MÉMOIRES DE LA S. M. F.

SIMONE CHEVET

Quelques remarques sur les poids. Application à la théorie des opérateurs radonifiants

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 89-99
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__89_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 89-99.

QUELQUES REMARQUES SUR LES POIDS. APPLICATION A LA THÉORIE DES OPÉRATEURS RADONIFIANTS

par

Simone CHEVET

Le but de cet exposé est de donner une nouvelle définition des opérateurs (Φ,ψ) très approximativement radonifiants d'un Banach dans un autre coïncidant avec celle de SCHWARTZ [1] dans le cas où Φ et ψ sont des poids homogènes. Nous énoncerons des théorèmes sans les démontrer.

Les trois premiers paragraphes seront utilisés à énoncer quelques propriétés sur les poids et à faire quelques remarques sur ceux-ci, et les deux derniers paragraphes à généraliser certains résultats de SCHWARTZ [1] et d'ASSOUAD [2] au moyen d'opérateurs appelés (Φ,ψ) sommants.

Commençons par donner quelques notations et faire quelques rappels sur les poids.

§ 1. Définitions et notations.

Tout d'abord, dans tout ce qui suit, si G est un espace topologique séparé, $\mathcal{P}(G)$ désignera la famille des probabilités de Radon sur G et $\varepsilon(G)$ la famille des probabilités de Radon sur G à support fini. On munit $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ de la relation d'ordre suivante :

$$\mu \propto \nu \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{R}^+ , \mu(]a,+\infty]) \leqslant \nu(]a,+\infty])) .$$

Dans cet exposé $\mathcal{N}$ désignera la famille des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ nulles en 0, croissantes, continues à gauche et continues en 0. Pour toute fonction croissante φ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ on pose, par convention, $\varphi(+\infty)=\sup\{\varphi(x) ; x \in \mathbb{R}^+\}$.

Enfin, pour tout réel $a \geqslant 0$, on pose :

$$h_a(t) = \begin{cases} ta & , \text{ si } t \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty & , \text{ si } t = +\infty \end{cases}$$

Rappelons maintenant des définitions élémentaires sur les poids.

DEFINITION 1. - <u>Un poids est une application</u> Φ <u>de</u> $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ <u>dans</u> $\overline{\mathbb{R}}^+$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

a) Φ <u>est semi-continue inférieurement (pour la topologie étroite)</u> ;

b) Φ <u>est croissante sur</u> $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ <u>(muni de la relation d'ordre</u> $\prec$<u>)</u> .

<u>Un poids</u> Φ <u>est dit homogène si, pour tout réel</u> $a>0$ <u>et pour tout</u> μ <u>de</u> $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\Phi(h_a \circ \mu) = a\Phi(\mu)$. <u>Un poids</u> Φ <u>est dit compact si, pour tout réel</u> $M \geqslant 0$, <u>l'ensemble</u> $A_M = \{\mu \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+) \ ; \ \Phi(\mu) \leqslant M\}$ <u>est compact dans</u> $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$.

<u>Remarque</u> : Si Φ est compact, alors, pour tout réel $M \geqslant 0$ et pour tout réel $a>0$ les ensembles $\{\mu \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+) \ ; \ \Phi(h_a \circ \mu) \leqslant M\}$ sont aussi compacts dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ (puisque, pour tout réel $a>0$, $\mu \to h_a \circ \mu$ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ appliquant $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$).

<u>Exemples</u> : (SCHWARTZ [1] et ASSOUAD [2]).

1. $J : \mu \to \mu(]1,+\infty])$

2. $$M_p : \mu \to M_p(\mu) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} (t)^p \ \mu(dt) & , \text{ si } 0 < p < +\infty \\ \int_0^{+\infty} \min(1,t) \ \mu(dt), & \text{ si } p = 0 \\ \max(\operatorname{supp} \mu) & , \text{ si } p = +\infty \end{cases}$$

3. Plus généralement, si φ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ croissante, continue à gauche (donc φ s.c.i.),

$$M_\varphi \ : \mu \to \int_0^{+\infty} \varphi(t) \ \mu(dt)$$

est un poids (appelé de type Orlicz généralisé). Il est compact si et seulement si $\varphi(+\infty) = +\infty$.

Rappelons que les poids M_p , $0 < p \leqslant +\infty$ sont homogènes et compacts.

§ 2. <u>HOMOGENEISEES de certaines fonctions et APPLICATIONS.</u>

On se donne un ensemble X , une application S de $]0,+\infty[\times X$ dans X satisfaisant :

(i) $S(ab,x) = S(a,S(b,x))$, $\forall a, b \in]0,+\infty[$, $\forall x \in X$

et on considère la classe $\mathcal{C}_{X,S}$ des applications p de X dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ croissantes au sens suivant :

(ii) $(0 < a < b < +\infty) \Rightarrow (p(S(a,x)) \leqslant p(S(b,x))$, $\forall x \in X$) .

Une application p de X dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ est dite homogène si l'on a :

(iii) $p(S(a,x)) = a\,p(x)$, $\forall (a,x) \in]0,+\infty[\times X$.

Bien entendu, toute fonction homogène de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ est dans $\mathcal{C}_{X,S}$.

Exemples : 1 - Si X est un espace vectoriel E et si $S(a,x) = ax$ toute jauge d'un ensemble équilibré de E est un élément homogène de $\mathcal{C}_{E,\cdot}$.

2 - Si $X = \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}^+})$, $S(a,\mu) = h_a \circ \mu$, tout poids (homogène) est un élément (homogène) de $\mathcal{C}_{X,S}$.

Par analogie avec la définition de la jauge d'un ensemble dans un espace vectoriel on introduit la :

DEFINITION 2. - On appelle homogénéisés d'un élément p de $\mathcal{C}_{X,S}$ les fonctions $p^{(\alpha)}$ de X dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, $\alpha \in]0,+\infty[$, telles que :

$$p^{(\alpha)}(x) = \inf\{ a \ ;\ 0 < a < +\infty \ ;\ p(S(\tfrac{1}{a},x)) \leqslant \alpha\}$$

avec la convention habituelle : $\inf \emptyset = +\infty$.

Les fonctions $p^{(\alpha)}$ sont, bien entendu, des éléments homogènes de $\mathcal{C}_{X,S}$. Remarquons que, si p est homogène, on a, pour tout réel $\alpha>0$, $\alpha p^{(\alpha)} = p$. Remarquons aussi que $\alpha \to p^{(\alpha)}$ est décroissante et que si $p = \sup_i p_i$ avec $p_i \in \mathcal{C}_{X,S}$, on a, pour tout réel $\alpha>0$, $p^{(\alpha)} = \sup_i p_i^{(\alpha)}$.

Remarques : 1 - Si L_M^* est un espace d'Orlicz [3, page 67] et si $f \to p(f) = \int_0^{+\infty} M(|f|)\,dt$, $p^{(1)}$ est la norme de Luxembourg dans L_M^* [3, page 78].

2 - Soit $X = \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $S(a,\mu) = h_a \circ \mu$; si $p = J$

$$J^{(\alpha)}(\delta_x) = x \ ,\quad \forall \alpha \in]0,1[\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

$$J^{(\alpha)}(\mu) = 0 \ ,\quad \forall \alpha \geqslant 1 \ ,\quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+) \ ;$$

si $p = M_\varphi$ est un poids de type Orlicz généralisé avec $\varphi(0) = 0$, alors, pour tout réel $x>0$, pour tout réel $\alpha>0$, $p^{(\alpha)}(\delta_x) = x/\tilde{\varphi}(\alpha)$ où :

$$\tilde{\varphi}(x) = \sup\{ t \ ;\ t \in \mathbb{R}^+ \ ;\ \varphi(t) \leqslant x\} \ .$$

THEOREME 1. - Les homogénéisés d'un poids sont des poids homogènes.

Notation. - Si Φ est un poids, Ω un espace topologique et P une probabilité de Radon sur Ω , $L_\Phi(\Omega,P)$ désignera l'ensemble des éléments f de $L^0(\Omega,P)$ tels que, pour tout réel $\alpha>0$, $\Phi^{(\alpha)}(|f|)$ est fini.

Nous allons chercher une condition suffisante sur Φ pour que $L_\Phi(\Omega,P)$

soit un espace vectoriel contenant $L^{\infty}(\Omega,P)$. (Si $\varphi \in \mathcal{N}$, $L_{M_\varphi}(\Omega,P)$ est un espace vectoriel contenant $L^{\infty}(\Omega,P)$) . Introduisons pour cela la :

DEFINITION 3. - Si E est un espace vectoriel, une fonction p de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ est dite convenable si elle satisfait :

1) $p(0) = 0$; $p(x) = p(-x)$, $\forall x \in E$; $p^{(\alpha)}(x) < +\infty$, $\forall (x,\alpha) \in E \times \mathbb{R}^+_*$

2) $(0 < \beta < 1) \Rightarrow (p(\beta x) \leq p(x)$, $\forall x \in E)$;

3) il existe une topologie sur E compatible avec la structure d'espace vectoriel de E et pour laquelle la famille $V_{a,\alpha} = \{x \in E\ ;\ p^{(\alpha)}(x) \leq a\}$ $(a,\alpha) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^+_*$ est un système fondamental de voisinages (équilibrés) de 0 de E .

Comme il existe une seule topologie sur E telle que 3) on l'appellera topologie associée à cette fonction convenable p et (E,p) désignera l'espace vectoriel E muni de cette topologie.

Remarque : Sur tout espace vectoriel topologique métrisable E il existe une fonction convenable finie p telle que la topologie associée à p soit la topologie initiale de E .

THEOREME 2. - Soit Φ un poids. On a équivalence de (I) et (II) avec :

(I) Pour tout espace topologique Ω et pour toute probabilité de Radon P sur Ω , on a :

a) $L_\Phi(\Omega,P) \supset L^{\infty}(\Omega,P)$;

b) $L_\Phi(\Omega,P)$ est un espace vectoriel et $f \to \Phi(|f| \circ P)$ une fonction convenable sur $L_\Phi(\Omega,P)$.

(II)

a') $\Phi(\delta_0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \Phi(\delta_a) = 0$;

b') pour tout réel $\alpha>0$, il existe deux réels >0 , α' et M , tels que, pour toute famille finie (λ_i, a_i, b_i) $(1 \leq i \leq n)$ d'éléments de $(\mathbb{R}^+)^3$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, l'on ait :

$$\Phi^{(\alpha)}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i+b_i}\Big) \leq M\Big[\Phi^{(\alpha')}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{a_i}\Big) + \Phi^{(\alpha')}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{b_i}\Big)\Big] .$$

DEFINITION 4. - On dira qu'un poids vérifie la condition (C) s'il satisfait l'une

<u>des conditions équivalentes du théorème 2.</u>

<u>Exemples :</u> 1 - Si Φ est un poids vérifiant a') et c) avec

c) : "il existe deux réels > 0, C et M , tels que, pour tout espace topologique Ω , pour toute probabilité de Radon P sur Ω et pour tous f et g dans $L^0(\Omega,P)$, l'on ait :

$$\Phi\left[\left(\frac{|f| + |g|}{C}\right) \circ P\right] \leqslant M\,(\Phi(|f|\circ P) + \Phi(|g|\circ P))\ "$$

alors Φ vérifie (C) .

2 - Si φ est une fonction de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$ croissante et continue à gauche, le poids M_φ vérifie la condition (C) si et seulement si φ est dans $\mathcal{N}$ (car M_φ vérifie c)) .

3 - Tous les poids M_p $(0\leqslant p\leqslant+\infty)$ satisfont (C) .

§ 3. <u>Comparaison de poids.</u>

Soit E un espace vectoriel, p_1 et p_2 deux fonctions convenables sur E . p_1 est dite plus forte que p_2 si la topologie associée à p_1 est plus fine que celle associée à p_2 . Elles sont dites équivalentes si ces topologies sont les mêmes. On remarque que l'on a équivalence de :

i) p_1 est plus forte que p_2 ,

ii) $\forall\alpha\in\mathbb{R}_*^+$, $\exists\,(\alpha',M)\in\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$: $p_2^{(\alpha)}\leqslant M\,p_1^{(\alpha')}$.

De manière analogue, on introduit la

DEFINITION 5. - <u>Un poids</u> Φ_1 <u>est dit plus fort qu'un poids</u> Φ_2 <u>si, pour tout réel</u> $\alpha>0$, <u>il existe deux réels</u> > 0 , α' <u>et</u> M , <u>tels que, pour tout</u> μ <u>de</u> $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$, $\Phi_2^{(\alpha)}(\mu)\leqslant M\,\Phi_1^{(\alpha')}(\mu)$. <u>Les deux poids</u> Φ_1 <u>et</u> Φ_2 <u>sont dits équivalents si chacun des poids est plus fort que l'autre.</u>

Comme toute probabilité de Radon sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ est limite étroite d'une suite (croissante) d'éléments de $\varepsilon(\mathbb{R}^+)$ inférieurs à μ (pour la relation $\measuredangle$) on a le :

THEOREME 3. - <u>Si</u> Φ_1 <u>et</u> Φ_2 <u>sont deux poids, on a équivalence de :</u>

1) Φ_1 <u>est plus fort que</u> Φ_2 ;

2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}_*^+$, $\exists\,(\alpha',M)\in\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$: $\Phi_2^{(\alpha)}(\mu)\leqslant M\,\Phi_1^{(\alpha')}(\mu)$, $\forall\mu\in\varepsilon(\mathbb{R}^+)$.

Bien entendu, si Φ_2 (resp. Φ_1) est homogène, Φ_1 est plus fort que Φ_2 si et seulement si il existe deux réels > 0 , β et M , (resp. pour tout réel $\alpha>0$, il existe un réel $M>0$) tels que :

$$\Phi_2(\mu) \leqslant M\, \Phi_1^{(\beta)}(\mu) \ , \quad \forall \mu \in \varepsilon(\mathbb{R}^+)$$

(resp.

$$\Phi_2^{(\alpha)}(\mu) \leqslant M\, \Phi_1(\mu) \ , \quad \forall \mu \in \varepsilon(\mathbb{R}^+) \ ) \ .$$

<u>Remarques</u> : 1 - Tout poids est plus fort que ses homogénéisés.

2 - Tout poids homogène plus fort qu'un poids compact est aussi compact.

3 - Tout poids A de la forme $\sup\limits_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, \Phi^{(\alpha)}$ avec φ partout > 0 (et bornée) et Φ poids, est un poids plus fort que Φ .

DEFINITION 6. - <u>Un poids est dit plus fort que</u> L^0 <u>s'il est plus fort que le poids</u> J ($J : \mu \to \mu\,(]1, +\infty]))$.

THEOREME 4. - <u>Tout poids homogène plus fort que</u> L^0 <u>est compact.</u>

(En effet, le poids est alors plus fort qu'un poids compact, à savoir un poids de la forme $\sup\limits_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, J^{(\alpha)}$ avec φ partout > 0) .

Donnons maintenant quelques exemples de poids comparables.

a) Si Φ_i , $1 \leqslant i \leqslant n$, sont n poids, les poids $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Phi_i$ et $\Phi_1 + \ldots + \Phi_n$ sont équivalents.

b) Les poids J et M_0 sont équivalents.

c) Si φ_1 et φ_2 sont deux éléments de $\mathcal{N}$ tels que l'on puisse trouver trois réels > 0 , M, k, r, tels que

$$k\ \varphi_1(rt) \leqslant \varphi_2(t) \ , \quad \forall t \geqslant M$$

le poids M_{φ_2} est plus fort que le poids M_{φ_1} .

PROBLEME - <u>Soit</u> Φ <u>un poids plus fort que</u> L^0 <u>vérifiant</u> (C).

1°) <u>Trouver une C. N. S. pour qu'il existe</u> $\varphi \in \mathcal{N}$ <u>tel que les poids</u> Φ <u>et</u> M_φ <u>soient équivalents</u> ?

2°) <u>Plus généralement, trouver une C. N. S. pour qu'il existe une famille</u> φ_i <u>d'éléments de</u> $\mathcal{N}$ <u>telle que</u> Φ <u>et</u> $\sup\limits_i M_{\varphi_i}$ <u>soient équivalents</u> ?

THEOREME 5. - Soit Ω un espace topologique et P une probabilité de Radon sur Ω. Si Φ est un poids vérifiant (C) et plus fort que L^0, alors l'espace vectoriel $L_\Phi(\Omega,P)$ muni de la topologie associée à la fonction convenable $f \to \Phi(|f| \circ P)$ est complet ; de plus, si Φ' est un poids équivalent à Φ, alors Φ' vérifie (C), est plus fort que L^0 et

$$L_{\Phi'}(\Omega,P) = L_\Phi(\Omega,P) .$$

Remarque : Plus généralement, si E et E_1 sont deux Banach dont l'un est le dual de l'autre et si $L_\Phi(\Omega,P\ ;\ (E_1,\ \sigma(E_1,E))\ )$ est l'ensemble des éléments f de $L^0(\Omega,P\ ;\ (E_1,\ \sigma(E_1,E))\ )$ tels que $\|f\|_{E_1}$ soit dans $L_\Phi(\Omega,P)$, $L_\Phi(\Omega,P;(E_1,\sigma(E_1,E)))$ est un espace vectoriel qui, muni de la topologie associée à la fonction convenable $f \to \Phi(\|f\|_{E_1} \circ P)$, est complet.

§ 4. Nouvelles notions de type et d'ordre d'une mesure cylindrique.

En utilisant les homogénéisées de poids, on va donner une nouvelle définition des notions de type et d'ordre qui, dans le cas des poids homogènes, coïncide avec celle donnée par SCHWARTZ [1].

Soient E et E_1 deux Banach dont l'un est le dual de l'autre et soit μ une mesure cylindrique sur E relativement à la dualité canonique entre E et E_1. Notons U_{E_1} la boule unité de E.

Soit d'abord Φ un poids homogène. D'après SCHWARTZ,

μ est dite de type Φ, si $\Phi^*(\mu) = \sup\limits_{x_1 \in U_{E_1}} \Phi(|x_1(.)| \circ \mu)$ est fini.

μ est dite de type Φ-approximable (resp. très approximable) s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que μ soit cylindriquement adhérente à l'ensemble des probabilités de Radon ν portées par des compacts de sous-espaces vectoriels de dimension finie (resp. par des ensembles finis) et vérifiant $\Phi^*(\nu) \leqslant M$.

μ est dite d'ordre Φ si μ est de Radon sur $(E,\ \sigma(E,E_1))$ et si $\Phi(\|\mu\|)$ est fini ($\|\mu\|$ étant la mesure image de μ par l'application $x \to \|x\|_E$ de $(E,\ \sigma(E,E_1))$ dans $\mathbb{R}^+$).

Soit maintenant Φ un poids quelconque. Les $\Phi^{(\alpha)} (\alpha \in \mathbb{R}^+_*)$ étant des poids homogènes, on généralise comme suit les définitions ci-dessus.

DEFINITION 7. - On dit que μ est de type Φ si, pour tout réel $\alpha>0$, μ est de type $\Phi^{(\alpha)}$, c'est-à-dire s'il existe $\varphi : \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}^+_*$ (et même bornée) telle que μ

soit de type $A = \sup_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, \Phi^{(\alpha)}$; μ est dite de type Φ-approximable (resp. très approximable) s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ tel que μ soit de type A-approximable (resp. très approximable) avec $A = \sup_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, \Phi^{(\alpha)}$. Enfin μ est dite d'ordre Φ (si μ est de Radon sur $(E, \sigma(E,E_1))$ et) s'il existe φ partout > 0 tel que μ soit d'ordre A avec $A = \sup_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, \Phi^{(\alpha)}$.

Remarques : 1 - Ces définitions coïncident avec celles d'un travail d'ASSOUAD dans le cas d'un poids de type Orlicz généralisé.

2 - Si μ est d'ordre Φ, μ est de type Φ.

3 - Si Φ et ψ sont deux poids équivalents, alors μ est de type Φ (resp. d'ordre Φ) si et seulement si μ est de type ψ (resp. d'ordre ψ).

4 - Si Φ est un poids vérifiant (C) et plus fort que L^0 et si (Ω,P,L) est une fonction aléatoire linéaire arbitraire (Ω espace topologique et P probabilité de Radon) sur E_1 associée à μ, μ est de type Φ si et seulement si L est un opérateur linéaire continu de E_1 dans $L_\Phi(\Omega,P)$ (ce qui exige $L(E_1) \subset L_\Phi(\Omega,P))$. Si $E_1 = E_b'$ ou si $E_1' = E$ avec E_1 séparable, μ est d'ordre Φ si et seulement si il existe φ dans $\mathcal{L}_\Phi(\Omega,P\, ;\cdot(E, \sigma(E,E_1)))$ tel que, pour tout $x_1 \in E_1$, $\langle \varphi(.), x_1\rangle \in L(x_1)$.

§ 5. Applications (Φ, ψ)-sommantes et opérateurs radonifiants.

Dans tout ce paragraphe Φ et ψ sont deux poids vérifiant la propriété a') du théorème 2, E et F deux Banach et u un opérateur linéaire de E dans F.

DEFINITION 8. - u est dite (Φ, ψ)-sommante si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux réels > 0, δ_ε et M_ε, tels que :

$$(\mu \in \varepsilon(E)\ ,\ \Phi^*(\mu) \leqslant \delta_\varepsilon) \Rightarrow \psi(h_{M_\varepsilon} \circ \|u(\mu)\|) \leqslant \varepsilon \ .$$

Donc, u est (Φ,ψ)-sommante si et seulement si, pour tout réel $\alpha>0$, il existe deux réels $\alpha'>0$ et $M>0$ tels que :

$$\psi^{(\alpha)}(\|u(\mu)\|) \leqslant M\, (\Phi^{(\alpha')})^*(\mu)\ ,\quad \forall \mu \in \varepsilon(E)\ .$$

Remarque : Si $\Phi = \psi = M_p$ $(0 < p < +\infty)$, u est (M_p,M_p)-sommante si et seulement si u est p-sommante au sens de PIETSCH. Si φ et Ψ sont deux éléments de $\mathcal{M}$, $\Phi = M_\varphi$, $\psi = M_\Psi$, u est (Φ, ψ)-sommante si et seulement si elle est (φ, Ψ)-sommante au sens de ASSOUAD [2].

Trivialement, si G est un Banach et j un isomorphisme de F dans G on a équivalence de :

i) u est (Φ, ψ)-sommante,

ii) $j \circ u$ est (Φ, ψ)-sommante.

THEOREME 6. - Soit G un Banach et u un opérateur linéaire continu de E dans G'. Notons Π_F l'opérateur canonique de G' sur $G'/F^\circ \simeq F'_b$, où F est un sous-espace vectoriel (fermé) quelconque de G. On a équivalence de :

a) u est (Φ, ψ)-sommante ;

b) pour tout sous-espace vectoriel fermé séparable F de G, $\Pi_F \circ u$ est (Φ, ψ)-sommante.

THEOREME 7. - Soit G un Banach et u un opérateur linéaire continu de E dans G'. Si ψ est plus fort que L^0 et si u est (Φ, ψ)-sommante, alors l'image par l'opérateur continu $u : (E, \sigma(E,E')) \to (G', \sigma(G', G))$ de toute mesure cylindrique sur E de type Φ-très approximable est une mesure de Radon d'ordre ψ sur $(G', \sigma(G', G))$ (c'est-à-dire l'opérateur u de $(E, \sigma(E,E'))$ dans $(G' \sigma(G', G))$ est très approximativement (Φ, ψ)-radonifiant).

THEOREME 8. - Soit toujours G un Banach et u un opérateur linéaire continu de E dans G'. Si Φ et ψ sont deux poids plus forts que L^0 et vérifiant la condition (C), on a équivalence de :

1) u est (Φ, ψ)-sommante ;

2) l'image par $u : (E, \sigma(E,E')) \to (G', \sigma(G', G))$ de toute mesure cylindrique sur E de type Φ-très approximable est une mesure de Radon d'ordre ψ sur $(G', \sigma(G', G))$;

3) Pour tout poids A de la forme $\sup\limits_{\alpha>0} \varphi(\alpha)\, \Phi^{(\alpha)}$, φ partout > 0 et bornée, il existe un poids $B = \sup\limits_{\alpha>0} \Psi(\alpha)\, \psi^{(\alpha)}$, Ψ partout > 0 et bornée, tel que :

$$B(\|u(\lambda)\|) \leqslant A(\lambda), \quad \forall \lambda \in \varepsilon(E) ;$$

4) Pour tout espace topologique Ω et pour toute probabilité de Radon P sur Ω, la restriction de l'application $\varphi \to u \circ \varphi$ de $L_\Phi(\Omega,P ; E)$ dans $L_\psi(\Omega,P ; G')$ à l'espace $\varepsilon(\Omega,P ; E)$ des fonctions étagées de $L^0(\Omega,P ; E)$

est continue quand on munit $\varepsilon(\Omega,P\ ;\ E)$ de la topologie induite par le plongement canonique de $\varepsilon(\Omega,P\ ;\ E)$ dans $\mathcal{L}(E'\ ;\ L_\Phi(\Omega,P))$; il suffit que cette continuité soit vraie pour un Ω particulier et une probabilité P particulière diffuse.

THEOREME 9. - Supposons Φ vérifiant :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mu_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \Phi(\mu_i)$$

pour toute famille finie (λ_i, μ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, d'éléments de $\mathbb{R}_*^+ \times \varepsilon(E)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et ψ équivalent à un poids ψ_1 vérifiant

$$\psi_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mu_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \psi_1(\mu_i)$$

pour toute famille finie (λ_i, μ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, d'éléments de $\mathbb{R}_*^+ \times \varepsilon(E)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Alors, on a équivalence de :

1) u est (Φ, ψ)-sommante ;

2) pour tout réel $\alpha > 0$, il existe deux réels > 0, M et β, et une probabilité de Radon μ sur la boule unité $U_{E'}$ de E', munie de la topologie induite par $\sigma(E', E)$, telle que :

$$\psi^{(\alpha)}\left(\|u(\lambda)\|\right) \leqslant M\, \Phi_\mu^{(\beta)}(\lambda)\ , \qquad \forall\, \lambda \in \varepsilon(E)$$

où

$$\Phi_\mu(\lambda) = \int_{U_{E'}} \Phi(x' \circ \lambda)\, \mu(dx')\ .$$

Remarque : Si Φ et ψ sont deux poids de type Orlicz généralisé, les hypothèses du théorème 9 sont vérifiées. Si de plus, $\psi = M_0$ on en déduit facilement l'équivalence des parties 1) et 2) de la proposition 1 de ASSOUAD dans l'exposé 27 de [2].

Remarque : Si Φ est un poids strictement plus faible que ψ, alors :
$(u\ (\Phi, \psi)\text{-sommante}) \Rightarrow u \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHWARTZ (L.). - Exposés 5, 16, 17 du Séminaire Schwartz 1969-1970 sur les applications radonifiantes.

[2] ASSOUAD (P.).- Exposés 27 et 28 du Séminaire cité ci-dessus.

[3] KRASNOSEL'SKII (M.A.) et RUTICKII (Ya. B.).- Convex functions and Orlicz spaces, 1961, P. Noordhoff Ltd. (traduit du Russe).

Université de Clermont
Complexe Scientifique des Cézeaux
Département de Mathématiques Appliquées
B.P. 45
63 - AUBIÈRE (France)