MÉMOIRES DE LA S. M. F.

G. NOEL

Espaces de Banach ultraplats et espaces de Lindenstrauss-Pelczynski

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 257-263
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__257_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 257-263.

ESPACES DE BANACH ULTRAPLATS ET ESPACES DE LINDENSTRAUSS-PELCZYNSKI

par

G. NOEL

I. Introduction -

La catégorie QESPC des Q-espaces complets a déjà été décrite par M. Waelbroeck dans son exposé. Cette catégorie peut être munie de façon naturelle d'un produit tensoriel, associatif et commutatif. Rappelons qu'un Q-espace complet Z peut être considéré comme un "quotient formel", noté $Z = Y|X$, où X et Y sont deux espaces bornologiques convexes complets, l'espace vectoriel sous-jacent à X étant un sous-espace vectoriel de Y , et l'application canonique $X \to Y$ étant supposée bornée. La relation $Z = Y|X$ signifie en fait que Z est conoyau de cette injection canonique : la suite

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

est exacte dans la catégorie abélienne QESPC.

On peut, de plus, supposer que l'espace Y est projectif dans QESPC. Un tel espace est un facteur direct d'une somme directe d'espaces de Banach du type $\ell^1(I)$. En particulier, un espace de Banach est projectif dans QESPC si et seulement s'il est isomorphe (*) à un tel espace $\ell^1(I)$.

Le produit tensoriel de deux Q-espaces complets Z , T est défini de la façon suivante : écrivons $Z = Y|X$ et $T = U|V$ où les espaces bornologiques convexes complets Y et U sont, chacun, une somme directe d'espaces de Banach du type $\ell^1(I)$. Alors :

$$Z \hat{\otimes}_q T = Y \hat{\otimes}_b U \mid (Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U) .$$

Dans cette formule, $\hat{\otimes}_q$ désigne le produit tensoriel que nous définissons dans QESPC, cependant que $\hat{\otimes}_b$ désigne le produit tensoriel bornologique inductif des espaces bornologiques convexes complets : si Y (resp. U) est la limite inductive des espaces de Banach Y_i (resp. U_j), alors $Y \hat{\otimes}_b U$ est la limite inductive des espaces de Banach $Y_i \hat{\otimes}_1 U_j$ où, cette fois, $\hat{\otimes}_1$ désigne le produit tensoriel projectif d'espaces de Banach (plus souvent noté $\hat{\otimes}_\pi$). Bien entendu, il convient de montrer que les espaces vectoriels sous-jacents à $Y \hat{\otimes}_b V$ et $X \hat{\otimes}_b U$ s'identifient canoniquement à des sous-espaces vectoriels de $Y \hat{\otimes}_b U$, ce qui permet de définir $Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U$ (qui n'est pas leur somme directe). Il convient aussi de montrer que

(*) Dans cette note, deux espaces de Banach sont dits isomorphes s'il existe une application linéaire continue inversible de l'un sur l'autre.

le Q-espace complet $Z \hat{\otimes}_q T$ ne dépend qu'à un isomorphisme près des décompositions choisies pour Z et T. On trouvera tous les détails concernant les Q-espaces dans [3], [4] et [5].

N'importe quel espace de Banach E peut être considéré comme étant un Q-espace. Il suffit d'écrire $E = E|0$. On obtient une décomposition $E = Y|X$ avec Y projectif dans QESPC en exprimant que E est un quotient de $\ell^1(B)$, si B est la boule unité de E.

Etant donnés deux espaces de Banach, E et F, nous souhaitons comparer le Q-espace complet $E \hat{\otimes}_q F$ à l'espace de Banach $E \hat{\otimes}_1 F$. Si $E = Y/X$ et $F = U/V$, où Y et U sont des espaces de Banach projectifs, d'une façon générale, nous pouvons seulement affirmer que $E \hat{\otimes}_1 F$ est le quotient (usuel) de $Y \hat{\otimes}_1 U$ par l'adhérence de $Y \hat{\otimes}_1 V + X \hat{\otimes}_1 U$, ce qui revient à dire que tout morphisme de $E \hat{\otimes}_q F$ dans un espace de Banach se factorise à travers $E \hat{\otimes}_1 F$. Introduisons la définition suivante :

DEFINITION. - L'espace de Banach E est dit ultraplat si et seulement si les Q-espaces complets $E \hat{\otimes}_q F$ et $E \hat{\otimes}_1 F$ sont isomorphes, quel que soit l'espace de Banach F.

Nous montrerons ci-dessous que les espaces de Banach ultraplats sont précisément les espaces de type $\mathcal{L}_1$ introduits par Lindenstrauss et Pelczynski [1]. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant : le Q-espace $Z = Y|X$ est un espace bornologique convexe, si et seulement si X est un sous-espace fermé de Y, c'est-à-dire si la bornologie de X est la bornologie induite par Y. Z est alors simplement le quotient usuel Y/X. En particulier, pour que E soit ultraplat, il faut et il suffit que $E \hat{\otimes}_q F$ soit un espace de Banach, quel que soit l'espace de Banach F.

II. Espaces de type $\mathcal{L}_1$.

Si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes, on pose :

$$d(E,F) = \inf\{ \|A\| . \|A^{-1}\| : A \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } F \}.$$

D'après Lindenstrauss et Pelczynski, [1], un espace de Banach E est dit de type $\mathcal{L}_{1,\lambda}(\lambda \geq 1)$ si et seulement si tout sous-espace de dimension finie S de E est inclus à un sous-espace de dimension finie T tel que :

$$d(T, \ell^1_n) \leq \lambda$$

où $n = \dim T$, et où ℓ^1_n est l'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$.

<u>Un espace de Banach est dit de type</u> $\mathcal{L}_{1,\lambda+}$ <u>s'il est de type</u> $\mathcal{L}_{1,\mu}$ <u>pour tout</u> $\mu>\lambda$. <u>Il est dit de type</u> $\mathcal{L}_1$ <u>s'il est de type</u> $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ <u>pour un certain</u> λ .

Nous utiliserons encore le produit tensoriel $\hat{\hat{\otimes}}_1$ introduit par P. Saphar, [7], (où il est noté $g_1\backslash$) : tout tenseur $u \in E \otimes F$ peut être considéré comme un opérateur de rang fini, donc (absolument) sommant de E' dans F . (La notion d'opérateur sommant remonte à Grothendieck. Elle est traitée de façon détaillée dans le livre de A. Pietsch, [6]). Si nous notons $S_1(E', F)$ l'espace des opérateurs sommants de E' dans F , le produit tensoriel $E\,\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ est l'adhérence de $E\otimes F$ dans $S_1(E', F)$. La norme de u dans $E\,\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ est donc l'infimum des ρ tels que :

$$\forall x'_1, \dots, x'_m \in E' : \sum_{j=1}^{m} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \langle x'_j , x_i\rangle y_i \Big\| \leqslant \rho \sup_{\|v\|\leqslant 1} \sum_{j=1}^{m} |\langle x'_j , v\rangle| .$$

En particulier, il est immédiat que

$$\|x\otimes y\|_1 \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

et ceci signifie que l'application bilinéaire canonique $E\times F \to E\,\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ est continue et définit donc une application linéaire canonique de $E\,\hat{\otimes}_1 F$ dans $E\,\hat{\hat{\otimes}}_1 F$, de norme au plus 1 :

$$\|u\|_1 \leqslant |u|_1$$

(nous notons d'une simple barre la norme dans le produit tensoriel projectif).

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach. Quel que soit l'entier naturel</u> n , <u>l'opérateur de transposition</u> $\sigma : \ell^1_n \otimes E \to E \otimes \ell^1_n : \sum_i \xi_i \otimes x_i \to \sum_i x_i \otimes \xi_i$ <u>se prolonge en un opérateur linéaire continu, de norme</u> $\leqslant 1$, <u>de</u> $\ell^1_n \,\hat{\hat{\otimes}}_1 E$ <u>dans</u> $E\,\hat{\otimes}_1 \ell^1_n$.

Désignons par (δ_i) $(i = 1,\dots, n)$ la base canonique de ℓ^1_n , ou $\ell^\infty_n = (\ell^1_n)'$: $\delta_i = (\delta_{ij})$ $(j = 1,\dots, n)$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes \xi_i \in E\otimes \ell^1_n$. On a :

$$\Big|\sum_{i=1}^{s} x_i\otimes\xi_i\Big|_1 = \Big|\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} x_i\xi_{ij}\Big)\otimes\delta_j\Big|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big\|\sum_{i=1}^{s} x_i\xi_{ij}\Big\| \cdot \|\delta_j\| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big\|\sum_{i=1}^{s} x_i\xi_{ij}\Big\| = \sum_{j=1}^{n} \Big\|\sum_{i=1}^{s} \langle\delta_j,\xi_i\rangle x_i\Big\|$$

$$\leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{s} \xi_i\otimes x_i\Big\|_1 \sup_{\substack{\|\varphi\|\leqslant 1\\ \varphi\in\ell^1_n}} \sum_{j=1}^{m} |\langle\delta_j, \varphi\rangle| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{s} \xi_i\otimes x_i\Big\|_1$$

THEOREME. - <u>Soit E un espace de Banach de type $\mathcal{L}_{1,\lambda+}$. Quel que soit l'espace de Banach F, l'opérateur de transposition $\sigma : E\otimes F \to F\otimes E$ se prolonge en un opérateur linéaire continu de norme</u> $\leqslant\lambda$, <u>de</u> $E\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ <u>dans</u> $F\hat{\otimes}_1 E$.

La démonstration utilise la propriété suivante (voir [7]), qui exprime que la norme de $E\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ est une $\otimes$-norme au sens de Grothendieck : si $u\in E\otimes F$, alors :

$$\|u\|_1 = \inf \|u\|_{S\hat{\hat{\otimes}}_1 T}$$

où S (resp. T) parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E (resp. F), tels que $u \in S\otimes T$, et où $\|u\|_{S\hat{\hat{\otimes}}_1 T}$ désigne la norme de u dans $S\hat{\hat{\otimes}}_1 T$. On sait que cette propriété est également valable pour la norme de $E\hat{\otimes}_1 F$.

Considérons alors un tenseur $u \in E\otimes F$. Soient S et T des sous-espaces de dimension finie de E et F respectivement, tels que $u \in S\otimes T$. Soit $\varepsilon>0$. Puisque E est de type $\mathcal{L}_{1,\lambda+}$, il existe un sous-espace de dimension finie S_1 de E tel que :

$$d(S_1 , \ell_n^1) \leqslant \lambda + \varepsilon .$$

Désignons alors par A un isomorphisme de S_1 sur ℓ_n^1 tel que :

$$\|A\| \leqslant 1 \quad\text{et}\quad \|A^{-1}\| \leqslant \lambda + 2\varepsilon .$$

Il vient :

$$|\sigma u|_1 \leqslant |\sigma u|_{T\hat{\otimes}_1 S_1} \leqslant (\lambda + 2\varepsilon)\ |1\otimes A . \sigma u|_{T\hat{\otimes}_1 \ell_n^1} .$$

Du lemme précédent, on déduit alors :

$$|\sigma u|_1 \leqslant(\lambda+2\varepsilon)\ \|A\otimes 1.u\|_{\ell_n^1\hat{\otimes}_1 T} \leqslant (\lambda+2\varepsilon)\ \|u\|_{S_1\hat{\hat{\otimes}}_1 T} \leqslant (\lambda+2\varepsilon)\ \|u\|_{S\hat{\hat{\otimes}}_1 T} .$$

Cette inégalité étant vraie quels que soient S, T, il vient :

$$|\sigma u|_1 \leqslant (\lambda + 2\varepsilon)\ \|u\|_1 .$$

Et enfin, puisque ε est arbitraire : $|\sigma u|_1 \leqslant \lambda\ \|u\|_1$.

COROLLAIRE 1. - <u>Si E est un espace de Banach de type $\mathcal{L}_{1,\lambda+}$, alors les espaces</u> $E\hat{\otimes}_1 F$ <u>et</u> $E\hat{\hat{\otimes}}_1 F$ <u>sont isomorphes quel que soit l'espace de Banach F. De plus,</u> $d(E\hat{\otimes}_1 F , E\hat{\hat{\otimes}}_1 F)\leqslant\lambda$.

En effet, d'après le théorème précédent, nous pouvons écrire une suite d'applications canoniques continues : $E\hat{\otimes}_1 F \to E\hat{\hat{\otimes}}_1 F \to F\hat{\otimes}_1 E$. La thèse se déduit de ce que les espaces $E\hat{\otimes}_1 F$ et $F\hat{\otimes}_1 E$ sont isométriques.

COROLLAIRE 2. - *Soit* E *un espace de Banach de type* $\mathcal{L}_1$. *Si* G *est un espace de Banach et* F *un sous-espace fermé de* G , *alors* $E \hat{\otimes}_1 F$ *est un sous-espace fermé de* $E \hat{\otimes}_1 G$.

En effet, $E \hat{\otimes}_1 F$ est isomorphe à $E \hat{\hat{\otimes}}_1 F$; cet espace est un sous-espace fermé de $E \hat{\hat{\otimes}}_1 G$ (car $S_1(E', F)$ est un sous-espace fermé de $S_1(E', G)$). Et enfin, $E \hat{\hat{\otimes}}_1 G$ est isomorphe à $E \hat{\otimes}_1 G$.

THEOREME. - *Tout espace de Banach* E *de type* $\mathcal{L}_1$, *est ultraplat.*

Supposons d'abord qu'on ait $E = \ell^1(I)$. Soit F un espace de Banach quelconque, avec $F = \ell^1(J)/G$. On a par définition :

$$E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \mid E \hat{\otimes}_1 G \quad .$$

D'après le corollaire 2, $E \hat{\otimes}_1 G$ est un sous-espace fermé de $E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J)$. Il en résulte que $E \hat{\otimes}_q F$ est un espace de Banach, donc que $E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 F$.

Passons au cas général : E est de type $\mathcal{L}_1$. Le foncteur $E \otimes_q$ étant exact à droite, la suite suivante est exacte :

$$E \hat{\otimes}_q G \to E \hat{\otimes}_q \ell^1(J) \to E \hat{\otimes}_q F \to 0 \quad .$$

Comme on vient de le voir, $E \hat{\otimes}_q \ell^1(J)$ est un espace de Banach isomorphe à $E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J)$. Par conséquent, le morphisme $E \hat{\otimes}_q G \to E \hat{\otimes}_q \ell^1(J)$ se factorise en :

$$E \hat{\otimes}_q G \xrightarrow{u} E \hat{\otimes}_1 G \xrightarrow{v} E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \quad .$$

Des travaux de Grothendieck, on déduit facilement, l'espace E possédant la propriété d'approximation, que v est un monomorphisme. Comme d'autre part, u est un épimorphisme, la suite suivante est exacte :

$$0 \to E \hat{\otimes}_1 G \to E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \to E \hat{\otimes}_q F \to 0 \quad .$$

On a donc $E \hat{\otimes}_q F = E \hat{\otimes}_1 \ell^1(J) \mid E \hat{\otimes}_1 G$, et la démonstration se termine comme dans le cas où $E = \ell^1(I)$.

III. Espaces de Banach ultraplats.

THEOREME. - *Soit* E *un espace de Banach ultraplat. Soient* G *un espace de Banach, et* F *un sous-espace fermé de* G . *Si* E *ou* F *est approximant,* $E \hat{\otimes}_1 F$ *est un sous-espace fermé de* $E \hat{\otimes}_1 G$.

Considérons la suite exacte $0 \to F \to G \to G/F \to 0$, et appliquons le foncteur exact à droite $E \hat{\otimes}_q$, la suite :

$$0 \to E \hat{\otimes}_q F \to E \hat{\otimes}_q G \to E \hat{\otimes}_q (G/F) \to 0$$

est exacte à droite. Comme E est ultraplat, cette suite s'écrit aussi :

$$0 \to E \hat{\otimes}_1 F \to E \hat{\otimes}_1 G \to E \hat{\otimes}_1 (G/F) \to 0 \quad .$$

Si E ou F est approximant, la suite est exacte, de sorte que le Q-espace complet $E \hat{\otimes}_1 G \mid E \hat{\otimes}_1 F$ coïncide avec l'espace de Banach $E \hat{\otimes}_1 (G/F)$. Donc, $E \hat{\otimes}_1 F$ est un sous-espace fermé de $E \hat{\otimes}_1 G$.

COROLLAIRE 1. - Si E est un espace de Banach approximant ultraplat, alors E' est un espace de Banach injectif, et E est de type $\mathcal{L}_1$.

Soit G un espace de Banach, et F un sous-espace fermé de G . Toute application linéaire continue de F dans E' provient d'une forme linéaire continue sur $E \hat{\otimes}_1 F$. D'après le résultat précédent, et le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge à $E \hat{\otimes}_1 G$, et on obtient ainsi une application de G dans E' qui prolonge l'application donnée. Par conséquent, E' est injectif et d'après les résultats de [2], E est de type $\mathcal{L}_1$.

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace de Banach ultraplat. Soient G un espace de Banach et F un sous-espace fermé approximant de G . Toute application linéaire continue de F dans E' se prolonge en une application linéaire continue de G dans E' .

La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LINDENSTRAUSS (J.) and PELCZYNSKI (A.). - Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. Studia Math. 29, p. 275-326, (1968).

[2] LINDENSTRAUSS (J.) and ROSENTHAL (H.P.). - The $\mathcal{L}_p$-spaces. Israël Journal of Math. 7, p. 325-349, (1969).

[3] NOEL (G.). - Une immersion de la catégorie des espaces bornologiques convexes séparés dans une catégorie abélienne. C.R.A.S. 269, p. 195-197, (1969).

[4] NOEL (G.). - Sur le complété d'un Q-espace. C.R.A.S. 269, p. 238-240, (1969).

[5] NOEL (G.). - Produit tensoriel et platitude des Q-espaces. Bull. Soc. Math. Belg. 22, p. 119-142, (1970).

[6] PIETSCH (A.). - Nukleare lokalkonvexe Raüme. Akademie Verlag (1965), Berlin.

[7] SAPHAR (P.). - Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires. Studia Math. 38, p. 71-100, (1970).

Université de l'Etat à MONS
Faculté des Sciences
19, Avenue Maistriau
B 7000 MONS
(Belgique)