixées).

Démonstration. — Notons H l'hypersurface fournie par le théorème 5.1. En appliquant la proposition 6.2 à H, on obtient un point y qui convient car il est $\varepsilon'-$distant de $f(x)$, pour tout point $\varepsilon'-$critique x de norme $\leqslant 1$, le réel ε' pouvant être choisi de telle sorte que le quotient $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ soit polynomial en le degré de H, lui-même polynomial en le degré de f. □

6.4. Un résultat élémentaire

Lemme 6.4. — *Soient deux réels C et $D > 0$ et une fonction polynomiale $M_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction polynomiale $M_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout réel $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0[$, il existe un entier $n \geqslant 0$ vérifiant :*

$$\frac{\varepsilon}{M_1(n)} - Ce^{-Dn} \geqslant \frac{\varepsilon}{M_2\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)}\,.$$

Démonstration. — Notons n le plus petit entier $\geqslant \frac{2}{D} \log \frac{1}{\varepsilon}$. Alors :

$$Ce^{-Dn} \leqslant C\varepsilon^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

pour ε assez petit. Par ailleurs, pour cette valeur de n :

$$2M_1(n) \leqslant M_2\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

avec un M_2 polynomial.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{M_2\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)} &\leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1(n)}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{M_1(n))} - Ce^{-Dn}\ .\end{aligned}$$

□

6.5. Transversalisation quantitative d'une application holomorphe

Théorème 6.5. — *Soient deux espaces vectoriels hermitiens X et Y, un sous $\mathbb{R}-$espace vectoriel $A \subset X$ et deux réels $0 < r < R$. Pour tout réel $s > 0$, on notera $B(s)$ la boule centrée en l'origine de X de rayon s. Soit une application holomorphe $f : B(R) \to Y$ vérifiant $\|f(x)\| \leqslant 1$ en tout point $x \in B(R)$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit, il existe une « bonne » valeur régulière, c'est-à-dire un point $y \in Y$ de norme $\leqslant \varepsilon$ tel que, pour tout point $x \in A \cap B(r)$, le module de transversalité en x de la restriction $(f - y)_A$ au sous-espace A de l'application $f - y$ vérifie la minoration suivante :

$$\mathrm{MT}((f-y)_A,\, x) \geqslant \frac{\varepsilon}{P\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

où $P(\log\frac{1}{\varepsilon})$ désigne une fonction polynomiale de $\log\frac{1}{\varepsilon}$ (les dimensions et les réels R et r étant fixés) et où l'expression « pour tout ε suffisament petit » signifie pour tout ε majoré par un certain réel > 0 ne dépendant que des dimensions et des réels R et r.

Démonstration. — Les polynômes de Taylor (p_n) de l'application holomorphe f convergent vers f sur la boule $B(r)$ à une vitesse exponentielle (voir [4] p 56). C'est notamment vrai en norme $\mathcal{C}^1$:

$$\|f - p_n\|_{\mathcal{C}^1(B(r))} \leqslant Ce^{-Dn}$$

pour des réels C et $D > 0$. Par ailleurs, la proposition (6.3) fournit un point $y \in Y$ de norme $\leqslant \varepsilon$, tel que le module de transversalité de la restriction de $p_n - y$ à $A \cap B(R)$ admette une minoration du type $\varepsilon \times (P(n))^{-1}$. Remarquons que le module de transversalité est évidemment $1-$lipschitzien pour la norme $\mathcal{C}^1$, on en déduit que celui de la restriction de $f - y$ est minoré par : $\varepsilon \times (P(n))^{-1} - Ce^{-Dn}$. Alors, le lemme 6.4 permet choisir une valeur convenable de n qui permette de conclure. □

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui se déduit du théorème précédent par un simple changement d'échelle :

Corollaire 6.6. — *On suppose donnés un entier $k \geqslant 1$ et une application holomorphe $f : B(k^{-\frac{1}{2}}R) \to Y$ vérifiant $\|f(x)\| \leqslant 1$ en tout point $x \in B(k^{-\frac{1}{2}}R)$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une « bonne » valeur régulière, c'est-à-dire un point $y \in Y$ de norme $\leqslant \varepsilon$ tel que, pour tout point $x \in A \cap B(k^{-\frac{1}{2}}r)$, le module de transversalité en x de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ de la restriction $(f - y)_A$ au sous-espace A de l'application $f - y$ vérifie la minoration suivante :

$$\mathrm{MT}\left((f-y)_A,\, x;\ 1,\, k^{-\frac{1}{2}}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{P\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

où la fonction polynomiale P et le majorant de ε (implicite dans l'expression « ε suffisament petit ») sont ceux du théorème.

Insistons notamment sur le fait qu'ils ne dépendent pas de l'entier k.

7. Construction de beaucoup de sections du fibré vectoriel $L^k \otimes \mathbb{C}^r$

7.1. Section concentrée près d'un point

Un fibré très positif (par exemple $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ pour k grand) admet des sections approximativement holomorphes concentrées. Cette idée se traduit par des estimées.

Pour tout point x_0 de la variété presque kählérienne X, on notera $L_{x_0}^{-1} \otimes L$ le fibré en droites hermitiennes dont la fibre au-dessus d'un point $x \in X$ est $L_{x_0}^{-1} \otimes L_x$.

Petite subtilité : la variété X n'est pas supposée compacte. Afin de pouvoir écrire des estimées uniformes en x_0, il nous faudra astreindre x_0 à rester dans une partie compacte. Pour cette raison, nous prendrons en fait x_0 dans la sous-variété Y qui, elle, est supposée compacte.

Le résultat principal de ce paragraphe est qu'il existe une section c_{x_0} de $L_{x_0}^{-1} \otimes L$ que l'on peut choisir de telle sorte que soient vérifiées les quatre estimées que nous allons bientôt énoncer. Nous ne donnerons pas d'énoncé plus formel : nous renvoyons à [1] et [2] pour la construction de cette section ainsi que pour la démonstration des quatre estimées que nous nous contenterons d'énoncer.

Les deux premières estimées portent sur les sections « concentrées », c'est-à-dire sur les puissances positives $c_{x_0}^k$ avec $k \geqslant 1$. La puissance $c_{x_0}^k$ est bien sûr une section du fibré $L_{x_0}^{-k} \otimes L^k$. Sur ce fibré, nous utiliserons la métrique et la connexion induites par celles de L.

La première estimée est :

$$\left\|(\nabla^m c_{x_0}^k)_x\right\| \leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P\left(k^{\frac{1}{2}} d(x_0,\, x)\right) \times \exp\left(-\frac{k\pi}{2} d^2(x_0,\, x)\right) \tag{7.1}$$

où x_0 désigne un point de Y, où x désigne un point de X, où l'ordre de dérivation m est un entier $\geqslant 0$ quelconque, où l'exposant k est un entier $\geqslant 1$ quelconque et où P désigne une fonction polynomiale qui dépend de la variété presque kählérienne X, de sa pré-quantification L, de la sous-variété Y et de l'ordre de dérivation m. Remarquons que P ne dépend ni de l'exposant k ni des points x_0 et x.

La seconde estimée est :

$$\left\|(\nabla^m \overline{\partial} c_{x_0}^k)_x\right\| \leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P\left(k^{\frac{1}{2}} d(x_0,\, x)\right) \times \exp\left(-\frac{k\pi}{2} d^2(x_0,\, x)\right) \tag{7.2}$$

avec les mêmes conventions.

La troisième et la quatrième estimée porteront sur les puissances négatives $c_{x_0}^{-k}$ avec $k \geqslant 1$. Bien sûr, ces puissances sont définies là où c_{x_0} ne s'annule pas.

La section c_{x_0} ne s'annule pas sur la boule $B(x_0,\, \alpha)$ pour un certain réel $\alpha > 0$ uniforme en x_0. En particulier, étant donné un réel $R > 0$, la section c_{x_0} ne s'annulera pas sur la boule $B(x_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$ si l'exposant k est assez grand. Ici, « assez grand » signifie que k est supérieur à une borne dépendant de X, L, Y et R.

La troisième et la quatrième estimée seront valables pour k assez grand (c'est-à-dire supérieur à une borne dépendant de X, L, Y et R) et pour x assez proche de x_0 (c'est-à-dire $x \in B(x_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$). Elles s'écrivent :

$$\|(\nabla^m c_{x_0}^{-k})_x\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}} \tag{7.3}$$

$$\|(\nabla^m \overline{\partial} c_{x_0}^{-k})_x\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}} \tag{7.4}$$

où C désigne un réel qui dépend de X, L, Y, m et R.

7.2. Taille d'une discrétisation.

Proposition 7.1. — *Soient une variété riemannienne X et une partie compacte Y de X. Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction polynomiale P vérifiant la propriété suivante :*

Soient deux réels $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0[$ *et* $C > 0$ *et une partie finie* F *de* Y *satisfaisant, pour tous* $x, y \in F$*, la condition d'espacement :* $d(x,y) \geqslant \varepsilon$*. Alors, pour tout* $x \in X$*, le cardinal de l'intersection* $F \cap B(x, C)$ *est majoré par* $P\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)$*.*

Démonstration. — Comme Y est compacte, il existe des réels strictement positifs α et R_1 tels que tout point $x_0 \in Y$ et tout réel $R \in \,]0, R_1]$ vérifient :

$$\operatorname{Vol} B(x_0, R) \geqslant \alpha R^d$$

où d désigne la dimension de X.

Nous appellerons rayon d'injectivité relatif, que nous noterons $R(X, Y)$, le minimum des rayons d'injectivité de X en les points de Y. Il est strictement positif par compacité de Y. Posons $R_2 = \frac{1}{2} R(X, Y)$ et :

$$V(Y, R_2) = \{x \in X;\ \exists\, y \in Y \ \ d(x,y) \leqslant R_2\}.$$

L'inégalité $R_2 < R(X, Y)$ implique que $V(Y, R_2)$ est compact. Il existe donc un réel strictement positif β tel que tout point $x \in X$ et tout réel $R > 0$ vérifient :

$$\operatorname{Vol}(B(x, R) \cap V(Y, R_2)) \leqslant \beta R^d.$$

Posons $\varepsilon_0 = 2 \min\{R_1, R_2\}$. Alors, tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ satisfait les deux conditions suivantes, valables pour tout $x_0 \in Y$:

$$\operatorname{Vol} B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \alpha \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^d$$

$$B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset V(Y, R_2).$$

Si le point x_0 appartient de plus à la boule $B(x, C)$ (pour un $x \in X$), l'inégalité triangulaire impliquera :

$$B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B\left(x, C + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap V(Y, R_2).$$

Enfin la condition d'espacement implique que les boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrées en deux points de F distincts seront disjointes, ce qui permet de conclure :

$$\sum_{x_0} \operatorname{Vol} B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \operatorname{Vol}\left(B\left(x, C + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap V(Y, R_2)\right)$$

où x_0 décrit $F \cap B(x, C)$. Si on note n le cardinal de $F \cap B(x, C)$, on aura donc :

$$n\, \alpha \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^d \leqslant \beta \left(C + \frac{\varepsilon}{2}\right)^d$$

Autrement dit :

$$n \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{2C}{\varepsilon} + 1\right)^d.$$

Le membre de droite de cette dernière inégalité est bien polynomial en $\frac{C}{\varepsilon}$. □

7.3. Un résultat élémentaire.

Lemme 7.2. — *Soient un réel $C > 0$ et un polynôme $M_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors il existe un polynôme $M_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout entier $N \geqslant 0$:*

$$\sum_{n \geqslant N} M_1(n) \times \exp(-Cn) = M_2(N) \times \exp(-CN).$$

Démonstration. — En associant à une suite $u = (u_n)_n$ la suite $\phi(u)$ définie par :

$$\phi(u)_n = u_n - u_{n+1},$$

on définit un endomorphisme ϕ de l'espace des suites de la forme suivante : $(M(n) \times \exp(-Cn))_n$ avec M polynôme de degré $\leqslant \deg M_1$. Comme ϕ est injectif (et que la dimension de l'espace est finie), ϕ sera surjectif. $\square$

7.4. Combinaisons linéaires de sections concentrées.

Retournons au contexte qui nous occupe : on suppose données une variété presque kählérienne X munie d'une pré-quantification L et une sous-variété compacte Y ainsi qu'un rang entier $r \geqslant 1$. Les sections c_{x_0} sont les mêmes que précédemment.

Proposition 7.3. — *Soit une partie finie F de Y satisfaisant, pour tous x, $y \in F$, la condition d'espacement : $d(x, y) \geqslant k^{-\frac{1}{2}}$ pour un certain entier $k \geqslant 1$. Supposons donné, pour tout point $x_0 \in F$, un élément $\alpha^{x_0} \in L^k_{x_0} \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant 1$. Notons s la section du fibré vectoriel $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ définie par :*

$$s = \sum_{x_0 \in F} \alpha^{x_0} c^k_{x_0}.$$

Pour tout $x \in X$, posons :

$$d(x, F) = \min_{y \in F} d(x, y).$$

Alors les deux majorations suivantes sont vérifiées :

$$\|(\nabla^m s)_x\| \leqslant C \times k^{\frac{m}{2}} \times \exp\left(-\frac{k\pi}{3} d^2(x, F)\right)$$

$$\left\|(\nabla^m \overline{\partial} s)_x\right\| \leqslant C \times k^{\frac{m}{2}} \times \exp\left(-\frac{k\pi}{3} d^2(x, F)\right)$$

où x désigne un point de X, où m désigne un entier $\geqslant 0$ et où C désigne un réel qui dépend de X, L, Y et m.

Démonstration. — Une partition de F est donnée par les sous-ensembles suivants :

$$F_n = \left\{ y \in F;\ \ n \leqslant kd^2(x, F) < n+1 \right\}$$

pour $n \geqslant \mathrm{Ent}(kd^2(x, F))$, où Ent désigne la partie entière.

$$\begin{aligned} \operatorname{card} F_n &\leqslant \operatorname{card} \left\{ y \in F;\ \ kd^2(x, F) < n+1 \right\} \\ &\leqslant P_1 \left(\frac{k^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n+1}}{k^{-\frac{1}{2}}} \right) = P_1(\sqrt{n+1}) \end{aligned}$$

où P_1 désigne le polynôme donné par la proposition 7.1.

Soient deux point $x_0 \in F$ et $x \in X$ qui vérifient : $\sqrt{n} \leqslant k^{\frac{1}{2}} d(x_0, x) < \sqrt{n+1}$. Renommons P_2 le polynôme P intervenant dans l'estimée (7.1). Sans perte de généralité, on peut supposer P_2 croissant. Alors :

$$P_2(k^{\frac{1}{2}} d(x_0, x)) \leqslant P_2(\sqrt{n+1})$$

et par ailleurs :

$$\exp\left(-\frac{k\pi}{2} d^2(x_0, x) \right) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right)$$

et donc, d'après l'estimée (7.1) :

$$\begin{aligned} \left\| \alpha^{x_0} (\nabla^m c^k_{x_0})_x \right\| &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times \|\alpha^{x_0}\| \times P_2(\sqrt{n+1}) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right) \\ &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P_2(\sqrt{n+1}) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{x_0 \in F_n} \left\| \alpha^{x_0} (\nabla^m c^k_{x_0})_x \right\| &\leqslant \operatorname{card} F_n \times k^{\frac{m}{2}} \times P_2(\sqrt{n+1}) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right) \\ &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P_1(\sqrt{n+1}) \times P_2(\sqrt{n+1}) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right) \\ &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P_3(n) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right) \end{aligned}$$

où P_3 désigne un polynôme.

$$\begin{aligned} \|(\nabla^m s)_x\| &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times \sum_{n \geqslant \mathrm{Ent}(kd^2(x, F))} P_3(n) \times \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \right) \\ &\leqslant k^{\frac{m}{2}} \times P_4 \left(\mathrm{Ent}(kd^2(x, F)) \right) \times \exp\left(-\frac{\pi}{2} \mathrm{Ent}(kd^2(x, F)) \right) \end{aligned}$$

où P_4 désigne le polynôme fourni par le lemme 7.2. Les croissances comparées de l'exponentielle et du polynôme permettent d'en déduire une majoration de $\|(\nabla^m s)_x\|$ du type recherché. La majoration de $\left\|(\nabla^m \overline{\partial} s)_x\right\|$ s'obtient de façon analogue. $\square$

8. Procédé de transversalisation de Donaldson

Ce dernier chapitre achève la démonstration du théorème de Donaldson–Auroux relatif en exposant le procédé de transversalisation de Donaldson. Là encore, le cas relatif est très semblable au cas absolu.

8.1. Lemme du $\overline{\partial}$ et changement d'échelle

Notons E et F deux espaces vectoriels hermitiens. Pour tout réel $s > 0$, on notera $B(s)$ la boule centrée en l'origine de E de rayon s.

Proposition 8.1. — *Soit une application holomorphe $f : B(k^{-\frac{1}{2}}R) \to F$, pour un certain entier $k \geqslant 1$ et un certain réel $R > 0$. On suppose que f vérifie la majoration suivante :*

$$\sup_{x \in B(k^{-\frac{1}{2}}R)} \|D^m \overline{\partial} f(x)\| \leqslant k^{\frac{m}{2}},$$

pour tout entier m compris entre 0 et un certain entier $m_{\max}$. Soit un réel R_1 vérifiant $0 < R_1 < R$.

Alors il existe une application holomorphe $g : B(k^{-\frac{1}{2}}R_1) \to F$ vérifiant la majoration suivante :

$$\sup_{x \in B(k^{-\frac{1}{2}}R_1)} \|D^m f(x) - D^m g(x)\| \leqslant C\, k^{\frac{m-1}{2}}$$

pour tout m compris entre 0 et $m_{\max}$, le réel C dépendant des dimensions de E et de F, des réels R_1 et R et de l'entier $m_{\max}$.

Démonstration. — Le cas particulier $k = 1$ est le lemme du $\overline{\partial}$ usuel sur une boule et le cas général s'y ramène en composant à la source avec une homothétie. □

Remarque. — Il est bien connu que le lemme du $\overline{\partial}$ sur la boule est, en fait, un théorème difficile. Pour la démonstration de ce « lemme », on renvoie à [4, p. 59–60].

8.2. Transversalisation près d'un point

Proposition 8.2. — *Soit s une section $(1, 2)-$contrôlée et $(1, 1)-$approximativement holomorphe du fibré vectoriel $L^k \otimes \mathbb{C}^r$, pour un certain entier k assez grand. Notons R un réel > 0 quelconque, $\varepsilon > 0$ un réel assez petit et y_0 un point de la sous-variété Y.*

Alors il existe un élément $\alpha \in L^k_{y_0} \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant \varepsilon$ tel que si on pose $s' = s + \alpha\, c^k_{y_0}$ et qu'on note s'_Y la restriction de s' à la sous-variété Y, le module de transversalité pondérée $\mathrm{MT}(s'_Y,\, y;\, 1,\, k^{-\frac{1}{2}})$ *sera minoré par $\varepsilon \times P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$ pour tout $y \in Y \cap B(y_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$.*

Précisons que « ε assez petit » signifie que ε est majoré par un réel > 0 qui dépend des données X, L, Y, r et R et que P désigne une fonction polynomiale à valeurs strictement positives qui dépend aussi de ces données. Enfin « k assez grand » signifie que k est supérieur à une borne qui dépend de ε et des données X, L, Y, r et R.

Démonstration. — Avant de commencer cette démonstration, il faut avertir le lecteur d'un choix didactique d'exposition qui consiste à ne pas supposer la section $(1,\, 2)-$contrôlée et $(1,\, 1)-$approximativement holomorphe mais $(1,\, m_1)-$contrôlée et $(1,\, m_2)-$approximativement holomorphe pour des entiers $m_1 \geqslant 2$ et $m_2 \geqslant 1$. Bien sûr, ça ne change rien au contenu mathématique de l'énoncé mais ça permet peut-être une présentation plus uniforme des calculs.

La section s vérifie donc les estimées :

$$\|\nabla^m s\| \leqslant k^{\frac{m}{2}}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant m_1$ et :

$$\|\nabla^m \overline{\partial} s\| \leqslant k^{\frac{m}{2}}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant m_2$.

De même sur la boule, disons, $B(y_0,\, 5 \times R \times k^{-\frac{1}{2}})$, les estimées suivantes sont vérifiées :

$$\|\nabla^m c^{-k}_{y_0}\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}$$

et :

$$\|\nabla^m \overline{\partial} c^{-k}_{y_0}\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}.$$

(Convenons que, dans cette démonstration, la valeur du majorant C peut varier d'une ligne à l'autre.)

Posons $f = c^{-k}_{y_0} \times s$. D'après la formule de Leibniz, sur la même boule, cette application f satisfait :

$$\|f\| \leqslant C$$
$$\|\nabla^{m-1} D f\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}$$

pour $1 \leqslant m \leqslant m_1$ et :

$$\|\nabla^m \overline{\partial} f\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant \min\{m_1,\, m_2\}$.

Choisissons un système de coordonnées complexes centré en le point y_0 de Y qui satisfasse les conditions suivantes :

(1) Ce système est holomorphe en l'origine et isométrique en l'origine, c'est-à-dire que sa différentielle en y_0 est une isométrie $\mathbb{C}-$linéaire entre $T_{y_0}X$ et $\mathbb{C}^n$.

(2) Ce système redresse Y c'est-à-dire que pour tout point de X proche de y_0, il sera équivalent d'appartenir à la sous-variété Y ou de prendre ses coordonnées dans un certain sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, que nous noterons aussi Y par abus de notation.

(Comme la proposition à démontrer doit fournir un minorant de k, un majorant de ε et un polynôme P qui ne dépendent pas de y_0, il faut choisir de telles coordonnées pour chaque point $y_0 \in Y$ de telle sorte que les estimées qui interviendront dans notre démonstration ne dépendent pas de ce point y_0 et que les tailles de leurs domaines de validité ne dépendent pas non plus de y_0. Sans entrer dans les détails, contentons-nous de dire qu'un tel choix de systèmes de coordonnées est possible par compacité de Y.)

Le système de coordonnées centré en y_0 permet de définir sur les formes différentielles et tensorielles la connexion triviale que nous noterons ∇_0. De même l'identification locale entre X et $\mathbb{C}^n$ permet de définir une structure complexe que nous noterons J_0. Enfin, pour tout réel $a > 0$ assez petit, nous noterons $B_0(y_0, a)$ la boule de centre y_0 et de rayon a pour la distance usuelle de $\mathbb{C}^n$.

Comme ∇_0^{m-1} est un opérateur différentiel d'ordre $m-1$, on a :

$$\begin{aligned}\|\nabla_0^{m-1} Df\| &\leqslant C \sum_{m'=1}^{m} \|\nabla^{m'-1} Df\| \\ &\leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

pour $1 \leqslant m \leqslant m_1$. De même :

$$\begin{aligned}\|\nabla_0^{m} \overline{\partial} f\| &\leqslant C \sum_{m'=0}^{m} \|\nabla^{m'} \overline{\partial} f\| \\ &\leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant \min\{m_1, m_2\}$.

Comme les deux structures presque-complexes coïncident en y_0, elles vérifieront sur la boule $B(y_0, 4 \times R \times k^{-\frac{1}{2}})$:

$$\|J - J_0\| \leqslant C\, k^{-\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs, on a :

$$\|\nabla_0^m J - \nabla_0^m J_0\| \leqslant C$$

sur la même boule.

Bilan : en regroupant les deux cas $m = 0$ et $m \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\nabla_0^m J - \nabla_0^m J_0\| &\leqslant C\, k^{\frac{1}{2}\min\{0,\, m-1\}}\\ &\leqslant C\, k^{\frac{m-1}{2}}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|\nabla_0^m \overline{\partial} f - \nabla_0^m \overline{\partial}_0 f\| &= \frac{1}{2}\|\nabla_0^m (Df \circ J) - \nabla_0^m (Df \circ J_0)\|\\ &\leqslant C \sum_{m'=0}^{m} \|\nabla_0^{m'} Df\| \times \|\nabla_0^{m-m'} J - \nabla_0^{m-m'} J_0\|\\ &\leqslant C \sum_{m'=0}^{m} k^{\frac{m'+1}{2}} \times k^{\frac{m-m'-1}{2}}\\ &\leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant m_1 - 1$ et donc, par inégalité triangulaire :

$$\|\nabla_0^m \overline{\partial}_0 f\| \leqslant C\, k^{\frac{m}{2}}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant \min\{m_1 - 1,\, m_2\}$.

Comme la différentielle du système de coordonnées est une isométrie, l'inclusion suivante sera vérifiée pour k assez grand :

$$B_0(y_0,\, 3 \times R \times k^{-\frac{1}{2}}) \subset B(y_0,\, 4 \times R \times k^{-\frac{1}{2}}).$$

Une conséquence évidente est que les estimées que nous avons démontrées sur la seconde boule seront encore valables sur la première.

Ces estimées et la proposition 8.1 impliquent l'existence d'un g holomorphe vérifiant :

$$\|D^m f - D^m g\| \leqslant C\, k^{\frac{m-1}{2}}$$

pour $0 \leqslant m \leqslant \min\{m_1 - 1,\, m_2\}$. Là encore, ces estimées font intervenir *a priori* des normes définies en utilisant la métrique riemannienne mais ces normes sont proches de celles qu'on définit en utilisant la métrique usuelle de $\mathbb{C}^n$, pour lesquelles on aura donc des estimées du même type.

D'après le corollaire du théorème 6.5 et la majoration $\|g\| \leqslant C$, il existe un élément $\alpha \in L_{y_0}^k \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant \varepsilon$ vérifiant :

$$\max\left\{\|g(x) + \alpha\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\left(Dg_Y(x)\right)\right\} \geqslant \frac{\varepsilon}{P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

où P désigne une fonction polynomiale > 0. Comme la différentielle en y_0 du système de coordonnées est une isométrie, l'inclusion suivante sera vérifiée pour k assez grand :

$$B(y_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}}) \subset B_0(y_0,\, 2 \times R \times k^{-\frac{1}{2}}).$$

L'estimée précédente, valable *a priori* sur $Y \cap B_0(y_0,\, 2 \times R \times k^{-\frac{1}{2}})$, sera donc valable sur $Y \cap B(y_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$.

Les estimées que g vérifie par définition impliquent, pour k assez grand :

$$\max\left\{\|g(x) - f(x)\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \|Dg(x) - Df(x)\|\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad .$$

(Remarquons que c'est ici que sont intervenues les hypothèses $m_1 \geqslant 2$ et $m_2 \geqslant 1$.) Par soustraction, on obtient :

$$\max\left\{\|f(x) + \alpha\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(Df_Y(x))\right\} \geqslant \frac{\varepsilon}{2\,P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

car le module de surjectivité est $1-$lipschitzien.

Posons :

$$\begin{aligned} f' &= f + \alpha \\ s' &= f\, c_{y_0}^k = s + \alpha\, c_{y_0}^k. \end{aligned}$$

Alors, en tout point de $B(y_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$:

$$\begin{aligned} \|f'\| &\leqslant \|c_{y_0}^{-k}\| \times \|s'\| \\ &\leqslant C \times \|s'\|. \end{aligned}$$

La formule de Leibniz :

$$Df' = c_{y_0}^{-k} \times \nabla s' + s' \times \nabla c_{y_0}^{-k}$$

implique, en utilisant le fait que le module de surjectivité est $1-$lipschitzien, l'estimée :

$$\begin{aligned} k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(Df'_Y) &\leqslant \|c_{y_0}^{-k}\| \times k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(\nabla s'_Y) + \|s'\| \times k^{-\frac{1}{2}} \times \|\nabla c_{y_0}^{-k}\| \\ &\leqslant C \times \max\left\{\|s'\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(\nabla s'_Y)\right\} \end{aligned}$$

valable en tout point de $Y \cap B(y_0,\, R \times k^{-\frac{1}{2}})$.

En rassemblant les estimées sur f' et sur $\mathrm{MS}\,(Df'_Y)$ obtenues, on achève la démonstration de la proposition par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \max\left\{\|s'\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(\nabla s'_Y)\right\} &\geqslant \frac{1}{C} \times \max\left\{\|f'\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\,(Df'_Y)\right\} \\ &\geqslant \frac{1}{C} \times \frac{\varepsilon}{2\,P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad . \end{aligned}$$

□

8.3. Transversalisation sur une partie éparpillée

Enoncé flottant. — *Soient une section s du fibré vectoriel $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ (avec k assez grand), $(1, 2)-$contrôlée et $(1, 1)-$approximativement holomorphe et une partie finie F de Y satisfaisant, pour tous $x, y \in F$, la condition d'espacement : $d(x, y) \geqslant D \times k^{-\frac{1}{2}}$ pour un certain réel $D \geqslant 1$.*

Alors il existe une section t de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ de la forme suivante :

$$t = \sum_{z \in F} \alpha^z c_z^k$$

(où, pour tout $z \in F$, le vecteur α^z est un élément de $L_z^k \otimes \mathbb{C}^r$ de norme majorée par un $\varepsilon > 0$ assez petit), telle qu'en tout point y de Y vérifiant $d(y, F) \leqslant k^{-\frac{1}{2}}$, le module de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ de la restriction de $s + t$ à Y soit supérieur à η.

Attention ! Nous n'affirmons pas que cet énoncé soit vrai en toute généralité. Il ne l'est certainement pas et il nous faut préciser plusieurs choses. Tout d'abord, comme d'habitude, il nous faut dire que « ε assez petit » signifie que ε est majoré par un réel > 0 qui dépend des données X, L, Y et r et que « k assez grand » signifie que k est supérieur à une borne qui dépend de ε et des données X, L, Y et r. Ensuite, plus important, il nous faut dire à quelle condition notre énoncé flottant est valable. La proposition suivante donne une condition suffisante, portant sur les trois réels $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et $D \geqslant 1$, pour qu'il soit vérifié.

Proposition 8.3. — *Il existe une fonction polynomiale P à valeurs strictement positives et un réel C (qui dépendent des données X, L, Y et r) telles que l'énoncé précédent sera vérifié si les trois réels ε, η et D satisfont les deux conditions :*

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = P\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

et :

$$\frac{\eta}{\varepsilon} \geqslant C \exp\left(-\frac{\pi}{4} D^2\right).$$

Démonstration. — Soient un réel $D \geqslant 1$ et F une partie finie de Y satisfaisant la condition d'espacement de « l'énoncé flottant ». Pour tout point $z_0 \in F$, la proposition 8.2 fournit un élément $\alpha^{z_0} \in L_{z_0}^k \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant \varepsilon$ tel qu'en tout point de $Y \cap B(z_0, k^{-\frac{1}{2}})$, la restriction à Y de la section $s + \alpha^{z_0} c_{z_0}^k$ s'annule transversalement avec un module de transversalité de poids $(1, k^{-\frac{1}{2}})$ supérieur, disons, à 2η pour un réel η vérifiant la première condition de la proposition.

Posons :

$$t = \sum_{z \in F} \alpha^z c_z^k.$$

Soit y un point de Y vérifiant $d(y, z_0) \leqslant k^{-\frac{1}{2}}$ pour un $z_0 \in F$. Posons :

$$\begin{aligned} s' &= s + \alpha^{z_0} c_{z_0}^k \\ t' &= \sum_{z \in F,\, z \neq z_0} \alpha^z c_z^k \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire garantit que tout $z \in F$ différent de z_0 vérifie $d(y, z) \geqslant (D-1) \times k^{-\frac{1}{2}}$ et la proposition 7.3 implique donc les estimées :

$$\begin{aligned} \|t'(y)\| &\leqslant C\,\varepsilon\, \exp\left(-\frac{\pi}{3}(D-1)^2\right) \\ &\leqslant C\,\varepsilon\, \exp\left(-\frac{\pi}{4}D^2\right) \\ \|(\nabla t')_y\| &\leqslant C\,\varepsilon\, k^{\frac{1}{2}}\, \exp\left(-\frac{\pi}{3}(D-1)^2\right) \\ &\leqslant C\,\varepsilon\, k^{\frac{1}{2}}\, \exp\left(-\frac{\pi}{4}D^2\right). \end{aligned}$$

(où, par convention, la valeur du réel C peut varier d'une ligne à l'autre).

On peut donc fixer une valeur $C > 0$ de telle sorte que si D satisfait la seconde condition de la proposition, les deux estimées suivantes seront vérifiées :

$$\begin{aligned} \|t'(y)\| &\leqslant \eta \\ \|(\nabla t')_y\| &\leqslant \eta \times k^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Remarquons que les sommes $s + t$ et $s' + t'$ sont égales. On en déduit, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|(s+t)(y)\| &\geqslant \|s'(y)\| - \|t'(y)\| \\ &\geqslant \|s'(y)\| - \eta. \end{aligned}$$

Et, le module de surjectivité étant 1−lischitzien :

$$\begin{aligned} \mathrm{MS}(\nabla(s_Y + t_Y)_y) &\geqslant \mathrm{MS}((\nabla s'_Y)_y) - \|(\nabla t')_y\| \\ &\geqslant \mathrm{MS}((\nabla s'_Y)_y) - \eta \times k^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Les deux estimées précédentes donnent bien la minoration recherchée pour le module de transversalité pondéré :

$$\begin{aligned} &\max\left\{\|(s+t)(y)\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}(\nabla(s_Y + t_Y)_y)\right\} \\ &\qquad \geqslant \max\left\{\|s'(y)\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}((\nabla s'_Y)_y)\right\} - \eta \geqslant 2\eta - \eta = \eta. \end{aligned}$$

(où le terme 2η provient de la définition de α^{z_0}). La proposition est démontrée. $\square$

8.4. Nombre de parties espacées nécessaires pour discrétiser Y

Proposition 8.4. — *Soit un réel $D \geqslant 1$. Alors il existe un entier n_D satisfaisant une majoration du type polynomiale :*

$$n_D \leqslant P(D)$$

et tel que, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe dans Y, des parties finies $F_1, \ldots, F_{n_D}$ qui satisfont les deux conditions suivantes :

(i) *pour tout $y \in Y$, il existe $z \in \bigcup_{i=1}^{n_D} F_i$ vérifiant : $d(y, z) \leqslant k^{-\frac{1}{2}}$,*

(ii) *tout entier i compris entre 1 et n_D et tous points $z, z' \in F_i$ vérifient : $d(z, z') \geqslant D \times k^{-\frac{1}{2}}$.*

Précisons que P désigne une fonction polynomiale qui dépend uniquement de X et de Y.

Démonstration. — Par compacité de Y, il existe une partie finie F de Y vérifiant la propriété d'espacement suivante : $d(z, z') \geqslant k^{-\frac{1}{2}}$ et maximale pour cette propriété. On définit alors un graphe abstrait dont les sommets seront les points de F et dont deux sommets z et z' seront reliés si et seulement si : $d(z, z') < D \times k^{-\frac{1}{2}}$. La valence de ce graphe est majorée par une fonction polynomiale de D d'après la proposition 7.1. La proposition découle alors d'un résultat de théorie des graphes dont la démonstration est une récurrence très élémentaire : le nombre chromatique d'un graphe ne saurait dépasser la valence de plus d'une unité. $\square$

8.5. Un lemme numérique

Lemme 8.5. — *Soient deux réels $0 < p < q$ et une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de réels strictement compris entre 0 et 1. On suppose vérifiée, pour tout $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :*

$$u_n \geqslant \frac{u_{n-1}}{\left(\log \frac{1}{u_{n-1}}\right)^p}. \tag{8.1}$$

Posons :

$$v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{nq}. \tag{8.2}$$

Alors il existe un entier n_0 tel que tout $n \geqslant 1$ vérifie :

$$u_n \geqslant v_{n+n_0}. \tag{8.3}$$

Démonstration. — L'inégalité $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1}$ donne :

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = (n-1)^q \times \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nq} \geqslant (e\times(n-1))^q\,. \tag{8.4}$$

Par ailleurs :

$$\left(\log\frac{1}{v_{n-1}}\right)^p = (q\times(n-1)\times\log(n-1))^p\,. \tag{8.5}$$

La comparaison des croissances des membres de droite de (8.5) et de (8.4) montre qu'il existe un entier n_1 tel que tout $n \geqslant n_1$ vérifie :

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} \geqslant \left(\log\frac{1}{v_{n-1}}\right)^p \tag{8.6}$$

c'est-à-dire :

$$v_n \leqslant \frac{v_{n-1}}{\left(\log\frac{1}{v_{n-1}}\right)^p}\,. \tag{8.7}$$

Comme la suite (v_n) tend vers 0, on peut choisir un entier $n_0 \geqslant n_1$ tel que (8.3) soit vérifiée au rang 1. Alors pour démontrer l'inégalité (8.3) par récurrence sur $n \geqslant 1$, il suffit de comparer (8.1) et (8.7). □

8.6. Conclusion de la démonstration du théorème de Donaldson–Auroux relatif

Dans l'énoncé du théorème de Donaldson–Auroux relatif, on suppose donnés un entier $m_{\max}$ (disons $\geqslant 2$) et deux réels K et $\varepsilon > 0$. On peut supposer ε arbitrairement petit. Faisons aussi l'hypothèse que $K+\varepsilon$ est majoré par 1. Cette hypothèse n'est pas restrictive car le cas général s'y ramène en multipliant les sections données par une constante. Par ailleurs, si le lecteur s'étonne de cette expression $K+\varepsilon$, disons que comme les sections données vérifient des estimées faisant intervenir K et qu'on va progressivement les perturber, on verra bien $K+\varepsilon$ intervenir dans les étapes intermédiaires.

La proposition 7.3 fournit un réel $A > 0$ tel que pour tout entier $k \geqslant 1$, pour toute partie F de Y satisfaisant, pour tous $x,\ y \in F$ la condition d'espacement : $d(x,y) \geqslant k^{-\frac{1}{2}}$, si on associe à tout point $y \in F$ un élément $\alpha^y \in L_y^k \otimes \mathbb{C}^r$, et si on pose :

$$B = \max_{y\in F} \|\alpha^y\|$$

et :

$$t = \sum_{y\in F} \alpha^y c_y k$$

les estimées suivantes seront vérifiées pour tout entier m compris entre 0 et $m_{\max}$ et pour tout point $x \in X$:

$$\|(\nabla^m t)_x\| \leqslant A \times B \times k^{\frac{m}{2}} \times \exp\left(-\frac{k\pi}{3} d^2(x, F)\right)$$
$$\left\|(\nabla^m \overline{\partial} t)_x\right\| \leqslant A \times B \times k^{\frac{m}{2}} \times \exp\left(-\frac{k\pi}{3} d^2(x, F)\right).$$

On peut supposer : $\frac{\varepsilon}{A} < \frac{1}{2e}$, quitte à augmenter A. Notons C et P un réel et un polynôme fournis par la proposition 8.3. Posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$ et $\eta_1 = \frac{\varepsilon_1}{P(\log \frac{1}{\varepsilon_1})}$. Puis définissons, pour tout entier $i \geqslant 2$, les réels strictement positifs ε_i et η_i par les relations de récurrence :

$$\varepsilon_{i+1} = \min\left(\varepsilon_1\,,\ \frac{\eta_i}{2A}\right) \quad \text{et} \quad \eta_{i+1} = \min\left(\frac{\eta_i}{2}\,,\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{P\left(\log \frac{1}{\varepsilon_{i+1}}\right)}\right).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 8.6. — *Il existe un réel $D \geqslant 1$ tel que l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$\frac{\eta_i}{\varepsilon_i} \geqslant C \exp\left(-\frac{\pi}{4} D^2\right)$$

pour tout entier i compris entre 1 *et l'entier n_D fourni par la proposition 8.4.*

Démonstration. — Vérifions qu'il existe un réel p vérifiant pour tout i l'inégalité :

$$\varepsilon_{i+1} \geqslant \frac{\varepsilon_i}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon_1}\right)^p}.$$

Par définition de ε_{i+1}, il suffit de le vérifier dans les deux cas suivants :

1er cas : $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_1$. Le résultat est évident.

2nd cas : $\varepsilon_{i+1} = \frac{\eta_i}{2A}$. La définition de η_i nous conduit à distinguer deux sous-cas :

1er sous-cas : $\eta_i = \frac{\eta_{i-1}}{2}$. Alors on a : $\varepsilon_{i+1} = \frac{\eta_{i-1}}{4A} \geqslant \frac{\varepsilon_i}{2}$ par définition de ε_i. Le résultat en découle.

2nd sous-cas : $\eta_i = \frac{\varepsilon_i}{P\left(\log \frac{1}{\varepsilon_i}\right)}$. Alors on a : $\varepsilon_{i+1} = \frac{1}{2A} \times \frac{\varepsilon_i}{P\left(\log \frac{1}{\varepsilon_i}\right)}$ et le résultat en découle.

Ces vérifications étant faites, le lemme 8.5 implique l'existence d'un entier i_0 tel que tout $i \geqslant 1$ satisfasse :

$$\varepsilon_i \geqslant \left(\frac{1}{i + i_0}\right)^{q \times (i+i_0)}$$

pour, disons, $q = p + 1$. Les entiers $i \leqslant n_D$ vérifient donc :

$$\varepsilon_i \geqslant \left(\frac{1}{n_D + i_0}\right)^{q\times(n_D+i_0)}.$$

Le membre de droite est minoré par l'exponentielle d'une fonction polynomiale de n_D qui est lui-même polynomial en D. Il existe donc une fonction polynomiale g vérifiant :

$$\log \frac{1}{\varepsilon_i} \leqslant g(D).$$

Par définition de η_i, on en déduit l'existence d'une fonction polynomiale h à valeurs > 0 vérifiant :

$$\frac{\eta_i}{\varepsilon_i} \geqslant \frac{1}{h(D)}.$$

Pour D assez grand, ce rapport est bien minoré par $C\ \exp(-\frac{\pi}{4}D^2)$, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Poursuivons la démonstration du théorème de Donaldson–Auroux relatif. Dans la suite, nous noterons D le réel obtenu en appliquant ce lemme et nous noterons bien sûr n_D l'entier correspondant fourni par la proposition 8.4. Soient des parties $F_1, \ldots, F_{n_D}$ de Y, qui satisfont les conditions (i) et (ii) de la proposition 8.4. Pour tout i compris entre 0 et n_D, notons G_i la réunion de F_1, $F_2, \ldots, F_i$.

Un second lemme est nécessaire, qui transversalise une section sur certaines parties de Y :

Lemme 8.7. — *Soient un entier i compris entre 1 et n_D et une section s de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ (avec k assez grand), qu'on suppose $(K, 2)-$contrôlée et $(K, 1)-$approximativement holomorphe. Pour toute partie P de X, nous noterons $V_k(P)$ l'ensemble des points de X dont la distance à P est majorée par $k^{-\frac{1}{2}}$. Il existe une section t_i de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(i) *En tout point de $Y \cap V_k(G_i)$, le module de transversalité de poids $(1,\ k^{-\frac{1}{2}})$ de la restriction de $s + t_i$ à Y est supérieur à η_i.*

(ii) *La section t est de la forme :*

$$t_i = \sum_{y\in G_i} \alpha^y c_y^k$$

où, pour tout j compris entre 1 et i et tout $y \in F_j$, on désigne par α^y un élément de $L_y^k \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant \varepsilon_j$.

Précisons que « k assez grand » signifie que k est supérieur à une borne qui dépend des données X, L, Y, r, K et ε ainsi que des choix de C, P, D et n_D.

Démonstration du lemme, par récurrence sur i. — Soit un entier i compris entre 0 et $n_D - 1$. On fait l'hypothèse de récurrence qu'il existe une section t_i vérifiant les conditions (i) et (ii) (sauf si i est nul, auquel cas on pose simplement $t_i = 0$).

Remarquons que la somme $s+t_i$ est $(1,2)-$contrôlée et $(1,1)-$approximativement holomorphe. Le précédent lemme et la proposition 8.3 impliquent donc l'existence d'une section u_{i+1} de $L^k \otimes \mathbb{C}^r$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

(a) La section u_{i+1} est de la forme :

$$u_{i+1} = \sum_{y \in F_{i+1}} \alpha^y c_y^k$$

où, pour tout $y \in F_{i+1}$, on désigne par α^y un élément de $L_y^k \otimes \mathbb{C}^r$ de norme $\leqslant \varepsilon_i$.

(b) En tout point de $Y \cap V_k(F_{i+1})$, le module de transversalité de poids $(1,\, k^{-\frac{1}{2}})$ de la restriction de $s + t_i + u_{i+1}$ à Y est supérieur à $\frac{\varepsilon_{i+1}}{P(\log \frac{1}{\varepsilon_{i+1}})}$ et donc à η_{i+1}.

Posons : $t_{i+1} = u_{i+1} + t_i$. Comme le module de surjectivité est $1-$lipschitzien, la section $s + t_{i+1}$ vérifie, en tout point de $Y \cap V_k(G_i)$, la minoration suivante :

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\|s + t_{i+1}\|,\, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\left(\nabla(s + t_{i+1})_Y\right)\right\} \\
&\geqslant \max\left\{\|s + t_i\|, k^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{MS}\left(\nabla(s+t_i)_Y\right)\right\} - \max\left\{\|u_{i+1}\|, k^{-\frac{1}{2}} \times \|\nabla u_{i+1}\|\right\} \\
&\qquad \geqslant \eta_i - A \times \varepsilon_{i+1} \geqslant \frac{\eta_i}{2} \geqslant \eta_{i+1}.
\end{aligned}$$

Comme $V_k(G_{i+1})$ est la réunion de $V_k(G_i)$ et de $V_k(F_{i+1})$, la section t_{i+1} satisfait bien les conditions (i) et (ii) au rang $i+1$. Par récurrence, le lemme est démontré. □

Suite et fin de la démonstration du théorème. Le lemme (pour $i = n_D$) fournit une section t telle que la restriction de la somme $s + t$ à Y ait un module de transversalité pondéré supérieur à η_{n_D}. Par ailleurs, cette section t est bien $(\varepsilon, m_{\max})-$contrôlée et $(\varepsilon, m_{\max})-$approximativement holomorphe d'après l'inégalité :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n_D} \varepsilon_i \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$$

et la définition de A.

Bibliographie

[1] D. Auroux, « Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), n° 6, p. 971-995.

[2] S. K. Donaldson, « Symplectic submanifolds and almost-complex geometry », *J. Differ. Geom.* **44** (1996), n° 4, p. 666-705.

[3] ———, « Lefschetz pencils on symplectic manifolds », *J. Differ. Geom.* **53** (1999), n° 2, p. 205-236.

[4] G. M. Henkin & J. Leiterer, *Theory of functions on complex manifolds*, Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung : Mathematische Monographien, vol. 60, Akademie-Verlag, 1984, 226 pages.

[5] A. Ibort, D. Martínez-Torres & F. Presas, « On the construction of contact submanifolds with prescribed topology », *J. Differ. Geom.* **56** (2000), n° 2, p. 235-283.

[6] Y. Yomdin & G. Comte, *Tame geometry with application in smooth analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1834, Springer, 2004.