

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN RISS

## Analyse harmonique et familles sommables

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 321-325

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_321\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__321_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANALYSE HARMONIQUE ET FAMILLES SOMMABLES

par

Jean RISS

Un théorème d'Orlicz-Pettis, qui a reçu d'intéressantes généralisations de la part de Thomas, peut se traduire en disant que si une fonction additive d'ensembles à valeurs dans un espace normé est  $\sigma$ -additive pour la topologie faible elle est aussi  $\sigma$ -additive pour la topologie de la norme. Un énoncé équivalent est le suivant : si  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de fonctions continues définies sur un espace compact, à valeurs réelles, telles que :

$$\bullet \quad \forall t \in K \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(t)| < \infty$$

$$\bullet \quad \forall A \subset \Lambda \quad t \rightarrow \sum_{\lambda \in A} f_\lambda(t) \quad \text{est continue}$$

alors ces sommes sont uniformément convergentes.

Il est évident que dans le cas où les  $f_\lambda$  sont positives, ceci n'est rien d'autre que le théorème de Dini. En fait, on peut se ramener à ce cas en considérant les fonctions  $|f_\lambda|^2$  à condition de savoir étudier :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(t)|^2.$$

Or on peut interpréter ceci comme une partie du second membre d'une relation de Parseval-Bessel (en introduisant l'analyse harmonique sur l'ensemble  $\mathcal{P}(\Lambda)$  des parties de  $\Lambda$ ) et en tirer les conclusions cherchées. C'est ce qui va être développé.

## 1. L'anneau topologique compact $\mathcal{P}(X)$ .

Soit  $X$  un ensemble quelconque ; on sait que l'ensemble de ses parties  $\mathcal{P}(X)$  est d'une façon naturelle muni d'une structure d'anneau et que l'on peut en faire un anneau topologique compact en prenant comme système fondamental de voisinages de l'élément neutre  $\emptyset$  la famille des idéaux  $\mathcal{J}(F)$

$$\mathcal{J}(F) = \{A, A \subset F\}$$

où  $F$  décrit l'ensemble  $\mathcal{P}_0(X)$  des parties finies de  $X$  . Dans la suite  $\mathcal{P}(X)$  est considéré comme muni de cette structure d'anneau topologique. Les propriétés sui-

vantes de  $\mathcal{P}(X)$  seront utilisées :

- $\mathcal{P}_0(X)$  est dense dans  $\mathcal{P}(X)$ ,
- le dual du groupe abélien compact  $\mathcal{P}(X)$  s'identifie intrinsèquement à  $\mathcal{P}_0(X)$  par la formule exprimant la dualité :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}_0(X) & & \mathbb{T} \\ (A, F) & \rightarrow & (-1)^{\text{card}(AF)} \end{array}$$

- pour l'intégrale de Haar normalisée sur  $\mathcal{P}(X)$ , l'intégrale d'une fonction continue  $f$  à valeurs complexes est donnée par :

$$\lim_{F \rightarrow X} \frac{1}{2^{\text{card } F}} \sum_{A \subset F} f(A)$$

(limite suivant le filtre intersection avec  $\mathcal{P}_0(X)$  du filtre des voisinages de  $X$  dans  $\mathcal{P}(X)$ ).

## 2. Fonctions additives continues.

Soit  $G$  un groupe topologique abélien séparé. Une fonction additive continue à valeurs dans  $G$  sera une fonction continue

$$\mathcal{V}(X) \xrightarrow{f} G$$

telle que :

$$AB = \phi \Rightarrow f(A + B) = f(A) + f(B).$$

Une telle fonction est complètement déterminée par sa restriction à  $\mathcal{P}_0(X)$  donc aussi par les éléments :

$$f(\{x\})$$

et ceux-ci sont tels que toute famille

$$(f(\{x\}))_{x \in A} \quad A \subset X$$

est sommable, de somme  $f(A)$ . Inversement, la donnée d'une famille d'éléments vérifiant ces conditions détermine une  $f$  additive continue.

$\mathcal{V}(X)$  étant en particulier un espace de Baire, il est immédiat de vérifier que :

- si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues de  $\mathcal{V}(X)$  dans  $\mathbb{T}$ , convergeant simplement vers une fonction additive  $f$  alors  $f$  est continue.
- si de plus les  $f_n$  sont additives, la convergence est uniforme.

Une fonction additive continue vérifie évidemment les deux conditions suivantes :

$$f(\rho(X) \subset \overline{f(\rho_0(X))} \quad \text{et} \quad \overline{f(\rho_0(X))} \text{ est un compact,}$$

mais réciproquement si l'on suppose que  $f$  est additive, elle vérifie ces deux conditions, et si de plus  $\overline{f(\rho_0(X))}$  ne contient aucun de ses translatés par une translation non nulle, alors  $f$  est continue, modulo une fonction additive nulle dans  $\rho_0(X)$ .

Un exemple simple et utile de fonction additive continue est le suivant : Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles ; associons à chaque  $y \in Y$  une partie  $X_y$  de  $X$  telle que :

$$y' \neq y \Rightarrow X_{y'}, X_y = \emptyset$$

alors la fonction  $\pi$

$$\begin{array}{ccc} \rho(Y) & & \rho(X) \\ B & \rightarrow & \pi(B) = \bigcup_{y \in B} X_y \end{array}$$

est une fonction additive continue (cette propriété contient le théorème dit d'associativité des familles sommables).

### 3. La transformée de Fourier des fonctions additives continues à valeurs complexes.

Soit  $f$  une telle fonction ; sa transformée de Fourier  $\mathfrak{F}f$ , définie sur le groupe discret  $\rho_0(X)$ , est donnée par :

$$\mathfrak{F}f(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{card } F > 1 \\ -\frac{1}{2} f(\{x\}) & \text{si } F = \{x\} \\ \frac{1}{2} f(X) & \text{si } F = \emptyset \end{cases}$$

et on a donc la relation :

$$\int_{\rho(X)} |f(A)|^2 dA = \frac{1}{4} |f(X)|^2 + \frac{1}{4} \sum_{x \in X} |f(\{x\})|^2$$

### 4. L'énoncé du problème.

Soit  $f : \rho(X) \rightarrow G$  une fonction additive continue pour une topologie donnée  $\mathcal{C}_0$  de  $G$  ; peut-on définir sur  $G$  des topologies de groupe topologique  $\mathcal{C}_1$  plus fine que  $\mathcal{C}_0$  et pour lesquelles  $f$  est encore continue ?

C'est ce que l'on va essayer de faire. Disons d'abord que l'on arrivera au résultat en utilisant deux types d'arguments :

- on vérifiera d'abord que la restriction de  $f$  à  $\rho_0(X)$  reste continue pour  $\mathcal{C}_1$ ,
- puis par des considérations de nature différente on vérifiera que  $f$  est continue pour  $\mathcal{C}_1$ .

##### 5. Le théorème.

En plus de  $G$  donnons-nous un espace topologique  $T$  et sur  $G \times T$  une fonction à valeurs complexes

$$(g, t) \rightarrow \langle g, t \rangle$$

ayant les propriétés suivantes :

- $t \rightarrow \langle g, t \rangle$  est continue,
- la restriction de  $g \rightarrow \langle g, t \rangle$  à tout compact de  $G$  est continue
- $g \rightarrow \langle g, t \rangle$  est additive.

Posons :

$$\|g\|_K = \sup_{t \in K} |\langle g, t \rangle|$$

où  $K$  est un compact de  $T$  et définissons  $\mathcal{C}_1$  comme étant la borne supérieure de  $\mathcal{C}_0$  et de la topologie définie par la famille de distances  $\|g_2 - g_1\|_K$  où  $K$  parcourt la famille des parties compactes de  $T$ .

Alors la restriction de  $f$  à  $\rho_0(X)$  est encore continue pour la topologie  $\mathcal{C}_1$ .

En effet, on a :

$$4. \int_{\rho(X)} |\langle f(A), t \rangle|^2 dA = |\langle f(X), t \rangle|^2 + \sum_{x \in X} |\langle f(\{x\}), t \rangle|^2$$

et il en résulte que :

$$t \rightarrow \sum_{x \in X} |\langle f(\{x\}), t \rangle|^2$$

est séquentiellement continue. On en déduit que la convergence de cette somme est uniforme sur tout compact  $K$  en examinant successivement

- le cas où  $K$  est métrisable,
- le cas où  $X$  est dénombrable,
- le cas général.

Cette propriété de convergence uniforme entraîne alors la continuité de la restriction de  $f$  à  $\rho_0(X)$  pour  $\mathcal{C}_1$ .

Ensuite :

- . si  $G$  est  $\mathcal{C}_1$ -complet,
- . ou si l'élément neutre de  $G$  possède un système fondamental de  $\mathcal{C}_1$ -voisinages qui sont  $\mathcal{C}_0$ -fermés, alors  $f$  est continue pour  $\mathcal{C}_1$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ORLICZ. - Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen. I, Studia Math. 4, p. 33-37 (1933). II, ibid. 4, p. 41-47 (1933).
- [2] PETTIS. - Linear functionals and completely additive set functions. Duke Math. J. 4, p. 552-565 (1938).
- [3] THOMAS. - Thèse, Paris, 1969, A. O. 3423, (appendice II).

Université de Bordeaux-I  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
351, Cours de la Libération  
33 - TALENCE (France)

---