

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE KAHANE

## Sur la distribution de certaines séries aléatoires

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 25 (1971), p. 119-122

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1971\\_\\_25\\_\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__119_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DISTRIBUTION DE CERTAINES SERIES ALEATOIRES

par

J. P. KAHANE

--:--:--

Soit  $0 < \xi < 1$ . On désigne par  $\mu_\xi$  la convolution infinie des mesures  $\frac{1}{2} (\delta_{\xi^n} + \delta_{-\xi^n})$  ( $n=1,2,\dots$ ), c'est-à-dire la distribution de la variable aléatoire  $X = \prod_{n=1}^{\infty} \pm \xi^n$ , où les signes  $+$  et  $-$  sont choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, avec même probabilité  $1/2$ . On désigne par  $\hat{\mu}_\xi(u)$  la transformée de Fourier de  $\mu_\xi$ . On posera  $\theta = \frac{1}{\xi}$ .

$\mu_\xi$  est une mesure pure (J.W. 1935, V.K. 1940). Cela veut dire que, pour toute classe  $\mathcal{A}$  de boréliens sur  $\mathbb{R}$ , invariante par translation et fermée pour la réunion dénombrable, on a l'alternative suivante : ou bien  $\mu_\xi(A) = 0$  pour tout  $A$  de  $\mathcal{A}$ , ou bien  $\mu_\xi(A) = 1$  pour un  $A$  de  $\mathcal{A}$ . La démonstration est une application facile de la loi du zéro-un : si  $\mu_\xi(A) > 0$  pour un borélien  $A$ , on a  $\mu_\xi(A') = 1$ ,  $A'$  étant la somme algébrique de  $A$  et du module engendré par les  $\pm \xi^n$ .

En particulier,  $\mu_\xi$  est soit absolument continue, soit singulière.

$\mu_\xi$  est une mesure diffuse. Pour  $\xi < \frac{1}{2}$ , elle est portée par un ensemble fermé  $E_\xi$ , totalement discontinu, de mesure de Lebesgue nulle et de dimension de Hausdorff  $\frac{-\log 2}{\log \xi}$  (pour  $\xi = \frac{1}{3}$ , c'est l'ensemble triadique de Cantor). Pour  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\mu_\xi$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur  $[-1,1]$ , et nulle hors de cet intervalle. Pour  $\xi > \frac{1}{2}$ ,  $\mu_\xi$  a pour support l'intervalle  $[-\frac{\xi}{1-\xi}, \frac{\xi}{1-\xi}]$  (K.W. 1935).

L'étude des  $\mu_\xi$  et de leurs transformées de Fourier

$$(1) \quad \hat{\mu}_\xi(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \xi^n u$$

remonte aux années 1930, et elle n'a guère fait de progrès depuis 1962 (G. 1962). On va indiquer les principaux résultats connus, en insistant sur l'importante contributions d'Erdős (E. 1940).

Si  $\xi = 2^{-1/h}$ ,  $h$  entier  $\geq 2$ ,  $\mu_\xi$  admet une densité de classe  $C^{h-1}$ , et  $\hat{\mu}_\xi(u) = O(\frac{1}{u^h})$  ( $u \rightarrow \infty$ ) (W. 1935). C'est immédiat parce que  $\mu_\xi$  est alors convolution de  $h$  mesures homothétiques de  $\mu_{1/2}$  ce qui s'écrit aussi

$$(2) \quad \hat{\mu}_\xi(u) = \hat{\mu}_{\xi^h}(u) \hat{\mu}_{\xi^h}(\xi u) \dots \hat{\mu}_{\xi^h}(\xi^{h-1} u)$$

Si  $\xi = \frac{p}{q}$  irréductible,  $p \neq 1$ ,  $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{(\log u)^\alpha}\right)$  ( $u \rightarrow \infty$ ) pour un  $\alpha > 0$  convenable (K. 1936). Si  $\xi = \frac{1}{q}$ ,  $q$  entier  $> 2$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} |\hat{\mu}_\xi(u)| > 0$ . La première partie nécessite un calcul. La seconde, plus anciennement connue, résulte aisément de la formule

$$(3) \quad \hat{\mu}_\xi(\lambda \theta^N \pi) = \prod_0^{N-1} \cos(\lambda \theta^n \pi) \prod_1^\infty \cos(\lambda \xi^n \pi)$$

où  $\theta = \frac{1}{\xi}$  (ici, on prend  $\theta = q$  et  $\lambda = 1$ ).

Si  $\theta \in S$  (classe des nombres de Pisot),  $\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} |\hat{\mu}_\xi(u)| > 0$  (E. 1939). La démonstration, très simple, repose encore sur la formule (3).

COROLLAIRE. Si  $\theta \in S$ ,  $\mu_\xi$  est singulière.

Si  $\theta \notin S$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} \hat{\mu}_\xi(u) = 0$  (Salem 1941). La démonstration repose sur (3) et le théorème de Pisot. C'est ainsi qu'on montre que tous les ensembles  $E_\xi$  ( $0 < \xi < \frac{1}{2}$ ,  $\theta \notin S$ ) sont de multiplicité au sens du développement trigonométrique (voir p. ex. S. 1963).

Si  $\theta \in T$  (classe des nombres de Salem; cf. S. 1963),  $\lim_{u \rightarrow \infty} |\hat{\mu}_\xi(u) u^\epsilon| = \infty$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Cela résulte encore de la formule (3) et du théorème suivant (Y. Meyer; voir aussi S. 1963, p. 27) : si  $\theta \in T$  et  $\delta > 0$ , il existe  $\lambda > 0$  tel que  $|\sin \pi \lambda \theta^n| < \delta$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

En sens opposé, la méthode d'Erdős (E. 1940), que nous allons rapidement exposer dans un instant, donne ceci :

Sauf si  $\xi$  appartient à un ensemble exceptionnel  $E_0$ , de dimension de Hausdorff nulle, on a  $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{u^\gamma}\right)$  ( $u \rightarrow \infty$ ) pour un  $\gamma = \gamma(\xi)$  convenable. De plus, pour tout  $\alpha > 0$ , il existe un ensemble exceptionnel  $E_\alpha$ , de dimension de Hausdorff  $\leq \alpha$ , et une fonction  $\gamma^*(x)$  définie sur  $]0,1[$ , croissant de 0 à  $\infty$ , telle que  $\hat{\mu}_\xi(u) = O\left(\frac{1}{u^{\gamma^*(\xi)}}\right)$  ( $u \rightarrow \infty$ ;  $\gamma^* = \gamma^*(\xi)$ ) quand  $\xi \in ]0,1[ \setminus E_\alpha$ .

Comme corollaire, il existe une suite  $\eta_m > 0$ , tendant vers 0, telle que, pour presque tout  $\xi$  de l'intervalle  $]1-\eta_m, 1[$ , la mesure  $\mu_\xi$  ait une densité de classe  $C^m$  (E. 1939).

La méthode est inspirée de celle qu'utilise Pisot (P. 1938) pour montrer que l'ensemble des  $\theta$  tels que, pour un  $\lambda > 0$  convenable,  $\lambda \theta^n$  tende vers 0 modulo 1 est dénombrable (cf. aussi S. 1963, p. 11). On peut brièvement la décrire ainsi. Posons  $\lambda \theta^n = a_n + \epsilon_n$ , et soit  $M_n$  le point de coordonnées  $(a_n, a_{n+1})$ . La droite  $y = \theta x$  coupe chaque disque de centre  $M_n$  et rayon  $|\epsilon_n| + |\epsilon_{n+1}|$ . Il s'ensuit que, si  $|\epsilon_n| + |\epsilon_{n+1}| + |\epsilon_{n+2}|$  est assez petit,  $M_{n+1}$  est bien déterminé

par  $M_n$ , et que, en tous cas, le nombre des choix possibles de  $M_{n+1}$  quand on connaît  $M_n$  est borné. Si l'on impose  $\theta \in [a, b]$  ( $1 < a < b$ ),  $1 < \lambda < \theta$ , et de plus  $|\varepsilon_n| < \varepsilon = \varepsilon(a, b)$  pour au moins  $N - \nu$  valeurs de  $n$  entre 1 et  $N$  (avec  $\nu < \frac{N}{10}$ ), on vérifie que le nombre de chemins  $M_1, M_2 \dots M_N$  possibles ne dépasse pas  $\binom{N}{3\nu} A^{3\nu}$ , où  $A$  ne dépend que de  $a$  et  $b$ . Il en résulte que, pour chaque  $N$  et  $\nu$ , il existe un ensemble  $E_{N, \nu}$ , réunion de  $\binom{N}{3\nu} A^{3\nu}$  intervalles de longueurs  $O(b^{-N})$ , tel que pour  $\theta \in [a, b] \setminus E_{N, \nu}$  et  $1 < \lambda < \theta$ , on a  $|\varepsilon_n| \geq \varepsilon$  pour au moins  $\nu$  valeurs de  $n$  entre 1 et  $N$ . La formule (3) permet de conclure.

Voici quelques résultats ultérieurs.

Pour avoir  $\hat{\mu}_\xi \in L^2$  (c'est-à-dire  $\mu_\xi$  absolument continue, avec une densité de carré sommable), il faut et il suffit que le nombre de choix possibles de signes + et - dans l'inégalité

$$|\pm 1 \pm \theta \dots \pm \theta^{n-1} - (\pm 1 \pm \theta \dots \pm \theta^{n-1})| < 1$$

soit  $O(\lambda^n \xi^n)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . (K.S. 1958). Malheureusement, on ne sait pas utiliser cette condition.

Cependant, A. Garsia a donné une condition explicite pour que  $\mu_\xi$  soit absolument continue, à densité bornée, qu'il a pu appliquer dans le cas particulier suivant :

Si  $\theta$  est un entier algébrique de norme 2 dont tous les conjugués sont hors du disque  $|z| \leq 1$ ,  $\mu_\xi$  est absolument continue, à densité bornée (G. 1962)

Les résultats qui précèdent laissent ouvertes les questions suivantes.

1. - Pour quelles valeurs de  $\xi$  la mesure  $\mu_\xi$  est-elle absolument continue, et pour quelles valeurs est-elle singulière ? (On sait qu'elle est singulière pour  $\theta \in S$ , et absolument continue, en général, quand  $\xi$  est voisin de 1).
2. - Quel est l'ensemble des  $\theta$  pour lesquels il n'existe aucun  $\varepsilon > 0$  tel que  $\hat{\mu}_\xi(u) = O(\frac{1}{u^\varepsilon})$  ( $u \rightarrow \infty$ ) ? (On sait qu'il est de dimension nulle, et qu'il contient  $S \cup T$ ).
3. - Evaluer la fonction  $g(\xi) = \sup \{ \gamma \mid \hat{\mu}_\xi(u) = O(\frac{1}{u^\gamma}) \}$ . Est-il vrai qu'on ait presque-partout  $g(\xi) = \frac{-\log 2}{2 \log \xi}$  ? (Il est facile de voir que, pour  $\xi < \frac{1}{2}$ , on a  $g(\xi) \leq \frac{-\log 2}{2 \log \xi}$ ).
4. - Pour  $\theta \in S$ , évaluer la borne inférieure inférieure des  $\alpha$  tel que  $\mu_\xi$  soit concentrée sur un ensemble borélien de dimension de Hausdorff  $\alpha$ . (On peut essayer d'appliquer les méthodes de G. 1962).

## BIBLIOGRAPHIE

- (J.W. 1935) JESSEN, A. WINTNER. - Distribution functions and the Riemann  $\zeta$ -function, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (19635), 48-88 (voir théorème 11).
- (V.K. 1940) E.R. VAN KAMPEN. - Infinite product measures and infinite convolutions, Amer. J. Math. 62 (1940), 417-448.
- (G. 1962) A.M. GARSIA. - Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. Trans. Amer. Math. Soc. 102-(1962) 407-432.
- (K.W. 1935) KERSHNER - A. WINTNER. - On symmetric Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 57 (1935), 541-548.
- (E. 1940) P. ERDOS. - On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 62 (1940), 180-186.
- (W. 1935) A. WINTNER. - On convergent Poisson convolutions. Amer. J. Math. 57 (1935), 827-838.
- (K. 1936) R. KERSHNER. - On singular Fourier - Stieltjes transforms, Amer. J. Math. 58 (1936), 450-452.
- (E. 1939) P. ERDOS. - On a family of symmetric Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. 61 (1939), 974-976.
- (S. 1963) R. SALEM. - Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath 1963.
- (P. 1938) Ch. PISOT. - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. Ann. Schola Norm. Sup. Pisa 2 (1938), 205-248.
- (K.S. 1958) J.P. KAHANE. et R. SALEM. - Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli. Colloq. Math. 6 (1958), 193-202.

-:-:-:-

Université de Paris  
 Faculté des Sciences  
 Département de Mathématiques  
 Bâtiment 425  
 91 - Orsay (France)