Mémoires de la S. M. F.

Michel Artola

Sur un théorème d'interpolation

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 13-19
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__13_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 13-19.

SUR UN THÉORÈME D'INTERPOLATION

par

Michel ARTOLA

0. - Introduction.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à des propriétés de dérivées intermédiaires ; (voir [1] [2] [3] [8] [10] [11] [14] [15]) .

Cependant le théorème hilbertien de [15] n'a pas reçu semble-t-il de généralisation satisfaisante au cadre "Banach".

En effet, le résultat de [16] obtenu à l'aide du "foncteur trace" ne redonne pas le résultat de [15].

L'objet de cette conférence est de présenter par utilisation du foncteur holomorphe un théorème de dérivées intermédiaires dans un cadre "Banach restreint", mais suffisant pour les applications, qui se réduit au résultat de [15] dans le cas hilbertien.

Dans le §. 1, on donne les notations générales et on énonce le résultat principal.

La démonstration utilise les propriétés de la convolution au sens des distributions vectorielles avec la famille de distributions tempérées :

$$\frac{1}{\Gamma(-z)} \operatorname{Pf} \frac{1}{x_+^{z+1}} , \; z \in \mathbb{C} \; .$$

Cette démonstration est valable dans les espaces $L^p(B)$ (B Banach) dans lesquels la dérivée d'ordre complexe $D^{i\eta} (\eta \in \mathbb{R})$ opère (condition $\mathcal{C}$). Elle est susceptible d'extension aux espaces L^p avec poids.

Par utilisation de la transformation de Fourier, il est possible (cf.[2]) de donner une autre démonstration utilisant le théorème de Mihlin sur les multiplicateurs de $\mathcal{F} L^p$. En fait si B est tel que le théorème de Mihlin soit vrai dans $\mathcal{F} L^p(B)$ alors $L^p(B)$ vérifie la condition ($\mathcal{C}$) , mais nous ignorons si la réciproque est vraie, en l'absence d'une caractérisation convenable de ces espaces.

Dans le §. 2 nous donnons des compléments et des exemples d'espaces d'usage courant dans les applications. Pour l'intérêt de tels résultats nous renvoyons à [1] [3] [17]. Les démonstrations complètes seront publiées dans [2].

§. I - LE THEOREME PRINCIPAL.

I-1. Hypothèses et notations générales.

- D'une manière générale, si $\mathcal{B}$ est un espace de Banach, on note $L^p(\mathcal{B})(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ l'espace des (classes de) fonctions u fortement mesurables (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$) à valeurs dans $\mathcal{B}$ telles que $\int_{R^n} |u(t)|^p_{\mathcal{B}}\, dt < +\infty$ (modification habituelle pour $p = \infty$). Muni de la norme naturelle, $L^p(\mathcal{B})$ est un espace de Banach.

- On considère deux espaces de Banach complexes A_o et A_m contenus avec injection continue dans un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{A}$.

On suppose :

$$(1\text{-}1) \qquad \begin{cases} A_o \cap A_m & \text{dense dans chaque } A_j (j = 0, m) \\ A_j & \text{réflexif } (j = 0, m). \end{cases}$$

On peut alors définir l'espace $A_o + A_m$, qui, muni de la topologie de

$$\frac{A_o \times A_m}{Z} \; (Z = \mathrm{Ker}\, \{(a_o, a_m) \to a_o + a_m, \; a_j \in A_o \cap A_m \quad j = 0, m\}$$

est un espace de Banach (cf. [9]).

On se donne encore p_o, $p_m > 1$ et l'on pose :

$$(1\text{-}2) \qquad \{ X_j = L^{p_j}(A_j) \qquad j = 0, m.$$

Ceci posé pour $m \geqslant 1$, on considère l'espace : (pour simplifier on considère le cas $n = 1$)

$$(1\text{-}3) \qquad \begin{cases} W^{(m)}_{p_o, p_m} = \{u \mid u \in X_o, \; D^m u \in X_m\} \\ D^m \text{ dérivée au sens des distributions vectorielles [23],} \end{cases}$$

qui est un espace de Banach pour la norme naturelle :

$$(1\text{-}4) \qquad \{ \|u\|_{W^{(m)}_{p_o, p_m}} = \|u\|_{X_o} + \|D^m u\|_{X_m}$$

On introduit enfin :

$$(1\text{-}5)\qquad \begin{cases} Y_{-z} = \dfrac{1}{\Gamma(-z)}\ \mathrm{Pf}\ \dfrac{1}{x_+^{z+1}} & \forall z \notin \mathbb{N}\ (z \in \mathbb{C}) \\ Y_{-k} = \delta^{(k)} & k \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

La fonction $z \to Y_{-z}$ est ainsi une fonction analytique de la variable complexe z à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

I-2. Le théorème principal.

Nous considérons la condition suivante (sur les espaces !).

Condition $(\mathcal{C})$:

$$(1\text{-}6)\qquad \begin{cases} A_j\ (j = 0, m) \text{ est tel que} \\ \forall \eta \in \mathbb{R}\ ,\ Y_{-i\eta} \text{ est un convoluteur de } X_j (j = 0, m)\ . \end{cases}$$

On a le :

THEOREME 1. - On suppose (1-1), (1-6) vérifiés. Dans ces conditions l'applicati

$$u \to D^j u \qquad (j \text{ entier ou non})$$

est continue de :

$$W^{(m)}_{p_o\ ,\ p_m} \to L^{p_j}\,[(A_o\ ,\ A_m)_{j/m}] \qquad 0 < j < m$$

où $$\frac{1}{p_j} = \frac{1 - j/m}{p_o} + \frac{j/m}{p_m}\ .$$

La démonstration de ce théorème repose sur la condition $(\mathcal{C})$ et les propriétés de la convolution avec Y_{-z} ; $z \in \mathbb{C}$. Notant $\Lambda = D^m$, elle utilise le lemme suivant :

LEMME 1. - Sous les hypothèses du théorème 1, et pour :

$$z = \rho + i\xi \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1\ ,\ \xi \in \mathbb{R}$$

$$\Lambda^z = \frac{1}{\Gamma(-mz)}\ .\ \mathrm{Pf}\ \frac{1}{x_+^{mz+1}}\ *$$ (* désigne la convolution)

est un opérateur qui envoie continuement $W^{(m)}_{p_o\ ,\ p_m}$ dans $X_o + X_m$.

Comme par ailleurs, si la condition $(\mathcal{C})$ a lieu $\{Y_{-i\eta}^{*}\}_{\eta \in \mathbb{R}}$ définit un groupe d'opérateurs de classe $\mathbb{C}^{o}$ opérant dans X_j $(j = 0, m)$, on sait que l'on a (propriétés des semi-groupes de classe $\mathbb{C}^{o}$)

$$(1\text{-}7) \qquad \begin{cases} \forall \eta \in \mathbb{R} \\ \| Y_{-i\eta}^{*} \|_{\mathcal{L}(X_j\,,\,X_j)} \leqslant \gamma e^{\alpha|\eta|} \\ \alpha\,,\,\gamma \quad \text{ctes}\,. \end{cases}$$

Il est donc possible de trouver (cf. [2]) une fonction $z \to X(z)$ convenable telle que l'on puisse appliquer le théorème des trois droites à :

$$f : z \to f(z,\,.) = X(mz)\,\Lambda^{z} u(.) \qquad u \in W^{(m)}_{p_o\,,\,p_m}$$

d'où on déduit le théorème 1.

<u>Remarque 1</u> : Pour le cas de n quelconque, on considère $\eta = (\eta_1\,,\,\eta_2\,,\ldots,\,\eta_n)$, $x = (x_1\,,\,x_2\,,\ldots,\,x_n)$ et

$$(1\text{-}8) \qquad \begin{cases} Y_{-i\eta} = Y^{1}_{-i\eta_1} \otimes Y^{2}_{-i\eta_2} \otimes \ \cdots \ Y^{n}_{-i\eta_n} \\ Y^{j}_{-i\eta_j} = \dfrac{1}{\Gamma(-i\eta_j)} \ \mathrm{Pf}\, \dfrac{1}{x_{j+}^{\,i\eta_j+1}} \,. \end{cases}$$

L'espace $W^{(m)}_{p_o\,,\,p_m}$ est alors :

$$W^{(m)}_{p_o\,,\,p_m} \qquad \begin{cases} u \mid u \in L^{p_o}(A_o)\,,\ D^{\beta} u \in L^{p_m}(A_m) \text{ pour tout } \beta = \{\beta_1\,,\ldots,\,\beta_n\} \\ |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = m \end{cases}$$

espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{(m)}} = \|u\|_{X_o} + \sum_{|\beta|=m} \|D^{\beta} u\|_{X_m}$$

on obtient :

$$(1\text{-}9) \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } \alpha \text{ vérifiant } 1 < |\alpha| < m\,,\ \theta = \dfrac{|\alpha|}{m} \\ D^{\alpha} u \in L^{p_o}((A_o\,,\,A_m)_{\theta}) \quad \dfrac{1}{p_{\theta}} = \dfrac{1-\theta}{p_o} + \dfrac{\theta}{p_m} \,. \end{cases}$$

§. II - COMPLEMENTS ET EXEMPLES.

II-1. Propriétés générales de $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$

On a : (en considérant pour simplifier le cas $n = 1$)

PROPOSITION 2-1. - Soit A_j $j = 0, m$ dans la situation du §. 1. On suppose qu'existe p_j $(j = 0, m)$ tel que $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ opère dans X_j .
On pose $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_m}$ $\theta\in]0, 1[$. Alors $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ opère dans $L^p[(A_o , A_m)_{\theta, p}]$ et $L^p[(A_o , A_m)_\theta]$.

PROPOSITION 2-2. - Soit A un espace de Banach réflexif, A' son dual et $1<p<+\infty$. Si $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ opère dans $L^p(A)$, $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ opère dans $L^{p'}(A')$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p} =1$.

Remarque 2-1 : $\{Y_{-i\eta}{}^{*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ n'opère pas dans $L^1(B)$ comme on le voit simplement en prenant $B = \mathbb{R}$, et en transformant une fonction caractéristique d'intervalle.

II-2. Exemples.

Exemple 1 : Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{C}_p(H)$ l'espace des convoluteurs de $L^p(H)$ $1<p<+\infty$ normé par :

$$L\in\mathcal{C}_p(H) = \|L *\|_{\mathcal{L}(L^p(H)\ ,\ L^p(H))} \tag{2-1}$$

On montre à l'aide du théorème de Mihlin [12], [13], [18], [21] que $\forall\eta\in\mathbb{R}$, $\hat{Y}_{-i\eta} = \mathcal{F}(Y_{-i\eta})$ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(H)$ ($\mathcal{F}$ transformation de Fourier).
On a ainsi plus précisément :

PROPOSITION 2-3. - Soit p avec $1 < p < +\infty$. Alors,

$$\begin{cases} \|Y_{-i\eta}\|_{\mathcal{C}_p(H)} \leqslant \gamma_p\, e^{\alpha_p|\eta|} \\ \alpha_p = \begin{cases} \frac{\pi}{p} & \text{si} \quad 1 < p \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{p'} & \text{si} \quad p \geqslant 2\ ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ . \end{cases} \end{cases} \tag{2-2}$$

Exemple 2 :

PROPOSITION 2-4. - *Soit* $B = L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant q < +\infty$. $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $Y_{-i\eta}$ *opère dans* $L^p(B)$ $1 < p < +\infty$ *avec une inégalité du type 2-2.*

Remarque 2-2 : La proposition (2-4) s'étend aux espaces obtenus à partir de deux espaces de Lebesgue pour une mesure quelconque par interpolation et application des propositions 2-1 et 2-2.

Donc, pour les espaces de Lorentz, Sobolev, Besov, etc ...

Remarque 2-3 : Nous avons considéré ici le cas d'espaces $L^p(B)$ définis sur la droite. Tous les résultats précédents s'appliquent encore aux cas d'espaces $L^p(\mathbb{R}^n , B)$ par considération de $Y_{-i\eta}$ avec $\eta = (\eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n)$ (voir remarque 1-1).

On peut encore considérer dans ce cas les espaces à norme mixte de Benedeck, Calderon, Panzone [3], [13].

Remarque 2-4 : Enfin (cf. [14]) on peut étendre les résultats précédents à des espaces $L^p_{\overline{\omega}}(B)$ où $\overline{\omega}$ est un poids.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTOLA (M.). - Dérivées intermédiaires dans les espaces de Hilbert pondérés. Application au comportement pour $t \to +\infty$ des solutions des équations différentielles opérationnelles. Rend. Sem. Padova (1970) XLIII, p. 177-202.

[2] ARTOLA (M.). - Sur un théorème d'interpolation. A paraître Journal of Math. An. and Appl.

[3] BAOUENDI (M. S.). - Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. Math. France 95 (1967), p. 45-87.

[4] BENEDECK (A.), CALDERON (A. P.), PANZONE (R.). - Convolution operators on Banach space valued functions. Proc. N. A. S. Vol. 48 n° 3 (1963), p. 356-365.

[5] CALDERON (A. P.). - Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[6] CALDERON (A. P.), ZYGMUND (A.). - On the existence of certain singular integrals. Acta. Math. 88, 1952, p. 85-139.

[7] DIEUDONNE (J.). - Calcul infinitésimal. Hermann Paris 1968.

[8] GAGLIARDO (E.). - Ric. Math. 8 (1959), p. 24-51.

[9] GOULAOUIC (C.). - Interpolation entre espaces vectoriels topologiques. Thèse Paris 1967.

[10] HARDY (G. H.), LANDAU (E.), LITTLEWOOD (J. E.). - Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions. Math. Zeitsch 39 (1935), p. 677-695.

[11] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.), POLYA (G.). - Inequalities. Cambridge 1934.

[12] HORMANDER (L.). - Estimate for translation invariant operators in L^p-spaces. Acta Math. 104, 1-2 (1960), p. 93-140.

[13] KREE (P.). - Sur les multiplicateurs dans $\mathfrak{F} L^p$. Ann. Inst. Fourier, t. 16, fasc. 2 (1966), p. 31-89.

[14] KREE (P.). - Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux. Bull. U. M. I., 1967, Vol. XXII, p. 330-344.

[15] LIONS (J. L.). - Espaces intermédiaires entre espaces Hilbertiens et applications. Bull. Math. R. P. R. Bucarest, t. 2 (50), n° 4 (1958), p. 419-432.

[16] LIONS (J. L.). - Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires. C. R. A.S. Paris t. 256 (1963), p. 4343-4345.

[17] LIONS (J. L.), MAGENES (E.). - Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1-2, Dunod Paris 1968.

[18] MICHLIN (S. G.). - Sur les multiplicateurs des intégrales de Fourier Doklady 109 (1956), p. 701-703 (en russe).

[19] NIRENBERG (L.). - Ann. Scuola Normale Sup. Pisa 13 (1959) en particulier, p. 123-131.

[20] PEETRE (J.). - Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev. Ann. Inst. Fourier 16-1 (1966), p. 279-317.

[21] SCHWARTZ (J.). - A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions. Com. pure and Appl. Math. Vol. XIV (1961), p. 785-799.

[22] SCHWARTZ (L.). - Théorie des Distributions. Hermann Paris.

[23] SCHWARTZ (L.). - Distributions à valeurs vectorielles I-II. Ann. Institut Fourier (7-1957), p. 1-141, (8-1958), p. 1-209.

Université de Bordeaux-1
U.E.R. de Mathematiques
et d'Informatique
351, cours de la Libération
33 - TALENCE (France)