Jean Dhombres

Moyennes de fonctions et opérateurs multiplicativement liés

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 143-149
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__143_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 143-149.

MOYENNES DE FONCTIONS ET OPÉRATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIÉS

par

Jean DHOMBRES

Mon but est, ici, de relier l'existence d'opérateurs multiplicativement liés, c'est-à-dire d'opérateurs satisfaisant certaines équations fonctionnelles simples, à des propriétés topologiques des espaces sur lesquels opèrent ces opérateurs. Pour alléger, je ne donnerais pas les raisons qui m'ont poussé à étudier ces équations fonctionnelles, d'autant que ces raisons auraient tendance à devenir des excuses (cf. [2], [4]). En outre, cet exposé a un unique souci de présentation.

I. - Définitions.

Soit donc $\mathcal{A}$ une algèbre topologique commutative sur le corps des nombres complexes et P un opérateur linéaire continu $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. On convient de dire que P est un opérateur multiplicativement lié lorsque $P(f.P\,g + g.P\,f)$ s'exprime linéairement à partir de $(P\,f.\,P\,g)$, $(f.\,P\,g + g.\,P\,f)$, $(f.\,g)$, $(P(f.g))$ et $(P(P\,f.\,P\,g))$, c'est-à-dire lorsque l'on a la relation :

$$P(f.\,P\,g + g.\,P\,f) = A\,P\,f.\,P\,g + B(f.\,P\,g + g.\,P\,f) + C\,f.g + D\,P(f.g) + E\,P(Pf.Pg).$$

En donnant des valeurs particulières aux constantes complexes A, B, C, D et E, on retrouve des cas d'opérateurs de types variés et utilisés, d'une façon ou d'une autre, comme opérateurs de moyenne, notamment par H. Poincaré, A. Kolmogoroff ou G. Birkhoff. Cette présentation a l'avantage de contenir tous les cas connus d'opérateurs considérés comme opérateurs de moyenne. Ajoutons que la littérature mathématique est fascinante en ce domaine ! Les premières réalisations de tels opérateurs sont facilement imaginables lorsque $\mathcal{A}$ constitue un domaine d'intégrité, situation qui ne convient pas du tout aux besoins de l'analyste. Il semble que le cadre que je vais donner maintenant soit bien adapté à l'étude des opérateurs multiplicativement liés en analyse.

1°) $\mathcal{A}$ est une algèbre fonctionnelle, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$, pour les opérations naturelles, est une algèbre de fonctions définies sur un espace X et à valeurs dans un domaine d'intégrité lequel est également un espace vectoriel complexe.

2°) $\mathcal{A}$ possède un élément unité e. Cette deuxième hypothèse n'est pas essentielle.

Moyennant l'invariance de Pe et de $(Pe)^2$ par l'opérateur P, on peut montrer qu'un opérateur multiplicativement lié P est "quasiment" une somme directe d'opérateurs multiplicativement liés de type beaucoup plus simples. Une discussion algébrique assez longue, peu excitante et que je vous épargne, conduit en fait à distinguer deux comportements bien distincts :

(a) Le cas $P(f.\,P\,g) = P(g.P\,f)$, lequel fournit les opérateurs multiplicativement symétriques et se subdivise en deux sous-cas :

$P(f.P\,g) = P\,f.\,P\,g$ opérateur semi-multiplicatif symétrique
$P(f.P\,g) = P(f.\,g)$ opérateur d'interpolation .

(b) Le cas "mélangeant" :

$$P(f.P\,g + g.P\,f) = P\,f.P\,g + P(f.g)$$

auquel est réservé le nom d'opérateur de Baxter.

II. - Opérateurs multiplicativement liés sur $C(X)$.

Je parlerai d'abord des opérateurs du premier cas en me plaçant sur l'algèbre $\mathcal{A} = C(X)$ des fonctions continues et à valeurs complexes définies sur un espace compact X . Précisons encore quelques définitions afin d'énoncer un théorème de réalisation d'opérateurs semi-multiplicatifs symétriques.

Un sous-espace E de $C(X)$ est séparant lorsque pour tout $x \neq y$ dans X , il existe f dans E telle que $f(x) \neq f(y)$.

Un sous-espace E de $C(X)$ est extrêmement séparant lorsqu'une forme linéaire continue extrémale sur la boule unité positive du dual de E se représente par une unique mesure de Radon (de norme 1) sur X .

Appelons $X/\mathcal{E}$ l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence associée à E selon : $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$ pour tout f dans E . Appelons $\tilde{E}$ l'image canonique de E dans $C(X/\mathcal{E})$.

Un sous-espace E de $C(X)$ est extrêmement séparant quotient lorsque $\tilde{E}$ est extrêmement séparant dans $C(X/\mathcal{E})$. On peut alors énoncer le théorème suivant (cf. [7]).

THEOREME 1. - Soit P un opérateur linéaire et idempotent : $C(X) \to C(X)$, de norme 1, dont l'image soit un espace extrêmement séparant quotient. L'opérateur P est alors multiplicativement symétrique, selon

$$P(f.P\,g) = P(g.P\,f) = P(P\,f.P\,g)$$

COROLLAIRE 1. (cf. [6]). - Une projection de norme 1, de $C(X)$ sur une sous-algèbre autodjointe de $C(X)$, est un opérateur semi-multiplicatif symétrique.

A) - Opérateurs semi-multiplicatifs symétriques.

Donnons maintenant les théorèmes de représentation de tels opérateurs. Appelons $\mathcal{P}$ la relation d'équivalence associée à P par $x \mathcal{P} y$ si $P f(x) = P f(y)$ pour tout f dans $C(X)$. Notons $\mathcal{P}(x)$ la classe d'équivalence du point x .

THEOREME 2. - Un opérateur borné $P : C(X) \to C(X)$ est semi-multiplicatif symétrique si $P^{*}(\delta_x)$ a son support contenu dans $\mathcal{P}(x)$.

(P^{*} désigne l'adjoint de P et δ_x la mesure de Dirac au point x).

Ce théorème incite à se poser la question suivante. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace compact X : existe-t-il un opérateur semi-multiplicatif symétrique tel que $\mathcal{P}$ coïncide avec $\mathcal{R}$? Une condition nécessaire, mais non suffisante, est que $\mathcal{R}$ soit fermée. Nous donnerons une meilleure réponse plus loin.

B) - Opérateurs d'interpolation.

Passons maintenant aux opérateurs d'interpolation. Appelons interpolateur de P le sous-espace de X noté :

$$Y_p =' \{ x \mid x \in X \; ; \; P f(x) = f(x) \; , \quad \forall f \in C(X)\} .$$

Soit Y un sous-espace fermé de X , où X est compact, et $P : C(X) \to C(X)$ un opérateur linéaire borné. On établit facilement que P est un opérateur d'interpolation dont l'interpolateur Y_p est Y si et seulement si $P f(x)$ ne dépend que des valeurs de f sur Y et $P f(y) = f(y)$ pour tout y dans Y . Il y a visiblement une correspondance biunivoque entre les opérateurs d'interpolation et les opérateurs d'extension linéaire qui, à toute fonction continue et à valeurs complexes définie sur le sous-espace Y de X , font correspondre une fonction continue sur tout X prolongeant f . On peut alors se poser la question suivante : déterminer les sous-ensembles fermés de X qui sont des interpolateurs ? On se doute, à juste titre, de l'exactitude du résultat suivant :

THEOREME 3. - Tout sous-ensemble fermé métrisable d'un espace compact X est un interpolateur.

Que peut-on en dire dans le cas général ?

III. - Exaves linéaires sur $C(X)$.

Les deux problèmes que nous venons de poser, à savoir pour les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques et pour les opérateurs d'interpolation, se résolvent d'une façon analogue. Pour expliquer ce phénomène, il est commode d'utiliser un vocabulaire particulier dû à A. Pełczynski (cf. [5]), mais je vais résister au charme magique de l'écrire en termes de la théorie des catégories et des foncteurs contravariants : soient X et Y deux espaces compacts et φ une application continue $X \to Y$. Un opérateur linéaire continu $P : C(X) \to C(Y)$ est un exave linéaire selon φ lorsque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow{P} & C(Y) \\ \varphi^* \uparrow & & \downarrow \varphi^* \\ C(Y) & \xrightarrow[\varphi^*]{} & C(X) \end{array} \qquad \text{où } \varphi^*(f) = f \circ \varphi .$$

Le cas d'un opérateur d'interpolation correspond simplement au cas où φ est injective, celui d'un opérateur semi-multiplicatif symétrique correspond au cas où φ est surjective.

Appelons $J(\varphi)$ l'ensemble des exaves linéaires de Markov selon φ, c'est à dire tels que $\|P\| = 1$, $P(1) = 1$. Cet ensemble peut être vide. C'est toutefois un ensemble convexe et on dispose du résultat suivant :

THEOREME 4. - *L'ensemble $J(\varphi)$ possède un point extrémal si et seulement s'il existe une application continue $\psi : Y \to X$, telle que $\varphi \circ \psi$ soit l'indentité sur l'espace image $\varphi(X)$.*

L'idée de la démonstration consiste à montrer qu'un opérateur extrémal de $J(\varphi)$ est multiplicatif. Cela paraît vraisemblable depuis les résultats de [1].

- Dans le cas particulier d'un opérateur semi-multiplicatif symétrique, moyennant une condition d'existence d'un point extrémal, ce théorème revient à dire : une relation d'équivalence fermée $\mathcal{R}$ sur X est associée à un opérateur de Markov semi-multiplicatif si et seulement si cette relation admet un relèvement continu.

- Dans le cas particulier d'un opérateur d'interpolation, moyennant une condition d'existence d'un point extrémal, un sous-espace fermé Y est X et un interpolateur de Markov si et seulement s'il s'agit d'un retracte de X.

Examinons la partie immédiate de ce dernier résultat : si Y est un retracte, il existe une application continue $r : X \to Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout y de Y. Par suite, l'opérateur $Pf = f \circ r$ est bien un opérateur d'interpolation, d'ailleurs multiplicatif.

IV. - Autres espaces fonctionnels.

Deux attitudes sont maintenant possibles.

(a) Exhiber des espaces $C(X)$ pour lesquels la condition d'extrémalité soit vérifiée : c'est le cas des espaces compacts hyperstoniens, et, pour certains exaves, le cas des espaces compacts stoniens (c'est-à-dire des espaces compacts pour lesquels la fermeture de tout ouvert est encore ouverte). L'intérêt de ce résultat n'est pas négligeable. J'indique l'idée. Prenons un opérateur semi-multiplicatif symétrique, c'est-à-dire vérifiant $P(f.P\,g) = P\,f.P\,g$ sur des espaces $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, où $p \geqslant 1$, en convenant d'une définition adéquate puisqu'il ne s'agit pas d'une algèbre. Nous pouvons simplifier en supposant en outre que $\mu(\Omega) = 1$. La continuité de P sur $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ implique la continuité de P, sans augmentation de la norme, sur l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. Or, par la transformée de Gelfand, il existe un isomorphisme isométrique entre $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ et $C(X)$ où X est précisément un espace hyperstonien. L'interprétation probabiliste est simple :

THEOREME 5. - Soit P un opérateur multiplicativement symétrique et de Markov sur $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, $p \geqslant 1$. Il existe une sous-tribu $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ telle que $P\,f$ soit $\mathfrak{G}$-mesurable et $P\,f$ coïncide avec l'espérance conditionnelle de f relativement à $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu')$ où μ' est la restriction de μ à $\mathfrak{G}$. En particulier :

$$\int_A P\,f\,d\mu = \int_A f\,d\mu \quad \text{pour tout sous-ensemble } A \text{ de } \mathfrak{G}.$$

Je signale en passant que ces résultats s'adaptent très bien aux espaces fonctionnels de Banach, tels que définis par A. C. Zaanen et W. A. J. Luxembourg.

(b) Se placer dans le cas où la condition d'extrémalité n'est pas réalisée, mais construire effectivement un exave. Les espaces compacts X peuvent alors être beaucoup moins pathologiques (compacts de R^n par exemple !). On peut obtenir des résultats sur les espaces de Cantor généralisés, c'est-à-dire les images continues d'ensembles dyadiques. Donnons seulement ici un théorème d'existence qui généralise le théorème 3.

THEOREME 6. - Soit X un espace métrisable compact et $\varphi : X \to Z$ une application continue ouverte de X dans un espace compact Z. Il existe un exave linéaire de Markov selon φ.

V. - Commutation avec les translations.

La cinquième partie, qui sera une partie croupion, concerne l'étude des opérateurs multiplicativement liés, opérant sur des fonctions continues définies sur un groupe abélien localement compact G, et commutant avec les translations. Par $A(G)$, nous désignons l'algèbre des fonctions continues fortement presque périodiques sur G.

THEOREME 7. - Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des opérateurs continus multiplicativement symétriques sur $A(G)$, définis à une homothétie près, qui commutent avec les translations, et l'ensemble des sous-groupes du dual de G .

La correspondance s'écrit de la façon suivante, où est un sous-groupe de $G^\wedge$.

Si $f \sim \sum_{\hat{x} \in G^\wedge} a(\hat{x})\, \hat{x}$, alors $P f \sim \lambda \sum_{\substack{\hat{x} \in \Lambda \\ \Lambda \subset G^\wedge}} a(\hat{x})\, \hat{x}$.

Par un théorème de point fixe, on peut donner une caractérisation géométrique de $P f$ dans l'ensemble des translatées de f selon l'annihilateur de Λ dans le groupe de Bohr $\overline{G}$ de G pour la dualité $\langle G^\wedge_d , \overline{G} \rangle$.

Pour terminer avec les opérateurs du type "mélangeant", désignons par $\mathcal{T}(T)$ l'algèbre des polynômes trigonométriques sur le tore T .

THEOREME 8. - Il n'existe que deux opérateurs de Baxter non triviaux sur $\mathcal{T}(T)$ continus en norme $L^p(T)$, qui commutent avec les translations pour $+\infty > p > 1$. Il n'existe pas de tels opérateurs continus pour $p=1$ ou $p=+\infty$.

$$f(x) = \sum a_{n_k} e^{i n_k x} \qquad \begin{cases} P_1 f(x) = \sum_{n_k \geqslant 0} a_{n_k} e^{i n_k x} \\ \\ P_2 f(x) = \sum_{n_k \leqslant 0} a_{n_k} e^{i n_k x} \end{cases}$$

De tels opérateurs sont bien connus en analyse harmonique. Dans le cas général, on introduit un semi-groupe Λ dans le groupe $G^\wedge$, dual de G , pour remplacer le cône positif de $\mathbb{Z}$. (Il faut noter que la non-existence de tels opérateurs pour $p=1$ ne nécessite pas la commutation avec les translations).

D'autres opérateurs multiplicativement liés sont étudiés pour leurs propriétés de moyenne dans un article à paraître prochainement (On some averaging processes).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONSALL (F.F.), LINDENSTRAUSS (J.), PHELPS (R.R.). Extreme positive operators in algebras of functions. Math. Scand. 18 (1966), p. 161-182.

[2] DHOMBRES (J.). - Sur les opérateurs multiplicativement liés. Mémoires de la Société Mathématique de France N° 27 (1971) - Thèse-170 pages.

[3] DHOMBRES (J.). - Répartition asymptotique des fonctions et familles de mesures associées (à paraître). (Cf. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 272 (1971) p. 956-959).

[4] DHOMBRES (J.G.). - A survey of linear operators satisfying a functional equation on a topological algebra. (To appear).

[5] PEŁCZYNSKI (A.). - Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions. Diss. Math. 58 (1968).

[6] TOMIYAMA (J.). - On the projection of norm one in W^*-algebra. Proc. Jap. Acad. 33 (1957), p. 608-612.

[7] WULBERT (D.E.). - Averaging projections. Ill. Journal of Math. Vol. 13, N° 4, (1969), p. 689-693.

[8] DHOMBRES (J.G.).- Some functional equations on semi-groups arising from the theory of means. (To appear in Nanta Mathematica, 1972).

Institut de Mathématique Pure
et Appliquée
11, Quai Saint-Bernard
75 - PARIS 5ème (France)