Mémoires de la S. M. F.

Claude Bardos

Solution de l’équation d’Euler en dimension 2

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 39-40
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__39_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France.
Mémoire 31-32, 1972, p. 39-40.

SOLUTION DE L'ÉQUATION D'EULER EN DIMENSION 2

par

Claude BARDOS

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ, de classe C^2. On désigne par $n = (n_1 , n_2)$ la normale extérieure à Γ. On se propose de montrer que l'équation d'Euler :

$$(1)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} u' + (u\,\nabla)\,u = f - \nabla p \\ \nabla - u = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega \times]0, T[\,, \\ u.n|_{\Gamma \times]0, T[} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

admet pour tout couple (u_0 , f) appartenant à des espaces de Sobolev convenables une unique solution faible. Pour démontrer l'existence de la solution de (1), on introduit une équation du type Navier-Stoker

$$(2)\qquad \left.\begin{cases} u'_\nu - \nu\,\Delta\,u_\nu + (u_\nu\,\nabla)\,u_\nu = f - \nabla p_\nu \\ \nabla\,u_\nu = 0 \end{cases}\right\} \text{ dans } \Omega \times]0, T[$$

avec les conditions aux limites :

$$(3)\qquad \left\{ n \cdot u_\nu|_{\Gamma \times]0, T[} = \nabla \wedge u_\nu|_{\Gamma \times]0, T[} = 0 \right. .$$

et on montre que u_ν converge vers ν (lorsque ν tend vers zéro) dans l'espace $L^2(0, T ; (H^1_0 (\Omega))^2)$.

L'introduction des conditions aux limites (3) se justifie par le fait que la solution de l'équation de Navier-Stokes usuelle (i.e. vérifiant la condition aux limites $u_\nu|_{\Gamma \times]0, T[} = 0$) ne peut converger dans $L^2(0, T ; (H^1_0(\Omega))^2)$ vers une fonction u ne vérifiant pas la condition $u|_{\Gamma \times]0, T[} = 0$. (Comme d'habitude, on désigne par ∇p le gradient de p : $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1} , \frac{\partial p}{\partial x_2})$ et par $(u\nabla)\,u$ l'expression : $u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Enfin, on note $\nabla\wedge u$ le rotationel de u : $\nabla\wedge u = (\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}))$.

L'équation d'Euler et l'approximation de sa solution par une solution de problèmes du type Navier-Stokes a été considérée par de nombreux auteurs. L'idée de considérer les conditions aux limites (3) se trouve dans YOUDOVICH [3]. KATO [2] a étudié directement la solution de (1) dans des espaces de Holder, avec des données initiales plus régulières, il utilise notamment la formule :

$$\nabla \wedge (u\,\nabla)\, u = (u.\nabla)\,(\nabla \wedge u) \,, \tag{4}$$

valable seulement en dimension 2 . C'est cette formule qui nous permet, en prenant le rotationel des deux membres de l'équation :

$$u'_\nu - \nu\,\Delta\, u_\nu + (u_\nu\,\nabla)\, u_\nu = f - \nabla\, p_\nu \quad ,$$

d'obtenir des estimations à priori dans l'espace $L^\infty(0,\, T\,;\, (H_0^1\,(\Omega))^2)$. Ainsi, nous donnons une démonstration directe des résultats de YOUDOVICH [3] (sans utiliser la fonction courant), ceci permet de traiter par la même méthode des ouverts Ω non simplement connexe et de préciser la nature de la convergence de u_ν vers u . Ces résultats seront détaillés dans une publication [1] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARDOS (C.). - Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en dimension 2 (à paraître au journal of Math. Analysis and Application).

[2] KATO (T.). - On the classical solution of the two dimensional non stationary Euler equation. Archiv. Rat. Mech. and Analysis 24 (1967), p. 302-324.

[3] YOUDOVICH (V. I.). - Ecoulement non stationnaire d'un fluide idéal non visqueux. Journal de Math. Numérique et de Physique Math. (1963).

31, rue Descartes
75 - PARIS 5ème
(France)