

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CHARLES CASTAING

Quelques résultats de compacité liés à l'intégration

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 73-81

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__73_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉSULTATS DE COMPACITÉ LIÉS À L'INTÉGRATION

par

Charles CASTAING

Le but de ce papier est d'étendre en dimension infinie la compacité faible d'une partie latticiellement bornée d'un espace L^1 et de démontrer la compacité forte de l'intégrale d'une multiapplication. On trouve d'autres théorèmes de compacité dans ([3], [5], [6], [7], [8], [9], [13], [16], [17]).

Notations.

Soient X et Y un couple d'espaces vectoriels sur le corps \mathbb{R} mis en dualité par la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ la fonction polaire h^* de h est définie par la formule :

$$h^*(y) = \sup \{ \langle x, y \rangle - h(x) \mid x \in X \}, \quad \forall y \in Y.$$

Si A est un ensemble dans X , on pose :

$$\varphi(y, A) = \sup \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A \}, \quad \forall y \in Y$$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Enfin, si Z est un ensemble arbitraire, on pose, pour $f \in \overline{\mathbb{R}}^Z$,

$$f \leq (\rho) = \{ z \in Z \mid f(z) \leq \rho \}, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

LEMME 1. - Soient E un espace de Banach, E' son dual, B' la boule unité de E' . Soient $h \in \overline{\mathbb{R}}^{E'}$ et h^* sa fonction polaire. On suppose que h vérifie les conditions suivantes :

a) $h(0) = 0$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r > 0$, il existe un convexe équilibré $\sigma(E, E')$ compact H tel que h soit majorée par ε sur $rB' \cap H^\circ$ (H° étant le polaire de H). Alors, la fonction polaire h^* de h est $\inf\text{-}\sigma(E, E')$ compacte, c'est-à-dire, pour tout réel ρ , l'ensemble $h^* \leq (\rho)$ est $\sigma(E, E')$ compact.

Démonstration : On va prouver que $h^* \leq (\rho)$ est relativement $\sigma(E, E')$ compact pour $\rho > 0$ parce que $h^* \leq (\rho)$ décroît avec ρ . Soit $\varepsilon > 0$; il existe un convexe équilibré $\sigma(E, E')$ compact H de E tel que :

$$h \leq \varepsilon + \psi_{H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'}$$

D'où

$$h^{**} \geq -\varepsilon + \psi_{H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'}$$

Par suite

$$(1) \quad h^{**} \leq (\rho) \subset \psi_{H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leq (\rho+\varepsilon)$$

L'ensemble $\psi_{H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leq (\rho+\varepsilon)$ est homothétique de l'ensemble $\psi_{H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leq (1)$

lequel est l'ensemble polaire de $H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'$. D'après les formules de polarité, on a :

$$(H^0 \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B')^0 = \overline{\gamma(H^{00} \cup (\frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B')^0)} \subset H^{00} + \frac{\varepsilon}{\rho+\varepsilon} B$$

où H^{00} est le bipolaire de H et B la boule unité dans E . Il résulte de (1) qu'on a :

$$h^{**} \leq (\rho) \subset (\rho+\varepsilon) H^{00} + \varepsilon B$$

Or H^{00} est $\sigma(E, E')$ compact et aussi $(\rho+\varepsilon) H^{00}$; il résulte alors de (2) que $h^{**} \leq (\rho)$ est relativement $\sigma(E, E')$ compact en vertu d'un lemme de Grothendieck ([11], p. 297).

Dans le même ordre d'idées, on a le lemme suivant :

LEMME 2. - Soient E un espace localement convexe, E' son dual. Soient $h \in \overline{E'}$ et h^{**} sa fonction polaire. On suppose que h vérifie les conditions suivantes :

- $h(0) = 0$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout voisinage V de l'origine de E , il existe un voisinage faible de l'origine de E' , U' , tel que h soit majorée par ε sur $V^0 \cap U'$ (V^0 étant le polaire de V). Alors la fonction polaire h^{**} de h est inf-précompacte, c'est-à-dire, pour tout réel ρ , l'ensemble $h^{**} \leq (\rho)$ est précompact.

Démonstration : La technique de démonstration est semblable à celle du lemme 1.

On va prouver que $h^{**} \leq (\rho)$ est précompact pour $\rho > 0$ parce que $h^{**} \leq (\rho)$ décroît avec ρ . Soit $\varepsilon > 0$ et soit V un voisinage convexe fermé équilibré de l'origine de E . Il existe un voisinage U' de l'origine pour $\sigma(E', E)$ tel que :

$$h \leq \varepsilon + \psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0}$$

D'où :

$$h^{**} \geq -\varepsilon + \psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0}^{**}.$$

Par suite

$$(1) \quad h^{**} \leq (\rho) \subset \psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0}^{**} \leq (\rho+\varepsilon).$$

L'ensemble $\psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0}^{**} \leq (\rho+\varepsilon)$ est homothétique de l'ensemble $\psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0}^{**} \leq (1)$, lequel est l'ensemble polaire de $U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0$. D'après les formules de polarité, on a :

$$(2) \quad (U' \cap (\rho+\varepsilon)V^0)^0 = \overline{\gamma(U'^0 \cup (\rho+\varepsilon)^{-1} V)} \subset U'^0 + (\rho+\varepsilon)^{-1} V.$$

Or, U'^0 est compact dans E , donc aussi $(\rho+\varepsilon)U'^0$. Donc il existe un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n dans E tels que :

$$(\rho+\varepsilon)U'^0 \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$$

compte-tenu de (1) et (2), on obtient :

$$h^{**} \leq (\rho) \subset (\rho+\varepsilon)U'^0 + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V) + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + 2V)$$

ce qui prouve que $h^{**} \leq (\rho)$ est précompact.

En combinant le lemme 1 et un résultat de Moreau ([12], p. 47) on obtient le théorème suivant :

THEOREME 1. - Soient E un espace de Banach, E' son dual, B' la boule unité de E' . Soient g une fonction convexe faiblement semi-continue inférieurement sur E' à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, s'annulant à l'origine de E' et f la fonction polaire de g . Pour que f soit inf- $\sigma(E, E')$ compacte, il faut et il suffit que la restriction de g à toute boule $rB'(r>0)$ de E' soit $\tau(E', E)$ continue à l'origine.

De même, en combinant le lemme 2 et le résultat de Moreau précédemment cité, on obtient le théorème suivant :

THEOREME 2. - Soient E un espace localement convexe séparé réel quasi-complet, g une fonction convexe faiblement semi-continue inférieurement sur E' , à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, s'annulant à l'origine de E' , f la fonction polaire de g . Pour que f soit inf-compacte, il faut et il suffit que la restriction de g aux polaires des voisinages de l'origine de E soit $\sigma(E', E)$ continue à l'origine.

Pour la suffisance, on remarque qu'un ensemble précompact dans un espace

localement convexe quasi-complet est relativement compact ; tandis que la nécessité découle du fait que la topologie de la convergence compacte et la topologie faible coïncident sur toute partie équilibrée du dual.

B. - Dans ce paragraphe, T est un espace compact muni d'une mesure de Radon positive μ , E un espace de Banach séparable, E'_S le dual de E muni de la topologie faible. Soient $L_E^1(T, \mu)$ l'espace de Banach des applications μ -intégrables de T dans E et $L_{E'_S}^\infty(T, \mu)$ son dual ([2], p. 47).

THEOREME 3. - Soit K un ensemble convexe équilibré faiblement compact non vide de E . Alors, l'ensemble S_K des sections μ -intégrables de la multi-application constante, K , est $\sigma(L_E^1, L_{E'_S}^\infty)$ compact, et admet pour fonction d'appui :

$$\varphi(v, S_K) = \int_T \varphi(v(t), K) d\mu(t), \quad v \in L_{E'_S}^\infty(T, \mu).$$

Démonstration : Soit K° le polaire de K et soit \hat{E}_{K°' l'espace de Banach obtenu par passage au quotient et complétion à partir de l'espace E_{K°' muni de la semi-norme $\|x\|_{K^\circ} = \inf\{|\lambda| \mid x' \in \lambda K^\circ\}$. Alors K s'identifie à la boule unité du dual de \hat{E}_{K°' . Comme les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F', F)$ (avec $F = \hat{E}_{K^\circ}'$, $F' = E_K$) coïncident sur K , lequel ensemble est $\sigma(E, E')$ métrisable, F est séparable. Par suite S_K est $\sigma(L_F^\infty, L_F^1)$ compact, donc $\sigma(L_E^1, L_{E'_S}^\infty)$ compact parce que l'injection $j : L_F^\infty \rightarrow L_{E'_S}^\infty$ est faiblement continue. Ceci prouve la première assertion tandis que la deuxième assertion résulte d'un théorème d'existence de sections mesurables (cf. par exemple [4], lemme 2).

THEOREME 4. - Sous les hypothèses et notations du théorème 3, soit g une application de $T \times E'$ dans \mathbb{R} qui possède les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $v \in L_{E'_S}^\infty(T, \mu)$, la fonction $t \rightarrow g(t, v(t))$ est μ -mesurable sur T .
- b) Pour tout $r > 0$, il existe $\alpha_r \in L_T^1(T, \mu)$ telle que :

$$\forall t \in T, \quad \forall x' \in rB', \quad |g(t, x')| \leq \alpha_r(t) \varphi(x', K).$$

Soit U' la boule unité de $L_{E'_S}^\infty(T, \mu)$. Alors la fonction :

$$I_g : v \rightarrow \int_T g(t, v(t)) d\mu(t) ; \quad v \in L_{E'_S}^\infty(T, \mu),$$

est $\tau(L_{E'_S}^\infty, L_E^1)$ continue à l'origine sur les boules rU' ($r > 0$).

Démonstration : Soit $(v_i, i \in I)$ une suite généralisée dans rU' ($r > 0$ fixé) convergeant vers 0 pour $\tau(L_{E'_S}^\infty, L_E^1)$. Il s'agit de montrer que $I_g(v_i)$ tend vers

zéro. Soit α_r une fonction positive μ -intégrable vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit (T_n) une partition de T formée d'une suite de mesurables telle que chacune des $\alpha_r|_{T_n}$ soit bornée. Pour tout $i \in I$, on a :

$$|I_g(v_i)| \leq \sum_{n \leq N_0} \int_{T_n} \alpha_r(t) \varphi(v_i(t), K) d\mu(t) \\ + \sum_{n > N_0} \int_{T_n} \alpha_r(t) \varphi(v_i(t), K) d\mu(t).$$

Le deuxième terme est arbitrairement petit dès que N_0 est arbitrairement grand, parce que les fonctions $t \rightarrow \alpha_r(t) \varphi(v_i(t), K)$ sont latticiellement bornées par un multiple de α_r , et pour N_0 fixé, on voit en appliquant le théorème 3 que le premier terme tend vers zéro quand v_i converge vers 0 pour $\tau(L_{E_s}^\infty, L_E^1)$.

En combinant le lemme 1 et le théorème 4 on obtient le théorème suivant qui généralise le théorème 3.

THEOREME 5. - Sous les hypothèses et notations du théorème 3, soit Γ une multi-application de T à valeurs dans les convexes faiblement compacts non vides de E qui possède les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $x' \in E'$, la fonction $t \rightarrow \varphi(x', \Gamma(t))$ est μ -mesurable sur T .
- b) Il existe $h \in L_+^1(T, \mu)$ telle que $\Gamma(t) \subset h(t) K$, $\forall t \in T$.

Alors, l'ensemble S_Γ des sections μ -intégrables de Γ est $\sigma(L_E^1, L_{E_s}^\infty)$ compact et admet pour fonction d'appui :

$$\varphi(v, S_\Gamma) = \int_T \varphi(v(t), \Gamma(t)) d\mu(t), \quad v \in L_{E_s}^\infty(T, \mu).$$

Démonstration : Il est facile de voir que S_Γ est un ensemble convexe fermé dans $L_E^1(T, \mu)$ et que sa fonction d'appui est donnée par :

$$\varphi(v, S_\Gamma) = \int_T \varphi(v(t), \Gamma(t)) d\mu(t), \quad v \in L_{E_s}^\infty(T, \mu)$$

grâce au théorème d'existence des sections mesurables ([4], lemme 2). Appliquons le théorème 4 en prenant $g(t, x') = \varphi(x', \Gamma(t))$. Alors la fonction $v \rightarrow \varphi(v, S_\Gamma)$ est $\tau(L_{E_s}^\infty, L_E^1)$ continue à l'origine sur les boules rU' ; U' étant la boule unité de $L_{E_s}^\infty$. Par suite, la fonction polaire de $\varphi(v, S_\Gamma)$ qui est la fonction indicatrice ψ_{S_Γ} de S_Γ définie par :

$$\psi_{S_\Gamma}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in S_\Gamma \\ +\infty & \text{si } u \notin S_\Gamma \end{cases}$$

est $\inf\text{-}\sigma(L_E^1, L_{E_S}^\infty)$ compacte en vertu du lemme 1 ; ce qui termine la démonstration.

C. - Compacité forte de l'intégrale d'une multi-application.

Dans ce paragraphe $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec μ positive finie, E un espace localement convexe séparé complet réel, E'_c l'espace vectoriel E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les convexes compacts équilibrés de E . Dans la suite, on considère les hypothèses suivantes :

H_1) Il existe dans le dual E' de E une suite (e'_n) séparant les points de E .

H_2) Les polaires des voisinages de l'origine de E sont $\sigma(E', E)$ métrisables.

LEMME 3. - Supposons l'hypothèse H_2) satisfaite. Soient F un espace de Banach, h une application de $\Omega \times E'$ dans F telle que :

a) $\omega \rightarrow h(\omega, x')$ est \mathcal{A} -mesurable sur Ω , $\forall x' \in E'$.

b) $x' \rightarrow h(\omega, x')$ est continue sur E'_c , $\forall \omega \in \Omega$.

c) Pour tout voisinage V de l'origine de E , les fonctions

$$\omega \rightarrow \sup_{x' \in V^0} \|h(\omega, x')\| \quad (\omega \in \Omega) \text{ sont } \mu\text{-intégrables.}$$

On pose :

$$H(x') = \int_{\Omega} h(\omega, x') \mu(d\omega), \quad \forall x' \in E'.$$

Alors on a les propositions suivantes :

1) Si $F = \mathbb{R}$, si $h(\omega, 0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, la fonction polaire H'' de H est inf-précompacte, c'est-à-dire, l'ensemble :

$$H'' \leq (0) = \{x \in E \mid H''(x) \leq 0\}$$

est, pour tout réel 0 , précompact.

2) Si $h(\omega, \cdot)$ est linéaire, $\forall \omega \in \Omega$, l'application linéaire H est continue sur E'_c .

Démonstration : Il est clair que les conditions a) et c) impliquent l'intégrabilité

des $h(\omega, x')$, $\forall x' \in E'$. En vertu de b) et de l'hypothèse H_2) on voit, en appliquant le théorème de Lebesgue, que la restriction de H aux polaires des voisinages de l'origine de E est $\sigma(E', E)$ continue.

1) Si $F = \mathbb{R}$, si $h(\omega, 0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, on a $H(0) = 0$, par suite H^* est inf-précompacte en vertu du lemme 2.

2) Si $h(\omega, 0)$ est linéaire, $\forall \omega \in \Omega$, l'application linéaire H est continue sur E'_c en vertu du résultat suivant :

PROPOSITION ([14] p. 41). - Soit M un espace localement convexe et soit G un espace localement convexe complet. Une application linéaire de G'_c dans M , continue sur toute partie équicontinue de G' , est continue sur G'_c .

LEMME 4. - Supposons l'hypothèse H_2) satisfaite. Soit f une application scalairement \mathcal{A} -mesurable de Ω dans E . Si, pour tout voisinage V de l'origine de E , la fonction

$$\omega \mapsto \sup_{x' \in V^0} | \langle x', f(\omega) \rangle | \quad (\omega \in \Omega)$$

est μ -intégrable, f est scalairement μ -intégrable et $\int f d\mu \in E$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le 2) du lemme 1 en prenant :

$$F = \mathbb{R}$$

$$h(\omega, x') = \langle x', f(\omega) \rangle, \quad \omega \in \Omega, \quad x' \in E'.$$

Alors la forme linéaire $\int f d\mu : x' \mapsto \int \langle x', f \rangle d\mu \quad (x' \in E')$ est continue sur E'_c .
Donc $\int f d\mu \in E$ parce que $(E'_c)' = E$.

Le résultat de compacité suivant est directement lié à la propriété de Dunford-Pettis ([4]) et ([10], th. 5, p. 155).

THEOREME 6. - Supposons les hypothèses H_1) et H_2) vérifiées. Soit Γ une multi-application de Ω à valeurs dans les convexes compacts non vides de E telle que :

- a) Pour tout $x' \in E'$, la fonction $\omega \mapsto \varphi(x', \Gamma(\omega))$ est \mathcal{A} -mesurable.
- b) Pour tout voisinage V de l'origine de E , la fonction

$$\omega \mapsto \sup_{x' \in V^0} | \varphi(x', \Gamma(\omega)) | \quad (\omega \in \Omega)$$

est μ -intégrable.

Soit S_Γ l'ensemble des sections scalairement μ -intégrables de Γ .
Alors, l'intégrale

$$\int \Gamma \, d\mu = \left\{ \int_{\Omega} f(\omega) \, \mu(d\omega) \mid f \in S_\Gamma \right\}$$

est convexe et compacte dans E .

Démonstration : La non vacuité de S_Γ résulte d'un résultat de Valadier ([16], prop. 1.6) et de l'intégrabilité des fonctions $\omega \rightarrow \sup_{x' \in V^0} |\varphi(x', \Gamma(\omega))|$. En vertu du lemme 4, on a $\int \Gamma \, d\mu \subset E$. Comme $\int \Gamma \, d\mu$ est convexe $\sigma(E, E')$ compact en vertu de ([3], théo. 3) et admet pour fonction d'appui (Valadier, [16], théor. 19)

$$\varphi(x', \int \Gamma \, d\mu) = \int_{\Omega} \varphi(x', \Gamma(\omega)) \, \mu(d\omega) \quad (x' \in E')$$

le lemme 3 appliqué à la fonction $(\omega, x') \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega))$ montre que la fonction d'appui de $\int \Gamma \, d\mu$ est continue sur E'_C , donc $\int \Gamma \, d\mu$ est convexe compact.

Remarque : Si E est un espace de Fréchet, la compacité forte de $\int \Gamma \, d\mu$ peut se démontrer en utilisant le théorème de Banach-Dieudonné ([1], [11]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Livre V.
- [2] BOURBAKI (N.). - Intégration vectorielle. Livre VI, ch. 6.
- [3] CASTAING (C.) et VALADIER (M.). - Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes. R.I.R.O. N° 16 (1969), p. 3-16.
- [4] CASTAING (C.). - Le théorème de Dunford-Pettis généralisé. Fac. Sc. Montpellier (1968-1969), Publication N° 43.
- [5] CASTAING (C.). - Un théorème de compacité faible dans L^1_E . Applications. Fac. Sc. Montpellier (1968-1969). Publication N° 44.
- [6] CASTAING (C.). - Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration. Fac. Sc. Montpellier (1969-1970). Publication N° 67.
- [7] CASTAING (C.). - Quelques résultats de compacité liés à l'intégration. C. R. Ac. Sc. Paris, 270-26, (1970), p. 1732-1735.
- [8] DEBREU (G.). - Integration of correspondences. Fifth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability, Vol. II, Part. I, p. 351-372, (1965-1966).

- [9] GOODMAN (G.) et HOFFMANN-JORGENSEN (J.). - Support functions in infinite dimensional spaces. Colloque "Théorie mathématique du contrôle optimum", Bruxelles, Avril 1969.
- [10] GROTHENDIECK (A.). - Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. Canadian Journal of Math. t. 5 (1953), p. 129-173.
- [11] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. Sao Paulo.
- [12] MOREAU (J.J.). - Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles. Collège de France, Paris (1966-1967) (multigraphié).
- [13] ROCKAFELLAR (R.T.). - Integrals which an convex functionals. Pacific Journal of Math., Vol. 24, n° 3 (1968), p. 525-538.
- [14] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles I. Annales Institut Fourier VII, (1957), p. 1-142.
- [15] VALADIER (M.). - Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), p. 14-16.
- [16] VALADIER (M.). - Contribution à l'analyse convexe. Thèse Paris 1970.
- [17] VALADIER (M.). - Un théorème d'inf-compacité. (A paraître).

Département de Mathématiques
Université des Sciences
et Techniques du LANGUEDOC
34 - MONTPELLIER
(France)
