

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

JEAN CHANZY

Inverse du Laplacien discret dans le problème de Poisson-Dirichlet à deux dimensions sur un rectangle

Tome XV, n° 3 (2006), p. 485-552.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2006_6_15_3_485_0

© Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Inverse du Laplacien discret dans le problème de Poisson-Dirichlet à deux dimensions sur un rectangle^(*)

JEAN CHANZY¹

RÉSUMÉ. — Ce travail a pour objet l'étude d'une méthode de « discrétisation » du Laplacien dans le problème de Poisson à deux dimensions sur un rectangle, avec des conditions aux limites de Dirichlet. Nous approchons l'opérateur Laplacien par une matrice de Toeplitz à blocs, eux-mêmes de Toeplitz, et nous établissons une formule donnant les blocs de l'inverse de cette matrice. Nous donnons ensuite un développement asymptotique de la trace de la matrice inverse, et du déterminant de la matrice de Toeplitz. Enfin, par un passage à la limite dans l'inverse, de type ergodique, nous passons du discret au continu, en retrouvant l'expression connue du noyau de Green du problème de Poisson, sous forme de série, et en en donnant une nouvelle expression asymptotique plus intéressante, car elle converge plus rapidement.

ABSTRACT. — This work is focused on the study of a « discretization » method for the Laplacian operator, in the two-dimensional Poisson problem on a rectangle, with Dirichlet boundary conditions. The Laplacian operator is approximated by a block Toeplitz matrix, the blocks of which are Toeplitz matrices again, and a formula of the inverse matrix blocks is given. Then an asymptotic development of the inverse matrix trace and the Toeplitz matrix determinant are obtained. Finally, the continuum expression of the Laplacian operator is found by calculating the ergodic limit of the inverse matrix. A new asymptotic formula for the well known Green function for the Poisson problem that we obtain converges more rapidly than the usual one.

1. Le problème de Poisson

L'opérateur Laplacien a depuis fort longtemps une importance capitale dans de nombreux domaines, et en particulier en Analyse, pour la résolution d'équations aux dérivées partielles, notamment en calculant des noyaux de

(*) Reçu le 16 septembre 2004, accepté le 18 mai 2005

⁽¹⁾ Université de Paris-Sud, Bâtiment 425 ; F-91405 Orsay Cedex.
tél : 01 69 15 57 29 ; fax : 01 69 15 72 34
E-mail : Jean.Chanzy@math.u-psud.fr

Green, en Probabilités, dans l'étude des marches aléatoires, et en Calcul Numérique, pour la résolution de divers problèmes posés par la Physique, la Météorologie, l'Économie,... En effet, dans toutes les branches de la Physique, en particulier, la modélisation mathématique aboutit souvent à l'obtention d'une équation aux dérivées partielles où figure le Laplacien, avec des conditions aux limites sur des domaines variés. Ces conditions sont de différentes sortes, dont les principales sont celles de Dirichlet, qui portent sur les solutions de l'équation sur la frontière de son domaine de validité, celles de Neumann, qui portent sur la dérivée des solutions dans la direction orthogonale à la frontière de ce domaine, et les conditions mixtes, qui sont une combinaison des deux précédentes. La difficulté est qu'en général, les solutions de ces équations aux dérivées partielles dépendent très fortement de la géométrie du problème, et il n'est pas toujours possible d'en obtenir une expression simple avec des fonctions usuelles. De plus, l'obtention du Noyau de Green du problème posé est parfois aussi difficile que de calculer explicitement les solutions de ce problème, et on en utilise parfois un développement en série.

Dans la présente étude, nous considérons le problème de Poisson sur un rectangle, avec des conditions aux limites du type Dirichlet et nous commençons par « discrétiser » ce problème, en représentant le Laplacien par un opérateur matriciel de Toeplitz à blocs, les blocs étant eux-mêmes des matrices de Toeplitz. Concrètement, on se donne un rectangle d'intérieur R et de frontière ∂R et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = v & \text{sur } R \\ u = w & \text{sur } \partial R, \end{cases}$$

où u est la fonction à déterminer, de classe \mathcal{C}^2 , v une fonction continue sur R et w une fonction continue sur ∂R .

On munit $R \cup \partial R$ d'un maillage (voir figure 1), de nœuds $(x_i; y_j)$ avec $x_i = i \frac{a}{m+1}$ et $y_j = j \frac{b}{n+1}$, comme dans la figure 1. On a $i \in \mathbb{N} \cap [0, m+1]$ et $j \in \mathbb{N} \cap [0, n+1]$. On approche ensuite le Laplacien Δ par son expression aux différences finies avec un pas $h_1 = \frac{a}{m+1}$ en abscisse et $h_2 = \frac{b}{n+1}$ en ordonnée.

On remplace alors le rectangle R par le maillage :

$$R_{h_1, h_2} = \{(x_i; y_j) : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\},$$

et :

$$\partial R_{h_1, h_2} = \partial R \cap \{(x_i; y_j) : 0 \leq i \leq m+1; 0 \leq j \leq n+1\}.$$

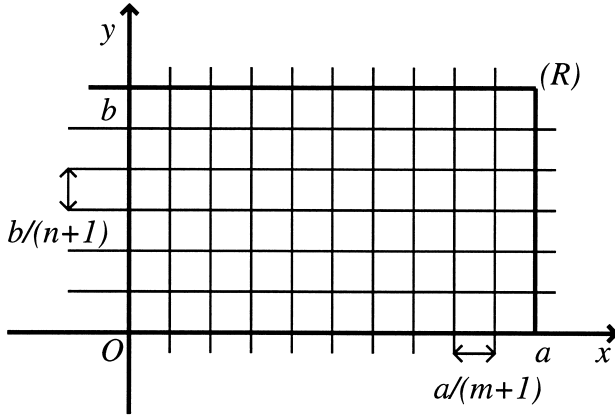


Figure 1. — Maillage du rectangle (R)

Nous noterons ici $M = [C, A, B]_{m \times m}$ les matrices tridiagonales par blocs du type :

$$M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \dots & 0 \\ C & A & B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C & A & B \\ 0 & \dots & 0 & C & A \end{pmatrix},$$

de dimension $mn \times mn$, chaque bloc étant de dimension $n \times n$, et $\tilde{M} = [c, a, b]_{n \times n}$ les matrices tridiagonales

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix},$$

de dimension $n \times n$.

Maintenant, soit $U_{ij} = u(x_i, y_j)$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2} U_{ij} &= (\Delta_{h_1, h_2} u)(x_i, y_j) \\ &= \frac{1}{h_1^2} (u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j)) \\ &\quad + \frac{1}{h_2^2} (u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j)) \\ &= \frac{1}{h_1^2} (U_{i+1 j} + U_{i-1 j} - 2U_{ij}) + \frac{1}{h_2^2} (U_{i j+1} + U_{i j-1} - 2U_{ij}). \end{aligned}$$

Posant alors $\lambda = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$ ($\lambda > 0$), $u_i = \begin{pmatrix} U_{i1} \\ U_{i2} \\ \vdots \\ U_{i n-1} \\ U_{in} \end{pmatrix}$, $\forall i ; 1 \leq i \leq m$

et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$, on peut approcher le problème initial par le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \Delta_{h_1, h_2} U = v & \text{dans } R_{h_1, h_2} \\ U = w & \text{sur } \partial R_{h_1, h_2}, \end{cases}$$

On obtient donc :

$$h_1^2 \Delta_{h_1, h_2} U_{ij} = U_{i+1 j} + U_{i-1 j} - 2U_{ij} + \lambda (U_{i j+1} + U_{i j-1} - 2U_{ij}).$$

On en déduit :

$$h_1^2 \Delta_{h_1, h_2} u_i = u_{i+1} + u_{i-1} + L u_i + \lambda U_{i0} \delta_{j,1} + \lambda U_{i n+1} \delta_{j,n},$$

où L est la matrice tridiagonale $L = [\lambda, -2(1 + \lambda), \lambda]_{n \times n}$ et $\delta_{p,q}$ le symbole de Kronecker. Posant $\mathcal{L} = [\text{Id}, L, \text{Id}]_{m \times m}$, on obtient $h_1^2 \Delta_{h_1, h_2} U = \mathcal{L} U + \theta_1 + \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont des vecteurs de dimension mn qui ne dépendent que des valeurs de w sur les côtés du rectangle R . Donc :

$$\mathcal{L} U = h_1^2 v - \theta_1 - \theta_2.$$

Posant alors $V = h_1^2 v - \theta_1 - \theta_2$, $v_{ij} = v(x_i, y_j)$, $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ et $V_{ij} = V(x_i, y_j)$, il vient $\mathcal{L} U = V$, où V est construit comme U avec :

$$V_{ij} = h_1^2 v_{ij} - (\delta_{i1} w_{0j} + \delta_{im} w_{m+1 j}) - \lambda(\delta_{j1} w_{i0} + \delta_{jn} w_{i n+1}),$$

et $\delta_{p,q}$, symbole de Kronecker.

On peut donc remplacer le problème de Poisson-Dirichlet par un problème linéaire du type $\tilde{\mathcal{L}}U = \tilde{V}$, où U et \tilde{V} sont des vecteurs de dimension mn , et $\tilde{\mathcal{L}}$ une matrice de Toeplitz tridiagonale par blocs, de dimension $mn \times mn$, chaque bloc étant lui-même une matrice de Toeplitz tridiagonale de dimension $n \times n$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{L}} = \left[-\frac{1}{2}\text{Id}, \tilde{L}, -\frac{1}{2}\text{Id} \right]_{m \times m} \\ \tilde{L} = \left[-\frac{1}{2}\lambda, 1 + \lambda, -\frac{1}{2}\lambda \right]_{n \times n} \\ \lambda = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2. \end{array} \right.$$

À partir de cette modélisation, nous utilisons une formule d'inversion établie par le même auteur dans [Ch1] et [Ch2], et nous calculons donc la matrice inverse du «Laplacien discret» ainsi obtenu, nous en déduisons une expression asymptotique de la trace de cette matrice inverse et du déterminant de la matrice «Laplacien», et enfin par un passage à la limite «continu», de type ergodique, nous déduisons de l'inverse de la matrice du Laplacien discret deux expressions différentes du noyau de Green du problème de Poisson-Dirichlet posé ci-dessus.

Avertissement. — La bibliographie donnée à la fin de cet article ne saurait être exhaustive, étant donné la profusion de publications sur le sujet traité, qui préoccupe les mathématiciens et les physiciens depuis de nombreuses années.

Remerciements. — Ce travail constitue un chapitre de ma thèse, menée sous la direction de M. Abdellatif Seghier. Je remercie les participants du groupe de travail «Analyse, Probabilités et Applications» de l'Université de Paris-Sud/Orsay pour leurs nombreuses remarques tant sur le contenu que sur la forme de cet article qui s'en est trouvé grandement amélioré.

2. Résultats principaux

La présente étude est effectuée à partir des résultats d'un précédent article du même auteur (voir [Ch2] ou [Ch1]), dans le cadre suivant :

2.1. Cadre de l'étude

Définitions générales

On note \mathbb{T} le tore à une dimension, identifié avec l'intervalle $] - \pi, \pi]$ et σ la mesure de Haar sur \mathbb{T} , de sorte que, si $\theta \in] - \pi, \pi]$, $d\sigma = \frac{d\theta}{2\pi}$, et i l'imaginaire pur de \mathbb{C} . On considère le caractère :

$$\begin{aligned} \chi :] - \pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta}, \end{aligned}$$

qui permet de définir

$$\begin{aligned} \chi^k :] - \pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{T} & \bar{\chi}^k :] - \pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \theta &\longmapsto e^{i k \theta} & \theta &\longmapsto e^{-i k \theta}. \end{aligned}$$

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients dans le corps des complexes \mathbb{C} et Id la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, alors $M^* = (\overline{m_{ji}})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice adjointe de M , et

$$\text{tr}(MM^*) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} \overline{m_{ik}} = \sum_{1 \leq i, k \leq n} |m_{ik}|^2.$$

Nous définissons alors sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ la norme matricielle de Hilbert-Schmidt $\|M\|_2 = [\text{tr}(MM^*)]^{1/2}$, associée au produit scalaire $\langle M, M' \rangle_2 = [\text{tr}(MM'^*)]^{1/2}$. Cette norme permet en particulier de bénéficier de la commutativité de deux matrices à l'intérieur de la trace, avantage décisif pour obtenir des théorèmes d'inversion et de trace équivalents à la dimension 1 (voir [M-M]).

Comme les opérateurs de Toeplitz que nous allons manipuler opèrent sur des matrices, nous allons en fait traiter ces matrices comme des vecteurs et nous allons donc munir $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des trois normes vectorielles :

$$\forall M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),$$

$$\|M\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|,$$

$$\|M\|_2 = [\text{tr}(MM^*)]^{1/2},$$

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|.$$

Espaces de travail

Dans ce paragraphe, nous définissons le cadre de cette étude, et en particulier les espaces dans lesquels nous nous plaçons dans la suite du présent article.

Espaces de Lebesgue de fonctions matricielles

Il est impératif, dans cette étude, de pouvoir induire sur les fonctions matricielles des propriétés équivalentes à celles qu'ont leurs composantes. C'est pourquoi nous introduisons les espaces suivants :

(i) $L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 d\sigma < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles «de carré intégrable» sur le tore \mathbb{T} , muni du produit scalaire $\langle M, M' \rangle_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \text{tr}(MM'^*) d\sigma$ et de la norme

$$\|M\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left[\frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 d\sigma \right]^{1/2}.$$

(ii) $L_{\mathfrak{M}}^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : \|M\|_{L_{\mathfrak{M}}^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{T}} \|M(z)\|_\infty < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles «essentiellement bornées» sur le tore \mathbb{T} .

(iii) $L_{\mathfrak{M}}^1(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : \|M\|_{L_{\mathfrak{M}}^1} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \|M\|_1 d\sigma < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles «intégrables» sur le tore \mathbb{T} .

Espaces de Hardy

(i) $H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T}) = \left\{ M \in L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) : \widehat{M}(k) = 0 \text{ si } k < 0 \right\}$ est l'espace de Hardy des fonctions matricielles de carré intégrable et de type analytique sur le tore \mathbb{T} , avec $\widehat{M}(k) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\chi}^k M(\chi) d\sigma(\chi)$.

(ii) $H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T}) = \left\{ M \in L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) : \widehat{M}(k) = 0 \text{ si } k \geq 0 \right\}$ est l'espace supplémentaire orthogonal de $H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$ dans $L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T})$.

(iii) On pose $H_{\mathfrak{M}}^{\infty}(\mathbb{T}) = H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T}) \cap L_{\mathfrak{M}}^{\infty}(\mathbb{T})$.

Espace des polynômes matriciels

Soit $\mathcal{P}_N = \text{Lin}_{\mathfrak{M}} \left\{ \chi^k \text{Id} : p \in \mathbb{N} ; 0 \leq k \leq N \right\}$ l'espace des polynômes trigonométriques matriciels de degré inférieur ou égal à N . Notons que

$$\mathcal{P}_N \subset H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T}).$$

Projections et opérateurs de Hankel

Nous considérons d'abord un symbole matriciel F décomposable en $F = GG^*$, G étant une matrice normale sur \mathbb{T} (c'est-à-dire que G commute avec sa matrice adjointe sur \mathbb{T}), et telle que $G \in H_{\mathfrak{M}}^{\infty}(\mathbb{T})$ et $G^{-1} \in H_{\mathfrak{M}}^{\infty}(\mathbb{T})$ et nous définissons ensuite la matrice complexe : $\Phi_N = \chi^N G^{-1*} G$ et puis les opérateurs suivants :

$\pi_+ : L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$ est la projection orthogonale sur $H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$

$\pi_- : L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T})$ est la projection orthogonale sur $H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N} : H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T}) &\longrightarrow H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T}) & H_{\Phi_N}^* : H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T}) &\longrightarrow H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T}) \\ M &\longmapsto \pi_-(M\Phi_N) & M' &\longmapsto \pi_+(M'\Phi_N^*). \end{aligned}$$

H_{Φ_N} et $H_{\Phi_N}^*$ sont respectivement le premier et le second opérateur de Hankel (voir [N]). Ces opérateurs permettent d'échanger les espaces $H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$ et $H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T})$ et ont ceci de remarquable qu'ils sont réduits à l'opérateur nul si le symbole G est l'inverse d'un polynôme matriciel (voir [Ch2]). Ces opérateurs permettent aussi de définir des matrices de Hankel à blocs $\mathcal{H} = (A_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$, où les blocs $A_{i,j}$ sont des coefficients de Fourier $A_{i,j} = \widehat{F}(i+j+1)$ du symbole F (voir [W2]).

Opérateur de Toeplitz tronqué à blocs

DÉFINITION 2.1. — On définit d'abord $\pi_N^{(1)}$ la projection de $L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T})$ sur \mathcal{P}_N , puis l'opérateur de Toeplitz tronqué à blocs, à symbole matriciel F , par :

$$\begin{aligned} T_N(F) : \mathcal{P}_N &\longrightarrow L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathcal{P}_N \\ Q &\longmapsto QF &\longmapsto \pi_N^{(1)}(QF) \end{aligned}$$

THÉORÈME D'INVERSION EXACTE D'UN OPÉRATEUR DE TOEPLITZ À SYMBOLE MATRICIEL. — Soit F un symbole matriciel décomposable en $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible sur \mathbb{T} , telle que $G \in H_{\mathfrak{M}}^\infty(\mathbb{T})$ et $G^{-1} \in H_{\mathfrak{M}}^\infty(\mathbb{T})$. Alors :

- (i) $\exists \alpha \in]0, 1[\quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \|H_{\Phi_{N+1}}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} \leq \alpha$
- (ii) $T_N(F)$ est inversible et pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$,

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_+(QG^{-1*})G^{-1} - \pi_+ \left[\left\{ \left(\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right)^{-1} \left(\pi_+ \left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi_{N+1}^* \right) \right) \right\} \Phi_{N+1} \right] G^{-1}.$$

Ce théorème est démontré dans [Ch2] et [Ch1].

Dans toute la suite, nous écrirons $L_{\mathfrak{M}}^2, H_{\mathfrak{M}}^{2+}, \dots$ (nous omettons le tore \mathbb{T} dans l'expression des espaces de Lebesgue et des espaces de Hardy) à chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible.

2.2. Théorèmes principaux

Nous commençons par appliquer le théorème d'inversion précédent au calcul des blocs de la matrice inverse du Laplacien discret. Nous déterminons le symbole décomposé G du Laplacien, et nous notons W la matrice $2A^2$, où A est le coefficient de Fourier d'ordre 1 de G (voir début du paragraphe 3.2). Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — On prend ici $N = m-1$ et on a $\tilde{\mathcal{L}}^{-1} = (\tilde{L}_{k,l})_{0 \leq k, l \leq m-1}$ $\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq m-1$ et $\forall l \in \mathbb{N} : 0 \leq l \leq m-1$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{k,l} &= 2 \left(W^{|k-l|+1} - W^{k+l+3} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1} \\ &\quad - (\text{Id} - W^{2m+2})^{-1} W^{m-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \\ &\quad \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} W^{m-l} (\text{Id} - W^{2l+2}), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{k,l} &= 2 W^{|k-l|+1} \left(\text{Id} - W^{2 \min(k+1, l+1)} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1} \\ &\quad - (\text{Id} - W^{2m+2})^{-1} W^{m-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \\ &\quad \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} W^{m-l} (\text{Id} - W^{2l+2}). \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression des valeurs propres puis des éléments de matrice de chacun des blocs de la matrice inverse du Laplacien discret, et nous donnons un développement asymptotique de la trace de cette matrice inverse, ainsi que du déterminant de la matrice Laplacien.

Notons $(\gamma_p)_{1 \leq p \leq n}$ les valeurs propres de W , et posons $\tilde{\mathcal{L}}_{k,l} = \mathcal{L}_{k+1,l+1}$, pour tout k , pour tout l tels que $0 \leq k, l \leq m-1$.

COROLLAIRE 2.3. — Les valeurs propres $\sigma_{k,l}^{(p)}$ de chaque bloc $\mathcal{L}_{k,l}$ sont :

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\gamma_p^{|k-l|+1} \left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^{\min(k,l)}}{1 - \gamma_p^2} \right) - \gamma_p^{2(m+1)-(k+l)+1} \left(\frac{\left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^k}{1 - \gamma_p^2} \right) \left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^l}{1 - \gamma_p^2} \right)}{\frac{1 - (\gamma_p^2)^{m+1}}{1 - \gamma_p^2}} \right) \right),$$

et les éléments de chaque bloc $\mathcal{L}_{k,l}$ de la matrice inverse $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ ont la forme :

$$(\mathcal{L}_{k,l})_{i,j} = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{p=n} \sigma_{k,l}^{(p)} \sin \left(p \frac{i\pi}{n+1} \right) \sin \left(p \frac{j\pi}{n+1} \right),$$

pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq m$.

Dans la suite, nous notons $\lambda_0 = \left(\frac{a}{b} \right)^2$, de sorte que $\lambda = \lambda_{m,n} = \lambda_0 \left(\frac{n+1}{m+1} \right)^2$ (voir paragraphe 4.1, après la proposition 4.2).

COROLLAIRE 2.4. —

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) &= \frac{m(m+1)}{\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p \tanh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) \\ &\quad - \frac{(m+1)^2}{\pi^2\lambda_0} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} \right) - \frac{(m+1)^2}{\pi^2\lambda_0} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \right) O \left(\frac{1}{m+1} \right), \end{aligned}$$

On peut alors déterminer un équivalent de la trace normalisée :

$$\frac{1}{mn} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_0}} \frac{m+1}{n} \left(\int_1^n \frac{dt}{t \tanh(t\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) + O \left(\frac{m+1}{n+1} \right),$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\frac{1}{mn} \operatorname{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda_{m,n}}} \frac{n+1}{n} \left(\int_1^n \frac{dt}{t \tanh(t\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{m,n}}} \right),$$

COROLLAIRE 2.5. — On peut définir pour le logarithme du déterminant du Laplacien discret le développement asymptotique suivant à l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} \ln \left(\det \left(\tilde{\mathcal{L}} \right) \right) &= mn \ln \left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2} \right) + m + n - 3mn + 1 \\ &+ \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) \\ &- \left(\frac{2m+1}{4} \right) \ln(\lambda_0 + m^2) - \left(\frac{2n+1}{4} \right) \ln(\lambda_0 n^2 + 1) \\ &+ \frac{m(m+1)}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan \left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m} \right) - \arctan \left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m} \right) \right) \\ &+ n(n+1)\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan \left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}} \right) \right) + O(1). \end{aligned}$$

Enfin, par un passage à la limite « continu », nous retrouvons le noyau de Green du problème de Poisson-Dirichlet sur un rectangle, et nous en donnons une nouvelle expression sous forme de série qui converge très rapidement, et pour laquelle chaque terme décroît exponentiellement en fonction de son ordre et de l'aplatissement du rectangle. On désigne par $[u]$ la partie entière du réel u . On choisit, $\forall (x; y; x'; y') \in [0, 1]^4$:

$$k = k(m) = [(m+1)x], \quad l = l(m) = [(m+1)x'],$$

$$i = i(n) = [(n+1)y], \quad j = j(n) = [(n+1)y'].$$

Avec ces notations, nous avons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 2.6. — Développement classique du noyau de Green

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} \\ = \frac{2}{\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \\ \times \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'), \end{aligned}$$

pour $(x'; y') \neq (x; y)$, uniformément par rapport à k, l, i et j .

THÉORÈME 2.7. — Nouveau développement du Noyau de Green
Posons :

$$\varphi_q(t, y, y') = \frac{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + t))}{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + t))}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{q \in \mathbb{N}} \ln \left(\varphi_q(|x - x'|, y, y') \varphi_q(x + x', y, -y') \right. \\ \left. \varphi_{q+1}(-|x - x'|, y, y') \varphi_{q+1}(-(x + x'), y, -y') \right), \end{aligned}$$

pour $(x'; y') \neq (x; y)$, uniformément par rapport à k, l, i et j .

Nous donnons ensuite une comparaison de la vitesse de convergence des deux séries définissant le noyau de Green du problème de Poisson-Dirichlet sur un rectangle et en concluons que la seconde série est beaucoup plus intéressante que la première, car il suffit d'en calculer quelques termes pour obtenir une précision convenable.

Nous terminons enfin par une expression du noyau de Green du théorème 2.7 à partir d'une somme finie et d'un reste, par le corollaire suivant :

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2.7— *Fixons un nombre entier naturel S et un réel ε tel que $\varepsilon \in]0, 1]$. Alors le noyau de Green s'écrit, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall x' \in [0, 1]$, $\forall y \in [0, 1]$, $\forall y' \in [0, 1]$, tels que $\max\{|x - x'|, |y - y'|\} \geq \varepsilon$:*

$$\begin{aligned} G(x, y, x', y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=0}^{q=S} \ln \left(\varphi_q(|x - x'|, y, y') \varphi_q(x + x', y, -y') \right. \\ \left. \varphi_{q+1}(-|x - x'|, y, y') \varphi_{q+1}(-(x + x'), y, -y') \right) + \mathcal{R}_S(x, y, x', y'), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \max \{ |\mathcal{R}_S(x, y, x', y')| : (x, y, x', y') \in [0, 1]^4; \max(|x - x'|, |y - y'|) \geq \varepsilon \} \\ \leq \frac{1}{\pi} \frac{3e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}}}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right). \end{aligned}$$

Numériquement, pour $\sqrt{\lambda_0} = 2$, si on ne prend que le premier terme de la série ($S = 0$), le reste est inférieur à $3,33 \cdot 10^{-6}$. Pour $\sqrt{\lambda_0} = 1$, si on

prend les deux premiers termes de la série ($S = 1$), le reste est inférieur à $3,38 \cdot 10^{-6}$. Pour $\sqrt{\lambda_0} = 1/2$, si on prend les quatre premiers termes de la série ($S = 3$), le reste est inférieur à $3,72 \cdot 10^{-6}$.

3. Inverse du Laplacien discret

3.1. Calcul des valeurs propres du symbole

La matrice à blocs $\tilde{\mathcal{L}}$ du paragraphe 1 peut être considérée comme un opérateur de Toeplitz tronqué par blocs, de symbole matriciel

$$F = -\frac{1}{2}\chi \text{Id} + \tilde{L} - \frac{1}{2\chi} \text{Id}.$$

Notons $(\alpha_p)_{1 \leq p \leq n}$ la suite finie des valeurs propres de \tilde{L} . Nous allons voir qu'elles sont toutes distinctes, réelles et strictement supérieures à 1.

$$\tilde{L} = \tilde{L}_n = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix} \text{ est de dimension } n \times n.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont de la forme $\alpha_p = 1 + \zeta_p \lambda$ avec $p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n$. Un calcul classique (voir [Z]) permet d'obtenir leur expression sous la forme :

$$\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}, \alpha_p = 1 + \lambda \left(1 - \cos \left(\frac{p\pi}{n+1} \right) \right) = 1 + 2\lambda \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2(n+1)} \right).$$

On voit facilement que chaque sous-espace propre de \tilde{L} est de dimension 1 et indépendant de λ . La matrice \tilde{L} est alors diagonalisable en base orthonormée et $\tilde{L} = P \left(\text{Diag} (\alpha_p)_{1 \leq p \leq n} \right) P^{-1}$. P est une matrice de changement de base, réelle, orthogonale et indépendante de λ . Calculons cette matrice de passage P :

PROPOSITION 3.1. — La matrice de passage orthogonale permettant de diagonaliser \tilde{L} s'écrit :

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin \left(\frac{ip\pi}{n+1} \right) \right)_{1 \leq i, p \leq n}.$$

Démonstration. — Pour ceci, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.2. — Pour tous entiers naturels i et j ,

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sin \left(\frac{ip\pi}{n+1} \right) \sin \left(\frac{jp\pi}{n+1} \right) = \frac{n+1}{2} \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Démonstration. — La démonstration de ce lemme très classique est laissée au lecteur. \square

Montrons maintenant la proposition 3.1 :

On vérifie facilement par un calcul direct que chacun des sous-espaces propres de \tilde{L} est l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur :

$$X_p = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \left(\frac{p\pi}{n+1} \right) \\ \sin \left(\frac{2p\pi}{n+1} \right) \\ \vdots \\ \sin \left(\frac{(n-1)p\pi}{n+1} \right) \\ \sin \left(\frac{np\pi}{n+1} \right) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le lemme 3.2, on obtient la matrice

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin \left(\frac{ip\pi}{n+1} \right) \right)_{1 \leq i, p \leq n}. \quad \square$$

3.2. Décomposition du symbole matriciel du Laplacien

Dans cette section, nous calculons la décomposition du symbole F du Laplacien discret et nous montrons que cette décomposition vérifie les hypothèses du théorème de Helson-Lowdenslager (voir [H-L]), de façon à pouvoir utiliser le théorème d'inversion du paragraphe 2.1. Notre symbole peut s'écrire :

$$F = P \left(\text{Diag} \left(-\frac{1}{2}\chi + \alpha_p - \frac{1}{2\chi} \right)_{1 \leq p \leq n} \right) P^{-1}.$$

Factorisons les valeurs propres de la matrice F :

$$-\frac{1}{2}\chi + \alpha_p - \frac{1}{2\chi} = -\frac{(\chi - \alpha_p)^2 - (\alpha_p^2 - 1)}{2\chi}.$$

Posons

$$\begin{cases} \beta_p = \alpha_p + \sqrt{\alpha_p^2 - 1} \\ \gamma_p = \alpha_p - \sqrt{\alpha_p^2 - 1}. \end{cases}$$

On a $\beta_p \gamma_p = 1$, $\beta_p > 1$ et $0 < \gamma_p < 1$. Par ailleurs

$$-\frac{1}{2}\chi + \alpha_p - \frac{1}{2\chi} = \sqrt{\frac{\beta_p}{2}}(1 - \gamma_p \chi) \sqrt{\frac{\beta_p}{2}} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\chi} \right).$$

En posant alors

$$G = P \left(\text{Diag} \left(\sqrt{\frac{\beta_p}{2}}(1 - \gamma_p \chi) \right)_{1 \leq p \leq n} \right) P^{-1},$$

on décompose le symbole en $F = GG^*$, G étant de la forme $G = \chi A + B$ et $G^* = \frac{1}{\chi}A + B$, avec

$$A = P \left(\text{Diag} \left(-\sqrt{\frac{\gamma_p}{2}} \right)_{1 \leq p \leq n} \right) P^{-1}$$

et

$$B = P \left(\text{Diag} \left(\sqrt{\frac{\beta_p}{2}} \right)_{1 \leq p \leq n} \right) P^{-1},$$

ce qui entraîne les égalités suivantes :

$$\begin{cases} AB = BA = -\frac{1}{2}\text{Id} \\ A^2 + B^2 = \tilde{L}. \end{cases}$$

Remarquons que A et B sont des matrices symétriques réelles qui commutent.

Montrons maintenant que G est dans $H_{\mathfrak{M}}^\infty$ et G^{-1} est dans $H_{\mathfrak{M}}^{2+}$, et pour cela, calculons $\|G\|_{L_{\mathfrak{M}}^2}$ et $\|G^{-1}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2}$:

PROPOSITION 3.3. — *Posons $W = 2A^2$, alors $G^{-1} = B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q$,*

qui est une série convergente dans $L_{\mathfrak{M}}^2$. On peut ensuite calculer :

$$\|G\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr} \left(\tilde{L} \right) \right)^{1/2} ; \quad \|G^{-1}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr} \left[\left(\tilde{L}^2 - \operatorname{Id} \right)^{-1/2} \right] \right)^{1/2} .$$

On en déduit que G et G^{-1} sont dans $H_{\mathfrak{M}}^{2+}$. Par ailleurs, $\|G\|_{L_{\mathfrak{M}}^\infty} \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty < +\infty$, et G est dans $L_{\mathfrak{M}}^\infty$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned} G^{-1} &= (\chi A + B)^{-1} \\ &= [(\operatorname{Id} + \chi AB^{-1})B]^{-1} \\ &= B^{-1}(\operatorname{Id} + \chi AB^{-1})^{-1} \\ &= B^{-1}(\operatorname{Id} - \chi W)^{-1}. \end{aligned}$$

On obtient alors $\|\operatorname{Id}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left[\frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr} (\operatorname{Id} \operatorname{Id}^*) \, d\sigma \right]^{1/2} = 1$, et :

$$\begin{aligned} \|\chi W\|_{L_{\mathfrak{M}}^2}^2 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr} \left((\chi W)(\chi W)^* \right) \, d\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr} (W^2) \, d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\chi W\|_{L_{\mathfrak{M}}^2}^2 &= \frac{1}{n} \operatorname{tr} (W^2) \\ &= \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{\gamma_p}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\chi W\|_{L_{\mathfrak{M}}^2}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} (\gamma_p)^2 \\ &\leq \left(\max_{1 \leq p \leq n} (\gamma_p) \right)^2, \end{aligned}$$

donc

$$0 < \|\chi W\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \max_{1 \leq p \leq n} (\gamma_p) < 1.$$

Dans ces conditions, $\forall S \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\text{Id} - \chi W) \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q &= \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q - \sum_{q=1}^{q=S+1} \chi^q W^q \\ &= \text{Id} - \chi^{S+1} W^{S+1} \\ &= \left(\sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right) (\text{Id} - \chi W). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\chi^{S+1} W^{S+1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \text{tr} \left(\chi^{S+1} W^{S+1} (\chi^{S+1} W^{S+1})^* \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \text{tr} \left(W^{2(S+1)} \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{n} \text{tr} \left(W^{2(S+1)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} (\gamma_p)^{2(S+1)}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|\chi^{S+1} W^{S+1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} (\gamma_p)^{2(S+1)} \right]^{1/2}.$$

Comme $\forall p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n$, $0 < \gamma_p < 1$, pour n fixé,

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \left(\|\chi^{S+1} W^{S+1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \right) = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \left\| \text{Id} - (\text{Id} - \chi W) \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} & \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \left\| \text{Id} - \left(\sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right) (\text{Id} - \chi W) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $G^{-1} = B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left\| B^{-1} \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 &= \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{q=S} \text{tr} \left(W^{2q+1} \right), \\ \left\| B^{-1} \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \gamma_p \sum_{q=0}^{q=S} \gamma_p^{2p} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \gamma_p \left(\frac{1 - \gamma_p^{2(S+1)}}{1 - \gamma_p^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\forall p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n, 0 < \gamma_p < 1$, pour n fixé,

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \left\| B^{-1} \sum_{q=0}^{q=S} \chi^q W^q \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \left(\frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p}{1 - \gamma_p^2} \right)^{1/2}.$$

On en déduit que

$$\|G^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \left(\frac{2}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p}{1 - \gamma_p^2} \right)^{1/2}.$$

Or :

$$1 - \gamma_p^2 = 1 - \left(2\alpha_p^2 - 1 - 2\alpha_p \sqrt{\alpha_p^2 - 1} \right),$$

donc :

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_p^2 &= 2 - 2\alpha_p^2 + 2\alpha_p \sqrt{\alpha_p^2 - 1} \\ &= 2\sqrt{\alpha_p^2 - 1} \left(\alpha_p - \sqrt{\alpha_p^2 - 1} \right) \\ &= 2\gamma_p \sqrt{\alpha_p^2 - 1}, \end{aligned}$$

donc

$$\|G^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{\alpha_p^2 - 1}} \right)^{1/2}.$$

Comme $\forall p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n, \alpha_p > 1$, ni 1 ni -1 ne sont valeurs propres de \tilde{L} et

$$\forall p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n, \sqrt{\alpha_p^2 - 1} \neq 0.$$

Les $\sqrt{\alpha_p^2 - 1}$ sont les valeurs propres de la matrice $(\tilde{L}^2 - \text{Id})^{1/2}$ et cette matrice est inversible (cette matrice existe puisque \tilde{L} est symétrique réelle et définie positive). On obtient alors

$$\|G^{-1}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left(\frac{1}{n} \text{tr} \left[(\tilde{L}^2 - \text{Id})^{-1/2} \right] \right)^{1/2} < +\infty.$$

Enfin un calcul direct montre que

$$\|G\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = \left(\frac{1}{n} \text{tr} (\tilde{L}) \right)^{1/2} < +\infty.$$

Les matrices G et G^{-1} sont donc dans $L_{\mathfrak{M}}^2$ et comme elles sont de type analytique, elles sont dans $H_{\mathfrak{M}}^{2+}$. De plus, par l'inégalité $\|G\|_{L_{\mathfrak{M}}^\infty} \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty < +\infty$ (triviale), G est dans $L_{\mathfrak{M}}^\infty$. \square

Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème d'inversion du paragraphe 2.1.

3.3. Calcul de l'inverse du Laplacien discret

$\tilde{\mathcal{L}}$ étant une matrice de Toeplitz par blocs de dimension $mn \times mn$, nous allons appliquer le théorème d'inversion au calcul des blocs $\check{L}_{k,l}$ de la matrice inverse $\check{\mathcal{L}}^{-1}$ ($0 \leq k \leq N$ et $0 \leq l \leq N$ avec $N = m - 1$).

THÉORÈME 3.4. — *On prend ici $N = m - 1$ et on a $\check{\mathcal{L}}^{-1} = (\check{L}_{k,l})_{0 \leq k, l \leq m-1}$ $\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq m - 1$ et $\forall l \in \mathbb{N} : 0 \leq l \leq m - 1$*

$$\begin{aligned} \check{L}_{k,l} &= 2 \left(W^{|k-l|+1} - W^{k+l+3} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1} \\ &- (\text{Id} - W^{2m+2})^{-1} W^{m-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} W^{m-l} (\text{Id} - W^{2l+2}), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \check{L}_{k,l} &= 2 W^{|k-l|+1} \left(\text{Id} - W^{2 \min(k+1, l+1)} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1} \\ &- (\text{Id} - W^{2m+2})^{-1} W^{m-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} W^{m-l} (\text{Id} - W^{2l+2}). \end{aligned}$$

Démonstration. — Définissons l'application semi-linéaire :

$$\begin{aligned} \Lambda : L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) \times L_{\mathfrak{M}}^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \\ (M, M') &\longmapsto \Lambda(M, M') = \int_{\mathbb{T}} MM'^* d\sigma. \end{aligned}$$

Elle vérifie $\Lambda(M', M) = \Lambda(M, M')^*$. Nous aurons alors besoin du lemme suivant :

LEMME 3.5. — $\forall M \in H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$, $\forall M' \in H_{\mathfrak{M}}^{2-}(\mathbb{T})$, $\Lambda(M, M') = 0$.

Démonstration. — On peut écrire : $M = \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q A_q$ et $M' = \sum_{r \in \mathbb{N}^*} \bar{\chi}^r B_{-r}$.

Alors :

$$\Lambda(M, M') = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ r \in \mathbb{N}^*}} A_q B_{-r}^* \int_{\mathbb{T}} \chi^{q+r} d\sigma = \sum_{q \in \mathbb{N}^*} A_q B_q^*.$$

Mais $B_q = 0$, $\forall q > 0$, donc $\Lambda(M, M') = 0$

Les blocs de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ peuvent donc s'écrire : $\check{L}_{k,l} = \Lambda\left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\chi^k \text{Id}), \chi^l \text{Id}\right)$.
Calculons alors, pour $0 \leq k \leq m-1$ et $0 \leq l \leq m-1$ ces blocs $\Lambda\left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\chi^k \text{Id}), \chi^l \text{Id}\right)$:

$$\begin{aligned} \Lambda\left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\chi^k \text{Id}), \chi^l \text{Id}\right) &= \Lambda\left(\pi_+(\chi^k G^{*-1})G^{-1}, \chi^l \text{Id}\right) \\ &\quad - \Lambda\left(\pi_+\{[(\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*))]\Phi_{N+1}\}G^{-1}, \chi^l \text{Id}\right). \end{aligned}$$

Nous allons évaluer séparément chacun des termes de cette différence. Le premier s'écrit :

$$(T_1)_{k,l} = \Lambda\left(\pi_+(\chi^k G^{*-1})G^{-1}, \chi^l \text{Id}\right) = \Lambda\left(\pi_+(\chi^k G^{*-1}), \pi_+(\chi^l G^{*-1})\right),$$

et le second :

$$\begin{aligned} (T_2)_{k,l} &= \Lambda\left(\pi_+\{[(\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*))]\Phi_{N+1}\}, \chi^l G^{*-1}\right) \\ &= \Lambda\left(\pi_+\{[(\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*))]\Phi_{N+1}\}, \pi_+(\chi^l G^{*-1})\right) \\ &= \Lambda\left((\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*)), \pi_+(\chi^l G^{*-1})\Phi_{N+1}^*\right) \\ &= \Lambda\left((\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*)), \pi_+(\pi_+(\chi^l G^{*-1})\Phi_{N+1}^*)\right). \end{aligned}$$

Inverse du Laplacien discret

On pose $M_k = \pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*)$ et donc

$$(T_2)_{k,l} = \Lambda \left((\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}})^{-1}(M_k), M_l \right).$$

1. Calcul du premier terme : Posant $W = 2A^2$, $\chi^k G^{*-1} = B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^k \bar{\chi}^q W^q$. On obtient alors :

$$\pi_+(\chi^k G^{*-1}) = B^{-1} \sum_{q=0}^{q=k} \chi^{k-q} W^q = B^{-1} \sum_{q=0}^{q=k} \chi^q W^{k-q}.$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} (T_1)_{k,l} &= \Lambda \left(B^{-1} \sum_{q=0}^{q=k} \chi^q W^{k-q}, B^{-1} \sum_{r=0}^{r=k} \chi^r W^{l-r} \right) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left((B^{-1})^2 \sum_{q=0}^{q=k} \sum_{r=0}^{r=k} W^{k+l} \chi^{q-r} W^{-(q+r)} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} (T_1)_{k,l} &= \sum_{q=0}^{q=k} \sum_{r=0}^{r=k} \left(2W^{k+l+1-(q+r)} \right) \int_{\mathbb{T}} \chi^{q-r} d\sigma \\ &= 2 \sum_{q=0}^{q=\min(k,l)} (W^{k+l+1-2q}) \\ &= 2 \sum_{q=0}^{q=\min(k,l)} (W^{|k-l|+1+2q}) \\ &= 2 W^{|k-l|+1} \left(\sum_{q=0}^{q=\min(k,l)} W^{2q} \right). \end{aligned}$$

Or, $\sum_{q=0}^{q=\min(k,l)} W^{2q} + \sum_{q>\min(k,l)} W^{2q} = (\text{Id} - W^2)^{-1}$, donc $\sum_{q>\min(k,l)} W^{2q} = W^{2\min(k,l)+2} (\text{Id} - W^2)^{-1}$. Finalement,

$$\begin{aligned} (T_1)_{k,l} &= 2 W^{|k-l|+1} \left(\text{Id} - W^{2\min(k+1,l+1)} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1} \\ &= 2 \left(W^{|k-l|+1} - W^{k+l+3} \right) (\text{Id} - W^2)^{-1}. \end{aligned}$$

2. Calcul du second terme : Calculons d'abord

$M_k = \pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*)$. On a

$$\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^* = \left(B^{-1} \sum_{q=0}^{q=k} \chi^{k-q} W^q \right) \chi^{-(N+1)} (\bar{\chi}A + B) B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q,$$

d'où successivement :

$$\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^* = 2BW \left(\sum_{q=0}^{q=k} \chi^{k-(N+1)-q} W^q \right) (\text{Id} - \bar{\chi}W) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q \right),$$

$$\begin{aligned} \pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^* &= 2BW \left(\sum_{q=0}^{q=k} \chi^{k-(N+1)-q} W^q - \sum_{q=0}^{q=k} \chi^{k-(N+1)-q-1} W^{q+1} \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^* &= 2BW \left(\chi^{k-(N+1)} \text{Id} - \chi^{-(N+2)} W^{k+1} \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q \right) \\ &= 2BW \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^{q+k-(N+1)} W^q - \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^{q-(N+2)} W^{q+k+1} \right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*) \\ &= B^{-1} \left(\sum_{q \geq N+1-k} \chi^{q+k-(N+1)} W^q - \sum_{q \geq N+2} \chi^{q-(N+2)} W^{q+k+1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_+(\pi_+(\chi^k G^{*-1})\Phi_{N+1}^*) &= B^{-1} \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^{N+1-k+r} - \sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^{N+k+3+r} \right) \\ &= B^{-1} \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^r \right) (W^{N+1-k} - W^{N+k+3}) \\ &= W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) B^{-1} \sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^r. \end{aligned}$$

On a donc :

$$M_k = W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) G^{-1}.$$

Calculons maintenant $\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) = \pi_+ \left(\pi_- (M_k \Phi_{N+1}) \Phi_{N+1}^* \right)$.

$$\begin{aligned} M_k \Phi_{N+1} &= M_k \chi^{N+1} G G^{*-1} \\ &= \chi^{N+1} W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) G^{*-1} \\ &= W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) (\chi^{N+1} G^{*-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_- (M_k \Phi_{N+1}) &= W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) B^{-1} \sum_{q > N+1} \chi^{N+1-q} W^q \\ &= W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \bar{\chi}^q W^{q+N+1} \\ &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) B^{-1} (B G^{*-1} - \text{Id}) \\ &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) (G^{*-1} - B^{-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_- (M_k \Phi_{N+1}) \Phi_{N+1}^* &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \bar{\chi}^{N+1} G^{-1} \\ &\quad - W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \bar{\chi}^{N+1} B^{-1} G^* G^{-1} \\ &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \bar{\chi}^{N+1} (G^{-1} - B^{-1} G^* G^{-1}) \\ &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \bar{\chi}^{N+1} (\text{Id} - B^{-1} G^*) G^{-1}. \end{aligned}$$

Or $\text{Id} - B^{-1} G^* = \text{Id} - B^{-1} (\bar{\chi} A + B) = \text{Id} - \bar{\chi} B^{-1} A - \text{Id} = \bar{\chi} 2A^2 = \bar{\chi} W$.
On obtient alors :

$$\pi_- (M_k \Phi_{N+1}) \Phi_{N+1}^* = W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \chi^{-(N+2)} W G^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \pi_- (M_k \Phi_{N+1}) \Phi_{N+1}^* &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \chi^{-(N+2)} W B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^q W^q \\ &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) W B^{-1} \sum_{q \in \mathbb{N}} \chi^{q-(N+2)} W^q. \end{aligned}$$

En projetant sur $H_{\mathfrak{M}}^{2+}(\mathbb{T})$, on peut terminer le calcul de $\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k)$:

$$\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) = W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) W B^{-1} \sum_{q \geq N+2} \chi^{q-(N+2)} W^q.$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \geq N+2} \chi^{q-(N+2)} W^q &= \sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^{r+N+2} \\
 &= W^{N+2} \sum_{r \in \mathbb{N}} \chi^r W^r \\
 &= W^{N+2} B G^{-1},
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) W B^{-1} W^{N+2} B G^{-1} \\
 &= W^{2N+2-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) W^{N+3} G^{-1} \\
 &= W^{2N+4} W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) G^{-1}.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) = W^{2N+4} M_k.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right)^2 (M_k) &= \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) \left(\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) \right) \\
 &= \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (W^{2N+4} M_k) \\
 &= W^{2N+4} \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right) (M_k) \\
 &= (W^{2N+4})^2 M_k.
 \end{aligned}$$

Par itération du procédé , on obtient $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right)^s (M_k) = (W^{2N+4})^s M_k.$$

Comme $\|\text{Id}\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} = 1$, $\left\| H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right\|_{L_{\mathfrak{M}}^2} \leq \alpha < 1$, et les $(\gamma_p)_{1 \leq p \leq n}$ sont les valeurs propres de W , avec $\forall p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n$, $0 < \gamma_p < 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \left(\text{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right)^{-1} (M_k) &= \left(\text{Id} + \sum_{s \geq 1} \left(H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}} \right)^s \right) (M_k) \\
 &= \left(\text{Id} + \sum_{s \geq 1} (W^{2N+4})^s \right) M_k \\
 &= (\text{Id} - W^{2N+4})^{-1} M_k.
 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, en posant $U_k = (Id - W^{2N+4})^{-1} M_k G$ et $V_l = M_l G$,

$$\begin{aligned} (T_2)_{k,l} &= \Lambda (U_k G^{-1}, V_l G^{-1}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} (U_k G^{-1} G^{*-1} V_l) d\sigma \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (T_2)_{k,l} &= \int_{\mathbb{T}} \left(U_k 2W \left(\sum_{(q,r) \in \mathbb{N}^2} \chi^{q-r} W^{q+r} \right) V_l \right) d\sigma \\ &= 2 \sum_{(q,r) \in \mathbb{N}^2} (U_k W W^{q+r} V_l) \int_{\mathbb{T}} \chi^{q-r} d\sigma \\ &= 2 \sum_{q \in \mathbb{N}} (U_k W^{2q+1} V_l) \\ &= 2 U_k W \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} W^{2q} \right) V_l \\ &= 2 U_k W (Id - W^2)^{-1} V_l \\ &= 2 U_k (W^{-1} - W)^{-1} V_l \end{aligned}$$

Comme $W = 2A^2$ et $W^{-1} = 2B^2$, on a $(W^{-1} - W)^{-1} = \frac{1}{2} (B^2 - A^2)^{-1}$,
et :

$$(T_2)_{k,l} = U_k (B^2 - A^2)^{-1} V_l.$$

Par ailleurs , puisque $\tilde{L} = A^2 + B^2$, nous avons successivement :

$$\begin{aligned} (B^2 - A^2)^2 &= B^4 + A^4 - A^2 B^2 - B^2 A^2, \\ A^2 B^2 &= (AB)^2 = B^2 A^2 = (BA)^2 = \frac{1}{4} \text{Id}, \\ \tilde{L}^2 &= A^4 + B^4 + A^2 B^2 + B^2 A^2, \\ \tilde{L}^2 &= A^4 + B^4 + \frac{1}{2} \text{Id}, \\ A^4 + B^4 &= \tilde{L}^2 - \frac{1}{2} \text{Id}, \\ (B^2 - A^2)^2 &= \tilde{L}^2 - \text{Id}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\tilde{L}^2 - \text{Id}$ sont $(\alpha_p^2 - 1)_{1 \leq p \leq n}$, elles sont strictement positives et on peut définir $(\tilde{L}^2 - \text{Id})^{1/2} = B^2 - A^2$ et même $(\tilde{L}^2 - \text{Id})^{-1/2}$,

ce qui permet d'écrire :

$$(T_2)_{k,l} = U_k \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} V_l,$$

et finalement

$$(T_2)_{k,l} = (\text{Id} - W^{2N+4})^{-1} W^{N+1-k} (\text{Id} - W^{2k+2}) \left(\tilde{L}^2 - \text{Id} \right)^{-1/2} W^{N+1-l} (\text{Id} - W^{2l+2}).$$

On obtient donc l'égalité annoncée. \square

Dans la suite, pour simplifier les calculs et les exposés, nous poserons $\tilde{L}_{k,l} = \mathcal{L}_{k+1, l+1}$, et compte-tenu du fait que les $(\gamma_p)_{1 \leq p \leq n}$ sont les valeurs propres de la matrice W , nous obtenons alors le théorème équivalent suivant :

COROLLAIRE 3.6. — *Les valeurs propres $\sigma_{k,l}^{(p)}$ de chaque bloc $\mathcal{L}_{k,l}$ sont :*

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\gamma_p^{|k-l|+1} \left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^{\min(k,l)}}{1 - \gamma_p^2} \right) - \gamma_p^{2(m+1)-(k+l)+1} \left(\frac{\left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^k}{1 - \gamma_p^2} \right) \left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^l}{1 - \gamma_p^2} \right)}{\frac{1 - (\gamma_p^2)^{m+1}}{1 - \gamma_p^2}} \right) \right), \quad (3.1)$$

et compte-tenu de la proposition 3.1, les éléments de chaque bloc $\mathcal{L}_{k,l}$ de la matrice inverse \tilde{L}^{-1} ont la forme :

$$(\mathcal{L}_{k,l})_{i,j} = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{p=n} \sigma_{k,l}^{(p)} \sin \left(p \frac{i\pi}{n+1} \right) \sin \left(p \frac{j\pi}{n+1} \right), \quad (3.2)$$

pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq m$.

Remarque 3.7 . — Compte-tenu de l'égalité :

$$2 \sin \left(p \frac{i\pi}{n+1} \right) \sin \left(p \frac{j\pi}{n+1} \right) = \cos \left(p \frac{(i-j)\pi}{n+1} \right) - \cos \left(p \frac{(i+j)\pi}{n+1} \right),$$

si on définit les matrices d'ordre $n \times n$:

$$\mathcal{T}_p = \left(\cos \left(p \frac{(i-j)\pi}{n+1} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

et :

$$\mathcal{H}_p = \left(\cos \left(p \frac{(i+j)\pi}{n+1} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

chacun des blocs $\mathcal{L}_{k, l}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{L}_{k, l} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{p=n} \sigma_{k, l}^{(p)} (\mathcal{T}_p - \mathcal{H}_p),$$

\mathcal{T}_p étant une matrice de Toeplitz et \mathcal{H}_p une matrice de Hankel.

4. Trace et déterminant du Laplacien discret

4.1. Trace normalisée du Laplacien discret

Dans cette section, nous donnons une expression asymptotique de la trace normalisée $\frac{1}{mn} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right)$ de la matrice inverse du Laplacien discret $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$, et du déterminant de $\tilde{\mathcal{L}}$. Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *La trace de l'inverse du Laplacien discret est donnée par l'expression exacte suivante :*

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) &= \sum_{k=1}^{k=m} \text{tr} \left(\mathcal{L}_{k, k} \right) = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} \sigma_{k, k}^{(p)} \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} 2 \left(\frac{\gamma_p^{-k} - \gamma_p^k}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right) \left(\frac{\gamma_p^{-(m+1-k)} - \gamma_p^{m+1-k}}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $k = l$, l'égalité (3.1) s'écrit :

$$\sigma_{k, k}^{(p)} = 2\gamma_p \left(\left(\frac{1 - \gamma_p^{2k}}{1 - \gamma_p^2} \right) - \gamma_p^{2(m+1)-2k} \left(\frac{\left(\frac{1 - \gamma_p^{2k}}{1 - \gamma_p^2} \right)^2}{\frac{1 - \gamma_p^{2(m+1)}}{1 - \gamma_p^2}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma_p \left(\frac{1 - \gamma_p^{2k}}{1 - \gamma_p^2} \right) \left(1 - \gamma_p^{2(m+1)-2k} \left(\frac{1 - \gamma_p^{2k}}{1 - \gamma_p^{2(m+1)}} \right) \right) \\
&= 2\gamma_p \left(\frac{1 - \gamma_p^{2k}}{1 - \gamma_p^2} \right) \left(\frac{1 - \gamma_p^{2(m+1)} \gamma_p^{-2k}}{1 - \gamma_p^{2(m+1)}} \right) \\
&= 2\gamma_p \frac{\gamma_p^k}{\gamma_p} \left(\frac{\gamma_p^{-k} - \gamma_p^k}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right) \frac{\gamma_p^{m+1} \gamma_p^{-k}}{\gamma_p^{m+1}} \left(\frac{\gamma_p^{-(m+1-k)} - \gamma_p^{m+1-k}}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\gamma_p^{-k} - \gamma_p^k}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right) \left(\frac{\gamma_p^{-(m+1-k)} - \gamma_p^{m+1-k}}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Maintenant, on peut pousser le calcul de la trace de $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$ un peu plus loin, et évaluer la somme sur k , et on obtient l'expression suivante :

PROPOSITION 4.2. —

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) &= 2m \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p^{-(m+1)} + \gamma_p^{m+1}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} \\
&\quad - 4 \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p^{-m} - \gamma_p^m}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p)^2 (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
\sigma_{k,k}^{(p)} &= 2 \left(\frac{\gamma_p^{-k} - \gamma_p^k}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right) \left(\frac{\gamma_p^{-(m+1-k)} - \gamma_p^{m+1-k}}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right), \\
&= 2 \left(\frac{\gamma_p^{-(m+1)} + \gamma_p^{m+1}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} - \frac{\gamma_p^{2k} \gamma_p^{-(m+1)} + \gamma_p^{-2k} \gamma_p^{m+1}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} \right).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) &= 2m \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p^{-(m+1)} + \gamma_p^{m+1}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} \\
&\quad - 2 \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p^{-(m+1)}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_p^{2k} \\
&\quad - 2 \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\gamma_p^{m+1}}{(\gamma_p^{-1} - \gamma_p) (\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1})} \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_p^{-2k}.
\end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_p^{2k} = \gamma_p^{m+1} \left(\frac{\gamma_p^{-m} - \gamma_p^m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right) \text{ et } \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_p^{-2k} = \gamma_p^{-(m+1)} \left(\frac{\gamma_p^{-m} - \gamma_p^m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} \right).$$

Les deux dernières sommes sont donc égales, et on obtient l'expression annoncée. \square

Posons maintenant $\lambda_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\xi_m = \frac{1}{m+1}$, $\varpi_n = \frac{1}{n+1}$ et $h_{m,n} = \left(\frac{\xi_m}{\varpi_n}\right)$, de sorte que

$$\lambda = \lambda_{m,n} = \lambda_0 \left(\frac{\xi_m}{\varpi_n}\right)^2$$

et :

$$\|h_{m,n}\| = \sqrt{\xi_m^2 + \varpi_n^2}.$$

Nous avons alors :

$$\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}; \alpha_p = 1 + 2\lambda_0 \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right).$$

Posons $\mu_p(n) = 2\lambda_0(n+1)^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)$. On obtient donc $\alpha_p = 1 + \mu_p(n)\xi_m^2$, avec

$$\mu_p(n) = 2\lambda_0 \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n}\right)^2.$$

Remarque 4.3. —

(i) $\sqrt{\lambda_0}$ représente l'aplatissement du rectangle, c'est-à-dire le module (rapport de la longueur à la largeur). Si $\sqrt{\lambda_0} = 1$, nous aurons un carré ; si $\sqrt{\lambda_0} > 1$, nous aurons un rectangle allongé, avec le grand côté horizontal ; si $\sqrt{\lambda_0} < 1$, nous aurons un rectangle en hauteur, avec le petit côté horizontal.

(ii) Dans toute la suite, nous aurons toujours $\lambda_0 \neq 0$, puisque si $\lambda_0 = 0$, on retrouve la dimension 1 (voir paragraphe 6). D'autre part, quand nous écrirons $O(h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$, suffisamment petit, cela signifiera qu'il existe une constante réelle positive M , ne dépendant que de λ_0 , telle que $|O(h)| \leq Mh$.

L'expression obtenue dans la proposition 4.2 permet de donner le développement asymptotique suivant de la trace de $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$:

COROLLAIRE 4.4. —

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) &= \frac{m(m+1)}{\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p \tanh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) - \frac{(m+1)^2}{\pi^2\lambda_0} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} \right) \\ &\quad - \frac{(m+1)^2}{\pi^2\lambda_0} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \right) O \left(\frac{1}{m+1} \right). \end{aligned}$$

On peut alors déterminer un équivalent de la trace normalisée :

$$\frac{1}{mn} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_0}} \frac{m+1}{n} \left(\int_1^n \frac{dt}{t \tanh(t\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) + O \left(\frac{m+1}{n+1} \right),$$

qu'on peut écrire aussi, en posant $\lambda = \lambda_{m,n}$:

$$\frac{1}{mn} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}^{-1} \right) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_{m,n}}} \frac{n+1}{n} \left(\int_1^n \frac{dt}{t \tanh(t\pi\sqrt{\lambda_0})} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{m,n}}} \right).$$

(Voir dans [D-D] une autre forme de ce développement.)

Démonstration. — Pour cette démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.5. —

(i)

$$\begin{aligned} \ln(\gamma_p) &= -p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m (1 + p^2 O(\varpi_n^2)) (1 + p^2 O(\xi_n^2)) \\ &= -p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m \left(1 + p^2 O(\|h_{m,n}\|^2) \right), \end{aligned}$$

pour m et n suffisamment grands.

(ii) $\gamma_p^{m+1} = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2) \right)$, et $\gamma_p^m = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} (1 + p O(\xi_m))$

(iii) $\frac{2\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} = \frac{1}{p\pi} (1 + p^2 O(\xi_m^2))$.

Démonstration. —

(i) On a $\alpha_p = 1 + \mu_p \xi_m^2$, et $\gamma_p = \alpha_p - \sqrt{\alpha_p^2 - 1}$. Donc

$$\begin{aligned}
 \alpha_p^2 - 1 &= 2\mu_p \xi_m^2 + \mu_p^2 \xi_m^4 \\
 &= 2\mu_p \xi_m^2 \left(1 + \frac{1}{2} \mu_p \xi_m^2 \right), \\
 \sqrt{\alpha_p^2 - 1} &= \sqrt{2\mu_p} \xi_m \sqrt{1 + \frac{1}{2} \mu_p \xi_m^2} \\
 &= \sqrt{2\mu_p} \xi_m (1 + \mu_p O(\xi_m^2)),
 \end{aligned}$$

avec $\mu_p = 2\lambda_0 \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n} \right)^2$, et $\sqrt{2\mu_p} = 2\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n} \right)$.

On obtient donc :

$$\gamma_p = 1 - \sqrt{2\mu_p} \xi_m + \mu_p \xi_m^2 + \sqrt{2\mu_p} \mu_p O(\xi_m^3),$$

d'où :

$$\ln(\gamma_p) = -\sqrt{2\mu_p} \xi_m + \sqrt{2\mu_p} \mu_p O(\xi_m^3) = -\sqrt{2\mu_p} \xi_m (1 + \mu_p O(\xi_m^2)). \quad (4.2)$$

Or

$$\sqrt{2\mu_p} = 2\sqrt{\lambda_0} \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n} \right) = 2\sqrt{\lambda_0} \left(p \frac{\pi}{2} - \frac{1}{48} p^3 \pi^3 \varpi_n^2 + p^5 O(\varpi_n^4) \right), \quad (4.3)$$

$$\mu_p = 2\lambda_0 \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n} \right)^2 = 2\lambda_0 \left(p^2 \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{48} p^4 \pi^4 \varpi_n^2 + p^6 O(\varpi_n^4) \right). \quad (4.4)$$

En remplaçant les égalités (4.3) et (4.4) dans l'expression (4.2) de $\ln(\gamma_p)$, et en se limitant à l'ordre 2 en ξ_m et ϖ_n , on obtient le résultat annoncé.

(ii) En utilisant (i), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \gamma_p^{m+1} &= e^{(m+1)\ln(\gamma_p)} \\
 &= e^{-\sqrt{2\mu_p}(1+\mu_p O(\xi_m^2))} \\
 &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1+p^2 O(\|h_{m,n}\|^2))} \\
 &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2) \right)},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \gamma_p^m &= e^{m \ln(\gamma_p)} \\
 &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1-\xi_m)(1+p^2 O(\|h_{m,n}\|^2))} \\
 &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 + p O(\xi_m))}.
 \end{aligned}$$

(iii) En utilisant (i), on peut également écrire :

$$\gamma_p = e^{\ln(\gamma_p)} = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \xi_m(1+p^2O(\|h_{m,n}\|^2)),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \gamma_p^{-1} - \gamma_p &= e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}} \xi_m(1+p^2O(\|h_{m,n}\|^2)) - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \xi_m(1+p^2O(\|h_{m,n}\|^2)) \\ &= 2 \sinh\left(p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m\right) e^{p^3\xi_m O(\|h_{m,n}\|^2)}. \end{aligned}$$

Or $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $|\xi_m O(\|h_{m,n}\|^2)| \leq \xi_m M \|h_{m,n}\|^2 \leq M \|h_{m,n}\|^3$, pour m et n suffisamment grands, ce qui entraîne $\xi_m O(\|h_{m,n}\|^2) = O(\|h_{m,n}\|^3)$.
On en déduit :

$$\gamma_p^{-1} - \gamma_p = 2 \sinh\left(p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m\right) \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^3)\right),$$

et

$$\frac{2\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} = \frac{\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m)} \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^3)\right).$$

Mais $\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m) = p\pi\sqrt{\lambda_0} \xi_m (1 + p^2 O(\xi_m^2))$ et :

$$\frac{2\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} = \frac{1}{p\pi} (1 + p^2 O(\xi_m^2)). \quad (4.5)$$

□

Montrons maintenant le corollaire 4.4 : Par le lemme 4.5, il vient :

$$\begin{aligned} \gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{(m+1)} &= e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2)\right) \\ &\quad - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2)\right), \\ \gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{(m+1)} &= 2 \sinh\left(p\pi\sqrt{\lambda_0}\right) \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2)\right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

et de même :

$$\gamma_p^{-(m+1)} + \gamma_p^{(m+1)} = 2 \cosh\left(p\pi\sqrt{\lambda_0}\right) \left(1 + p^3 O(\|h_{m,n}\|^2)\right), \quad (4.7)$$

$$\gamma_p^{-m} - \gamma_p^m = 2 \sinh\left(p\pi\sqrt{\lambda_0}\right) (1 + p O(\xi_m)). \quad (4.8)$$

En injectant les égalités (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) dans (4.1), on obtient la première expression asymptotique annoncée. La deuxième découle du développement d'Euler-Mac Laurin :

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p \tanh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} = \int_1^n \frac{dt}{t \tanh(t\pi\sqrt{\lambda_0})} + O(1),$$

et comme $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} = O(1)$, en se limitant à l'ordre 0, on obtient l'équivalent

annoncé. La troisième expression s'obtient en remplaçant $\frac{m+1}{n+1}$ par $\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{m,n}}}$. \square

4.2. Déterminant du Laplacien discret

En utilisant la matrice de passage P définie dans la proposition 3.1, on peut écrire les blocs \tilde{L} de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}$ sous la forme $\tilde{L} = P (\text{Diag}(\alpha_p))_{1 \leq p \leq n} P^{-1}$. Soit \mathcal{P} la matrice diagonale par blocs, définie par :

$$\mathcal{P} = [0, P, 0]_{m \times m}.$$

Comme elle est inversible, puisque P l'est ($\det(\mathcal{P}) = (\det(P))^m$), son inverse \mathcal{P}^{-1} peut s'écrire :

$$\mathcal{P}^{-1} = [0, P^{-1}, 0]_{m \times m},$$

et la matrice du Laplacien discret s'exprime par :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{P} \mathcal{M} \mathcal{P}^{-1},$$

où :

$$\mathcal{M} = \left[-\frac{1}{2} \text{Id}, \text{Diag}(\alpha_p)_{1 \leq p \leq n}, -\frac{1}{2} \text{Id} \right]_{m \times m}.$$

Or par permutation des vecteurs de base, cette matrice \mathcal{M} est semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathcal{R} = [0, R_{p,p}, 0]_{n \times n}$, chaque bloc $R_{p,p}$, de dimension $m \times m$, étant défini par :

$$R_{p,p}^{(m)} = R_{p,p} = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \alpha_p & -\frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2} & \alpha_p & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Par une démarche analogue au paragraphe 3.1, et compte-tenu du fait que, $\forall \vartheta \in \mathbb{C}$,

$$\det(\mathcal{M} - \vartheta \text{Id}_{mn}) = \prod_{p=1}^{p=n} \det(R_{p,p} - \vartheta \text{Id}_m),$$

les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}$ sont les nombres ϑ tels que $\Delta_m^{(p)} = (\alpha_p - \vartheta)\Delta_{m-1}^{(p)} - \frac{1}{4}\Delta_{m-2}^{(p)}$, où $\Delta_m^{(p)} = \det\left(R_{p,p}^{(m)}\right)$.

On en déduit les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}$ du Laplacien discret :

$$\begin{aligned}\vartheta_{p,q} &= \alpha_p - \cos\left(\frac{q\pi}{m+1}\right) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{q\pi}{m+1}\right) + \lambda\left(1 - \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\right) \\ &= 2\lambda\sin^2\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right) + 2\sin^2\left(\frac{q\pi}{2(m+1)}\right),\end{aligned}$$

pour $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq m$, et le déterminant de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}$ s'écrit alors :

$$\ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln\left(2\lambda_0\left(\frac{\xi_m}{\varpi_n}\right)^2 \sin^2\left(\frac{p\pi\varpi_n}{2}\right) + 2\sin^2\left(\frac{q\pi\xi_m}{2}\right)\right).$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}\ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) &= \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln\left[2\xi_m^2\left(\lambda_0\left(\frac{\sin\left(\frac{p\pi\varpi_n}{2}\right)}{\varpi_n}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\frac{q\pi\xi_m}{2}\right)}{\xi_m}\right)^2\right)\right] \\ &= mn \ln\left(\frac{2}{(m+1)^2}\right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln\left(\lambda_0\left(\frac{\sin\left(\frac{p\pi\varpi_n}{2}\right)}{\varpi_n}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\frac{q\pi\xi_m}{2}\right)}{\xi_m}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Nous avons alors le théorème suivant :

COROLLAIRE 4.6. — *On peut définir pour le logarithme du déterminant du Laplacien discret le développement asymptotique suivant à l'ordre 0 :*

$$\ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) = mn \ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right) + \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt\right) ds$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt + \frac{1}{2} \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds \\
 & + \frac{1}{4} \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 + m^2)(\lambda_0 n^2 + 1)) + O(1).
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en calculant les intégrales :

$$\begin{aligned}
 \ln(\det(\tilde{\mathcal{L}})) &= mn \ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right) \\
 &+ \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) - \left(\frac{2m+1}{4}\right) \ln(\lambda_0 + m^2) \\
 &- \left(\frac{2n+1}{4}\right) \ln(\lambda_0 n^2 + 1) + m + n - 3mn + 1 \\
 &+ n(n+1)\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 &+ \frac{m(m+1)}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)\right) + O(1).
 \end{aligned}$$

(Voir dans [D-D, K] une autre forme de ce développement.)

Démonstration. — En utilisant d'abord :

$$\lambda_0 \left(\frac{\sin(p(\pi/2)\varpi_n)}{\varpi_n}\right)^2 = \lambda_0 \left(p^2 \frac{\pi^2}{4} + \lambda_0 p^4 O(\varpi_n^2)\right),$$

et :

$$\lambda_0 \left(\frac{\sin(q(\pi/2)\xi_m)}{\xi_m}\right)^2 = \lambda_0 \left(q^2 \frac{\pi^2}{4} + \lambda_0 q^4 O(\xi_m^2)\right),$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \ln \left(\lambda_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{p\pi\varpi_n}{2}\right)}{\varpi_n}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left(\frac{q\pi\xi_m}{2}\right)}{\xi_m}\right)^2 \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\pi^2}{4} (\lambda_0 p^2 + q^2) + \lambda_0 p^4 O(\varpi_n^2) + q^4 O(\xi_m^2) \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\pi^2}{4} (\lambda_0 p^2 + q^2) + (\lambda_0 p^4 + q^4) O(\|h_{m,n}\|^2) \right)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\ln \left(\lambda_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{p\pi\varpi_n}{2} \right)}{\varpi_n} \right)^2 + \left(\frac{\sin \left(\frac{q\pi\xi_m}{2} \right)}{\xi_m} \right)^2 \right) = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} (\lambda_0 p^2 + q^2) \right) + \ln \left(1 + \frac{\lambda_0 p^4 + q^4}{\lambda_0 p^2 + q^2} O(\|h_{m,n}\|^2) \right),$$

et

$$\ln \left(\lambda_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{p\pi\varpi_n}{2} \right)}{\varpi_n} \right)^2 + \left(\frac{\sin \left(\frac{q\pi\xi_m}{2} \right)}{\xi_m} \right)^2 \right) = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} (\lambda_0 p^2 + q^2) \right) + \frac{\lambda_0 p^4 + q^4}{\lambda_0 p^2 + q^2} O(\|h_{m,n}\|^2).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \ln \left(\det \left(\tilde{\mathcal{L}} \right) \right) &= mn \ln \left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2} \right) + \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln (\lambda_0 p^2 + q^2) \\ &+ \left(\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \frac{\lambda_0 p^4 + q^4}{\lambda_0 p^2 + q^2} \right) O(\|h_{m,n}\|^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si on se limite à l'ordre 0, le troisième terme de (4.9) est d'ordre supérieur à 0 en $h_{m,n}$, et nous n'allons pas en tenir compte. Le développement d'Euler-Mac Laurin (voir [Ha]) appliqué à la première somme du deuxième membre de l'égalité précédente donne alors :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln (\lambda_0 p^2 + q^2) &= \sum_{p=1}^{p=n} \int_1^m \ln(\lambda_0 p^2 + t^2) dt + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=n} \ln(\lambda_0 p^2 + m^2) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=n} \ln(\lambda_0 p^2 + 1) + O(1). \end{aligned}$$

En appliquant encore le développement d'Euler-Mac Laurin aux trois sommes du second membre de l'égalité précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \int_1^m \ln(\lambda_0 p^2 + t^2) dt &= \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt \right) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^m \ln(\lambda_0 n^2 + t^2) dt + \frac{1}{2} \int_1^m \ln(\lambda_0 + t^2) dt + O(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \ln(\lambda_0 p^2 + m^2) &= \int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + m^2) ds \\ &+ \frac{1}{2} \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) + \frac{1}{2} \ln(\lambda_0 + m^2) + O(1), \\ \sum_{p=1}^{p=n} \ln(\lambda_0 p^2 + 1) &= \int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + 1) ds + \frac{1}{2} \ln(\lambda_0 n^2 + 1) + O(1). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=m} \ln(\lambda_0 p^2 + q^2) &= \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt \right) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds \\ &+ \frac{1}{4} \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 + m^2)(\lambda_0 n^2 + 1)) + O(1), \end{aligned}$$

en se limitant à l'ordre 0. Finalement,

$$\begin{aligned} \ln(\det(\hat{\mathcal{L}})) &= mn \ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right) + \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt \right) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt + \frac{1}{2} \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds \\ &+ \frac{1}{4} \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 + m^2)(\lambda_0 n^2 + 1)) + O(1). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt &= m \ln(\lambda_0 s^2 + m^2) - \ln(\lambda_0 s^2 + 1) - 2(m-1) \\ &+ 2s\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) \right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt \right) ds &= m \int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + m^2) ds \\ &- \int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + 1) ds - 2(m-1)(n-1) \\ &+ 2\sqrt{\lambda_0} \int_1^n s \left(\arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) \right) ds. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + m^2) ds = n \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) - \ln(\lambda_0 + m^2) - 2(n-1) + \frac{2m}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) \right),$$

et :

$$\int_1^n \ln(\lambda_0 s^2 + 1) ds = n \ln(\lambda_0 n^2 + 1) - \ln(\lambda_0 + 1) - 2(n-1) + \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan(n\sqrt{\lambda_0}) - \arctan(\sqrt{\lambda_0}) \right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_1^n \left(\int_1^m \ln(\lambda_0 s^2 + t^2) dt \right) ds &= mn \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) \\ &\quad - m \ln(\lambda_0 + m^2) - 2m(n-1) \\ &\quad + \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) \right) \\ &\quad - n \ln(\lambda_0 n^2 + 1) + \ln(\lambda_0 + 1) \\ &\quad + 2(n-1) - \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan(n\sqrt{\lambda_0}) - \arctan(\sqrt{\lambda_0}) \right) - 2(m-1)(n-1) \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_0} \int_1^n s \left(\arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) \right) ds, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds &= n \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 n^2 + 1)) \\ &\quad - \ln((\lambda_0 + m^2)(\lambda_0 + 1)) - 4(n-1) \\ &\quad + \frac{2m}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan(n\sqrt{\lambda_0}) - \arctan(\sqrt{\lambda_0}) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_1^m \ln(\lambda_0 n^2 + t^2) dt &= m \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) - \ln(\lambda_0 n^2 + 1) - 2(m-1) \\ &\quad + 2n\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) \right), \end{aligned}$$

et :

$$\int_1^m \ln(\lambda_0 + t^2) dt = m \ln(\lambda_0 + m^2) - \ln(\lambda_0 + 1) - 2(m-1) \\ + 2\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \right),$$

donc :

$$\int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt = m \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 + m^2)) \\ - \ln((\lambda_0 n^2 + 1)(\lambda_0 + 1)) - 4(m-1) \\ + 2n\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) \right) \\ + 2\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \right),$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{2} \left(\int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt + \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds \right) \\ = \frac{1}{2}(m+n) \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) + \frac{1}{2}(m-1) \ln(\lambda_0 + m^2) \\ + \frac{1}{2}(n-1) \ln(\lambda_0 n^2 + 1) - \ln(\lambda_0 + 1) - 2(m+n-2) \\ + n\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) \right) \\ + \sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \right) \\ + \frac{m}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan(n\sqrt{\lambda_0}) - \arctan(\sqrt{\lambda_0}) \right),$$

et :

$$\frac{1}{2} \left(\int_1^m \ln((\lambda_0 n^2 + t^2)(\lambda_0 + t^2)) dt + \int_1^n \ln((\lambda_0 s^2 + m^2)(\lambda_0 s^2 + 1)) ds \right) \\ + \frac{1}{4} \ln((\lambda_0 n^2 + m^2)(\lambda_0 + m^2)(\lambda_0 n^2 + 1)) \\ = \frac{1}{2} \left(m + n + \frac{1}{2} \right) \ln(\lambda_0 n^2 + m^2)$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{4}(2m-1)\ln(\lambda_0+m^2)+\frac{1}{4}(2n-1)\ln(\lambda_0n^2+1) \\
 & -\ln(\lambda_0+1)-2(m+n-2) \\
 & +n\sqrt{\lambda_0}\left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 & +\sqrt{\lambda_0}\left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 & +\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)\right) \\
 & +\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\left(\arctan\left(n\sqrt{\lambda_0}\right)-\arctan\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) & =mn\ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right)+\frac{(2m+1)(2n+1)}{4}\ln(\lambda_0n^2+m^2) \\
 & -\left(\frac{2m+1}{4}\right)\ln(\lambda_0+m^2)-\left(\frac{2n+1}{4}\right)\ln(\lambda_0n^2+1)-2(2mn-(m+n)) \\
 & +n\sqrt{\lambda_0}\left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 & +\sqrt{\lambda_0}\left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 & +\frac{m(2m+1)}{\sqrt{\lambda_0}}\left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)\right) \\
 & -\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\left(\arctan\left(n\sqrt{\lambda_0}\right)-\arctan\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\right) \\
 & +2\sqrt{\lambda_0}\int_1^n s\left(\arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{s\sqrt{\lambda_0}}\right)\right)ds+O(1). \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Mais :

$$\int_1^n s\arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right)ds=\int_{1/n}^1\frac{1}{z^3}\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}z\right)dz,$$

et :

$$\begin{aligned}
 \int_{1/n}^1\frac{1}{z^3}\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}z\right)dz & =\frac{1}{2}\left(n^2\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)-\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\
 & +\frac{m}{2\sqrt{\lambda_0}}\int_{1/n}^1\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2+\frac{\lambda_0}{m^2}}\right)dz,
 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$2\sqrt{\lambda_0} \int_1^n s \arctan\left(\frac{m}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) ds = m(n-1) + \left(\frac{\lambda_0 n^2 + m^2}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \left(\frac{\lambda_0 + m^2}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right). \quad (4.11)$$

De même :

$$2\sqrt{\lambda_0} \int_1^n s \arctan\left(\frac{1}{s\sqrt{\lambda_0}}\right) ds = n-1 + \left(\frac{\lambda_0 n^2 + 1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \left(\frac{\lambda_0 + 1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right). \quad (4.12)$$

En reportant (4.11) et (4.12) dans (4.10), il vient :

$$\begin{aligned} \ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) &= mn \ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right) + \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) \\ &- \left(\frac{2m+1}{4}\right) \ln(\lambda_0 + m^2) - \left(\frac{2n+1}{4}\right) \ln(\lambda_0 n^2 + 1) - 2(2mn - (m+n)) \\ &+ n\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\ &+ \sqrt{\lambda_0} \left(\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\right) \\ &+ \frac{m(2m+1)}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m}\right)\right) \\ &- \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan\left(n\sqrt{\lambda_0}\right) - \arctan\left(\sqrt{\lambda_0}\right)\right) + (m-1)(n-1) \\ &+ \left(\frac{\lambda_0 n^2 + m^2}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) - \left(\frac{\lambda_0 + m^2}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \\ &- \left(\frac{\lambda_0 n^2 + 1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}}\right) + \left(\frac{\lambda_0 + 1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Comme $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $u > 0$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \ln\left(\det\left(\tilde{\mathcal{L}}\right)\right) &= mn \ln\left(\frac{\pi^2}{2(m+1)^2}\right) + m+n-3mn+1 \\ &+ \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \ln(\lambda_0 n^2 + m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{2m+1}{4} \right) \ln(\lambda_0 + m^2) - \left(\frac{2n+1}{4} \right) \ln(\lambda_0 n^2 + 1) \\
 & + \frac{m(m+1)}{\sqrt{\lambda_0}} \left(\arctan \left(\frac{n\sqrt{\lambda_0}}{m} \right) - \arctan \left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{m} \right) \right) \\
 & + n(n+1)\sqrt{\lambda_0} \left(\arctan \left(\frac{m}{n\sqrt{\lambda_0}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n\sqrt{\lambda_0}} \right) \right) + O(1).
 \end{aligned}$$

□

5. Théorème « à la Spitzer-Stone » en dimension 2

Dans cette section, nous établissons un théorème du type Spitzer-Stone permettant de retrouver le développement en série classique du noyau de Green du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet sur un rectangle. Nous étendons ensuite ce résultat en donnant une nouvelle expression de ce noyau de Green, plus intéressante, sous forme d'une série qui converge plus vite que la série bien connue. Nous comparons les vitesses de convergence des deux séries.

Dans tout ce paragraphe, nous supposons λ_0 non nul pour rester dans le cas de la dimension 2. Rappelons au passage que $\sqrt{\lambda_0}$ représente le module du rectangle R (le rapport de la longueur à la largeur), c'est-à-dire en quelque sorte son aplatissement.

5.1. Expressions du Noyau de Green

Nous commençons par donner deux expressions différentes des valeurs propres $\sigma_{k,l}^{(p)}$. La première fournira la nouvelle forme du noyau de Green du problème de Poisson-Dirichlet sur un rectangle, la deuxième le développement en série classique de ce noyau :

PROPOSITION 5.1. — *Les valeurs propres $\sigma_{k,l}^{(p)}$ introduites dans la section précédente peuvent s'écrire indifféremment :*

$$(i) \quad \sigma_{k,l}^{(p)} = \frac{2\gamma_p}{1 - \gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|} - \gamma_p^{k+l} \right) + \gamma_p^{2(m+1)} \left(\gamma_p^{-|k-l|} - \gamma_p^{-(k+l)} \right)}{1 - \gamma_p^{2(m+1)}} \right],$$

ou

$$(ii) \quad \sigma_{k,l}^{(p)} = \frac{2\gamma_p}{1 - \gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{-\min(k,l)} - \gamma_p^{\min(k,l)} \right) \left(\gamma_p^{-(m+1-\max(k,l))} - \gamma_p^{m+1-\max(k,l)} \right)}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right].$$

Démonstration. — (i) L'égalité (3.1) s'écrit :

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\frac{\gamma_p^{|k-l|+1} - \gamma_p^{k+l+1}}{1 - \gamma_p^2} - \gamma_p^{2(m+1)} \gamma_p^{1-(k+l)} \left(\frac{(1 - \gamma_p^{2k})(1 - \gamma_p^{2l})}{(1 - \gamma_p^2)(1 - \gamma_p^{2(m+1)})} \right) \right).$$

On obtient alors successivement :

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|+1} - \gamma_p^{k+l+1} \right) \left(1 - \gamma_p^{2(m+1)} \right) - \gamma_p^{2(m+1)} \gamma_p^{1-(k+l)} \left(1 - \gamma_p^{2k} - \gamma_p^{2l} + \gamma_p^{2k+2l} \right)}{\left(1 - \gamma_p^2 \right) \left(1 - \gamma_p^{2(m+1)} \right)} \right),$$

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\frac{\gamma_p^{|k-l|+1} - \gamma_p^{k+l+1} - \gamma_p^{2m+3+|k-l|} - \gamma_p^{2m+3-k-l} + \gamma_p^{2m+3+k-l} + \gamma_p^{2m+3-k+l}}{\left(1 - \gamma_p^2 \right) \left(1 - \gamma_p^{2(m+1)} \right)} \right),$$

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = 2 \left(\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|+1} - \gamma_p^{k+l+1} \right) - \left(\gamma_p^{2m+3+|k-l|} + \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3+k-l} - \gamma_p^{2m+3-k+l} \right)}{\left(1 - \gamma_p^2 \right) \left(1 - \gamma_p^{2(m+1)} \right)} \right).$$

Or :

si $k > l$,

$$\begin{aligned} & \gamma_p^{2m+3+|k-l|} + \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3+k-l} - \gamma_p^{2m+3-k+l} \\ &= \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3-k+l}, \end{aligned}$$

si $l > k$,

$$\begin{aligned} & \gamma_p^{2m+3+|k-l|} + \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3+k-l} - \gamma_p^{2m+3-k+l} \\ &= \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3+k-l}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma_p^{2m+3+|k-l|} + \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3+k-l} - \gamma_p^{2m+3-k+l} \\ = \gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3-|k-l|}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l}^{(p)} &= \frac{2}{1-\gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|+1} - \gamma_p^{k+l+1} \right) - \left(\gamma_p^{2m+3-k-l} - \gamma_p^{2m+3-|k-l|} \right)}{1-\gamma_p^{2(m+1)}} \right], \\ \sigma_{k,l}^{(p)} &= \frac{2\gamma_p}{1-\gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|} - \gamma_p^{k+l} \right) - \left(\gamma_p^{2m+2-k-l} - \gamma_p^{2m+2-|k-l|} \right)}{1-\gamma_p^{2(m+1)}} \right], \quad (5.1) \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = \frac{2\gamma_p}{1-\gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|} - \gamma_p^{k+l} \right) + \gamma_p^{2(m+1)} \left(\gamma_p^{-|k-l|} - \gamma_p^{-(k+l)} \right)}{1-\gamma_p^{2(m+1)}} \right].$$

(ii) L'égalité (5.1) permet de trouver l'expression de (ii). La démonstration est laissée au lecteur. \square

Maintenant, on désigne par $[u]$ la partie entière du réel u . On choisit, $\forall(x; y; x'; y') \in [0, 1]^4$:

$$\begin{aligned} k &= k(m) = [(m+1)x], & l &= l(m) = [(m+1)x'], \\ i &= i(n) = [(n+1)y], & j &= j(n) = [(n+1)y']. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 5.2. — Développement classique du noyau de Green

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} \\ = \frac{2}{\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \\ \times \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'), \end{aligned}$$

pour $(x'; y') \neq (x; y)$, uniformément par rapport à k, l, i et j .

Remarque 5.3. — Cette somme représente le développement en série classique du noyau de Green $G(x, y, x', y')$ du problème de Poisson-Dirichlet sur un rectangle (voir [Ro]).

Démonstration du théorème 5.2. — Cette démonstration utilise les mêmes principes que celle du théorème suivant et est laissée au lecteur. Néanmoins, nous donnons ici deux lemmes sur lesquels elle s'appuie :

LEMME 5.4. —

(i) Soient $u \in]0, 1[$ et $q = [(m + 1)u]$. Alors $q\xi_m = u + O(\xi_m)$, pour m suffisamment grand.

De même, $\forall v \in]0, 1[$, si $r = [(n + 1)v]$, alors $r\varpi_n = v + O(\varpi_n)$, pour n suffisamment grand.

(Si $u = 0$, $q\xi_m = 0$, et si $u = 1$, $q\xi_m = 1$. D'autre part, si $v = 0$, $r\varpi_n = 0$, et si $v = 1$, $r\varpi_n = 1$).

On en déduit que $\lim_{m \rightarrow +\infty} q\xi_m = u$, $\forall u \in [0, 1]$, uniformément par rapport à q , $\lim_{n \rightarrow +\infty} r\varpi_n = v$, $\forall v \in [0, 1]$, uniformément par rapport à r .

(ii) $\gamma_p^q = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} u (1 + p O(\xi_m))$, pour m et n suffisamment grands, $u \neq 0$ et $u \neq 1$ (c'est-à-dire $q \neq 0$ et $q \neq m + 1$).

Démonstration. — (i) $q \leq (m + 1)u < q + 1$, donc $u - \frac{1}{m + 1} < \frac{q}{m + 1} \leq u$, et $u - \xi_m < q\xi_m \leq u$, d'où le résultat. Pour v , le raisonnement est identique.

(ii) En utilisant le lemme 4.5 (i), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \gamma_p^q &= e^{q \ln(\gamma_p)} = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} (q\xi_m)(1 + p^2 O(\|h_{m,n}\|^2)), \\ &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} (u + O(\xi_m))(1 + p^2 O(\|h_{m,n}\|^2)), \\ &= e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} u e^{p O(\xi_m)} = e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} u (1 + p O(\xi_m)), \end{aligned}$$

en se limitant à l'ordre 1 en ξ_m . \square

LEMME 5.5. — *Considérant l'égalité (ii) de la proposition 5.1 :*

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = \frac{2\gamma_p}{1 - \gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{-\min(k, l)} - \gamma_p^{\min(k, l)} \right) \left(\gamma_p^{-(m+1-\max(k, l))} - \gamma_p^{m+1-\max(k, l)} \right)}{\gamma_p^{-(m+1)} - \gamma_p^{m+1}} \right],$$

nous obtenons, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, tel que $1 \leq p \leq n$:

$$\sqrt{\lambda_0} \xi_m \sigma_{k(m), l(n)}^{(p)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} (1 + p O(\xi_m)),$$

pour m et n suffisamment grands.

Démonstration. —

L'égalité du lemme 5.4 (ii) entraîne :

$$\begin{aligned} \gamma_p^{-\min(k, l)} - \gamma_p^{\min(k, l)} &= e^{p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')} (1 + p O(\xi_m)) \\ &\quad - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')} (1 + p O(\xi_m)), \\ \gamma_p^{-\min(k, l)} - \gamma_p^{\min(k, l)} &= 2 \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) (1 + p O(\xi_m)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

De même,

$$\begin{aligned} \gamma_p^{-(1-\max(k, l))} - \gamma_p^{1-\max(k, l)} &= e^{p\pi\sqrt{\lambda_0} (1-\max(x, x'))} (1 + p O(\xi_m)) \\ &\quad - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (1-\max(x, x'))} (1 + p O(\xi_m)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_p^{-(1-\max(k, l))} - \gamma_p^{1-\max(k, l)} &= \\ &= 2 \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x'))) (1 + p O(\xi_m)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Compte-tenu de :

$$\frac{2\gamma_p\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{1 - \gamma_p^2} = \frac{2\sqrt{\lambda_0} \xi_m}{\gamma_p^{-1} - \gamma_p} = \frac{1}{p\pi} (1 + p^2 O(\xi_m^2)),$$

et en combinant les égalités (4.5), (4.6), (5.2) et (5.3), on obtient le résultat annoncé. \square

THÉORÈME 5.6. — Nouveau développement du Noyau de Green
Posons :

$$\varphi_q(t, y, y') = \frac{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + t))}{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + t))}.$$

Alors :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} = \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{q \in \mathbb{N}} \ln \left(\varphi_q(|x-x'|, y, y') \varphi_q(x+x', y, -y') \right. \\ \left. \varphi_{q+1}(-|x-x'|, y, y') \varphi_{q+1}(-(x+x'), y, -y') \right),$$

pour $(x'; y') \neq (x; y)$, uniformément par rapport à k, l, i et j .

Remarque 5.7. — D'après le théorème 5.2, cette limite est le noyau de Green du problème de Poisson-Dirichlet sur un rectangle, ce qui donne une autre expression de ce noyau de Green. Nous verrons au paragraphe suivant que la série du théorème 5.6 converge beaucoup plus vite que celle de l'expression classique, ce qui donne un grand intérêt à ce théorème de type « Spitzer-Stone ».

Démonstration du théorème 5.6. — Pour cette démonstration, nous aurons besoin des trois lemmes suivants :

LEMME 5.8. — *Considérant l'égalité (i) de la proposition 5.1 :*

$$\sigma_{k,l}^{(p)} = \frac{2\gamma_p}{1-\gamma_p^2} \left[\frac{\left(\gamma_p^{|k-l|} - \gamma_p^{k+l} \right) + \gamma_p^{2(m+1)} \left(\gamma_p^{-|k-l|} - \gamma_p^{-(k+l)} \right)}{1 - \gamma_p^{2(m+1)}} \right],$$

nous obtenons, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, tel que $1 \leq p \leq n$:

$$\sqrt{\lambda_0} \xi_m \sigma_{k(m), l(n)}^{(p)} = \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} \right)}{p \left(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \right)} \right) \\ (1 + p O(\xi_m)),$$

pour m et n suffisamment grands.

Démonstration. — Cette expression résulte d'un calcul direct à partir du lemme 5.4 (ii) et de l'égalité (4.5). \square

LEMME 5.9. — $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\forall s_1 \in \mathbb{R}$, $\forall s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \sin(p\pi s_1) \sin(p\pi s_2) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sin^2((\pi/2)(s_1 + s_2)) + \sinh^2(t)}{\sin^2((\pi/2)(s_1 - s_2)) + \sinh^2(t)} \right). \quad (5.4)$$

Si $t = 0$, alors l'égalité est encore vérifiée si $s_1 + s_2 \neq 0$ [2] et $s_1 - s_2 \neq 0$ [2].

(Cette égalité a été tirée de [G-R].)

Démonstration. — Supposons d'abord $t \neq 0$ et remarquons que, comme $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} = -\ln(1 - e^{-2p|t|})$, la série :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \sin(p\pi s_1) \sin(p\pi s_2)$$

converge absolument, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\forall s_1 \in \mathbb{R}$, $\forall s_2 \in \mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \sin(p\pi s_1) \sin(p\pi s_2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} (\cos(p\pi(s_1 - s_2)) - \cos(p\pi(s_1 + s_2))) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} - e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 + s_2)} - e^{-\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 + s_2)} \right). \end{aligned}$$

Or, comme $\left| e^{-\left(2|t| - \overset{\circ}{i} \pi u\right)} \right| = |e^{-2|t|}| < 1$, $\forall u \in \{s_1 - s_2; s_1 + s_2\}$, $\forall t \neq 0$, et en utilisant la détermination principale sur $]-\pi, \pi]$ du logarithme complexe,

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} = -\log \left(1 - e^{-\left(2|t| - \overset{\circ}{i} \pi(s_1 - s_2)\right)} \right) \\ &= -\log \left(e^{-\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2)(s_1 - s_2)\right)} \left(e^{\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2)(s_1 - s_2)\right)} - e^{-\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2)(s_1 - s_2)\right)} \right) \right), \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} e^{\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} = -\log \left(e^{-\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2) (s_1 - s_2) \right)} \right. \\ \left. \left(e^{|t|} \left(\cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) - \overset{\circ}{i} \sin \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-|t|} \left(\cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) + \overset{\circ}{i} \sin \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right) \right) \right),$$

et donc :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} e^{\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} = -\log \left(e^{-\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2) (s_1 - s_2) \right)} \right. \\ \left. \left(2 \sinh(|t|) \cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) - 2 \overset{\circ}{i} \cosh(|t|) \sin \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right) \right).$$

On en déduit :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} \right) \\ = -\log \left(2e^{-\left(|t| - \overset{\circ}{i} (\pi/2) (s_1 - s_2) \right)} \left(\sinh(|t|) \cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \overset{\circ}{i} \cosh(|t|) \sin \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right) \right) \\ -\log \left(2e^{-\left(|t| + \overset{\circ}{i} (\pi/2) (s_1 - s_2) \right)} \left(\sinh(|t|) \cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{\circ}{i} \cosh(|t|) \sin \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right) \right),$$

et ainsi :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p \pi (s_1 - s_2)} \right) \\ = -\log \left(4e^{-2|t|} \left(\sinh(|t|) \cos \left((\pi/2) (s_1 - s_2) \right) \right. \right.$$

$$- \overset{\circ}{i} \cosh(|t|) \sin((\pi/2)(s_1 - s_2)) \\ \left(\sinh(|t|) \cos((\pi/2)(s_1 - s_2)) + \overset{\circ}{i} \cosh(|t|) \sin((\pi/2)(s_1 - s_2)) \right)$$

Finalement :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} \right) \\ = -\ln \left(4e^{-2|t|} \left(\sinh^2(t) \cos^2((\pi/2)(s_1 - s_2)) + \cosh^2(t) \sin^2((\pi/2)(s_1 - s_2)) \right) \right),$$

et :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 - s_2)} \right) \\ = -\ln \left(4e^{-2|t|} \left(\sin^2((\pi/2)(s_1 - s_2)) + \sinh^2(t) \right) \right).$$

De même :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p|t|}}{p} \left(e^{\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 + s_2)} + e^{-\overset{\circ}{i} p\pi(s_1 + s_2)} \right) \\ = -\ln \left(4e^{-2|t|} \left(\sin^2((\pi/2)(s_1 + s_2)) + \sinh^2(t) \right) \right),$$

d'où le résultat annoncé, si $t \neq 0$.

Si $t = 0$, la série du premier membre de (5.4) s'écrit :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} \sin(p\pi s_1) \sin(p\pi s_2) \\ = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} (\cos(p\pi(s_1 - s_2)) - \cos(p\pi(s_1 + s_2))),$$

et les séries :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} \cos(p\pi(s_1 - s_2)),$$

et :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} \cos(p\pi(s_1 + s_2))$$

convergent respectivement si $s_1 - s_2 \neq 0$ [2] et si $s_1 + s_2 \neq 0$ [2] (voir [Z-Q]). L'égalité (5.4) est donc vraie, sauf si on a simultanément $t = 0$ et $s_1 \pm s_2 \neq 0$ [2]. \square

LEMME 5.10. — Soient $P_1 \in \mathbb{N}^*$, $P_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $P_1 < P_2$, $Q \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}$, et $y' \in \mathbb{R}$. Alors $\forall Q \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \left(\sum_{q=0}^{q=Q} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right| \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2P_1\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \right), \quad (5.5)$$

et par conséquent :

$$\left| \sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right| \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2P_1\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \right), \quad (5.6)$$

Par un passage à la limite quand $P_1 \rightarrow +\infty$ et $P_2 \rightarrow +\infty$, on déduit de (5.6) que la série :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$$

converge $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$, et $\forall y' \in \mathbb{R}$.

Démonstration. —

$$\left| \sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \left(\sum_{q=0}^{q=Q} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right| \leq \sum_{q=0}^{q=Q} \left(\sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \left(\sum_{q=0}^{q=Q} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right| \\ & \leq \left(\sum_{q=0}^{q=Q} e^{-2P_1 q\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \left(\sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \right) \\ & \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2P_1\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\sum_{p=P_1}^{p=P_2} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \right). \end{aligned}$$

Par un passage à la limite quand $Q \rightarrow +\infty$, on obtient la deuxième inégalité. Par suite, comme le membre de droite de (5.6) tend vers 0 quand $P_1 \rightarrow +\infty$ et $P_2 \rightarrow +\infty$, si $b \neq 0$, on en déduit que la série

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$$

converge pour $b \neq 0$ et $\lambda_0 \neq 0$.

Montrons maintenant le théorème 5.6. Supposons d'abord $x' \neq x$, et posons pour simplifier la présentation :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_p(x, x') = \\ & \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} \right) \right)}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \end{aligned}$$

et $\check{h}_p(x, x') = p\tilde{f}_p(x, x')$. On a donc successivement :

$$\sqrt{\lambda_0} \xi_m \sigma_{k(m), l(n)}^{(p)} = \tilde{f}_p(x, x') (1 + p O(\xi_m)),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} = \\ & \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{f}_p(x, x') (1 + p O(\xi_m)) \sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} = \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)) \\ & + \left(\sum_{p=1}^{p=n} \check{h}_p(x, x') \sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)) \right) O(\xi_m), \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\sin(p\pi(i\varpi_n)) &= \sin(p\pi(y + O(\varpi_n))) = \sin(p\pi y) + p\pi \cos(p\pi y) O(\varpi_n), \\ \sin(p\pi(j\varpi_n)) &= \sin(p\pi(y' + O(\varpi_n))) = \sin(p\pi y') + p\pi \cos(p\pi y') O(\varpi_n),\end{aligned}$$

d'où :

$$\sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)) = \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') + p\pi \sin(p\pi(y + y')) O(\varpi_n).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} &= \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ &+ \left(\sum_{p=1}^{p=n} \pi \check{h}_p(x, x') \sin(p\pi(y + y')) \right) O(\varpi_n) \\ &+ \left(\sum_{p=1}^{p=n} \check{h}_p(x, x') \sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)) \right) O(\xi_m).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_p(x, x') &= \frac{1}{\pi} \\ &\left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} + e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} \right)}{1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right),\end{aligned}\tag{5.7}$$

on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\left| \sum_{p=1}^{p=n} \check{h}_p(x, x') \sin(p\pi(y + y')) \right| &\leq \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{h}_p(x, x'), \\ \left| \sum_{p=1}^{p=n} \check{h}_p(x, x') \sin(p\pi(i\varpi_n)) \sin(p\pi(j\varpi_n)) \right| &\leq \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{h}_p(x, x').\end{aligned}$$

Une majoration élémentaire de chaque terme de (5.7) donne :

$$\begin{aligned}0 \leq \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{h}_p(x, x') &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \\ &\left(\frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|}} + \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')}} \right) \\ &+ \left(\frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(2-|x-x'|)}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(2-|x-x'|)}} + \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(2-(x+x'))}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}(2-(x+x'))}} \right),\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sqrt{\lambda_{m,n}}}{2} (\mathcal{L}_{k(m), l(m)})_{i(n), j(n)} - \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} |x-x'|}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} |x-x'|}} + \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (x+x')}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (x+x')}} \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (2-|x-x'|)}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (2-|x-x'|)}} + \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (2-(x+x'))}}{1 - e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} (2-(x+x'))}} \right) O(\|h_{m,n}\|). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=n} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} |x-x'|}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (x+x')}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (2-|x-x'|)}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (2-(x+x'))}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Le lemme 5.10 établit que chacune des séries du second membre de (5.8) converge et on peut calculer leur somme de la manière suivante : $\forall Q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p} \left(\sum_{q=0}^{q=Q} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & = \sum_{q=0}^{q=Q} \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} (b+2q)}}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \right). \quad (5.9) \end{aligned}$$

Par l'inégalité (5.5), le premier membre tend vers $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})}$ $\sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$, quand n et Q tendent vers $+\infty$, et par l'égalité (5.4), la parenthèse du deuxième membre tend vers

$$\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sin^2((\pi/2)(y+y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(b+2q))}{\sin^2((\pi/2)(y-y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(b+2q))} \right),$$

quand $n \rightarrow +\infty$. D'autre part, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(b+2q)}}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$ est absolument convergente, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(b+2q)}}{p}$ converge vers $-\ln\left(1 - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(b+2q)}\right)$ et la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(-\ln\left(1 - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(b+2q)}\right)\right)$ est convergente, puisque de même nature que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(b+2q)}$, ce qui assure la convergence de la série double du deuxième membre de (5.9). On en déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-\pi\sqrt{\lambda_0} b}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ &= \frac{1}{4} \sum_{q \in \mathbb{N}} \ln \left(\frac{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(b + 2q))}{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(b + 2q))} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$, et $\forall y' \in \mathbb{R}$, ce qui achève la démonstration, puisqu'il suffit d'injecter (5.10) quatre fois dans (5.8), successivement pour $b = |x - x'|$, $b = x + x'$, $b = 2 - |x - x'|$, $b = 2 - (x + x')$.

Si $x' = x$, alors la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$ est de même nature que la série :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1 + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}x} - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}(1-x)}}{p} \right) \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'),$$

qui se décompose en :

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') + \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}}}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & - \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}x}}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y') \\ & - \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}(1-x)}}{p} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'). \end{aligned}$$

La première de ces quatre séries est convergente, si $y + y' \not\equiv 0$ [2] et $y - y' \not\equiv 0$ [2], la deuxième est convergente partout, la troisième converge si

$x \neq 0$, et quand $y + y' \neq 0$ [2] et $y - y' \neq 0$ [2] si $x = 0$, et la dernière est convergente partout si $x \neq 1$, et quand $y + y' \neq 0$ [2] et $y - y' \neq 0$ [2] si $x = 1$, et ceci en vertu de l'égalité (5.4).

L'expression du noyau de Green obtenue dans le théorème 5.6 est donc valable partout sauf sur la diagonale $\{(x, y, x', y') \in [0, 1]^4 : (x', y') = (x, y)\}$.

Remarque 5.11. — On pouvait retrouver cette nouvelle expression du noyau de Green à partir de la série classique, en remarquant :

$$\begin{aligned} f_p(x, x') &= \frac{2}{\pi} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})}, \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')}) (e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - \max(x, x'))} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - \max(x, x'))})}{p(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - |x - x'|)} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - (x + x'))} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - (x + x'))} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - |x - x'|)}}{pe^{p\pi\sqrt{\lambda_0}}(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(|x - x'|)} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x + x')} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(2 - (x + x'))} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(2 - |x - x'|)}}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \right) \\ &= \tilde{f}_p(x, x'). \end{aligned}$$

5.2. Comparaison des termes généraux des deux séries

Dans ce paragraphe, nous estimons la vitesse de convergence des deux séries définissant les deux expressions précédentes du noyau de Green. Notons, comme dans le paragraphe précédent :

$$f_p(x, x') = \frac{2}{\pi} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0}(1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})},$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p(x, x') &= \\ \frac{1}{\pi} &\left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x - x'|} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x + x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} (e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x - x'|} - e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x + x')})}{p(1 - e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}})} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$G(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} f_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'),$$

et

$$G(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{f}_p(x, x') \sin(p\pi y) \sin(p\pi y').$$

La démonstration du théorème 5.6 a établi que le noyau de Green pouvait s'écrire :

$$G(x, y, x', y') = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{G}_p(x, x') e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'),$$

avec :

$$\tilde{G}_p(x, x') = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} \right)}{p} \right).$$

Posons $\tilde{F}_q(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{G}_p(x, x') e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$. Nous avons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 5.12. —

On se donne un réel ε tel que $\varepsilon \in]0, 1[$.

(i) $\forall x \in [0, 1], \forall x' \in [0, 1]$ tels que $|x - x'| \geq \varepsilon$,

$$|f_p(x, x')| \leq \frac{1}{p\pi} \tanh \left(p(\pi/2)\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon) \right).$$

On a même :

$$\max \{|f_p(x, x')|; x \in [0, 1], x' \in [0, 1],$$

$$|x - x'| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{p\pi} \tanh \left(p(\pi/2)\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon) \right).$$

(ii) $\forall x \in [0, 1], \forall x' \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], \forall y' \in [0, 1]$, tels que

$$\max \{|x - x'|, |y - y'| \geq \varepsilon\},$$

$$\left| \tilde{F}_q(x, y, x', y') \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(3e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right).$$

Démonstration. —

$$(i) f_p(x, x') = \frac{2}{\pi} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})},$$

d'où :

$$f_p(x, x') = \frac{1}{\pi} \frac{\cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - |x - x'|))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} - \frac{1}{\pi} \frac{\cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - (x + x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})}.$$

Or si $x \in [0, 1]$ et $x' \in [0, 1]$, avec $|x - x'| \geq \varepsilon$, alors $1 - |x - x'| \in [0, 1 - \varepsilon]$ et $1 - (x + x') \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, et on a :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - |x - x'|)) \leq \cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon)), \\ 1 &\leq \cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - (x + x'))) \leq \cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon)), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |f_p(x, x')| &\leq \frac{1}{p\pi} \frac{\cosh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon)) - 1}{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \\ &\leq \frac{1}{p\pi} \tanh(p(\pi/2)\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon)). \end{aligned}$$

Comme ce majorant est atteint, on a donc :

$$\max \{|f_p(x, x')|; x \in [0, 1], x' \in [0, 1],$$

$$|x - x'| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{p\pi} \tanh(p(\pi/2)\sqrt{\lambda_0} (1 - \varepsilon)).$$

$$(ii) \tilde{F}_q(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{G}_p(x, x') e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'), \text{ donc,}$$

comme toutes les séries qui apparaissent dans la suite de la démonstration sont des séries à termes positifs convergentes, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{F}_q(x, y, x', y') \right| &\leq \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left| \tilde{G}_p(x, x') \right| e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \leq \sum_{p \in \mathbb{N}^*} e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \\ &\cdot \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(2-|x-x'|)} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(2-(x+x'))}}{p\pi} \right). \end{aligned}$$

Or, si $x \in [0, 1]$ et $x' \in [0, 1]$, avec $|x - x'| \geq \varepsilon$, alors $|x - x'| \in [\varepsilon, 1]$, $x + x' \in [\varepsilon, 2 - \varepsilon]$, $2 - |x - x'| \in [1, 2 - \varepsilon]$ et $2 - (x + x') \in [\varepsilon, 2 - \varepsilon]$, d'où :

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{F}_q(x, y, x', y') \right| &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(3e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \right)}{p} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(3e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}}}{p}, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\left| \widetilde{F}_q(x, y, x', y') \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(3e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right). \quad (5.11)$$

Remarque 5.13 . — On constate que si :

$$\widetilde{F}_q(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \widetilde{G}_p(x, x') e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'),$$

alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_q(x, y, x', y') = & \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(|x - x'| + 2q))}{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(|x - x'| + 2q))} \right. \\ & \frac{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(x + x' + 2q))}{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(x + x' + 2q))} \\ & \frac{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + 2 - |x - x'|))}{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + 2 - |x - x'|))} \\ & \left. \frac{\sin^2((\pi/2)(y - y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + 2 - (x + x')))}{\sin^2((\pi/2)(y + y')) + \sinh^2((\pi/2)\sqrt{\lambda_0}(2q + 2 - (x + x')))} \right), \end{aligned}$$

ce qui est le terme général de la nouvelle série définissant le noyau de Green, et sera utile dans le paragraphe 5.4.

On voit ainsi que les termes de la deuxième série définissant le noyau de Green décroissent beaucoup plus vite (en $e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}$) que dans la série classique, où ils décroissent en $\frac{1}{p}$. Cela se vérifie numériquement : chaque terme de la série classique dépend peu du module du rectangle, et le dixième

terme est de l'ordre de $3, 2.10^{-2}$, le cinquantième de l'ordre de $6, 4.10^{-3}$, le cinq-centième de l'ordre de $6, 4.10^{-4}$.

Pour la nouvelle expression (théorème 5.6), si $\sqrt{\lambda_0} = 2$, le premier terme est de l'ordre de 3.10^{-6} , le deuxième terme est de l'ordre de $1, 2.10^{-11}$, si $\sqrt{\lambda_0} = 1$, le troisième terme est de l'ordre de 6.10^{-9} , le quatrième terme de l'ordre de $1, 2.10^{-11}$, le cinquième de l'ordre de $2, 2.10^{-13}$ et si $\sqrt{\lambda_0} = 1/2$, le septième terme est de l'ordre de $2, 9.10^{-10}$, le huitième de l'ordre de $1, 2.10^{-11}$, et le neuvième de l'ordre de $5, 4.10^{-12}$, mais dans ce dernier cas, on peut par rotation des axes et homothétie, en utilisant la symétrie du noyau de Green, adapter son expression pour se ramener au cas $\sqrt{\lambda_0} = 2$.

Numériquement, on constate en particulier que pour certains points du plan, une précision de calcul convenable nécessite d'évaluer la série classique jusqu'au cinquantième terme au moins, alors que pour la série en logarithme, si $\sqrt{\lambda_0} = 2$, il suffit de calculer deux ou trois termes, si $\sqrt{\lambda_0} = 1$, il suffit de calculer quatre ou cinq termes, et si $\sqrt{\lambda_0} = 1/2$, il suffit de calculer huit ou neuf termes.

5.3. Vitesse de convergence de la série classique

Dans cette section, nous minorons en certains points du carré $[0, 1]^2$ la série classique par une série qui converge lentement.

Fixons y et y' dans \mathbb{Q}^* de sorte que $\sin(p\pi y) \sin(p\pi y')$ soit une constante C .

Par exemple, si $y = y' = \frac{1}{2}$, on a $\sin(p\pi y) \sin(p\pi y') = 1$. On peut alors minorer le terme général de la série :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})}$$

par :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{\sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} \min(x, x')) \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0} (1 - \max(x, x')))}{p \sinh(p\pi\sqrt{\lambda_0})} \\ \geq 4p\pi\lambda_0 (\min(x, x') - xx') e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}}. \end{aligned}$$

En effet, $\sinh(u) \geq u$, pour tout $u \geq 0$, et $\sinh(u) \leq \frac{1}{2}e^u$, pour tout u .

Or la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} 4p\pi\lambda_0 (\min(x, x') - xx') e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}}$ converge comme une série de puissances, donc beaucoup plus lentement que la série en logarithme,

pour laquelle nous donnons une majoration du reste dans le paragraphe suivant.

5.4. Estimation du reste de la série en logarithme

Dans ce paragraphe, pour mettre en évidence la puissance de la série en logarithme, nous donnons une expression du noyau de Green du théorème 5.6 au moyen d'une somme finie et d'un reste, avec une estimation de ce reste. Une évaluation numérique de cette majoration va ensuite confirmer les calculs évoqués dans le paragraphe 5.2. Nous avons donc le théorème suivant :

COROLLAIRE DU THÉORÈME 5.6— Fixons un nombre entier naturel S et un réel ε tel que $\varepsilon \in]0, 1]$. Alors le noyau de Green s'écrit, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall x' \in [0, 1]$, $\forall y \in [0, 1]$, $\forall y' \in [0, 1]$, tels que $\max(|x - x'|, |y - y'|) \geq \varepsilon$, et avec la fonction φ_q du théorème 5.6 :

$$G(x, y, x', y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=0}^{q=S} \ln \left(\varphi_q(|x - x'|, y, y') \varphi_q(x + x', y, -y') \right. \\ \left. \cdot \varphi_{q+1}(-|x - x'|, y, y') \varphi_{q+1}(-(x + x'), y, -y') \right) + \mathcal{R}_S(x, y, x', y'),$$

avec :

$$\max \left\{ |\mathcal{R}_S(x, y, x', y')| : (x, y, x', y') \in [0, 1]^4; \max(|x - x'|, |y - y'|) \geq \varepsilon \right\} \\ \leq \frac{1}{\pi} \frac{3e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}}}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right). \quad (5.12)$$

Démonstration . — Pour cette démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.14. — Soient $Q \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{N}^*$, tel que $P > S + 1$. Alors $\forall S \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right) \quad (5.13) \\ \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} + \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(P+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right),$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{q \geq S+1} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \\
 &\leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right), \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right) &= \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{1}{r} \left(\sum_{q=S+1}^{q=P} \left(e^{-2r\pi\sqrt{\lambda_0}} \right)^q \right) \\
 &= \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \left(\sum_{q=0}^{q=P-S-1} \left(e^{-2r\pi\sqrt{\lambda_0}} \right)^q \right),
 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right) &= \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \frac{1 - e^{-2r(P-S)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{1 - e^{-2r\pi\sqrt{\lambda_0}}} \\
 &= \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{1}{r} \frac{e^{-2r(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{1 - e^{-2r\pi\sqrt{\lambda_0}}} - \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{1}{r} \frac{e^{-2r(P+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{1 - e^{-2r\pi\sqrt{\lambda_0}}}.
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right) \\
 &\leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} + \sum_{r=1}^{r=Q} \frac{e^{-2r(P+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour S fixé, la série $\sum_{r \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-2rq\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r}$ est absolument convergente vers $-\ln(1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}})$, et la série $\sum_{q \in \mathbb{N}} -\ln(1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}})$ est convergente car de même nature que la série $\sum_{q \in \mathbb{N}} e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}$. On en déduit que

la série double $\sum_{q=S+1}^{q=+\infty} \sum_{r=1}^{r=+\infty} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r}$ est convergente. Dans ces conditions,

en passant à la limite dans (5.13) quand $Q \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$0 \leq \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\sum_{r=1}^{r=+\infty} \frac{e^{-2qr\pi\sqrt{\lambda_0}}}{r} \right) \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(P+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \right), \quad (5.15)$$

qui s'écrit aussi :

$$0 \leq \sum_{q=S+1}^{q=P} \left(\ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \right) \leq \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \left(\ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(S+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2(P+1)\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right) \right). \quad (5.16)$$

En passant à la limite dans (5.16) quand $P \rightarrow +\infty$, on obtient (5.14). \square

Démontrons maintenant le corollaire du théorème 5.6, en reprenant les notations du paragraphe 5.2 :

$$\tilde{F}_q(x, y, x', y') = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{G}_p(x, x') e^{-2pq\pi\sqrt{\lambda_0}} \sin(p\pi y) \sin(p\pi y'),$$

avec :

$$\tilde{G}_p(x, x') = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{-p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} + e^{-2p\pi\sqrt{\lambda_0}} \left(e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}|x-x'|} - e^{p\pi\sqrt{\lambda_0}(x+x')} \right) \right)}{p}.$$

On a alors :

$$G(x, y, x', y') = \sum_{q=0}^{q=S} \tilde{F}_q(x, y, x', y') + \sum_{q \geq S+1} \tilde{F}_q(x, y, x', y').$$

Posons :

$$\mathcal{R}_S(x, y, x', y') = \sum_{q \geq S+1} \tilde{F}_q(x, y, x', y'),$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_S(x, y, x', y')| &\leq \sum_{q \geq S+1} \left| \tilde{F}_q(x, y, x', y') \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(3e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}\varepsilon} + e^{-\pi\sqrt{\lambda_0}} \right) \sum_{q \geq S+1} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-2q\pi\sqrt{\lambda_0}}} \right), \end{aligned}$$

en utilisant (5.11). Compte-tenu de (5.14), on obtient alors (5.12).

Posons $\mathfrak{R}_\varepsilon(S) = \max \{ |\mathcal{R}_S(x, y, x', y')| : (x, y, x', y') \in [0, 1]^4 ; \max(|x - x'|, |y - y'|) \geq \varepsilon \}$. Un calcul numérique avec Maple donne alors les résultats suivants :

1. Pour $\sqrt{\lambda_0} = 2$:

- Si $S = 0$, c'est-à-dire qu'on ne prend que le premier terme de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $3,33.10^{-6}$.

2. Pour $\sqrt{\lambda_0} = 1$:

- Si $S = 0$, c'est-à-dire qu'on ne prend que le premier terme de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $1,81.10^{-3}$,
- Si $S = 1$, c'est-à-dire qu'on prend deux termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $3,38.10^{-6}$,
- Si $S = 2$, c'est-à-dire qu'on prend trois termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $6,31.10^{-9}$.

3. Pour $\sqrt{\lambda_0} = 1/2$:

- Si $S = 0$, c'est-à-dire qu'on ne prend que le premier terme de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $4,71.10^{-2}$,
- Si $S = 1$, c'est-à-dire qu'on prend deux termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $1,99.10^{-3}$,
- Si $S = 2$, c'est-à-dire qu'on prend trois termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $8,61.10^{-5}$,
- Si $S = 3$, c'est-à-dire qu'on prend quatre termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $3,72.10^{-6}$,
- Si $S = 5$, c'est-à-dire qu'on prend six termes de la série, le reste $\mathfrak{R}_\varepsilon(S)$ est inférieur à $6,94.10^{-9}$.

Ces résultats sont bien cohérents avec ceux du paragraphe 5.2.

6. Théorème de Spitzer-Stone en dimension 1

Remarquons d'abord que si $\lambda_0 = 0$, $\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}$, $\alpha_p = 1$ et donc $\tilde{L} = \text{Id}$. Dans ces conditions, $F = \frac{1}{2}(1 - \chi) \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \text{Id}$ et on est ramené à la dimension 1, au coefficient $1/2$ près. Mais alors le symbole est singulier car il s'annule sur le tore \mathbb{T} . (Pour avoir $\lambda_0 = 0$, il suffit de prendre $b \rightarrow +\infty$ et $n = 1$). On a alors $\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}$; $\alpha_p = 1$, ce qui entraîne que $\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}$; $\gamma_p = 1$. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1. — $\forall k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq m$ et $\forall l \in \mathbb{N} : 1 \leq l \leq m$

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{kl}^{(p)} = \lim_{\substack{\gamma_p \rightarrow 1 \\ \forall p \in \{1; 2; \dots; n\}}} \frac{1}{2} \sigma_{kl}^{(p)} = \min(k, l) - \frac{kl}{m+1}.$$

Démonstration. — $\forall s \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{1; 2; \dots; n\}$, $\lim_{\gamma_p \rightarrow 1} \left(\frac{1 - (\gamma_p^2)^s}{1 - \gamma_p^2} \right) = s$.

Reprenant l'égalité (3.1), on a alors :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{kl}^{(p)} = \lim_{\substack{\gamma_p \rightarrow 1 \\ \forall p \in \{1; 2; \dots; n\}}} \frac{1}{2} \sigma_{kl}^{(p)} = \min(k, l) - \frac{kl}{m+1},$$

d'où le résultat. \square

Nous avons aussi la limite suivante :

PROPOSITION 6.2. — Si $k = [(m+1)x]$ et $l = [(m+1)x']$, avec $x \in [0, 1]$ et $x' \in [0, 1]$, alors :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma_{kl}^{(p)}}{2(m+1)} \right) = \min(x, x') - xx',$$

ce qui donne le noyau de Green de la dimension 1.

Démonstration. —

Cette proposition résulte de la précédente, en utilisant $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k}{m+1} = x$

et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{l}{m+1} = x'$.

On retrouve bien le résultat de la dimension 1. \square

Bibliography

- [B-G-N] BUZBEE (B.L.), GOLUB (G.H.), NIELSON (C.W.). — On direct methods for solving Poisson's equations, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.7, N° 4, p. 627-656 (Décembre 1970).
- [B-S1] BÖTTCHER (A.), SILBERMAN (B.). — *Asymptotics of Toeplitz Matrices*, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.
- [B-S2] BÖTTCHER (A.), SILBERMAN (B.). — *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer, 1990
- [B-S3] BÖTTCHER (A.), SILBERMAN (B.). — *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*, Springer, 1999.
- [Ch1] CHANZY (J.). — *Inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel et théorèmes-limite de Szegö*, Prépublication Orsay, Avril 2004.
- [Ch2] CHANZY (J.). — *Opérateurs de Toeplitz à symbole matriciel et Laplacien discret*, Thèse de Doctorat, Décembre 2004.
- [C-N-P] CHAN (R.H.). — *Generalization of Strang's Preconditioner with Applications to Toeplitz Least Squares Problems*, *Journal of Numerical Linear Algebra with Applications*, (1996).
- [D1] DORR (F.W.). — *The Direct Solution of the Discrete Poisson Equation on a Rectangle*, *SIAM Review* Vol.12, N° 2, Avril 1970.
- [D2] DOUGLAS (R.G.). — *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972.
- [D3] DOUGLAS (R.G.). — *Banach Algebra Techniques in theory of Toeplitz operators*, American mathematical society, 1973.
- [D-D] DUPLANTIER (B.), DAVID (F.). — *Exact Partition Functions and Correlation Functions of Multiple Hamiltonian Walks on the Manhattan Lattice*, *J.Stat.Phys.*51, p. 327-434, (1988).
- [G-G] GOHBERG (I.) GOLDBERG (S.). — *Basic Operator Theory*, Birkhäuser-Verlag Basel, 1981.
- [G-G-K1] GOHBERG (I.), GOLDBERG (S.), KAASHOEK (M.A.). — *Class of Linear Operators, Volume I*, Birkhäuser-Verlag Basel, 1990.
- [G-G-K2] GOHBERG (I.), GOLDBERG (S.), KAASHOEK (M.A.). — *Class of Linear Operators, Volume II*, Birkhäuser-Verlag Basel, 1993.
- [G-L] GREENGARD (L.), LEE (J.-Y.). — *A Direct Adaptive Poisson Solver of Arbitrary Order Accuracy*, <http://math.ewha.ac.kr/jylee/Paper/dp-jcp.pdf/>, Mars 1995.
- [G-L-R1] GOHBERG (I.), LANCASTER (P.), RODMAN (L.). — *Matrix Polynomials*, Academic Press, 1982.
- [G-L-R2] GOHBERG (I.), LANCASTER (P.), RODMAN (L.). — *Matrices and Indefinite Scalar Products*, Birkhäuser-Verlag Basel, 1983.
- [G-R] GRADSHTEYN (I.S.), RYZHIK (I.M.). — *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Inc. 1963.
- [G-S] GRENDER (U.), SZEGÖ (G.). — *Toeplitz Forms and their applications*, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.
- [Ha] HARDY (G.H.). — *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press, 1949.
- [H-L] HELSON (H.), LOWDENSLAGER (D.). — *Prediction theory and Fourier series in several variables*, *Acta Mathematica* 99, p. 165-202, (10/06/1958).
- [H-J1] HORN (R.A.), JOHNSON (C.R.). — *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

- [H-J2] HORN (R.A.), JOHNSON (R.C.). — Topics in matrix analysis, Cambridge University Press, 1986.
- [H-R-O'C] HU (G.Y.), RYU (J.Y.), O'CONNEL (R.F.). — Analytical solution of the generalized discrete Poisson equation, *J. Phys.A :Math.Gen*, 31(20 November 1998), p. 9279-9282.
- [J-M] JOMAA (Z.), MACASKILL (C.). — The embedded finite difference method for the Poisson equation in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions,
<http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/pubs/publist/publist.html?preprints/2003/jomaa-31.pdf>, 11 décembre 2003.
- [K] KENYON (R.). — The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, Prépublication Orsay 1998 (9854).
- [Ka] KAPIN (V.). — A method for numerical solution 2-D Poisson's equation with image fields, Proceedings of EPAC 2002.
- [Ma] MARTIN (A.). — Équations aux dérivées partielles, Exercices résolus, Dunod Université, 1991.
- [M-M] MARCUS (M.), MINC (H.). — A survey of Matrix theory and matrix inequalities, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
- [N] NIKOLSKI (N.V.). — Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading, American mathematical society, 2002
 Volume I : Hardy, Hankel and Toeplitz.
 Volume II : Model Operators and Systems.
- [R] ROBERTS (A.J.). — Simple and fast multigrid solution of Poisson's equation using diagonally oriented grids, *ANZIAM J*, 43(E)pp E1-E36, 13 juin 2001.
- [Re] REINHARD (H.). — Équations aux dérivées partielles, Dunod Université, 1991.
- [Ro] ROACH (G.F.). — Green's Functions Introductory theory with applications, Van Nostrand Reinhold Company, London 1970.
- [R-R1] ROSENBLUM (M.), ROVNYAK (J.). — Hardy Classes and Operator Theory, Oxford university press, 1985.
- [R-R2] ROSENBLUM (M.), ROVNYAK (J.). — Topics in Hardy classes and univalent functions, Birkhäuser-Verlag Basel, 1994.
- [R-R-S] RAMBOUR (Ph.), RINKEL (J.M.), SEGHIER (A.). — Développement Asymptotique de l'Inverse de Matrices de Toeplitz et Noyaux de Green, Prépublication de l'Université de Paris-Sud, 2000.
- [Se] SERRE (D.). — Les matrices, Théorie et pratique, Dunod, 2001.
- [S-S1] SPITZER (F.L.), STONE (C.J.). — A Class of Toeplitz Forms and their Applications to Probability Theory, *Illinois J.Math*, 4, p. 253-277, (1960).
- [S-S2] SCHUMANN (U.), SWEET (R.A.). — A direct Method for the Solution of Poisson's Equation with Neumann Boundary Conditions on a Staggered Grid of Arbitrary Size, *J.Comp.Phys*, 20, p. 171-182, (1970).
- [S-S3] SCHUMANN (U.), SWEET (R.A.). — Direct Poisson Equation Solver for Potential and Pressure Fields on a Staggered Grid with Obstacles, *Lect. Notes in Physics* 59, p. 398-403, (1976), (Proceedings of the 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Enschede, July 1976).
- [W1] WIDOM (H.). — Asymptotic Behavior of Block Toeplitz Matrices and Determinants, *Advances in Mathematics* 13, p. 284-322 (1974).
- [W2] WIDOM (H.). — Asymptotic Behavior of Block Toeplitz Matrices and Determinants, II. *Advances in Mathematics* 21, p. 1-29 (1976).

- [Y-Y] YAKHOT (A.), YOSIBASH (Z.). — The Poisson Equation with Local Non-regular Similarities, <http://www.bgu.ac.il/zohary/papers/NMPDE.01.pdf/>. 30 octobre 2000.
- [Z] ZHANG (F.). — Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Springer-Verlag, 1999.
- [Z-Q] ZUILY (C.), QUEFFÉLEC (H.). — Éléments d'Analyse pour l'Agrégation, Masson, 1995.