JEAN-FRANÇOIS MÉLA

Problèmes de pseudo-périodicité

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 135-141

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__135_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 135 à 141

PROBLEMES DE PSEUDO-PERIODICITE

par

Jean-François MÉLA

-:-:-:-

Nous nous proposons de présenter une question d'analyse harmonique dans laquelle s'introduisent de façon naturelle des conditions arithmétiques : il s'agit de la pseudo-périodicité en norme uniforme. Nous commencerons d'abord par situer cette question en la replaçant dans son contexte d'Analyse et notamment en rappelant d'abord des problèmes analogues qui, eux, trouvent leur solution complète par des méthodes d'analyse.

1. - Introduction : la pseudo-périodicité de Paley et Wiener [9] [3] .

La notion de pseudo-périodicité a été introduite par Paley et Wiener dans leur livre [9] . Soit f une fonction localement de carré intégrable sur R et $\tau(f)$ l'espace vectoriel engendré par les translatées de f . La fonction f est pseudo-périodique au sens de Paley et Wiener s'il existe un intervalle I et une constante A tels que pour tout intervalle I_t translaté de I et toute fonction $g \in \tau(f)$ on ait $\|g\|_{L^2(I_t)} \leq A \|g\|_{L^2(I)}$. C'est le cas pour une fonction périodique en prenant I de longueur supérieure ou égale à la période. Dans le cas général on appellera pseudo-période la borne inférieure des longueurs des intervalles I pour lesquels la propriété a lieu.

Le spectre d'une fonction pseudo-périodique f est l'ensemble des nombres réels λ pour lesquels $e^{i\lambda x}$ appartient à l'adhérence de $\tau(f)$ pour la norme $\sup_t \|g\|_{L^2(I_t)}$. On démontre que toute fonction pseudo-périodique est limite pour la norme précédente, de polynômes trigonométriques dont les fréquences appartiennent au spectre. Le spectre d'une fonction pseudo-périodique sera dit spectre pseudo-périodique ($\mathbb{Z}$ est un spectre pseudo-périodique). Tout spectre pseudo-périodique Λ vérifie la condition $\inf_{\substack{\lambda, \lambda' \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda}} |\lambda - \lambda'| > 0$; inversement on démontre que cette condition est suffisante pour qu'un ensemble Λ soit un spectre pseudo-périodique.

La pseudo-période d'une fonction ne dépend que de son spectre Λ . C'est la borne inférieure des longueurs des intervalles I tels que sur l'espace des polynômes trigonométriques $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$, les normes $\|P\|_{L^2(I)}$ et $(\sum |a_\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}$

soient équivalentes. Si l'on note $p(\Lambda)$ la pseudo-période associée à un ensemble Λ, on peut montrer que $p(\Lambda) \leq 2\pi / \inf_{\lambda \neq \lambda'} |\lambda-\lambda'|$ (résultat qui est le meilleur possible pour $\Lambda = \mathbb{Z}$). Les travaux de Ingham [1] et Kahane [2] permettent de calculer exactement $p(\Lambda)$. Si l'on désigne par $n(x,t)$ le nombre de points de Λ dans l'intervalle $[x,x+t]$, la densité supérieure de répartition (ou densité uniforme supérieure) de Λ se définit par

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{t \to \infty} \sup_{x} \frac{n(x,t)}{t} .$$

On a alors $p(\Lambda) = 2\pi\, \Delta(\Lambda)$.

On peut considérer ainsi que la pseudo-périodicité au sens de Paley et Wiener est un phénomène assez bien élucidé, au moins à une variable. Il reste des problèmes passionnants à plusieurs variables auxquels J.P. Kahane donne des éléments de réponse dans [3], et même à une variable lorsque l'on remplace dans ce qui précède l'intervalle I par un compact K quelconque. On peut chercher des conditions sur la mesure de K assurant que les normes $\|P\|_{L^2(K)}$ et $(\sum |a_\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes. On pourra se reporter notamment aux travaux de H.J. Landau [5] qui donnent par exemple la condition nécessaire $\operatorname{mes}(K) \geq 2\pi\, \Delta(\Lambda)$, à une dimension.

2. - La C-pseudo-périodicité [2]

La pseudo-périodicité au sens de Paley et Wiener pourrait être appelée L^2-pseudo-périodicité. Naturellement on peut songer à se poser les mêmes problèmes en faisant intervenir d'autres normes et notamment la norme uniforme. Nous verrons que la question se présente de façon très différente et que des propriétés arithmétiques interviennent alors. Nous noterons $C(I)$ l'espace des fonctions continues bornées sur un intervalle I, avec la norme uniforme.

Une fonction $f \in C(\mathbb{R})$ sera dite C-pseudo-périodique s'il existe un intervalle borné I et une constante $A = A_I$ tels que pour tout intervalle I_t translaté de I et toute fonction $g \in \tau(f)$, on ait $\|g\|_{C(I_t)} \leq A\|g\|_{C(I)}$. Ici il est équivalent et plus simple de dire que l'on a $\|g\|_{C(\mathbb{R})} \leq A\|g\|_{C(I)}$. Une fonction continue périodique est évidemment C-pseudo-périodique. Dans la suite on dira pseudo-périodique au lieu de C-pseudo-périodique.

On définit de façon évidente, comme dans le cas de la L^2-pseudo-périodicité, la pseudo-période et le spectre d'une fonction pseudo-périodique. Toute fonction pseudo-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques et donc est presque-périodique au sens de Bohr.

Un ensemble Λ est un spectre pseudo-périodique s'il existe un intervalle borné I tel que, sur l'espace des polynômes trigonométriques $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$

les normes $\|P\|_{C(R)}$ et $\|P\|_{C(I)}$ sont équivalentes ; un tel intervalle sera dit associé à Λ . La pseudo-période d'une fonction ne dépend que de son spectre : c'est la borne inférieure des longueurs des intervalles associés à Λ . Nous désignerons par $p(\Lambda)$ la pseudo-période correspondant à un spectre Λ .

Tout spectre C-pseudo-périodique Λ est aussi un spectre L^2-pseudo-périodique et l'on vérifie aisément que la C-pseudo-période majore la L^2-pseudo-période. On a donc $p(\Lambda) \geq 2\pi\, \Delta(\Lambda)$. Mais il n'est pas possible d'espérer caractériser les spectres pseudo-périodiques ni a fortiori pouvoir calculer la pseudo-période, en termes de densité, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. On désignera par S l'ensemble des nombres de Pisot c'est-à-dire des entiers algébriques $\theta > 1$ dont tous les conjugués sont de module < 1 . La caractérisation de Pisot des nombres de la classe S peut s'exprimer sous la forme : $\theta \in S$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 (x\, \theta^n) < +\infty$ [13]. Soit alors un nombre $\theta \notin S$. Pour tout $x \neq 0$, on aura $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(x\, \theta^n) = +\infty$ et si l'on pose

$$P_n(x) = \prod_1^N (1 + e^{ix\,\theta^n})$$

on en déduit que pour tout $x \neq 0$, $|P_N(x)|$ tend vers 0 en décroissant et donc la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant pas 0 . Les polynômes trigonométriques P_N ont leurs fréquences dans l'ensemble Λ_θ des nombres $\lambda = \sum_{n\geq 0} \varepsilon_n\, \theta^n$ $(\varepsilon_n = 0,1)$. Il existe des intervalles I de mesure arbirairement grande pour lesquels $\lim_{N\to+\infty} \|P_N\|_{C(I)} = 0$ tandis que $\|P_N\|_{C(\mathbb{R})} = P_N(0) = 1$. Ceci prouve que Λ_θ n'est pas un spectre pseudo-périodique si $\theta \notin S$.

Les ensembles Λ_θ sont construits par analogie avec $\mathbb{N} = \Lambda_2$. Lorsque θ est un nombre algébrique de degré n , Λ_θ est contenu dans le Z-module M engendré par $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$. Soient $\sigma_1 = \mathrm{Id.}$, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les $\mathbb{Q}$-isomorphismes de $\mathbb{Q}(\theta)$ dans $\mathbb{C}$. Si $\theta \in S$ on aura, pour $j = 2,\ldots,n$, $|\sigma_j(\theta)| < 1$ et par suite $|\sigma_j(\lambda)| \leq (1-|\sigma_j(\theta)|)^{-1}$ si $\lambda \in \Lambda_\theta$. L'ensemble des nombres $\lambda \in M$ vérifiant des inégalités du type $|\sigma_j(\lambda)| \leq A_j$ $(j = 2,\ldots,n)$ appartient à la classe des modèles de Y. Meyer qui sont tous des spectres pseudo-périodiques [10][11] .

Les modèles sont des sortes de "progressions arithmétiques à plusieurs pas" et fournissent des exemples de spectres pseudo-périodiques ayant une certaine régularité. Citons comme exemple simple de modèle l'ensemble $\Lambda = ([n\theta])$ où θ désigne un nombre irrationnel > 1 . Nous allons voir dans la suite d'autres exemples de spectres pseudo-périodiques qui sont aux antipodes des modèles : les spectres lacunaires.

Bien que $p(\Lambda)$ puisse être très différente pour des ensembles Λ ayant des densités comparables, signalons toutefois que $p(\Lambda)$ ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de Λ. En effet soit I un intervalle de longueur $|I| > p(\Lambda)$ et $\nu \notin \Lambda$. Le diamètre de totalité de Λ (cf. [5]) étant strictement inférieur à $|I|$, la famille $(e^{i\lambda x})_{\lambda \in \Lambda \cup \{\nu\}}$ est libre dans $C(I)$. On en déduit que I demeure associé à $\Lambda \cup \{\nu\}$.

3. - Les spectres lacunaires.

On considère des ensembles Λ pour lesquels les fonctions $e^{i\lambda x}$ $(\lambda \in \Lambda)$ se comportent comme des fonctions indépendantes. De façon précise on exige que sur l'espace des polynômes trigonométriques $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$, les normes $\|P\|_{C(R)}$ et $\sum |a_\lambda|$ soient équivalentes. Un ensemble de ce type est donc un spectre pseudo-périodique s'il existe un intervalle I tel que les normes $\|P\|_{C(I)}$ et $\sum |a_\lambda|$ sont équivalentes. Par dualité on en déduit que, pour toute fonction φ bornée sur Λ, il existe une mesure de Radon bornée sur $\mathbb{R}$, μ telle que $\hat{\mu}(\lambda) = \int e^{i\lambda x}\, d\mu(x) = \varphi(\lambda)$. Inversement on démontre que tout ensemble Λ possédant cette dernière propriété est pseudo-périodique [8]. De tels ensembles sont souvent appelés ensembles de Sidon. Ils sont nécessairement lacunaires ; l'exemple le plus simple est fourni par un ensemble $\Lambda = (\lambda_n)$ où $\lambda_n > 0$ et $\lambda_{n+1} \geq q\,\lambda_n$ avec $q > 1$. Dans le cas présent on a toujours $\Delta(\Lambda) = 0$ ce qui ne donne aucun renseignement sur $p(\Lambda)$.

On a le résultat très utile suivant, dans le cas des spectres lacunaires:

PROPOSITION 1. [6] - Pour qu'un intervalle I soit associé à Λ, il suffit que pour toute fonction φ de module 1 sur Λ, on puisse trouver une mesure bornée μ portée par I et ayant la propriété

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} |\hat{\mu}(\lambda) - \varphi(\lambda)| < 1 .$$

L'idée la plus élémentaire consiste à chercher une mesure $\mu = \delta_x$ avec $x \in I$. On est ainsi amené à résoudre un système infini d'inégalités diophantiennes.

Ecrivons $\Lambda = (\lambda_j)$ et notons $\|x\|$ la distance du nombre réel x à $\mathbb{Z}$. Soit α_j une suite de nombres réels. On cherche à résoudre le système

$$\|\lambda_j x - \alpha_j\| \leq \varepsilon \qquad (j = 1,2,\ldots) ,$$

pour ε assez petit. Si x est une solution on aura alors

$$|\widehat{\delta_{2\pi x}}(\lambda_j) - e^{2\pi i\alpha_j}| \leq 2\pi\varepsilon \quad (j=1,2,\ldots) .$$

Si donc le système possède une solution dans I, quels que soient les α_j et pour $\varepsilon<(2\pi)^{-1}$, l'intervalle $2\pi I$ sera associé à Λ. La méthode peut être raffinée ; en particulier on montre qu'il suffit d'avoir $\varepsilon<\frac{1}{4}$ pour pouvoir conclure, en utilisant la proposition 1 avec des mesures qui sont des combinaisons linéaires de masses ponctuelles [9]. Ainsi il est facile de voir par exemple que si $\lambda_{j+1} \geq q\,\lambda_j$ avec $q>3$, le système a une solution dans tout intervalle de longueur $\frac{3}{2\lambda_1}$ avec un $\varepsilon<\frac{1}{4}$; et comme on peut supprimer un nombre de termes de Λ sans changer $p(\Lambda)$, on en déduit donc que $p(\Lambda)=0$.

L'étude des systèmes infinis d'inégalités diophantiennes du type précédent est interessante en soi. Cependant, il est difficile d'atteindre des résultats non triviaux. On a dit par exemple que le système a toujours des solutions si $\lambda_{j+1} \geq q\lambda_j$ et $q>3$, avec un $\varepsilon<\frac{1}{4}$. On peut démontrer en revanche que ceci est faux en général si $q<2$ (sauf si l'on impose des conditions supplémentaires cf.[9]) mais on ne sait pas faire une discussion complète. En général, il faut que Λ soit assez lacunaire pour que l'on ait des solutions, mais la condition $\lambda_{j+1} \geq q\lambda_j$ $(q>1)$ n'est pas nécessaire : on peut donner des exemples où

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} = 1 \quad [9] .$$

La méthode des inégalités diophantiennes permet de traiter en détail un certain nombre de cas où la pseudo-période est nulle et donne une évaluation de la constante A_I. On peut par exemple prouver en utilisant convenablement cette méthode, que la pseudo-période d'un ensemble $\Lambda=(\lambda_j)$ pour lequel $\lambda_{j+1} \geq q\,\lambda_j$ $(q>1)$ est nulle pour toute valeur de q et que la constante A_I est indépendante de I (à condition de modifier un nombre fini de termes de Λ) [9].

Le problème général reste posé de savoir si la pseudo-période d'un ensemble de Sidon est toujours nulle. Il serait bien étonnant qu'il en fut autrement mais l'Auteur ne sait pas le démontrer. On peut cependant prouver le résultat suivant qui soutient la conjecture.

PROPOSITION 2. - *Soit Λ un ensemble de Sidon de pseudo-période ℓ. Alors aucun intervalle de longueur ℓ n'est associé à Λ (ceci signifie que la constante A_I tend vers $+\infty$ lorsque $|I|$ tend vers ℓ).*

Esquissons la démonstration de la proposition 2. Elle consiste à montrer qu'il n'existe pas d'intervalle associé de longueur minimum. Soit $I=[a,b]$ un intervalle associé à Λ. Par dualité ceci se traduit : il existe une constante C telle que, pour toute fonction φ de module 1 sur Λ, on peut trouver une mesure μ portée par I, de masse $\|\hat{\mu}\| \leq C$, pour laquelle $\hat{\mu}(\lambda)=\varphi(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Considérons la suite d'intervalles $I_n = [a, b - \frac{1}{n}]$; il s'agit de prouver que pour un indice n l'intervalle I_n est associé à Λ. Supposons d'abord que I_1 ne soit pas associé à Λ ; alors en particulier il existe $\varphi_1(\lambda)$ de module 1 telle que

$$\inf_{\substack{\mu \in M(I_1) \\ \|\mu\| \leq C}} \sup_{\lambda \in \Lambda} |\varphi_1(\lambda) - \hat{\mu}(\lambda)| > 1$$

où $M(I_1)$ désigne l'espace de Banach des mesures bornées portées par I_1. En utilisant la compacité faible de la boule unité de $M(I_1)$ on en déduit que la même propriété est vraie en remplaçant Λ par un sous-ensemble fini Λ_1. Alors ou bien I_2 est associé à Λ, ou bien il ne peut pas être associé à $\Lambda \setminus \Lambda_1$ et dans ce cas il existe $\varphi_2(\lambda)$ tel que ... etc ... . Finalement on a une suite de fonctions $\varphi_n(\lambda)$ et une suite de parties finies Λ_n de Λ telles que si l'on pose $\varphi(\lambda) = \varphi_n(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_n)$, on aura

$$\inf_{\substack{\mu \in \bigcup_{n \geq 1} M(I_n) \\ \|\mu\| \leq C}} \sup_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(\lambda) - \hat{\mu}(\lambda)| > 1 .$$

Or il existe $\sigma \in M(I)$ avec $\|\sigma\| \leq C$ pour laquelle $\hat{\sigma}(\lambda) = \varphi(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. On montre d'abord que l'on peut choisir σ de façon qu'elle ne charge pas trop le point b, de sorte qu'il existe un indice n pour lequel $\int_{I \setminus I_n} d|\sigma|(x) \leq \frac{1}{2}$.
Il s'ensuit que si ν désigne la restriction de σ à I_n ou aura

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(\lambda) - \hat{\nu}(\lambda)| \leq \frac{1}{2} ,$$

ce qui fournit une contradiction.

Le fait que l'on ne puisse pas déterminer $p(\Lambda)$ dans le cas le plus simple suggère que le problème est difficile en général. Néanmoins on peut calculer $p(\Lambda)$ dans des cas particuliers. Ainsi pour l'ensemble $\Lambda = ([n\theta])$ où θ est un nombre irrationnel > 1, on montre que $p(\Lambda) = 2\pi\theta^{-1} = 2\pi\Delta(\Lambda)$. La propriété peut se généraliser à toute une classe de modèles. La question se pose de savoir quels sont les spectres pseudo-périodiques pour lesquels $p(\Lambda) = 2\pi\Delta(\Lambda)$.

Il peut être intéressant pour le lecteur de situer les problèmes de pseudo-périodicité évoqués ici par rapport au problème de la totalité d'une suite d'exponentielles [1] [5] .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEURLING et P. MALLIAVIN. - Closure of a set of exponentials on an interval. Acta Math. p. 79-93.

[2] A. INGHAM. - Some trigonometric inequalities with applications to the theory of series. Math. Zeitschrift 41 (1936) p. 367-379.

[3] J.P. KAHANE. - Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées. Ann. Inst. Fourier 8 (1957) p. 293-314.

[4] J.P. KAHANE. - Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. Ec. Norm. Sup. 79 (1962) p. 93-150.

[5] J.P. KAHANE. - Travaux de Beurling et Malliavin. Séminaire Bourbaki (1961-62)

[6] J.P. KAHANE et H. HELSON. - A fourier method in diophantine problems. J. Ahal. Math. Israel 15 (1965) p. 254-262.

[7] H.J. LANDAU. - Necessary density conditions for sampling and interpolation of a certain entire function. Acta Math. 117 (1967) p. 37-52.

[8] J.F. MÉLA. - Sur certains ensembles exceptionnels en Analyse de Fourier. Ann. Inst. Fourier 18 (1969) p. 32-71.

[9] J.F. MÉLA. - Approximation diophantienne et ensembles lacunaires. Mémoires Soc. Math. (à paraître)

[10] Y. MEYER. - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, (1968) p. 63-64.

[11] Y. MEYER. - Cours Peccot (1969) Collège de France.

[12] R. PALEY et N. WIENER. - Fourier transforms in the complex domain. Colloq. Public. Amer. Math. Soc. New-York (1934)

[13] R. SALEM . - Algebraic numbers and Fourier. Series. Heath, 1963.

-:-:-:-

Université de Paris
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91 - Orsay (France)