

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CHARLES GOULAOUIC

Approximation polynomiale des fonctions C^∞ et analytiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 187-190

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__187_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION POLYNOMIALE DES FONCTIONS C^∞ ET ANALYTIQUES.

par

Charles GOULAOUIC

L'approximation des fonctions par des polynômes sur un intervalle de la droite réelle a été abondamment étudiée (cf. [2] [3] [4] et leurs bibliographies). Récemment, des caractérisations des fonctions C^∞ et analytiques par leurs distances aux fonctions propres d'opérateurs elliptiques dégénérés ont été obtenues dans [1], ce qui donne l'approximation polynomiale, par exemple, dans le cas d'une boule de \mathbb{R}^n . La caractérisation des fonctions C^∞ par leurs distances aux polynômes, a été obtenue, plus généralement dans [5] sur l'adhérence d'un ouvert borné de \mathbb{R}^n à bord lipschitzien. Ici, on montre que toute fonction C^∞ (resp. analytique) sur un compact de \mathbb{R}^n est à distance des polynômes dans L^p ($1 \leq p \leq \infty$) à décroissance rapide (resp. exponentielle), et que sur des compacts assez réguliers la réciproque est vraie. Enfin, on étudie des classes de fonctions intermédiaires entre les fonctions C^∞ et analytiques, voisines des classes de Gevrey et caractérisées par leurs distances aux polynômes ; ces espaces ont des propriétés d'interpolation et sont décrits dans [1] dans les cas "très réguliers". Les résultats annoncés ici ont été obtenus en collaboration avec M. S. Baouendi et font l'objet d'une rédaction détaillée à paraître aux Annales de l'Institut Fourier (Grenoble).

I - Notations et cas du pavé de \mathbb{R}^n .

On désigne par \mathcal{P}_k l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients complexes et de degré $\leq k$.

Soient D un sous-ensemble intégrable borné de \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$, et $f \in L^p(D)$. On note :

$$d_{p,D}(f, \mathcal{P}_k) = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|f - P\|_{L^p(D)} .$$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On désigne par $C^\infty(\Omega)$ (resp. $\mathcal{A}(\Omega)$) l'ensemble des fonctions complexes de classe C^∞ (resp. analytiques) dans Ω .

Soit K un compact de \mathbb{R}^n . On désigne par $C^\infty(K)$ (resp. $\mathcal{A}(K)$) l'ensemble des restrictions à K de fonctions C^∞ (resp. analytiques) définies au voisinage de K .

Rappelons une caractérisation des fonctions C^∞ et analytiques sur un pavé de \mathbb{R}^n ; ce résultat est essentiellement dû à Bernstein [2] et on peut aussi l'obtenir rapidement comme corollaire de théorèmes sur des opérateurs elliptiques dégénérés.

PROPOSITION 1 : Soient π un pavé ouvert borné de \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\pi)$.

1) Pour que f soit C^∞ sur π , il faut et il suffit que la suite
 $k \mapsto d_{p,\pi}(f, \rho_k)$ soit dans l'espace \underline{s} des suites à décroissance rapide.

2) Pour que f soit analytique sur π , il faut et il suffit qu'il existe deux
constantes $L > 0$ et $a \in]0, 1[$ telles que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,\pi}(f, \rho_k) \leq L a^k.$$

II - Cas d'un compact de \mathbb{R}^n .

On a d'abord le résultat :

THEOREME 1 : Soient $1 \leq p \leq \infty$ et K un compact de \mathbb{R}^n .

1) Si $f \in C^\infty(K)$, la suite $k \mapsto d_{p,K}(f, \rho_k)$ est dans \underline{s} .

2) Si $f \in \mathcal{Q}(K)$, il existe $L > 0$ et $a \in]0, 1[$ telles que l'on ait pour tout
 $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,K}(f, \rho_k) \leq L a^k.$$

La démonstration du point 1) est immédiate ; pour démontrer le point 2),
on procède par étapes :

i) On suppose que K est convexe et on se ramène à l'intersection d'un nombre
fini de pavés compacts de \mathbb{R}^n .

ii) On suppose que K est une "couronne" (compact compris entre deux sphères
concentriques) et on se ramène, par des arguments de symétrie, à l'étape i).

iii) Pour un compact quelconque, on se ramène à l'intersection d'un nombre fini
de couronnes.

Les réciproques du théorème 1 ne sont pas vraies pour tout compact de \mathbb{R}^n .
Mais on a, par exemple :

THEOREME 2 : Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à bord lipschitzien^{*}, $1 \leq p \leq \infty$,
 $f \in L^p(\Omega)$; on a :

1) La fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ si et seulement si la suite $k \mapsto d_{p,\Omega}(f, \rho_k)$ est à dé-
croissance rapide.

(*) On fait cette hypothèse pour simplifier les énoncés ; elle peut être remplacée
par des hypothèses plus faibles, surtout pour le point 2). On rappelle que, sous
cette hypothèse-ci, le point 1) est démontré dans [5].

2) La fonction $f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ si et seulement s'il existe $L > 0$ et $a \in]0, 1[$ véri-
fiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p, \Omega}(f, P_k) \leq L a^k.$$

La démonstration repose essentiellement sur des inégalités sur les polynômes du type "inégalités de Markov" et le passage par des ouverts où on sait déjà conclure (par exemple, des pavés).

III - Espaces du type Gevrey et interpolation.

Nous considérons des espaces de fonctions dont la distance aux polynômes décroît "moins vite" que dans le cas analytique.

DEFINITION 1 : Soient s un nombre réel ≥ 1 et K un compact de \mathbb{R}^n . Pour tout
 $p, 1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $\mathcal{A}_{s,p}(K)$ l'espace des fonctions f de $L^p(K)$ véri-
fiant :

il existe $L > 0$ et $a \in]0, 1[$ telles que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{p,K}(f, P_k) \leq L a^{k^{1/s}}.$$

On a alors le résultat :

THEOREME 3 : Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à bord lipschitzien et s un nombre
réel ≥ 1 . Les espaces $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega})$ sont indépendants de p pour $1 \leq p \leq \infty$. De plus,
 $\mathcal{A}_{s,2}(\bar{\Omega})$ est un espace d'interpolation entre : $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ et $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Etant donnée une base de polynômes orthonormale dans $L^2(\Omega)$, le développement de Fourier sur cette base est un isomorphisme des espaces $C^\infty(\bar{\Omega})$, $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{A}_{s,2}(\bar{\Omega})$ sur des espaces de suites, pour lesquels on a des résultats d'interpolation ; ce qui entraîne la seconde partie du théorème. La première partie utilise des inégalités du type "inégalités de Sobolev".

Pour les espaces $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega})$ on a aussi les propriétés suivantes :

Si Ω_1 est un ouvert relativement compact dans Ω , la restriction à Ω_1 de $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega})$ coïncide avec celle de l'espace de Gevrey d'ordre s dans Ω .

Si $\bar{\Omega}$ est une variété à bord analytique, on a $\mathcal{A}_{s,p}(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$, espace introduit dans [1] et caractérisé par des propriétés de différentiabilité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAOUENDI (M.S.) et GOULAOUIC (C.). - Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications ; Journal of Functional Analysis (à paraître).
- [2] BERNSTEIN (S.). - Oeuvres complètes.
- [3] LORENTZ (G.G.). - Approximation of functions ; Elsevier 1965.
- [4] TIMAN (A.F.). - Theory of approximation of functions of a real variable ; Pergamon Press (1963).
- [5] ZERNER (M.). - Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables ; C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268.
-

Département de Mathématiques

Université Paris - Sud

91 - ORSAY

(France)
