GIUSEPPE DA PRATO

Quelques résultats d'existence et régularité pour un problème non linéaire de la théorie du contrôle

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 127-132
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__127_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 127-132.

QUELQUES RÉSULTATS D'EXISTENCE ET RÉGULARITÉ POUR UN PROBLÈME NON LINÉAIRE DE LA THÉORIE DU CONTRÔLE

par

Giuseppe DA PRATO

LE PROBLEME. - On se donne un espace de Hilbert complexe V (norme $|\ |$), une famille $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ de générateurs de semi-groupes de contraction dans V et une fonction holomorphe $f : \Omega\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

On va étudier le problème suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} - A(t)\,U(t) - U(t)\,A^*(t) - f(U(t)) = F(t) \\ U(0) = U_0 \qquad A^*(t) \text{ adjoint de } A(t) \end{cases} ,$$

où U_0 et F sont donnés, $U_0\in H(V)$ (resp. $H^+(V)$)(1) , U et F sont des applications $[0, T] \to H(V)$ (resp. $H^+(V)$) fortement continues et $f(U(t))$ est défini par le calcul opérationnel.

On suppose :

$$(H_1)\qquad \begin{cases} f(0) = 0 \quad \Omega\supset\mathbb{R} \text{ (resp. } \overline{\mathbb{R}}_+), \ \ f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R} \ \text{ (resp. } f(\overline{\mathbb{R}}_+)\subset\overline{\mathbb{R}}_+)^{(2)} \\ f \ \underline{\text{non croissante dans}}\ \mathbb{R} \ (\text{resp. } \overline{\mathbb{R}}_+) . \end{cases}$$

(H_2) $\underline{\text{L'application}}$ $t \to (n-A(t))^{-1}$ $\underline{\text{est fortement continue.}}$

Si cette hypothèse a lieu, il existe une fonction G_n telle que :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G_n(t,s)}{\partial t} = A_n(t)\ G_n(t,s) \\ \dfrac{\partial G_n(t,s)}{\partial s} = - G_n(t,s)\ A_n(s) \qquad\qquad A_n(t) = nA(t)\,(n-A(t))^{-1} \\ G_n(t,t) = I \end{cases} .$$

On suppose finalement :

(H_3) $\qquad G_n(t,s)\,x \to G(t,s)x \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\ ,\ x\in V$, $\underline{\text{uniformément en}}$ (t,s)

(H_2) et (H_3) sont des hypothèses d'existence de la fonction de Green pour le problème $u'(t) - A(t)u = 0 \quad u(0) = u_0$; pour des conditions sous lesquelles (H_2) et (H_3) ont lieu, voir par exemple [6] [7] [8] [10].

On écrit maintenant une équation intégrale qui équivaut, dans un sens "faible" au problème (1).

$$(3) \qquad U(t) = G(t,0)\, U_0 G^*(t,0) + \int_0^t G(t,s)\, F(s)\, G^*(t,s)\, ds + \\ + \int_0^t G(t,s)\, f(U(s))\, G^*(t,s)\, ds \quad ,$$

les sommes étant considérées dans la topologie forte de $\mathcal{L}(V,V)$(3) et $G^*(t,s)$ étant l'adjoint de $G(t,s)$.

Si les opérateurs $A(t)$ sont "réguliers" il est facile de voir que les problèmes (1) et (3) sont équivalents.

On va montrer que, sous les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3), il existe une solution unique du problème (3) et, en outre, sous des hypothèses convenables de régularité des données, que la solution de (3) est une solution "forte" de (1).

Les résultats qu'on donne ici sont préliminaires ; les résultats complets ainsi que les démonstrations détaillés paraîtrons dans un prochain travail.

EXISTENCE ET UNICITE. - On donne d'abord quelques notations.
$C(0, T ; H_s(V))$ est l'espace localement convexe des applications continues $[0, T] \to H_s(V)$ muni de la topologie naturelle.

On pose :

$$(4) \qquad \|U\| = \sup_{t \in [0, T]} |U(t)|$$

$\|U\|$ est fini grâce au théorème de Banach-Steinhaus ; en outre, l'ensemble des applications $[0, T] \to H_s(V)$ continues, muni de la norme (4), est un espace de Banach qu'on dénote par $B(0, T ; H_s(V))$.

Soit X un espace de Banach, Q un cône convexe fermé dans X , f une application : $D(f) \subset Q \to X$. On appelle <u>ensemble résolvant</u> $\rho_Q(f)$ de f (relatif à Q) l'ensemble des λ tels que :

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda - f \ \underline{\text{est injective}},\ (\lambda - f)(D_f)\ \underline{\text{est fermé et contient}}\ Q\ \underline{\text{et}} \\ (\lambda - f)^{-1} : (\lambda - f)(D(f)) \to Q\ \underline{\text{est continue}}. \end{cases}$$

On pose $R(\lambda,f) = (\lambda-f)^{-1} : (\lambda-f)\ (D(f)) \to D(f)$ et on dénote par $K_B(Q)$ l'ensemble des applications f telles que $\mathbb{R}_+ \subset \rho_Q(f)$ et l'on a :

$$|R(\lambda,f)x| \leqslant \frac{1}{\lambda}\ |x| \quad \forall x \in Q\ .$$

Par exemple, si $X = H(V)$ et si (H_1) a lieu, l'application :

$$T \in H(V) \to f(T) \quad (\text{resp. } T \in H^+(V) \to f(T))$$

appartient à $K_B(H(V))$ (resp. $K_B(H^+(V))$) comme on voit facilement grâce au théorème de Gelfand-Naimark.

THEOREME 1. - <u>Supposons que</u> (H_1), (H_2) <u>et</u> (H_3) <u>ont lieu</u>. <u>Alors l'équation</u> (3) <u>admet une solution unique</u> $U \in C(0,\ T\ ;\ H_s(V))$.

<u>Démonstration</u> :

a) <u>Existence et unicité locale</u> : on montre d'abord, utilisant le calcul opérationnel, que l'application $\tilde{f} : T \to f(T)$ est localement lipschitzienne (mais avec une constante de Lipschitz en général différente de celle de f). On utilise ensuite les approximations successives dans $B(0,\ T\ ;\ H_s(V))$ pour montrer qu'il existe une solution unique du problème (3) dans un intervalle convenable $[0,\ T_0]$.

b) <u>Existence globale</u> : on considère l'équation approchée :

$$(6) \qquad U_n(t) = G_n(t,0)U_0\ G_n^*(t,0) + \int_0^t G_n(t,s)\ F(s)\ G_n^*(t,s)\ ds + \int_0^t G_n(t,s)\ f_n(U_n(s))\ G_n(t,s)\ ds\ ,$$

qui équivaut au problème :

$$(7) \qquad \begin{cases} U_n(t) = A_n(t)\ U_n(t) + U_n(t)A_n^*(t) + f_n(U_n(t)) \\ U_n(0) = U_0 \end{cases}$$

où

$$(8) \qquad f_n(T) = nR(n,f)\ (nT) - nT \qquad \forall\, T \in H(V) \quad (\text{resp. } H^+(V))\ .$$

On pose $Z_n(t) = U_n(t)\ e^{nt}$, (6) est alors équivalente à l'équation :

$$(9) \qquad Z_n(t) = G_n(t,0)U_0\, G_n^*(t,0) + \int_0^t e^{ns}\, G_n(t,s)\, F(s)\, G_n^*(t,s)\, ds \, +$$

$$+\, n \int_0^t G_n(t,s)\, e^{ns}\, R(n,\tilde{f})\, (ne^{-ns}\, Z_n(s))\, G_n(t,s)\, ds \quad .$$

Puisque $\tilde{f} \in K_B(H(V))$ (resp. $K_B(H^+(V))$) on obtient en utilisant le lemme de Gronwall

$$(10) \qquad |U_n(t)| \leqslant |U_0| + \int_0^t |F(s)|\, ds \quad ,$$

et donc (6) a une solution globale.

On peut finalement démontrer que $U_n \to U$ dans $C(0,\, T_0 \,;\, H_s(V))$; pour cela, on utilise le théorème de la convergence dominée et la continuité forte de l'application $\tilde{f} : T \to f(T)$.

REGULARITE. - On se borne pour simpliciter au cas $A(t)$ indépendant de t , outrement il faut faire des hypothèses convenables sur la fonction de Green G .

Il nous faut d'abord considérer l'opérateur dans $H(V)$:

$$(11) \qquad \mathcal{A}(T) = AT + TA^* \quad .$$

Si $T \in H(V)$ on dénote par φ_T la forme bilinéaire hermitienne sur $D(A^*) \times D(A^*)$ définie par :

$$(12) \qquad \varphi_T(x,y) = (Tx,\, A^*y) + (A^*x,\, Ty) \quad .$$

Finalement, on dénote par $D(\mathcal{A})$ le sous-espace vectoriel des $T \in H(V)$ tels que φ_T est continue dans la topologie de $V \times V$ et par $\mathcal{A}$ l'application linéaire définie par :

$$(13) \qquad (\mathcal{A}(T)x,y) = \varphi_T(x,y) \quad .$$

LEMME. - $\mathcal{A}$ <u>est dissipative maximale</u> (5) <u>dans</u> $H(V)$; <u>en outre si</u> $T \in D(\mathcal{A})$ <u>et</u> $x \in D(A^*)$ <u>alors</u> $Tx \in D(A)$ <u>et</u>

$$(14) \qquad \mathcal{A}(T)x = ATx + TA\, x \quad .$$

THEOREME 2. - <u>Soit</u> A <u>générateur d'un semi-groupe de contraction dans</u> V <u>et</u> f <u>telle que</u> (H_1) <u>a lieu. Soit en outre</u> $F \in C^1(0,\, T \,;\, H_s(V))$ (<u>resp.</u> $C^1(0,\, T \,;\, H_s^+(V))$ <u>et</u> $U_0 \in D(\mathcal{A})$ (<u>resp.</u> $U_0 \in D(\mathcal{A}) \cap H^+(V)$) .

Alors l'équation (3) a une solution unique U et on a :

$$\begin{cases} \text{i)} \quad U \in C^1(0, T ; H_s(V)) \quad (\text{resp. } C^1(0, T ; H_s(V)) \cap C(0, T ; H_s^+(V)) \\ \text{ii)} \quad U(t) \in D(\mathcal{A}) , \ t \to \mathcal{A}(U(t)) \in C(0, T ; H_s(V)) \\ \text{iii)} \quad \text{Pour tout } x \in D(A^*) , \ U(t)x \in D(A) \text{ et on a :} \\ \qquad \dfrac{dU(t)x}{dt} - AU(t)x - U(t)A^*x - f(U(t))x = F(t)x \\ \qquad U(0) = U_0 . \end{cases}$$

Exemple : (Equation de Riccati de la théorie du contrôle [9]).

Si on pose $U_0 = 0$, $F(t) = I$, $f(x) = -x^2$ on trouve, d'après le théorème 2 qu'il existe unique $U \in C^1(0, T ; H_s(V))$ telle que $U(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et pour tout $x \in D(A^*)$ on a $U(t)x \in D(A)$ et :

$$U'(t)x - AU(t)x - U(t)A^*x + U^2(t)x = x \qquad U(0) = 0 . \tag{15}$$

REMARQUES : 1) On a des résultats d'existence et régularité tout à fait analogues pour le problème :

$$\begin{cases} U'(t) - A(t)\, U(t) - U(t)A^*(t) - Q^{-1} f(QU(t)Q)Q^{-1} = F(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{16}$$

où $F \in C(0, T ; H_s^+(V))$ et $Q \in H^+(V)$.

Par exemple, si $f(x) = -x^2$ on a $Q^{-1} f(QU(t)Q)Q^{-1} = U(t)PU(t)$ où $P = Q^2$.

2) Cas périodique. Si on cherche une solution de (1) avec la condition $U(0) = U(T)$ à la place de $U(0) = 0$ on a besoin que $\tilde{f}$ soit dissipative ce qui n'est pas équivalent à f non croissante ([2]). Dans ce cas, on peut voir les travaux [1] [4].

3) Si on veut résoudre le problème (1) avec $F \in L^p(0, T ; H_s(V))$ on a encore besoin que f soit dissipative. Pour quelques résultats dans ce cas, voir [4].

NOTES

(1) $H(V)$ (resp. $H^+(V)$) est l'ensemble des opérateurs hermitiens (resp. positifs sur V).

(2) $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$) est l'ensemble des nombres réels (resp. réels non négatifs).

(3) $\mathcal{L}(V,V)$ est l'ensemble des applications linéaires continues $V \to V$ $\mathcal{L}_s(V,V)$ (resp. $H_s(V)$) est l'espace $\mathcal{L}(V,V)$ (resp. $H(V)$) muni de la topologie de la convergence forte.

(4) Des idées analogues sont utilisées par Iannelli dans [5] ; mais ici, on ne peut pas utiliser ses résultats, car la partie linéaire du problème (1) est non régulière.

(5) $\mathcal{A}$ n'est pas générateur d'un semi-groupe fortement continu dans $H(V)$ [(1)].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DA PRATO (G.). - Equations d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et applications à des équations quasi-linéaires. J. Math. pures et appl. 48 (1969).

[2] DA PRATO (G.). - Somme d'applications non linéaires dans des cônes et équations d'évolution dans des espaces d'opérateurs. J. Math. pures et appl. (1970).

[3] DA PRATO (G.). - Somme d'applications non linéaires. Convegno sui problemi di evoluzione, Roma (1970).

[4] DA PRATO (G.). - On some non-linear evolution equations for operator-valued functions. Kansas-City (1970).

[5] IANNELLI (M.). - A note on some non-linear non-contractive semigroups. Boll. UMI (1970).

[6] KATO (T.). - Equazioni differenziali astratte. Corso CIME (1963).

[7] KATO (T.). - Linear evolution equations of "hyperbolic" type. J. Math. Soc. Japan (1970).

[8] KATO (T.), TANABE (H.). - On the abstract evolution equations. Osaka J. Math. 14 (1962).

[9] LIONS (J. L.). - Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod et Gauthier-Villars, Paris (1968).

[10] TANABE (H.). - Evolution equations of parabolic type. Proc. Japan Acad. 37, (1961).

ISTITUTO MATEMATICO GUIDO
CASTELNUOVO, ROMA (Italie)