CHARLES CASTAING

Quelques résultats de compacité liés à l'intégration

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 73-81
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__73_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 73-81.

QUELQUES RÉSULTATS DE COMPACITÉ LIÉS À L'INTÉGRATION

par

Charles CASTAING

Le but de ce papier est d'étendre en dimension infinie la compacité faible d'une partie latticiellement bornée d'un espace L^1 et de démontrer la compacité forte de l'intégrale d'une multiapplication. On trouve d'autres théorèmes de compacité dans ([3], [5], [6], [7], [8], [9], [13], [16], [17]).

Notations.

Soient X et Y un couple d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ mis en dualité par la forme bilinéaire $<. , .>$. Pour $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ la fonction polaire h^* de h est définie par la formule :

$$h^*(y) = \sup\{<x,y> - h(x) \mid x \in X\} \ , \ \forall y \in Y \ .$$

Si A est un ensemble dans X , on pose :

$$\varphi(y, A) = \sup\{<y,x> \mid x \in A\} \ , \qquad \forall y \in Y$$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Enfin, si Z est un ensemble arbitraire, on pose, pour $f \in \overline{\mathbb{R}}^Z$,

$$f\leqslant(\rho) = \{ z \in Z \mid f(z) \leqslant \rho\} \ , \qquad \rho \in \mathbb{R} \ .$$

LEMME 1. - Soient E un espace de Banach, E' son dual, B' la boule unité de E' . Soient $h \in \overline{\mathbb{R}}^{E'}$ et h^* sa fonction polaire. On suppose que h vérifie les conditions suivantes :

a) $h(0) = 0$.

b) Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $r>0$, il existe un convexe équilibré $\sigma(E,E')$ compact H tel que h soit majorée par ε sur $rB' \cap H^\circ$ (H° étant le polaire de H). Alors, la fonction polaire h^* de h est inf-$\sigma(E,E')$ compacte, c'est-à-dire, pour tout réel ρ , l'ensemble $h^*\leqslant(\rho)$ est $\sigma(E,E')$ compact.

Démonstration : On va prouver que $h^*\leqslant(\rho)$ est relativement $\sigma(E,E')$ compact pour $\rho>0$ parce que $h^*\leqslant(\rho)$ décroît avec ρ . Soit $\varepsilon>0$; il existe un convexe équilibré $\sigma(E,E')$ compact H de E tel que :

$$h \leqslant \varepsilon + \psi_{H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} .$$

D'où

$$h^{*} \geqslant -\varepsilon + \psi^{*}_{H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} .$$

Par suite

$$(1) \qquad h^{*} \leqslant (\rho) \subset \psi^{*}_{H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leqslant (\rho+\varepsilon) .$$

L'ensemble $\psi^{*}_{H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leqslant (\rho+\varepsilon)$ est homothétique de l'ensemble $\psi^{*}_{H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'} \leqslant (1)$ lequel est l'ensemble polaire de $H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B'$. D'après les formules de polarité, on a :

$$(H^\circ \cap \frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B')^\circ = \overline{\gamma(H^{\circ\circ} \cup (\frac{\rho+\varepsilon}{\varepsilon} B')^\circ)} \subset H^{\circ\circ} + \frac{\varepsilon}{\rho+\varepsilon} B$$

où $H^{\circ\circ}$ est le bipolaire de H et B la boule unité dans E . Il résulte de (1) qu'on a :

$$h^{*} \leqslant (\rho) \subset (\rho+\varepsilon) H^{\circ\circ} + \varepsilon B .$$

Or $H^{\circ\circ}$ est $\sigma(E,E')$ compact et aussi $(\rho+\varepsilon) H^{\circ\circ}$; il résulte alors de (2) que $h^{*} \leqslant (\rho)$ est relativement $\sigma(E,E')$ compact en vertu d'un lemme de Grothendieck ([11], p. 297).

Dans le même ordre d'idées, on a le lemme suivant :

LEMME 2. - Soient E un espace localement convexe, E' son dual. Soient $h \in \overline{\mathbb{R}}^{E'}$ et h^{*} sa fonction polaire. On suppose que h vérifie les conditions suivantes :

a) $h(0) = 0$.

b) Pour tout $\varepsilon>0$ et tout voisinage V de l'origine de E , il existe un voisinage faible de l'origine de E' , U' , tel que h soit majorée par ε sur $V^\circ \cap U'$ (V° étant le polaire de V) . Alors la fonction polaire h^{*} de h est inf-précompacte, c'est-à-dire, pour tout réel ρ , l'ensemble $h^{*} \leqslant (\rho)$ est précompact.

Démonstration : La technique de démonstration est semblable à celle du lemme 1.

On va prouver que $h^{*} \leqslant (\rho)$ est précompact pour $\rho>0$ parce que $h^{*} \leqslant (\rho)$ décroît avec ρ . Soit $\varepsilon>0$ et soit V un voisinage convexe fermé équilibré de l'origine de E . Il existe un voisinage U' de l'origine pour $\sigma(E',E)$ tel que :

$$h \leqslant \varepsilon + \psi_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ} .$$

D'où :

$$h^* \geq -\varepsilon + \psi^*_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ} \ .$$

Par suite

$$(1) \qquad h^* \leqslant (\rho) \subset \psi^*_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ} \leqslant (\rho+\varepsilon) \ .$$

L'ensemble $\psi^*_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ} \leqslant (\rho+\varepsilon)$ est homothétique de l'ensemble $\psi^*_{U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ} \leqslant (1)$, lequel est l'ensemble polaire de $U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ$. D'après les formules de polarité, on a :

$$(2) \qquad (U' \cap (\rho+\varepsilon)V^\circ)^\circ = \overline{\gamma(U'^\circ \cup (\rho+\varepsilon)^{-1} V)} \subset U'^\circ + (\rho+\varepsilon)^{-1} V \ .$$

Or, U'° est compact dans E , donc aussi $(\rho+\varepsilon)U'^\circ$. Donc il existe un nombre fini de points x_1 , x_2 ,..., x_n dans E tels que :

$$(\rho+\varepsilon)\, U'^\circ \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$$

compte-tenu de (1) et (2), on obtient :

$$h^* \leqslant (\rho) \subset (\rho+\varepsilon)\, U'^\circ + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V) + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + 2V)$$

ce qui prouve que $h^* \leqslant (\rho)$ est précompact.

En combinant le lemme 1 et un résultat de Moreau ([12], p. 47) on obtient le théorème suivant :

THEOREME 1. - Soient E un espace de Banach, E' son dual, B' la boule unité de E' . Soient g une fonction convexe faiblement semi-continue inférieurement sur E' à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$, s'annulant à l'origine de E' et f la fonction polaire de g . Pour que f soit inf-$\sigma(E,E')$ compacte, il faut et il suffit que la restriction de g à toute boule $rB'(r>0)$ de E' soit $\tau(E',E)$ continue à l'origine.

De même, en combinant le lemme 2 et le résultat de Moreau précédemment cité, on obtient le théorème suivant :

THEOREME 2. - Soient E un espace localement convexe séparé réel quasi-complet, g une fonction convexe faiblement semi-continue inférieurement sur E' , à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$, s'annulant à l'origine de E' , f la fonction polaire de g . Pour que f soit inf-compacte, il faut et il suffit que la restriction de g aux polaires des voisinages de l'origine de E soit $\sigma(E',E)$ continue à l'origine.

Pour la suffisance, on remarque qu'un ensemble précompact dans un espace localement convexe quasi-complet est relativement compact ; tandis que la nécessité découle du fait que la topologie de la convergence compacte et la topologie faible coïncident sur toute partie équicontinue du dual.

B. - Dans ce paragraphe, T est un espace compact muni d'une mesure de Radon positive μ, E un espace de Banach séparable, E'_s le dual de E muni de la topologie faible. Soient $L^1_E(T,\mu)$ l'espace de Banach des applications μ-intégrables de T dans E et $L^\infty_{E'_s}(T,\mu)$ son dual ([2], p. 47).

THEOREME 3. - <u>Soit K un ensemble convexe équilibré faiblement compact non vide de E. Alors, l'ensemble S_K des sections μ-intégrables de la multi-application constante, K, est $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$ compact, et admet pour fonction d'appui :</u>

$$\varphi(v, S_K) = \int_T \varphi(v(t), K)\, d\mu(t), \quad v \in L^\infty_{E'_s}(T,\mu).$$

<u>Démonstration</u> : Soit K° le polaire de K et soit $\hat{E}'_{K^\circ}$ l'espace de Banach obtenu par passage au quotient et complétion à partir de l'espace E'_{K° muni de la semi-norme $\|x'\|_{K^\circ} = \inf\{|\lambda| \mid x' \in \lambda K^\circ\}$. Alors K s'identifie à la boule unité du dual de $\hat{E}'_{K^\circ}$. Comme les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F',F)$ (avec $F = \hat{E}'_{K^\circ}$, $F' = E_K$) coïncident sur K, lequel ensemble est $\sigma(E,E')$ métrisable, F est <u>séparable</u>. Par suite S_K est $\sigma(L^\infty_{F'_s}, L^1_F)$ compact, donc $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$ compact parce que <u>l'injection</u> $j : L^\infty_{F'_s} \to L^1_E$ est <u>faiblement continue</u>. Ceci prouve la première assertion tandis que la deuxième assertion résulte d'un théorème d'existence de sections mesurables (cf. par exemple [4], lemme 2).

THEOREME 4. - <u>Sous les hypothèses et notations du théorème 3, soit g une application de $T \times E'$ dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :</u>

a) <u>Pour tout $v \in L^\infty_{E'_s}(T,\mu)$, la fonction $t \to g(t,v(t))$ est μ-mesurable sur T.</u>

b) <u>Pour tout $r>0$, il existe $\alpha_r \in L^1_T(T,\mu)$ telle que :</u>

$$\forall t \in T, \quad \forall x' \in rB', \quad |g(t,x')| \leqslant \alpha_r(t)\, \varphi(x',K).$$

<u>Soit U' la boule unité de $L^\infty_{E'_s}(T,\mu)$. Alors la fonction :</u>

$$I_g : v \to \int_T g(t,v(t))\, d\mu(t) \quad ; \quad v \in L^\infty_{E'_s}(T,\mu),$$

<u>est $\tau(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$ continue à l'origine sur les boules $rU'(r>0)$.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $(v_i, i \in I)$ une suite généralisée dans $rU'(r>0$ fixé) convergeant vers 0 pour $\tau(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$. Il s'agit de montrer que $I_g(v_i)$ tend vers

zéro. Soit α_r une fonction positive μ-intégrable vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit (T_n) une partition de T formée d'une suite de mesurables telle que chacune des $\alpha_r|_{T_n}$ soit bornée. Pour tout $i \in I$, on a :

$$|I_g(v_i)| \leqslant \sum_{n \leqslant N_o} \int_{T_n} \alpha_r(t)\ \varphi(v_i(t)\ ,\ K)\ d\mu(t)$$

$$+ \sum_{n > N_o} \int_{T_n} \alpha_r(t)\ \varphi(v_i(t)\ ,\ K)\ d\mu(t)\ .$$

Le deuxième terme est arbitrairement petit dès que N_o est arbitrairement grand, parce que les fonctions $t \to \alpha_r(t)\ \varphi(v_i(t), K)$ sont latticiellement bornées par un multiple de α_r , et pour N_o fixé, on voit en appliquant le théorème 3 que le premier terme tend vers zéro quand v_i converge vers 0 pour $\tau(L^\infty_{E'_s}\ ,\ L^1_E)$.

En combinant le lemme 1 et le théorème 4 on obtient le théorème suivant qui généralise le théorème 3.

THEOREME 5. - <u>Sous les hypothèses et notations du théorème 3, soit</u> Γ <u>une multi-application de</u> T <u>à valeurs dans les convexes faiblement compacts non vides de</u> E <u>qui possède les propriétés suivantes</u> :

a) <u>Pour tout</u> $x' \in E'$, <u>la fonction</u> $t \to \varphi(x', \Gamma(t))$ <u>est μ-mesurable sur</u> T .

b) <u>Il existe</u> $h \in L^1_+(T,\mu)$ <u>telle que</u> $\Gamma(t) \subset h(t)\ K\ , \quad \forall t \in T$.

<u>Alors, l'ensemble</u> S_Γ <u>des sections μ-intégrables de</u> Γ <u>est</u> $\sigma(L^1_E\ ,\ L^\infty_{E'_s})$ <u>compact et admet pour fonction d'appui</u> :

$$\varphi(v,\ S_\Gamma) = \int_T \varphi\,(v(t),\ \Gamma(t))\ d\mu(t)\ , \quad v \in L^\infty_{E'_s}(T,\mu)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Il est facile de voir que S_Γ est un ensemble convexe fermé dans $L^1_E(T,\mu)$ et que sa fonction d'appui est donnée par :

$$\varphi\,(v,S_\Gamma) = \int_T \varphi\,(v(t),\ \Gamma(t))\ d\mu(t)\ ,\ v \in L^\infty_{E'_s}(T,\mu)$$

grâce au théorème d'existence des sections mesurables ([4], lemme 2). Appliquons le théorème 4 en prenant $g(t,x') = \varphi(x', \Gamma(t))$. Alors la fonction $v \to \varphi\,(v,\ S_\Gamma)$ est $\tau(L^\infty_{E'_s}\ ,\ L^1_E)$ continue à l'origine sur les boules rU' ; U' étant la boule unité de $L^\infty_{E'_s}$. Par suite, la fonction polaire de $\varphi(v,\ S_\Gamma)$ qui est la fonction indicatrice ψ_{S_Γ} de S_Γ définie par :

$$\psi_{S_\Gamma}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in S_\Gamma \\ +\infty & \text{si } u \notin S_\Gamma \end{cases}$$

est inf-$\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$ compacte en vertu du lemme 1 ; ce qui termine la démonstration.

C. - Compacité forte de l'intégrale d'une multi-application.

Dans ce paragraphe $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec μ positive finie, E un espace localement convexe séparé complet réel, E'_c l'espace vectoriel E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les convexes compacts équilibrés de E. Dans la suite, on considère les hypothèses suivantes :

H_1) Il existe dans le dual E' de E une suite (e'_n) séparant les points de E.

H_2) Les polaires des voisinages de l'origine de E sont $\sigma(E',E)$ métrisables.

LEMME 3. - Supposons l'hypothèse H_2) satisfaite. Soient F un espace de Banach, h une application de $\Omega \times E'$ dans F telle que :

a) $\omega \to h(\omega,x')$ est $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω, $\forall x' \in E'$.

b) $x' \to h(\omega,x')$ est continue sur E'_c, $\forall \omega \in \Omega$.

c) Pour tout voisinage V de l'origine de E, les fonctions $\omega \to \sup_{x' \in V^\circ} \|h(\omega,x')\|$ $(\omega \in \Omega)$ sont μ-intégrables.

On pose :

$$H(x') = \int_\Omega h(\omega,x')\,\mu(d\omega), \quad \forall x' \in E'.$$

Alors on a les propositions suivantes :

1) Si $F = \mathbb{R}$, si $h(\omega,0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, la fonction polaire H^* de H est inf-précompacte, c'est-à-dire, l'ensemble :

$$H^* \leq (\rho) = \{x \in E \mid H^*(x) \leq \rho\}$$

est, pour tout réel ρ, précompact.

2) Si $h(\omega, .)$ est linéaire, $\forall \omega \in \Omega$, l'application linéaire H est continue sur E'_c.

Démonstration : Il est clair que les conditions a) et c) impliquent l'intégrabilité des $h(\omega,x')$, $\forall x' \in E'$. En vertu de b) et de l'hypothèse H_2) on voit, en appliquant le théorème de Lebesgue, que la restriction de H aux polaires des voisinages de l'origine de E est $\sigma(E',E)$ continue.

1) Si $F = \mathbb{R}$, si $h(\omega,0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, on a $H(0) = 0$, par suite H^* est inf-précompacte en vertu du lemme 2.

2) Si $h(\omega,0)$ est linéaire, $\forall \omega \in \Omega$, l'application linéaire H est continue sur E'_c en vertu du résultat suivant :

PROPOSITION ([14] p. 41). - Soit M un espace localement convexe et soit G un espace localement convexe complet. Une application linéaire de G'_c dans M , continue sur toute partie équicontinue de G' , est continue sur G'_c .

LEMME 4. - Supposons l'hypothèse H_2) satisfaite. Soit f une application scalairement $\mathfrak{a}$-mesurable de Ω dans E . Si, pour tout voisinage V de l'origine de E , la fonction

$$\omega \to \sup_{x' \in V^\circ} |\langle x' , f(\omega)\rangle| \quad (\omega \in \Omega)$$

est μ-intégrable, f est scalairement μ-intégrable et $\int f d\mu \in E$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le 2) du lemme 1 en prenant :

$$F = \mathbb{R}$$

$$h(\omega,x') = \langle x' , f(\omega)\rangle , \ \omega \in \Omega , \ x' \in E' .$$

Alors la forme linéaire $\int f d\mu : x' \to \int \langle x', f\rangle \, d\mu \quad (x' \in E')$ est continue sur E'_c . Donc $\int f d\mu \in E$ parce que $(E'_c)' = E$.

Le résultat de compacité suivant est directement lié à la propriété de Dunford-Pettis ([4]) et ([10], th. 5, p. 155).

THEOREME 6. - Supposons les hypothèses H_1) et H_2) vérifiées. Soit Γ une multi-application de Ω à valeurs dans les convexes compacts non vides de E telle que :

a) Pour tout $x' \in E'$, la fonction $\omega \to \varphi(x', \Gamma(\omega))$ est $\mathfrak{a}$-mesurable.

b) Pour tout voisinage V de l'origine de E , la fonction

$$\omega \to \sup_{x' \in V^\circ} | \varphi(x', \Gamma(\omega))| \quad (\omega \in \Omega)$$

est μ-intégrable.

Soit S_Γ l'ensemble des sections scalairement μ-intégrables de Γ. Alors, l'intégrale

$$\int \Gamma \, d\mu = \{ \int_\Omega f(\omega) \, \mu(d\omega) \mid f \in S_\Gamma \}$$

est convexe et compacte dans E.

Démonstration : La non vacuité de S_Γ résulte d'un résultat de Valadier ([16], prop. 1.6) et de l'intégrabilité des fonctions $\omega \to \sup_{x' \in V^\circ} | \varphi(x', \Gamma(\omega))|$. En vertu du lemme 4, on a $\int \Gamma \, d\mu \subset E$. Comme $\int \Gamma \, d\mu$ est convexe $\sigma(E,E')$ compact en vertu de ([3], théo. 3) et admet pour fonction d'appui (Valadier, [16], théor. 19)

$$\varphi(x' , \int \Gamma \, d\mu) = \int_\Omega \varphi(x', \Gamma(\omega)) \, \mu \, (d\omega) \quad (x' \in E')$$

le lemme 3 appliqué à la fonction $(\omega, x') \to \varphi(x', \Gamma(\omega))$ montre que la fonction d'appui de $\int \Gamma \, d\mu$ est continue sur E'_c, donc $\int \Gamma \, d\mu$ est convexe compact.

Remarque : Si E est un espace de Fréchet, la compacité forte de $\int \Gamma \, d\mu$ peut se démontrer en utilisant le théorème de Banach-Dieudonné ([1], [11]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Livre V .

[2] BOURBAKI (N.). - Intégration vectorielle. Livre VI, ch. 6.

[3] CASTAING (C.) et VALADIER (M.). - Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes. R.I.R.O. N° 16 (1969), p. 3-16.

[4] CASTAING (C.). - Le théorème de Dunford-Pettis généralisé. Fac. Sc. Montpellier (1968-1969), Publication N° 43.

[5] CASTAING (C.). - Un théorème de compacité faible dans L^1_E . Applications. Fac. Sc. Montpellier (1968-1969). Publication N° 44.

[6] CASTAING (C.). - Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration. Fac. Sc. Montpellier (1969-1970). Publication N° 67.

[7] CASTAING (C.). - Quelques résultats de compacité liés à l'intégration. C. R. Ac. Sc. Paris, 270-26, (1970), p. 1732-1735.

[8] DEBREU (G.). - Integration of correspondences. Fifth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability, Vol. II, Part. I, p. 351-372, (1965-1966).

[9] GOODMANN (G.) et HOFFMANN-JORGENSEN (J.). - Support functions in infinite dimensional spaces. Colloque "Théorie mathématique du contrôle optimum", Bruxelles, Avril 1969.

[10] GROTHENDIECK (A.). - Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K) . Canadian Journal of Math. t. 5 (1953), p. 129-173.

[11] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. Sao Paulo.

[12] MOREAU (J.J.). - Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles. Collège de France, Paris (1966-1967) (multigraphié).

[13] ROCKAFELLAR (R.T.). - Integrals which an convex functionals. Pacific Journal of Math., Vol. 24, n° 3 (1968), p. 525-538.

[14] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles I. Annales Institut Fourier VII, (1957), p. 1-142.

[15] VALADIER (M.). - Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), p. 14-16.

[16] VALADIER (M.). - Contribution à l'analyse convexe. Thèse Paris 1970.

[17] VALADIER (M.). - Un théorème d'inf-compacité. (A paraître).

Département de Mathématiques
Université des Sciences
et Techniques du LANGUEDOC
34 - MONTPELLIER
(France)