MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALBERT BADRIKIAN

Propriétés permanentes des trajectoires de processus

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 21-29
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__21_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 21-29.

PROPRIÉTÉS PERMANENTES DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS

par

Albert BADRIKIAN

Dans son article [3], Dudley a introduit certaines parties d'un espace d'Hilbert séparable, les G. B. et les G. C. ensembles, liées à la mesure cylindrique gaussienne normale sur H, soit γ. Ces ensembles s'introduisent de manière naturelle dans la théorie des "espaces de Wiener abstraits", c'est-à-dire l'étude des transformations linéaires de H dans un Banach qui transforment γ en une mesure de Radon.

Nous publions ici quelques remarques simples montrant que ces notions peuvent être généralisées tout en conservant leur utilité. Dans un article ultérieur nous les appliquerons à l'étude de certaines applications radonifiantes entre espaces de type ℓ^p.

I - INTRODUCTION et NOTATION.

Dans tout ce qui suit on désignera par espace de probabilité un couple (Ω, P) où Ω est un espace topologique séparé et P une mesure de Radon sur Ω. Si Y est un espace topologique, $f : \Omega \to Y$ sera dite mesurable si elle est P-mesurable au sens de Lusin. $L^0(\Omega, P)$ désignera l'espace vectoriel des P-classes d'applications mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier). On le munira de la topologie de convergence en probabilité (non localement convexe en général).

Soit X un ensemble quelconque et (Ω, P) un espace de probabilité. On appelle fonction aléatoire basée sur (Ω, P) et indicée par X une application $F : X \to L^0(\Omega, P)$. Quand aucune confusion ne sera possible, on omettra l'expression "basée sur (Ω, P)".

Deux fonctions aléatoires $F : X \to L^0(\Omega, P)$ et $F' : X \to L^0(\Omega', P')$ sont dites isonomes si elles ont même système projectif de répartitions finies. Une "classe" d'isonomie de fonctions aléatoires indicées par X est dite processus indicé par X ou processus sur X. Les fonctions aléatoires appartenant à une même "classe" d'isonomie sont dites des représentants du processus.

Enfin, on désigne par $\mathcal{L}^0(\Omega, P)$ l'espace vectoriel des fonctions P-mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ (donc définies partout !) et l'on notera par π l'application canonique de $\mathcal{L}^0(\Omega, P)$ dans $L^0(\Omega, P)$.

Si $F : X \to L^0(\Omega, P)$ est une fonction aléatoire, $f : X \to \mathcal{L}^0(\Omega, P)$ sera dite <u>version</u> de F si $\pi o f = F$. Si f est une version de F et si $\omega \in \Omega$, on appelle trajectoire de ω l'application $x \to f_x(\omega)$. Une version f d'une fonction aléatoire définit donc une application de Ω dans $\mathbb{R}^X$ (cette application est "mesurable-abstraite" quand $\mathbb{R}^X$ est muni de la tribu produit, mais est rarement Lusin-mesurable quand $\mathbb{R}^X$ est muni d'une topologie).

DEFINITION 1. - <u>Soit X un ensemble et considérons un processus sur X ; une propriété concernant les fonctions aléatoires indicées par X est dite propriété du processus si elle est satisfaite par tous les représentants du processus.</u>

<u>Par exemple</u> :

- <u>Si X est un espace topologique, la propriété " $F : X \to L^0(\Omega, P)$ est continue" est une propriété du processus</u> ;
- <u>Si X est un espace vectoriel, la propriété " $F : X \to L^0(\Omega, P)$ est linéaire" est une propriété du processus</u> ; <u>de même, si X est un espace vectoriel topologique, pour la propriété " F est linéaire et continue"</u> ;
- <u>Il en est de même de toute propriété "portant sur une famille dénombrable d'instants"</u>.

Par contre, il est bien connu que, si $f_1 : X \to \mathcal{L}^0(\Omega, P)$ et $f_2 : X \to \mathcal{L}^0(\Omega, P)$ sont deux versions de la fonction aléatoire $F : X \to L^0(\Omega, P)$, les trajectoires de f_1 peuvent être régulières sans que les trajectoires de f_2 possèdent cette propriété de régularité.

DEFINITION 2. - <u>On dira qu'une propriété (P) concernant les fonctions définies sur X est une propriété d'un processus indicé par X, si tout représentant de ce processus possède une version dont les trajectoires satisfont à (P)</u>.

On va, dans ce qui suit, donner des conditions suffisantes pour que les propriétés "presque sûrement à trajectoires continues" ou "presque sûrement à trajectoires bornées" soient des propriétés du processus.

II - <u>ENSEMBLES DE CONTINUITE DE PROCESSUS.</u>

Tout repose sur le lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit X un ensemble, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^X$ muni d'une topologie plus fine que celle induite par la topologie produit sur $\mathbb{R}^X$ et soit</u>

$F : X \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire. On suppose

(1) que E satisfait à l'une des conditions suivantes :

a) les compacts de E sont métrisables ;

b) il existe un sous-ensemble D de X dénombrable tel que les projections de E sur $\mathbb{R}$ d'indice $x \in D$ séparent les points de E ;

(2) que F possède une version f dont presque toutes les trajectoires appartiennent à E et que l'application de Ω dans E correspondante est P-Lusin mesurable.

Alors, toute fonction aléatoire $F' : X \to L^0(\Omega', P')$ isonome à F possède une version dont presque toutes les trajectoires appartiennent à E et telle que l'application correspondante de Ω' dans E soit P'-Lusin mesurable. En outre, deux versions d'une même $F' : X \to L^0(\Omega', P')$, f'_1 et f'_2 , satisfaisant aux hypothèses du lemme, possèdent la propriété suivante :

$$\text{" il existe } \Omega'_1 \subset \Omega' \text{ , avec } P'(\Omega'_1) = 1 \text{ , tel que}$$
$$\omega' \in \Omega'_1 \Rightarrow f'_1(x, \omega') = f'_2(x, \omega') \ , \quad \forall x \in X \text{ " .}$$

Démonstration : C'est immédiat, compte tenu de SCHWARTZ [4, exposé 13]. En effet, si I désigne l'ensemble des parties finies de X , ordonné par inclusion, et si, pour tout $i \in I$, G_i désigne la P-classe de l'application $\omega \to (F_x(\omega))_{x \in i}$ de Ω dans $R^{\text{card } i}$, les $(G_i)_{i \in I}$ satisfont à la condition de cohérence.

La condition (2) implique que la mesure υ image de P par l'application de Ω dans E définie par f est limite projective des $G_i(P)$. Donc la limite projective des $\mu_i = G_i(P)$ existe sur E . Le théorème fondamental de SCHWARTZ [4, exposé 13] montre alors l'existence, pour toute fonction aléatoire $F' : X \to L^0(\Omega', P')$ isonome à F , d'une version satisfaisant aux hypothèses du lemme.

La dernière partie du lemme résulte alors de la proposition (XIII, 1 ; 1) de [4].

Remarque 1 : Dans le lemme ci-dessus on pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel espace topologique séparé Y et considérer des variables aléatoires à valeurs dans Y au lieu de variables aléatoires réelles.

L'application de ce résultat nécessite la vérification de deux types de propriétés.

La propriété de type ((1), a) est satisfaite si E est métrisable (donc si E est un Fréchet). Le lemme implique en particulier la

PROPOSITION. - Soit E un espace localement convexe (réel) métrisable et μ une mesure cylindrique sur E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) μ est de Radon ;

2) (resp. 2') pour un (resp. tout) représentant $F : E' \to L^0(\Omega , P)$ du processus linéaire sur E' associé à μ, il existe $\varphi : \Omega \to E$ P-Lusin mesurable telle que, pour tout x' de E', la P-classe de la fonction $\omega \to \langle \varphi(\omega) , x' \rangle$ est égale à $F(x')$.

Remarque 2 : Si E est un Banach, $U_{E'}$ la boule unité de E' muni de la topologie induite par celle de $\sigma(E', E)$ et si j est l'isomorphisme métrique canonique de E dans $\mathcal{C}(U_{E'})$, alors 1), 2) et 2') sont équivalents à :

3) la mesure cylindrique $j(\mu)$ sur $\mathcal{C}(U_{E'})$ est de Radon (cela est dû au fait que la transposée de j est surjective).

La propriété de type ((1), a) est aussi satisfaite si E est souslinien (donc si E est lusinien ou si E est polonais). Dans ce cas d'ailleurs la propriété ((1), b) est satisfaite (BADRIKIAN, [1, page 138]). Ce sera le cas

- Si X est un compact métrisable, $E = \mathcal{C}(X)$ espace des fonctions continues sur X avec la norme uniforme ; ou bien si X est polonais et $E = \mathcal{C}_u(X)$ est l'espace des fonctions uniformément continues sur X et bornées sur X avec la norme uniforme ;

- Si X est localement compact dénombrable à l'infini, $E = \mathcal{C}_c(X)$ espace des fonctions continues muni de la topologie de convergence compacte ;

- Si $X = \mathbb{R}$, E l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réglées et continues à droite, muni de la topologie de convergence simple sur un ensemble dénombrable et partout dense dans $\mathbb{R}$ (E est en effet lusinien d'après [5]) ;

- Si X est un espace de Banach séparable, $E = X'$ le dual de X muni de $\sigma(X', X)$ ou de la topologie de convergence compacte.

La propriété de type ((1), b) est vérifiée dans le cas suivant : " X est un espace complètement régulier séparable et E est l'espace des fonctions continues bornées sur X (par exemple $X = \mathbb{N}$ et donc $E = \ell^\infty$) " ; il suffit de prendre pour D un ensemble dénombrable partout dense dans X .

Il reste à vérifier la condition relative à la Lusin mesurabilité. Si E est souslinien, la P-mesurabilité Lusin est équivalente à la P-mesurabilité Borel ; donc, si l'application de Ω dans E , définie par la version de la fonction aléatoire dont les trajectoires appartiennent à E , est P-borélienne, elle est P-Lusin mesurable. Sous cette forme, la condition de mesurabilité ne change pas si on remplace la topologie "initiale" de E par n'importe quelle topologie souslinienne qui lui est comparable.

Toujours dans le cas souslinien, la condition de mesurabilité est réalisée ipso facto. En effet, si on désigne par Π_x la restriction à E de la projection d'indice x sur $\mathbb{R}$, une application de (Ω, P) dans E est P-borélienne si et seulement si sa composée avec toute Π_x est P-mesurable. Or, il en est bien ainsi puisque cette composée est égale P-presque partout à la variable aléatoire f_x sur (Ω, P) . Il suffit d'ailleurs de faire varier x dans un sous-ensemble dénombrable D de X tel que les $(\Pi_x)_{x \in D}$ séparent les points de E (BADRIKIAN, [1, prop. 15, page 138]).

La principale application de ce qui précède réside dans la notion d'ensemble de continuité d'un processus stochastique.

DEFINITION 3. - Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{P}$ un processus stochastique sur X . On dit que $D \subset X$ est un ensemble de continuité (resp. uniforme continuité) du processus, si le processus indicé par D , restriction de $\mathcal{P}$ à D soit $\mathcal{P}_D$, possède une version dont les restrictions à D de presque toutes les trajectoires sont continues (resp. uniformément continues) sur D muni de la topologie induite par celle de X .

Les considérations ci-dessus permettent d'exhiber des cas où cette condition n'est pas vide. Comme exemple d'application donnons le résultat suivant dans le cadre "espace de Wiener abstrait".

THEOREME 1. - Soit G un Banach, μ une mesure cylindrique sur G et $L : G' \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire linéaire sur G' associée à μ . Soit $A' \subset G'$ un disque fermé borné de G'_b et A'° son polaire dans G .

Si G est séparable et si D' est une partie dénombrable de A' , partout dense dans A' muni de la topologie induite par celle de $\sigma(G'_{A'}, G_{A'^{\circ}})$ (donc bien séparable) les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) D' est un ensemble d'uniforme continuité du processus stochastique linéaire associé à μ pour la structure uniforme induite par celle de $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ et la restriction de L à $G'_{A'}$ est une application (uniformément) continue de $c(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ dans $L^0(\Omega, P)$ (*) ;

(β) A' est un ensemble d'uniforme continuité du processus linéaire associé à μ pour la structure uniforme induite par celle de $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$;

(γ) la mesure cylindrique image de μ par l'application canonique $i : G \to \hat{G}_{A',o}$ est de Radon.

De plus, si A' est un compact de G'_b, on peut, dans (α) et (β) remplacer $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ par G'_b.

Démonstration : Rappelons que $G'_{A'}$ est le sous-espace vectoriel de G' engendré par A', muni de la norme jauge de A' (qui en fait un Banach) et $\hat{G}_{A',o}$ est le complété de l'espace quotient séparé $G_{A',o}$ associé à l'espace semi-normé $(G, p_{A',o})$. $G'_{A'}$ est le dual de $\hat{G}_{A',o}$.

La dernière partie du théorème est presque triviale. En effet, les structures uniformes induites sur A' par celles de $\sigma(G', G)$, $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ et de G'_b coïncident puisque A' est à la fois un compact de $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ et de G'_b et la structure uniforme (séparée) induite sur A' par celle de $\sigma(G', G)$ moins fine que les structures uniformes induites sur A' par celles de $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ et de G'_b.

D'autre part, d'après la proposition, (γ) implique (α) (vrai même si G non séparable) ; on vérifie facilement que (α) implique (β).

Il reste donc à montrer l'implication " (β) $\Rightarrow$ (γ)". Supposons donc (β). Dans tout ce qui suit on suppose A' muni de la topologie induite sur A' par celle de $\sigma(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$.

Remarquons tout d'abord que (β) implique (β') avec (β') : "l'application $L \circ i' : (\hat{G}_{A',o})'_c \to L^0(\Omega, P)$ est continue". En effet, si l'on a (β), la restriction de L à A' est continue (puisque A' métrisable) et l'on en déduit (β') par le théorème de Banach-Dieudonné.

(*) Si H est un Banach, H'_c désigne le dual de H muni de la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes (convexes) de H et $c(H', H)$ le dual de H, muni de la structure uniforme déduite de la topologie de H'_c.

D'autre part, d'après la remarque 2, si j désigne l'isomorphisme métrique de $\hat{G}_{A',o}$ dans $\mathcal{C}(A')$, (γ) est équivalent à (γ') où :

(γ') : "il existe une probabilité de Radon ν sur $\mathcal{C}(A')$ telle que

$$\xi \circ \nu = (\xi \circ j \circ i)(\mu), \quad \forall \xi \in (\mathcal{C}(A'))' = \mathfrak{M}(A')."$$

En fait, il suffit de montrer que l'on a (γ'') où (γ'') est obtenu à partir de (γ') en y remplaçant " $\forall \xi \in \mathfrak{M}(A')$ " par " $\forall \xi \in \mathfrak{M}(A')$ à support fini" puisque l'ensemble des mesures de Radon sur A' , à support fini, est partout dense dans $(\mathcal{C}(A'))'_c$, l'application $\xi \to (\xi \circ j \circ i)(\mu)$ de $(\mathcal{C}(A'))'_c$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est continue (par (β')) et que, pour toute probabilité de Radon ν sur $\mathcal{C}(A')$, l'application $\xi \to \xi \circ \nu$ de $(\mathcal{C}(A'))'_c$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est trivialement continue.

Mais, en prenant $X = A'$, $E = \mathcal{C}(A')$ et pour F la restriction de L à A' , les conditions (1) et (2) du lemme sont satisfaites d'après les commentaires suivant le lemme (puisque A' est un compact métrisable et donc $\mathcal{C}(A')$ souslinien). Cela entraîne aisément (γ'') et donc (γ) .

<u>Remarque 3</u> : Si A' est un disque compact de G'_b et si $L : G'_b \to L^0(\Omega, P)$ est continue (c'est-à-dire μ scalairement concentrée sur les boules de G) , la restriction $L \circ i'$ de L à $G'_{A'}$ est une application uniformément continue de $c(G'_{A'}, \hat{G}_{A',o})$ dans $L^0(\Omega, P)$.

III - <u>ENSEMBLES BORNES POUR UN PROCESSUS.</u>

Ici $(\Omega , \mathfrak{F} , P)$ désigne un espace de probabilité "abstrait".

DEFINITION 4. - <u>Soit</u> $F : X \to L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ <u>une fonction aléatoire. On dit qu'elle est bornée sur</u> X <u>(ou que</u> X <u>est un B-ensemble pour</u> F <u>) s'il existe une version de</u> F , $f : X \to \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ <u>presque sûrement à trajectoires bornées. Cela signifie que</u>

(1) $$P^{*}\{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in X} |f_x(\omega)| = +\infty\} = 0$$

<u>où</u> P^{*} <u>désigne la mesure extérieure de Caratheodory.</u>

DEFINITION 5. - <u>Un processus indicé par</u> X <u>est dit borné sur</u> X <u>(ou</u> X <u>est un B-ensemble pour le processus) si</u> X <u>est un B-ensemble pour tout représentant du processus.</u>

La méthode donnée dans le numéro 2, pour vérifier que X est un B-ensemble pour un processus, est mal commode. En effet, on peut prendre pour E l'espace des fonctions mesurables bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme ; ses compacts sont métrisables. Néanmoins, les conditions de Lusin-mesurabilité sont malaisées à vérifier : E n'est pas souslinien en général.

Supposons que X soit un espace métrisable séparable et que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit un espace probabilisé complet ; la condition " $F : X \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est bornée sur X " peut s'exprimer plus simplement.

En effet, en plongeant $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut supposer que $F(x)$ est une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique compact. On sait donc qu'il existe une version séparable $f : X \to \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P, \overline{\mathbb{R}})$. Soit S un sous-ensemble dénombrable de X , séparant pour f (au sens de MEYER) ; alors :

$$\{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in S} |f_x(\omega)| < \infty\} = \{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in X} |f_x(\omega)| < \infty\} \quad (P. p. s.) .$$

Donc on peut remplacer la condition (1) par :

$$P \{\omega ; \omega \in \Omega ; \sup_{x \in S} |f_x(\omega)| < \infty\} = 1 .$$

C'est le cas si X est un espace métrisable séparable et $F : X \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est continue en probabilité. On sait que l'on peut prendre pour S tout ensemble dénombrable partout dense dans X .

On en déduit immédiatement que, si X est un espace métrisable séparable et $\mathcal{P}$ un processus indicé par X et continu en probabilité, X est borné pour le processus si et seulement si X est borné pour un de ses représentants.

DEFINITION 6. - <u>Soit</u> $F : X \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ <u>une fonction aléatoire et soit</u> $D \subset X$; <u>on dit que</u> D <u>est un ensemble borné pour</u> F <u>si la fonction aléatoire</u> $(F_x)_{x \in D}$ <u>est bornée sur</u> D .

La principale application de ces notions réside dans le résultat suivant :

THEOREME 2. - <u>Soit</u> E <u>un Banach séparable</u>, μ <u>une mesure cylindrique sur</u> E <u>scalairement concentrée sur les boules de</u> E <u>et</u> $L : E' \to L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ <u>une fonction aléatoire linéaire associée à</u> μ . <u>Soit</u> $A' \subset E'$ <u>un disque fermé borné</u>. <u>On a équivalence des propriétés suivantes</u> :

(1) A' <u>est un ensemble borné pour</u> L ;

(2) <u>la mesure cylindrique image de</u> μ <u>par l'application canonique</u> $E \to \sigma((\hat{E}_{A'o})'' , E'_{A'})$ <u>est de Radon</u>.

La démonstration de ce résultat sera donné dans [2] et un article à paraître dans les C. R. du colloque de Strasbourg du 31-3-71 (BADRIKIAN).

Ces ensembles bornés pour certaines fonctions aléatoires linéaires ont un lien très étroit avec la théorie de l'approximation. (Voir exposés de S. CHEVET dans [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN (A.). - Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires. Lecture Notes in Mathematics n° 139, Springer-Verlag, 1970.

[2] BADRIKIAN (A.) et CHEVET (S.). - Séminaire 1970-1971 sur les espaces de Wiener. A paraître.

[3] DUDLEY ( ). - The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. Journal of functional analysis 1, p. 290-330 (1967).

[4] SCHWARTZ (L.). - Séminaire 1969-1970. Ecole Polytechnique, Paris.

[5] SCHWARTZ (L.). - Measures on topological spaces. A paraître à Tata Institute.

Albert BADRIKIAN

Complexe Scientifique Universitaire

des CÉZEAUX

63 - AUBIÈRE

(France)