

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MOHAMED SALAH BAOUENDI

## **Itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés et applications**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 35-38

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__35_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ITÉRÉS D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS ET APPLICATIONS

par

Mohamed Salah BAOUENDI  
 Professeur visiteur à l'Université de Nice en 1970-71

Les résultats exposés ici se trouvent dans deux articles publiés en collaboration avec C. GOULAOUIC (\*). On se limite à quelques énoncés ; pour les démonstrations détaillées et la bibliographie complète, on renvoie à ces deux articles.

1. - Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , analytique dans un voisinage de  $\overline{\Omega}$  et telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\}$$

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = 0\}$$

$$d\varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

On considère la forme intégral-différentielle définie pour  $u, v \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$a_1(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) \varphi(x) D^{\alpha}u(x) \overline{D^{\beta}v(x)} dx.$$

$$|\beta| \leq 1$$

On suppose que les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  sont analytiques dans un voisinage de  $\overline{\Omega}$  et qu'il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que l'on ait, pour tout  $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ ,

$$\operatorname{Re} a_1(u, u) \geq \lambda \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\varphi^{1/2} D^{\alpha}u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour  $1 \leq j \leq n$  et  $1 \leq k \leq n$ , on note :

$$\Lambda_{kj} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} D_j - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} D_k$$

et

$$a_2(u, v) = a_1(u, v) + \sum_{k,j} \int_{\Omega} (\Lambda_{kj} u)(x) \overline{(\Lambda_{kj} v)(x)} dx.$$

(\*) M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC :

(1) : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Ann. Sc. E. N. S. t. 4 ; fasc. 1, 1971.

(2) : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. A paraître : Journal of Functional Analysis.

Enfin, on désigne par  $Q_1$  et  $Q_2$  les opérateurs différentiels associés aux formes  $a_1$  et  $a_2$  :

$$Q_1 = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta} \varphi D^\alpha$$

$$Q_2 = Q_1 + \sum_{k,j} \Lambda_{k,j}^* \Lambda_{k,j} .$$

On peut démontrer le résultat suivant :

THEOREME 1. - Pour  $i = 1, 2$ , l'opérateur  $Q_i$  est un isomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  sur lui-même, et de  $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$  sur lui-même (\*\*\*).

2. - Nous allons introduire maintenant des espaces de fonctions voisins des classes de Gevrey sur  $\bar{\Omega}$ . Pour  $s$  réel  $\geq 1$ , on désigne par  $G_s(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions  $u$  vérifiant :

- i)  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ,
- ii)  $u \in G_s(\bar{\Omega})$  (classe de Gevrey d'ordre  $s$  dans  $\Omega$ ).
- iii) Pour toute carte locale  $V$ , voisinage d'un point du bord  $\Omega$ , où les variables tangentielles et normales sont notées respectivement  $x$  et  $y$ , il existe  $M > 0$  (dépendant de  $u$ ) telle que l'on ait pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$  et  $k \in \mathbb{N}$

$$\| (D_y y D_y)^k D_x^\alpha u \|_{L^2(V)} \leq M^{2k+|\alpha|+1} ((2k+|\alpha|)!)^s .$$

Grâce à une inégalité de Hardy, on peut montrer les inclusions

$$G_s(\bar{\Omega}) \subset Q_s(\bar{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\bar{\Omega}) .$$

En particulier, on a :

$$Q_1(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}(\bar{\Omega}) .$$

Nous avons alors la caractérisation :

---

(\*\*\*) On désigne par  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  (resp.  $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ ) l'espace des restrictions à  $\bar{\Omega}$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (resp. analytiques) au voisinage de  $\bar{\Omega}$ .

THEOREME 2. - Soient  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  et  $s \geq 1$  ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $u \in \mathcal{Q}_s(\bar{\Omega})$  ,
- ii) il existe  $L > 0$  telle que l'on ait pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  

$$\| \mathcal{Q}_2^k u \|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1} (2k!)^s .$$

Ce théorème est une généralisation de résultats dûs à Kotaké-Narashiman et Lions-Magenes.

Pour  $s = 1$  , il donne, en particulier, une caractérisation des fonctions analytiques sur  $\bar{\Omega}$  à l'aide des itérés de  $\mathcal{Q}_2$  .

Notons que le théorème 2 serait faux (même pour  $s = 1$ ) si on avait remplacé  $\mathcal{Q}_2$  par  $\mathcal{Q}_1$  . Pour le voir, il suffit de prendre pour  $\Omega$  le disque unité dans  $\mathbb{R}^2$  ,

$$\mathcal{Q}_1 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (1-r^2) \frac{\partial}{\partial x_i} + 1 .$$

On prend alors une fonction  $u \in G_2(\bar{\Omega})$  , holomorphe dans  $\Omega$  ,  $u \notin \mathcal{Q}(\bar{\Omega})$  . On vérifie aisément qu'il existe  $L > 0$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\| \mathcal{Q}_1^k u \|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1} 2k! .$$

3. - Nous allons donner ici quelques applications du théorème 2. Désormais, nous supposons  $\mathcal{Q}$  ( $= \mathcal{Q}_2$ ) auto-adjoint. Son spectre est alors formé d'une suite  $(\lambda_j)$  de valeurs propres strictement positives que l'on numérote dans l'ordre croissant, et qui tend vers l'infini avec  $j$  . Nous notons  $(w_j)$  une base orthonormée dans  $L^2(\Omega)$  de fonctions propres de  $\mathcal{Q}$  associées aux  $(\lambda_j)$  , (nous avons  $w_j \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega})$ ) , et  $J$  l'application qui, à tout  $f \in L^2(\Omega)$  fait correspondre la suite  $(f_j)$  de ses coefficients de Fourier sur la base  $(w_j)$  . Nous avons :

THEOREME 3. - La suite  $(\lambda_j)$  des valeurs propres de  $\mathcal{Q}$  vérifie

$$\lambda_j \sim K j^{2/n} \quad \text{quand } j \rightarrow +\infty$$

où  $K$  est une constante positive dépendant du symbole de  $\mathcal{Q}$  .

On remarque que le comportement de  $(\lambda_j)$  est le même que dans le cas d'un problème elliptique.

On peut déduire des théorèmes 1, 2, et 3 :

THEOREME 4. - La restriction de l'application  $J$  est un isomorphisme de  $C^\infty(\bar{\Omega})$  sur l'espace  $S$  des suites à décroissance rapide, et pour tout  $s \geq 1$ , de  $A_s(\bar{\Omega})$  sur  $\lim_{a \rightarrow 1} \ell^2_{a^j/sn}$  (\*\*\*\*).

Grâce au théorème 4, et en utilisant une méthode introduite par Goulaouic, on peut montrer que  $A_s(\bar{\Omega})$ , pour  $s > 1$ , est un espace d'interpolation entre  $C^\infty(\bar{\Omega})$  et  $A(\bar{\Omega})$ . D'autres résultats d'interpolation peuvent être déduits du théorème 4.

Signalons, aussi, que dans le cas où  $\Omega$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$ , le théorème 4 peut s'énoncer en terme d'approximation polynômiale. En particulier, on obtient une caractérisation des fonctions  $C^\infty$  et analytiques sur  $\bar{\Omega}$  en fonction de leurs distances aux polynômes. Nous renvoyons pour le détail aux articles déjà cités.

---

(\*\*\*\*) Si  $P(j)$  est une suite de nombres réels positifs, on note :

$$\ell^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 P(j) < +\infty\}.$$

Department of Mathematics  
Purdue University  
LAFAYETTE, Ind. 47907-USA  
(Etats-Unis)

---