MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARCO BIROLI

Sur la solution bornée et presque périodique des inéquations d’évolution paraboliques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 41-45
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__41_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 41-45.

SUR LA SOLUTION BORNÉE ET PRESQUE PÉRIODIQUE DES INÉQUATIONS D'ÉVOLUTION PARABOLIQUES

par

Marco BIROLI

§ 1 - CADRE FONCTIONNEL.

Soit $V(X, W)$ un espace de Banach réel séparable de norme $\| \|$ $(\| \|_X$, $\| \|_W)$; nous indiquons par $V^*(X^*, W^*)$ son dual, par $< , >$ la dualité entre $V(X, W)$ et $V^*(X^*, W^*)$ et par $\| \|^*$ $(\| \|^*_X$, $\| \|^*_W)$ la norme duale sur $V^*(X^*, W^*)$.

Soit $V(X)$ uniformément convexe.

Soit H un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produit scalaire $(,)$ et indiquons par $| \, |$ la norme sur H induite par $(,)$.

Nous supposons que $V(X, W)$ soit identifié avec un sous-espace dense de H et que l'injection de $V(X, W)$ dans H soit compacte (continue, compacte).

Nous supposons aussi que W soit identifié avec un sous-espace de X et que l'injection de W dans X soit compacte.

§ 2 - ENONCES.

Soit $A : V \to V^*$ un opérateur (univoque) monotone, [6], hémicontinu borné et $\varphi(u)$ une fonction convexe s.c.i. de V dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi(u) \not\equiv +\infty$, avec $\varphi(u) \geqslant 0$; soit enfin $\varphi(0) = 0$ et

$$(2.1) \qquad \lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{< Au, u - v_0 > + \varphi(u)}{\|u\|} = +\infty \qquad v_0 \in D(\varphi) \; .$$

Supposons que $\forall g \in X$ l'inéquation

$$(2.2) \qquad < Au, v-u > + \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant <g, v-u> \qquad \forall v \in D(\varphi)$$

a une solution $u \in X \cap D(\varphi)$ et que l'opérateur défini par la relation :

$g \in Mu$ si et seulement si $g \in X$ et $u \in X \cap D(\varphi)$ vérifient (2.2).

Soit m-accretif, [7], sur X .

Supposons en plus que si $g \in Mu$

$$\|g\|_X \geqslant \alpha \|u\|_W \qquad \alpha > 0 .$$

On a le résultat suivant :

THEOREME 1. - Considérons le problème :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &< \frac{du}{dt} + A\, u(t) + \lambda\, u(t), v-u(t) > + \quad \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geqslant \\ &\geqslant < f(t), v-u(t) > \text{p.p.} \quad \forall v \in D(\varphi) \,, \lambda > 0 \end{aligned}$$

où $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \,;\, X)$ et $\frac{df}{dt}(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \,;\, X)$. Le problème (2.3) a une unique solution $u(t)$ bornée dans W .

Si $f(t)$ est $S^{1+\varepsilon}$ presque périodique dans X , $\varepsilon>0$, $u(t)$ est faiblement presque périodique dans W .

Remarque 1 : Si $X = H$ et on a (2.1), on peut déduire la condition (2.1) de (2.2) [5]. Si en plus $\forall v_i \in V \quad i = 1, 2$:

$$< Av_1 - Av_2 \,,\, v_1 - v_2 > \geqslant \alpha \|v_1 - v_2\|^2 \quad , \alpha > 0$$

les conclusions du théorème 1 restent valables pour $\lambda = 0$.

Soit maintenant $A = 0$, $X = H$. La fonction $\varphi(u)$ a une extension s. c. i. sur H ([5])

$$\varphi_H(u) = \begin{cases} = \varphi(u) & \text{si} \quad u \in D(\varphi) \\ = +\infty & \text{si} \quad u \in H \quad u \notin D(\varphi) \end{cases} .$$

Indiquons par $\partial\varphi_H(u)$ la sous-différentielle, [9] de $\varphi_H(u)$, qui est un opérateur m-monotone, [10] multivoque sur H .

THEOREME 2. - Soit $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \,;\, H)$ et $\frac{df}{dt}(t)$ S^1-bornée dans H ; le problème

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi_H (u(t)) + \lambda\, u(t) = f(t) \qquad \text{p.p.} \quad \lambda > 0$$

a une unique solution bornée dans W .

Si $f(t)$ est $S^{1+\varepsilon}$ presque périodique dans H , $\varepsilon>0$, $u(t)$ est faiblement presque périodique dans W .

Remarque 2 : Si on a $\forall u_i \in D(\partial\varphi_H) \quad v_i \in \partial\varphi_H\, u_i \qquad i = 1, 2$:

$$(v_1 - v_2 \, , \, u_1 - u_2) \geqslant \alpha \, \|u_1 - u_2\|^p \, , \, \alpha > 0 \, , \, p \geqslant 2$$

la conclusion du théorème 2 reste valable pour $\lambda = 0$.

THEOREME 3. - Si $f(t)$ est S^2-bornée dans H, le problème :

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi_H(u(t)) + \lambda \, u(t) = f(t) \quad \text{p.p. } \lambda > 0$$

a une unique solution $u(t)$ bornée dans H, S^2-bornée dans W et avec $\varphi(u(t))$ bornée.

Si $f(t)$ est S^2-presque périodique dans H, $u(t)$ est faiblement S^2-presque périodique dans W et presque périodique faiblement dans V.

Remarque 3 : Si on a $\forall u_i \in D(\partial\varphi_H)$ $v_i \in \partial\varphi_H \, u_i$ $i = 1, 2$

$$(v_1 - v_2 \, , \, u_1 - u_2) \geqslant \alpha \, \|u_1 - u_2\|^p \quad p \geqslant 2 \, , \, \alpha > 0$$

les conclusions du théorème 3 restent valables pour $\lambda = 0$ et si $f(t)$ est S^2 presque périodique dans H, $u(t)$ est S^p presque périodique dans V.

On peut considérer aussi $f(t)$ moins régulière. Supposons que $\varphi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_a(u)$ où $\varphi_1(u)$ $(\varphi_2(u))$ est une fonction convexe s.c.i. sur V dans $]-\infty \, , +\infty]$ non négative ; $\varphi_1(u)$ a dérivée de Fréchet $A : V \to V^*$, tel que $\forall v_i \in V$ $i = 1, 2$

$$\langle Av_1 - Av_2 \, , \, v_1 - v_2 \rangle \geqslant \alpha \, \|v_1 - v_2\|^p \quad \alpha > 0 \, , \, p \geqslant 2$$

$$\|Av\|^* \leqslant K_1 \, \|v\|^{p-1} + K_2 \qquad \forall v \in V \, .$$

THEOREME 4. - Soit $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \, ; V^*)$ avec $\frac{df}{dt}(t)$ S^1-bornée dans V^* ; le problème

$$\langle \frac{du}{dt} + A \, u(t) - f(t), v - u(t) \rangle + \varphi_2(v) - \varphi_2(u(t)) \geqslant 0$$

$$\text{p.p.} \quad \forall v \in D(\varphi_2) \, ,$$

a une unique solution bornée dans V avec $\varphi_2(u(t))$ bornée.

Si $f(t)$ est $S^{1+\varepsilon}$ presque périodique $\varepsilon > 0$, $u(t)$ est S^p-presque périodique dans V et faiblement presque périodique dans V.

THEOREME 5. - Soit $f(t)$ $S^{p'}$-bornée dans V^* (p' index conjugué à p) ; le problème

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ < \frac{dv}{dt}, v(t)-u(t) > + < Au(t), v(t)-u(t) > + \varphi_2(v(t)) - \varphi_2(u(t)) -$$

$$- < f(t), v(t)-u(t) > \} \, dt \geqslant \frac{1}{2} \{ |v(t_2)-u(t_2)|^2 - |v(t_1)-u(t_1)|^2 \}$$

$$t_1 \leqslant t_2 \quad \forall v(t) \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R} ; V) \ \text{avec} \ \frac{dv}{dt}(t) \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R} ; H) ,$$

$$\varphi_2(v(t)) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) .$$

$$u(t) \in C(\mathbb{R} ; H) \cap \mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R} ; V) , \quad \varphi_2(u(t)) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$$

a une unique solution $u(t)$ bornée dans H et S^p-bornée dans V .

Si $f(t)$ est $S^{p'}$-presque périodique dans V^* , $u(t)$ est presque périodique dans H et S^p-presque périodique dans V .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO (L.), PROUSE (G.). - Functional analysis and almost periodic functions. Van Nostrand 1970.

[2] BIROLI (M.). - Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution avec des fonctionnelles non différentiables. Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XLIV (1970), p. 299-318.

[3] BIROLI (M.). - Sulla esistenza ed unicita della soluzione limitata e della soluzione quasi periodica per una equazione parabolica con termine dissipativo non lineare discontinuo. Ricerche di matematica, Vol. XIX (1970), p. 93-110.

[4] BIROLI (M.). - Solutions bornées et presque périodiques des inéquations d'évolution. A paraître Annali di matematica.

[5] BREZIS (H.). - Problèmes unilatéraux. A paraître. Thèse de Doctorat d'Etat.

[6] CRANDALL (M.), PAZY (G.). - Semigroups of non-linear contractions and dissipative sets. Journ. of functional analysis fasc. 3, (1969), p. 376-418.

[7] CRANDALL (M.), PAZY (G.). - On accretive sets in Banach spaces. Journ. of functional Analysis, fasc. 2 (1970), p. 204-217.

[8] PALMIERI (G.). - Soluzioni limitate o quasi periodiche dell' equazione del calore non lineare con discontinuita respetto all' incognita. Rend. Iet. Lombardo, Vol. 104 (1970), p. 746-757.

[9] ROCKAFELLAR (T.). - On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. Michigan J. of mathematics, 1970.

[10] ROCKAFELLAR (T.). - Convex analysis. Princeton University Press, 1969.

Mareo BIROLI
Via Marcona, 15
I 20129 MILANO (Italie)