MÉMOIRES DE LA S. M. F.

WENDY ROBERTSON

Sur le théorème du graphe fermé

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 343-350
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__343_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 343-350.

SUR LE THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ

par

Wendy ROBERTSON

Une approche unifiée au théorème du graphe fermé nous permet de voir dans la même lumière des cas divers. Elle est fondée sur la méthode de J. L. Kelley [6], utilisant les structures uniformes sur l'espace de sous-ensembles de l'espace d'arrivée F . Dans une direction, on est conduit aux conditions sur F nécessaires et suffisantes lorsque l'espace de départ E est localement convexe tonnelé ou espace vectoriel ultratonnelé, et, au moyen d'une topologie de Y. Kōmura [7], à une classe d'espaces qu'on appelle K-complet. Dans une autre direction, l'usage des structures uniformes donne une preuve simple du théorème quand E est espace de Baire et F avec une toile. Une toile est une variante du réseau de M. De Wilde [2, 3] ; pour les espaces localement convexes, les espaces aux toiles absolument convexes et aux réseaux absolument convexes coïncident. La classe d'espaces aux toiles inclut donc les espaces usuels de l'analyse fonctionnelle pratique.

1. - Définitions et théorème du graphe fermé.

Soient E et F des espaces vectoriels topologiques séparés, munis des topologies ξ et η , avec les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des voisinages équilibrés U et V de o . Si E et F sont localement convexes, on suppose aussi que les voisinages de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{V}$ sont convexes. Nous placerons entre crochets les modifications appropriées au cas où les espaces sont tous deux localement convexes.

Soit $\mathfrak{w}$ une base de filtre de parties équilibrées de F , telle que pour tout $W \in \mathfrak{w}$ il existe $W' \in \mathfrak{w}$ avec $W' + W' \subseteq W$. On nomme $\mathfrak{w}$ base additive. On définit sur $\mathfrak{F}$, l'ensemble de toutes les parties de F , une structure uniforme, notée $\dot{\zeta}$, par une base d'entourages

$$\dot{W} = \{(A,B) : A \subseteq B + W \text{ et } B \subseteq A + W\} \text{ pour tout } W \in \mathfrak{w} .$$

Lorsque $\mathfrak{w}$ coïncide avec $\mathcal{V}$, cette structure n'est autre que la structure uniforme de Hausdorff $\dot{\eta}$, dérivée de la topologie η , considérée par Kelley pour les espaces localement convexes. Nous modifierons ici des définitions et des théorèmes de Kelley. Soit $\mathcal{A}$ une base de filtre sur F de parties équilibrées, telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe $A' \in \mathcal{A}$ avec $A' + A' \subseteq A$ et, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda A \in \mathcal{A}$. Dans $\mathfrak{F}$, $\mathcal{A}$ est un ensemble ordonné par inclusion dans F ; c'est donc un "net" d'éléments de $\mathfrak{F}$, que nous appellerons un net linéaire. Ce net est contenu dans

$\mathfrak{B}$, l'ensemble de toutes parties équilibrées de F ; il est aussi contenu dans $\mathcal{C}$, l'ensemble de toutes parties absolument convexes de F , si tout $A \in \mathfrak{A}$ est absolument convexe. Nous utiliserons ces notations sans mention expresse chaque fois.

Soit t une application linéaire de E dans F ; alors $t(\mathcal{U})$ est un net linéaire dans $\mathfrak{B}[\mathcal{C}]$. Dire que t est continue est exprimé par $t(\mathcal{U}) \to \{o\}$ pour $\dot{\eta}$. Si $t(\mathcal{U})$ est $\dot{\eta}$-convergent, une limite est nécessairement

$$\bigcap \{\overline{t(U)} : U \in \mathcal{U}\} = \bigcap \{t(U) + V : U \in \mathcal{U} , V \in \mathcal{V}\}$$

et cette dernière partie est $\{o\}$ si (et seulement si) le graphe de t est fermé. Ainsi pour prouver un théorème du graphe fermé, il suffit de choisir $\mathfrak{W}$ tel que

(1) tout $\dot{\zeta}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}[\mathcal{C}]$ soit $\dot{\eta}$-convergent ;

(2) $\overline{t^{-1}(W)}$ soit voisinage de o dans E pour tout $W \in \mathfrak{W}$.

En effet, (2) entraîne qu'il existe $U_W \in \mathcal{U}$ tel que $U_W \subseteq \overline{t^{-1}(W)}$; de là, $U \subseteq t^{-1}(W) + U'$ et donc $t(U) \subseteq t(U') + W$ pour tout U , $U' \subseteq U_W$, de sorte que $t(\mathcal{U})$ est ζ-Cauchy. Nous avons démontré :

THEOREME 1. - *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels topologiques* [*localement convexes*], t *une application linéaire à graphe fermé de* E *dans* F , *et* $\mathfrak{W}$ *une base additive dans* F , *tels que* (1) *et* (2) *ci-dessus soient remplies. Alors* t *est continue.*

2. - Espaces K-complets.

Lorsque $\mathfrak{W}$ est une base de voisinages de o pour une vraie topologie vectorielle [localement convexe] ζ sur F , $\{\overline{t^{-1}(W)} : W \in \mathfrak{W}\}$ est une base de voisinages de o ξ-fermés pour une topologie sur E . Ainsi (2) est satisfaite si E est ultratonnelé (voir (11)) [tonnelé], car cette topologie est moins fine que ξ dans ce cas. Il s'ensuit que, s'il existe une topologie ζ pour laquelle (1) est satisfaite, le théorème du graphe fermé est valable pour tout espace ultratonnelé [tonnelé] E . On peut démontrer en outre que, si (1) est satisfaite pour F , on obtient le théorème pour une application d'un tel E dans tout quotient séparé F/N . Réciproquement, on peut prouver que si ce théorème du graphe fermé est valable, alors (1) est vérifiée pour toute topologie ζ ultratonnelée [tonnelée] plus fine que η . Or, Kōmura [7] a défini la topologie tonnelée associée à une topologie localement convexe η ; c'est la topologie tonnelée la moins fine qui est plus fine que η . De la même façon, on a aussi une topologie ultratonnelée associée à η . Nous désignerons, dans ces deux cas, cette topologie par κ . Par conséquent :

THEOREME 2. - Pour que toute application linéaire à graphe fermé d'un espace ultratonnelé [tonnelé] dans un quotient séparé de l'espace vectoriel topologique [localement convexe] F soit continue, il faut et il suffit que tout $\dot{\varkappa}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}$ [$\mathcal{C}$] soit $\dot{\eta}$-convergent.

Nous appellerons K-complet un espace F satisfaisant les conditions équivalentes du théorème 2. Si F est ultratonnelé [tonnelé], c'est-à-dire $\varkappa = \eta$, K-complet et B-complet coïncident (avec la définition qu'un espace vectoriel topologique est B-complet si tout $\dot{\eta}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}$ est $\dot{\eta}$-convergent). Mais en général, un espace K-complet n'est pas nécessairement complet, comme on le voit immédiatement, puisque l'image continue d'un espace K-complet reste K-complet. Quant au théorème des homomorphismes, on peut démontrer :

THEOREME 3. - Pour que toute application linéaire (i) à graphe fermé (ii) continue, de F sur un espace ultratonnelé [tonnelé] soit ouverte, il faut et il suffit que (i) tout $\hat{\varkappa}$-Cauchy net linéaire, (ii) tout $\hat{\varkappa}$-Cauchy net linéaire moins fin que $\mathcal{V}$ dans $\mathfrak{B}$ [$\mathcal{C}$], soit $\dot{\eta}$-convergent.

On peut améliorer le théorème 3(ii) (dans une direction) :

THEOREME 4. - Pour que toute application linéaire continue de F sur un espace ultratonnelé [tonnelé] soit un homomorphisme, il faut et il suffit que tout $\dot{\beta}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}$[$\mathcal{C}$], moins fin que $\mathcal{V}$, soit $\dot{\eta}$-convergent.

Ici $\beta = \beta(F,F')$ pour un espace F localement convexe ; en général, $\beta = \beta(\eta) = \sup\{\theta$: il existe une base de θ-voisinages de o η-fermés$\}$. Utilisant β comme opérateur, pour les espaces localement convexes, et le théorème de Grothendieck sur le complété, Kōmura prouve que $\hat{F}(\varkappa) \subseteq \hat{F}(\eta)$, par induction transfinie. Avec β ici, et sans recours à la dualité, on obtient :

THEOREME 5. - Si F est un espace vectoriel topologique (localement convexe) muni d'une topologie η et si $\varkappa$ est la topologie ultratonnelée [tonnelée] associée, alors $\hat{F}(\varkappa) \subseteq \hat{F}(\eta)$.

On peut prouver :

THEOREME 6. - Si tout $\dot{\zeta}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}$ [$\mathcal{C}$] est η-convergent et si $\hat{F}(\zeta) \subseteq \hat{F}(\eta)$, alors F est ζ-complet.

COROLLAIRE. - Si F est $\varkappa$-complet, F est $\varkappa$-complet.

Ce théorème donne aussi une preuve directe, sans appel aux propriétés du dual, du fait qu'un espace B-complet est complet.

Un sous-espace fermé et un quotient séparé d'un espace K-complet restent K-complet, mais un exemple de Grothendieck ([4] p. 91-92) démontre qu'une limite inductive dénombrable ou un produit de deux espaces K-complets peuvent ne pas être K-complets. Cependant, la méthode de [10] th. 2, conduit à :

THEOREME 7. - Soient E espace de Baire et $F = \bigcup F_n$ limite inductive séparée d'espaces K-complets. Si t est une application linéaire à graphe fermé de E dans F, t est continue.

Dans chacun de ces théorèmes, on a aussi une forme restreinte (comme la distinction entre un espace B-complet et B_r-complet) : F est K_r-complet si tout $\dot{\varkappa}$-Cauchy net linéaire $\mathfrak{A}$, avec $\bigcap \{\bar{A} : A \in \mathfrak{A}\} = \{o\}$, dans $\mathfrak{B}[\mathcal{C}]$ est $\dot{\eta}$-convergent. Alors dans les formes restreintes, les nets linéaires satisfont cette condition, les applications doivent être de E dans F pour le théorème du graphe fermé et biunivoques de F sur E pour les théorèmes des homomorphismes ; et dans les propriétés de Krein-Šmul'ian (§. 4) les sous-espaces vectoriels doivent être denses.

3. - Espaces à toiles.

Considérons maintenant une autre méthode de vérifier les conditions (1) et (2). Une toile est une famille $\mathfrak{w}$ dénombrable de parties équilibrées d'un espace vectoriel F ; ce concept est semblable à celui du réseau absorbant de De Wilde [2] mais avec une hypothèse de plus. Le premier étage de la toile se compose d'une suite (A_i), telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ absorbe tout point de F ; pour tout i, il y a une suite (A_{ij}) du deuxième étage, telle que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ absorbe tout point de A_i et que $A_{ij} + A_{ij} \subseteq A_i$ pour tout j. On continue ce procédé. Une suite (W_k), $W_k \in \mathfrak{w}$, telle que, pour tout k, W_k est choisie du $k^{\text{ème}}$ étage et W_{k+1} et W_{k+1} de la suite du $(k+1)^{\text{ème}}$ étage déterminée par W_k, est dite un toron de la toile. Un toron définit une structure uniforme $\dot{\zeta}$ sur $\mathfrak{F}$, car $W_{k+1} + W_{k+1} \subseteq W_k$.

Soit E un espace de Baire et t une application linéaire de E dans F, à toile $\mathfrak{w}$. Alors on peut choisir un toron, tel que $\overline{t^{-1}(W_k)}$ est voisinage de o pour tout k. Cela résulte de la dénombrabilité de chaque étage et les propriétés d'absorption ; c'est la propriété d'additivité $(A_{ij} + A_{ij} \subseteq A_i)$ qui nous permet de dire voisinage de o.

Soit F un espace vectoriel topologique muni d'une topologie η et à toile $\mathfrak{W}$; on dit que $\mathfrak{W}$ est *du type* (c) si, pour tout toron, tout $\dot{\zeta}$-Cauchy net dans $\mathfrak{F}$ est $\dot{\eta}$-convergent. On peut substituer "suite" à "net" ici, car chaque $\dot{\zeta}$ est semimétrisable. Ainsi, grâce au théorème 1, on a évidemment :

THEOREME 8. - *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques* [*localement convexes*] *séparés,* E *de Baire et* F *à toile du type* (c). *Si* t *est une application linéaire à graphe fermé de* E *dans* F , t *est continue*.

La genèse de l'utilisation de l'espace $\mathfrak{F}$ de parties de F est le théorème que $\mathfrak{F}$ est complet pour la distance de Hausdorff si F est complet métrique. Une preuve se sert d'une série convergente, et il en est de même pour les preuves du théorème du graphe fermé de Banach et de De Wilde. Ici, on fait le rapport avec :

THEOREME 9. - *Soit* (W_k) *un toron d'une toile dans* F . *Pour que toute* $\dot{\zeta}$*-Cauchy suite dans* $\mathfrak{F}$ *soit* $\dot{\eta}$*-convergente, il est nécessaire et suffisant que toute série* $\Sigma\, x_k$ *avec* $x_k \in W_k$ *soit convergente.*

Une toile du type (c) a deux qualités. Elle est "compatible" avec la topologie ; c'est-à-dire que toute $\dot{\zeta}$ est plus fine que $\dot{\eta}$, et on l'appelle dans ce cas une η-*toile*. Aussi, elle donne "suffisamment" de limites. Si F est complet pour les suites, une η-toile est du type (c). L'injection $x \to \{x\}$ plonge F dans $\mathfrak{F}$; désignons par ζ la topologie déduite de la structure uniforme induite sur F par $\mathfrak{F}$. C'est une topologie de groupe abélien, à base de voisinages (W_k) de o . On déduit :

COROLLAIRE du théorème 9. - *Toute* $\dot{\zeta}$*-Cauchy suite dans* $\mathfrak{F}$ *est* $\dot{\eta}$*-convergente si et seulement si toute* ζ*-Cauchy suite dans* F *est* η*-convergente*.

THEOREME 10. - *Pour qu'une toile* $\mathfrak{W}$ *soit du type* (c), *il faut et il suffit que, pour tout toron, toute* ζ*-Cauchy suite dans* F *soit* η*-convergente.*

On dit qu'une toile $\mathfrak{W}$ du type (c) est *stricte* si $\mathfrak{F}$ est $\dot{\zeta}$-complet pour tout toron ; ceci équivaut à F ζ-complet pour tout toron. On peut démontrer

THEOREME 11. - *Une toile du type* (c) *aux parties* η*-fermées est stricte.*

Pour les espaces aux toiles strictes, on obtient des "théorèmes de localisation" comme ceux de De Wilde [3]. Dans un espace localement convexe, il y a une toile du type (c) stricte aux parties absolument convexes si et seulement si il y a un réseau du type $(\mathcal{C})$ strict. D'une façon plus générale, il y a une toile du type (c) si et seulement si il y a un réseau $\{A_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ satisfaisant :

pour tout (n_k), il existe $\alpha_{n_1 \ldots n_k}$ tel que $A_{n_1 \ldots n_k} + A_{n_1 \ldots n_k} \subseteq \alpha_{n_1 \ldots n_k} A_{n_1 \ldots n_{k-1}}$.

Les propriétés de permanence des espaces vectoriels topologiques à toiles du type (c) sont les mêmes que celles des espaces localement convexes à réseaux du type $(\mathcal{C})$. En fait, la classe des espaces avec une η-toile, ou une toile du type (c), ou stricte, est stable pour le passage à un sous-espace vectoriel fermé et à une image continue et pour les opérations de former des produits dénombrables et des limites inductives dénombrables. La classe à toiles strictes du type (c) inclut donc tous les espaces usuels d'analyse fonctionnelle, et en particulier ceux de la théorie des distributions ; elle inclut les espaces formés par les opérations permises à partir d'espaces vectoriels topologiques métrisables. Elle contient aussi une grande classe d'espaces d'applications linéaires continues.

En vue du §. 2, il est naturel de définir une η-toile comme étant du type (lc) si pour tout toron, tout $\dot{\zeta}$-Cauchy net linéaire dans $\mathfrak{B}[\mathcal{C}]$ est $\dot{\eta}$-convergent. Cela suffit pour un théorème du graphe fermé de E, un espace de Baire, dans F. Si F a une toile du type (c), et si E est métrisable de Baire, le théorème est encore valable si on suppose seulement que le graphe est fermé pour les suites. Mais si F a une toile du type (lc), j'ignore si ce résultat subsiste. De plus, j'ignore si les toiles dans un produit ou une limite inductive dénombrable d'espaces à toiles du type (lc) restent du type (lc) (même le produit de deux espaces). Il y a une analogie naturelle entre les espaces à toiles du type (c) ou (lc) et les espaces hypercomplets ou B-complets, qui se reflète dans leurs propriétés de Krein-Šmulian dans le cas localement convexe.

4. - Propriétés de Krein-Šmulian.

Soit F localement convexe séparé, avec dual F'. On peut considérer la condition suivante : si $M \subseteq F'$, avec $M \cap V^o$ $\sigma(F', F)$-fermé pour tout $V \in \mathcal{V}$, alors M soit $\sigma(F', F)$-fermé. Pour que F soit B-complet, il faut et il suffit que cette condition soit vérifiée pour tout sous-espace vectoriel M de F' ; et F hypercomplet correspond à M une partie absolument convexe. Soit maintenant $\mathfrak{W}$ une base de voisinages de o pour une topologie ζ plus fine que η ; nous écrivons :

KS : si $M \subseteq F^*$, avec $M \cap W^o$ $\sigma(F^*, F)$-fermé pour tout $W \in \mathfrak{W}$, alors $M \cap F'$ est $\sigma(F', F)$-fermé.

THEOREME 12. - KS *pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F^* *équivaut à tout* $\dot{\zeta}$ *-Cauchy net linéaire dans* $\mathcal{C}$ $\dot{\eta}$*-convergent* ; KS *pour toute partie* M *absolument convexe équivaut à tout* $\dot{\zeta}$ *-Cauchy net dans* $\mathcal{C}$ $\dot{\eta}$*-convergent.*

Avec $\zeta = \kappa$, on retrouve les résultats de Valdivia [12] et d'Adasch [1] pour le théorème du graphe fermé lorsque E est tonnelé. Avec $\zeta = \beta$, cette condition réduit à celles de Husain [5] et de Valdivia [13] pour le théorème de homomorphismes lorsque E est tonnelé. Si $\zeta = \beta$, les conditions de Persson [9] et de McIntosh [8] entraînent que tout $\dot{\beta}$-Cauchy net linéaire est $\dot{\eta}$-convergent et donnent donc le théorème du graphe fermé. Dans tous ces cas, on a aussi les formes restreintes appropriées.

Supposons d'autre part que F a une toile η-toile $\mathfrak{W}$. Ecrivons maintenant :

KS (1) : si $M \subseteq F^*$, tel qu'il y a un toron avec $M \cap W_k^o$ $\sigma(F^*, F)$-fermé pour tout k , alors $M \cap F'$ est $\sigma(F', F)$-fermé ;

et écrivons :

KS (2) quand on remplace "$\sigma(F^*, F)$-fermé" par "$\sigma(F^\star, F)$-compact".

THEOREME 13. - *Si* KS(1) *pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F^*, *alors* $\mathfrak{W}$ *est du type* (1c) . *Si tout* $W \in \mathfrak{W}$ *est absolument convexe et* $\mathfrak{W}$ *du type* (1c) , *alors* KS(2) *pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F^* .

Supposons que tout $W \in \mathfrak{W}$ *soit absolument convexe. Alors* KS(1) *pour toute partie* M *absolument convexe implique que* $\mathfrak{W}$ *est du type* (c), *ce qui entraîne* KS(2) *pour toute partie* M *absolument convexe.*

THEOREME 14. - *Soient* E *et* F *localement convexes*, E *de Baire et* F *à une* η*-toile satisfaisant* KS(2) *pour tout sous-espace vectoriel* M *de* F^* . *Si* t *est une application à graphe fermé de* E *sur* F , t *est continue.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADASCH (N.). - Tonnelierte Raüme und zwei Sätze von Banach, Math. Ann. 186 (1970), 209-214.

[2] DE WILDE (M.). - Sur le théorème du graphe fermé. C. R. Acad. Sci. Paris, 265 (1967), 376-379.

[3] DE WILDE (M.). - Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes. Thèse, Université de Liège, 1969.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasiliensis Math. 3 (1954), 57-121.

[5] HUSAIN (T.). - Locally convex spaces with the B(ζ)-property. Math. Ann. 146 (1962), 413-422.

[6] KELLEY (J. L.). - Hypercomplete linear topological spaces. Michigan Math. J. 5 (1958), 235-246.

[7] KOMURA (Y.). - On linear topological spaces. Kumamoto J. Sci. Ser. A. 5 (1962) 148-157.

[8] McINTOSH (A.). - On the closed graph theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 397-404.

[9] PERSSON (A.). - A remark on the closed graph theorem in locally convex vector spaces. Math. Scand. 19 (1966), 54-58.

[10] ROBERTSON (A.P.) and ROBERTSON (W.). - On the closed graph theorem. Proc. Glasgow Math. Assoc. 3 (1956), 9-12.

[11] ROBERTSON (W.). - Completions of topological vector spaces. Proc. London Math. Soc. 8 (1958), 242-257.

[12] VALDIVIA (M.). - El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Rev. Acad. Ci. Madrid, 62 (1968), 545-551.

[13] VALDIVIA (M.). - El teorema general de la aplicación abierta en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Rev. Acad. Ci. Madrid, 62 (1968), 553-562.

1, Church Plantation
KEELE, Staffs.
(Grande-Bretagne)