

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PATRICE LE CALVEZ

**Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale (avec un appendice en collaboration avec Jean-Marc Gambaudo)**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 79 (1999)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1999\\_2\\_79\\_\\_R3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1999_2_79__R3_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DÉCOMPOSITION DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE EN APPLICATIONS DÉVIAINT LA VERTICALE

Patrice Le Calvez

*suivi d'un appendice par*

Jean-Marc Gambaudo et Patrice Le Calvez

**Résumé.** — Tout difféomorphisme  $F$  du tore  $\mathbf{T}^2$  de dimension 2 homotope à l'identité s'écrit comme composée de difféomorphismes déviant la verticale alternativement à droite et à gauche. La donnée d'une telle décomposition et d'un relèvement fixé  $f$  de  $F$  au plan permet de construire naturellement un champ de vecteurs sur une variété  $E$  difféomorphe à  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ , où l'entier  $2n$ , égal au nombre d'applications apparaissant dans la décomposition, est d'autant plus grand que le difféomorphisme est loin de l'identité. L'ensemble des singularités de ce champ de vecteurs est en bijection avec l'ensemble des points fixes de  $F$  qui se relèvent en des points fixes de  $f$ . L'étude de ce champ de vecteurs a été initiée dans [L1], principalement dans le cas où il n'y a pas de singularité. Nous étudions ici le cas plus général où apparaissent de telles singularités. Nous en déduisons des résultats généraux sur les points fixes et les orbites périodiques des difféomorphismes du tore homotopes à l'identité.

John Franks a démontré qu'un homéomorphisme de l'anneau fermé  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  ou de l'anneau ouvert  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$ , qui préserve l'aire et qui a un point fixe, admet une infinité d'orbites périodiques. Dans un appendice écrit en collaboration avec J.-M. Gambaudo, nous donnons une démonstration différente de ce résultat pour les difféomorphismes de l'anneau fermé.

## **Abstract (Decomposition of diffeomorphisms of the torus in twist maps)**

Every diffeomorphism of the two-dimensional torus  $\mathbf{T}^2$  can be written as a composition of positive and negative twist maps. If we consider such a decomposition and a given lift  $f$  of  $F$  to the plane, we can construct naturally a vector field on a manifold diffeomorphic to  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ , where  $2n$  is the number of maps which appear in the decomposition and becomes big when  $f$  is far from the identity. There is a one-to-one correspondence between the set of singularities of this vector field and the set of fixed points of  $F$  which are lifted to fixed points of  $f$ . The study of this vector field has begun in [L1], mainly in the case when there is no singularity. We study here the general case when these singularities may exist. We deduce general properties about

fixed points and periodic orbits of diffeomorphisms of the torus which are homotopic to the identity.

John Franks has proved that an area-preserving homeomorphism of the closed annulus  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  or the open annulus  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$  which has at least one fixed point possesses an infinite number of periodic orbits. In an appendix written in collaboration with J.-M. Gambaudo, we give a different proof of this result for the diffeomorphisms of the closed annulus.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale,</b> par P. Le Calvez .....	1
<b>0. Introduction</b> .....	3
0.1. Théorème de Conley-Zehnder .....	3
0.2. Construction d'une fonction génératrice .....	4
0.3. Rappels des résultats de [L1] .....	8
0.4. Plan de l'article .....	10
<b>1. Notations, définitions, rappels</b> .....	17
1.1. Notations .....	17
1.2. Distance de Hausdorff .....	17
1.3. Difféomorphismes du tore .....	18
1.4. Nombre d'enlacement de deux points fixes .....	19
1.5. Ensembles non enlacés .....	20
1.6. Difféomorphismes déviant la verticale .....	21
1.7. Décomposition en difféomorphismes déviant la verticale .....	23
1.8. Champ de vecteurs $\xi$ associé à une décomposition .....	24
1.9. Champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ associé à une décomposition .....	26
1.10. Premières propriétés dynamiques de $\tilde{\xi}$ .....	28
1.11. Dépendance continue par rapport à $\Phi$ .....	29
1.12. Étude du cas conservatif .....	30
<b>2. Fonctions d'enlacement</b> .....	31
2.1. Fonction d'enlacement $L$ .....	31
2.2. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\xi$ .....	33
2.3. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ .....	35
2.4. Fonctions d'enlacement sur les fibrés tangents et projectifs .....	36
2.5. Démonstration du lemme fondamental .....	39
2.6. Démonstration de la proposition 2.4.1 .....	42



<b>3. Décomposition dominée du fibré tangent, variétés intégrales</b> . . . . .	45
3.1. Matrices de Jacobi . . . . .	45
3.2. Existence d'une décomposition dominée du fibré tangent . . . . .	46
3.3. Variétés intégrales des champs d'espaces $x \mapsto E_j^-(x)$ et $x \mapsto E_j^+(x)$ . . . .	52
3.4. Propriétés de stabilité . . . . .	54
3.5. Variétés intégrales des champs de plans $x \mapsto E_j(x)$ . . . . .	56
3.6. Variétés intégrales dans le quotient $\tilde{E}$ . . . . .	58
<b>4. Éléments critiques des champs de vecteurs <math>\xi</math> et <math>\tilde{\xi}</math></b> . . . . .	59
4.1. Ensembles bien enlacés . . . . .	59
4.2. Une propriété des points non errants de $\tilde{\xi}$ . . . . .	61
4.3. Nombre d'enlacement de courbes de Jordan bien enlacées . . . . .	62
4.4. Construction d'un plan d'enlacement contenant des éléments critiques . .	65
4.5. Une propriété des ensembles finis bien enlacés . . . . .	66
<b>5. Existence de tores fixes d'enlacement 0</b> . . . . .	69
5.1. Ensembles non enlacés . . . . .	69
5.2. Caractérisation des tores fixes d'enlacement 0 . . . . .	70
5.3. Première étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	72
5.4. Deuxième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	73
5.5. Troisième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1 . . . . .	75
<b>6. Propriétés des tores fixes</b> . . . . .	79
6.1. Lien entre les parties non enlacées de $\text{sing}(\tilde{\xi})$ et les parties non enlacées de $\text{Fix}(f)$ . . . . .	79
6.2. Une propriété des tores fixes d'enlacement 0 . . . . .	82
6.3. Un théorème de translation sur le tore . . . . .	84
6.4. Une propriété des ensembles bien enlacés . . . . .	85
<b>7. Bifurcation des tores fixes</b> . . . . .	87
7.1. Nombre de rotation d'un point fixe . . . . .	87
7.2. Nombre de rotation et nombre d'enlacement . . . . .	88
7.3. Famille à un paramètre avec des bifurcations de type selle-nœud . . . . .	89
7.4. Bifurcation des tores fixes . . . . .	90
<b>8. Étude des itérés</b> . . . . .	95
8.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$ . . . . .	95
8.2. Propriétés dynamiques des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$ . .	96
8.3. Ensembles $\varphi$ -non enlacés . . . . .	98
8.4. Correspondance avec les ensembles $f$ -non enlacés . . . . .	99
8.5. Un théorème de translation dans le cas périodique . . . . .	100
<b>9. Fonction d'enlacement définie par un point fixe ou une orbite périodique</b> . . . . .	103
9.1. Fonction d'enlacement définie par un point fixe . . . . .	103
9.2. Fonction d'enlacement définie par une orbite périodique . . . . .	107

<b>10. Construction de cercles fantômes</b> .....	111
10.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ .....	112
10.2. Premières propriétés dynamiques de $\xi$ et de $\tilde{\xi}$ .....	113
10.3. Fonctions d'enlacement .....	114
10.4. Ensembles non enlacés .....	115
10.5. Existence de tores fixes d'enlacement 0 .....	116
10.6. Une démonstration directe d'existence de courbes fantômes .....	118
10.7. Une application aux difféomorphismes du tore .....	118
10.8. Une question naturelle .....	120

## ***Appendice***

<b>Infinité d'orbites périodiques pour les difféomorphismes conservatifs de l'anneau, par J.-M. Gambaudo et P. Le Calvez</b> .....	125
0. Introduction .....	125
1. Notations .....	126
2. Nombre de rotation sur l'anneau compact .....	127
3. Nombre de rotation sur l'anneau ouvert .....	128
4. Un critère de non-nullité du nombre de rotation .....	129
5. Nombre de rotation sur le tore .....	130
6. Critères d'existence d'orbites périodiques dans un ensemble annulaire . . .	131
7. Un champ de vecteurs sur le tore dont les courbes intégrales relevées sont des droites de Brouwer .....	131
8. Démonstration du résultat fondamental .....	133
9. Démonstration du théorème .....	138
10. Annexe .....	139
<b>Bibliographie</b> .....	143
<b>Index</b> .....	147



**DÉCOMPOSITION  
DES DIFFÉOMORPHISMES DU TORE  
EN APPLICATIONS DÉVIANTE  
LA VERTICALE**

**P. Le Calvez**



## CHAPITRE 0

### INTRODUCTION

#### 0.1. Théorème de Conley-Zehnder

On a le résultat suivant, dû à C. Conley et E. Zehnder [CZ] :

**THÉORÈME 0.1.1.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  du tore  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  homotope à l'identité qui préserve la mesure de Lebesgue  $\mu$  et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  qui préserve le centre de gravité, c'est-à-dire qui vérifie*

$$\int_{\mathbf{T}^2} (f - \text{Id}) d\mu = 0.$$

*Alors  $f$  admet au moins trois points fixes qui se projettent dans le tore en trois points fixes distincts de  $F$ .*

Une façon équivalente d'écrire les hypothèses est de supposer que  $F$  est le temps 1 d'un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps (pour la structure symplectique canonique) et  $f$  le temps 1 du champ relevé. Sous cette forme, le théorème de Conley-Zehnder s'énonce en toute dimension : le difféomorphisme  $f$  admet au moins  $2m + 1$  points fixes dont les projections dans le tore  $\mathbf{T}^{2m}$  sont distinctes. Cet entier est le nombre minimum de points critiques de toute fonction définie sur le tore. Ce théorème est un cas particulier de la conjecture d'Arnold, c'est le point de départ d'une branche importante de la géométrie symplectique actuelle (voir par exemple le livre de Hofer et Zehnder [HZ]).

La démonstration de Conley-Zehnder est basée sur l'étude d'une fonctionnelle sur un espace de lacets, dont on cherche les points critiques. Ce problème de dimension infinie se réduit ensuite à un problème de dimension finie : on cherche le nombre minimum de points critiques d'une fonction sur une variété non compacte, on considère l'ensemble des points d'orbites bornées pour le champ de gradient de la fonction et on montre que la topologie de cet ensemble est au moins celle du tore.

Le cas le plus simple est le cas étudié par Arnold (voir [Arno], appendice 9) où  $F$  est  $C^1$ -proche de l'identité. On peut construire dans ce cas une fonction  $H : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^2$  dont les points critiques sont en bijection avec les points fixes de  $F$  qui se relèvent en des points fixes de  $f$ . La fonction  $H$  est une fonction génératrice. Si  $F$  n'est plus proche de l'identité on peut construire, sans passer par un espace de dimension infinie, une fonction génératrice sur une variété de type  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^N$ , dont les points critiques sont en bijection avec les points fixes de  $F$  que l'on doit trouver. Il en est ainsi de la méthode des géodésiques brisées de Chaperon [Cha] (voir également Chekanov [Che], Sikorav [Si] ou Viterbo [V]).

## 0.2. Construction d'une fonction génératrice

On va donner une construction naturelle d'une fonction génératrice (tous les détails seront donnés dans les paragraphes 1.6 à 1.12). Considérons le difféomorphisme

$$f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$$

de  $\mathbf{R}^2$  et le difféomorphisme  $F^*$  de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f$ . On peut écrire  $F$  comme composée de  $n$  difféomorphismes  $C^1$ -proches de l'identité et préservant l'aire. On peut ensuite écrire chacun de ces difféomorphismes sous la forme

$$F_{2i+1} \circ F_{2i},$$

où  $F_{2i}$  est égal à  $F^*$  et  $F_{2i+1}$  est  $C^1$ -proche de  $F^{*-1}$ . On peut donc décomposer notre application  $f$  sous la forme

$$f = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0,$$

où :

- $f_i$  préserve l'aire et l'orientation ;
- $f_i - f^*$  est  $\mathbf{Z}^2$ -périodique si  $i$  est pair ;
- $f_i - f^{*-1}$  est  $\mathbf{Z}^2$  périodique si  $i$  est impair ;
- $f_i$  dévie la verticale.

Cette dernière propriété exprime que le couple  $(x, x')$  définit un système de coordonnées global sur le plan  $\mathbf{R}^2$ , où on pose

$$f(x, y) = (x', y').$$

Si on note  $p_1$  la première projection définie sur  $\mathbf{R}^2$ , les applications

$$y \mapsto p_1 \circ f_i(x, y) \quad \text{et} \quad y \mapsto p_1 \circ f_i^{-1}(x, y)$$

sont des difféomorphismes de  $\mathbf{R}$ , l'un croissant et l'autre décroissant. On peut définir alors deux fonctions

$$g_i : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{et} \quad g'_i : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

de classe  $C^1$ , telles que

$$f_i(x, y) = (x', y') \iff y = g_i(x, x') \text{ et } y' = g'_i(x, x').$$

On peut interpréter géométriquement  $g_i(x, x')$  comme l'ordonnée de l'unique point d'intersection de la courbe  $f_i^{-1}(\{x'\} \times \mathbf{R})$  avec la droite  $\{x\} \times \mathbf{R}$  et  $g'_i(x, x')$  comme l'ordonnée de l'unique point d'intersection de la courbe  $f_i(\{x\} \times \mathbf{R})$  avec la droite  $\{x'\} \times \mathbf{R}$ .

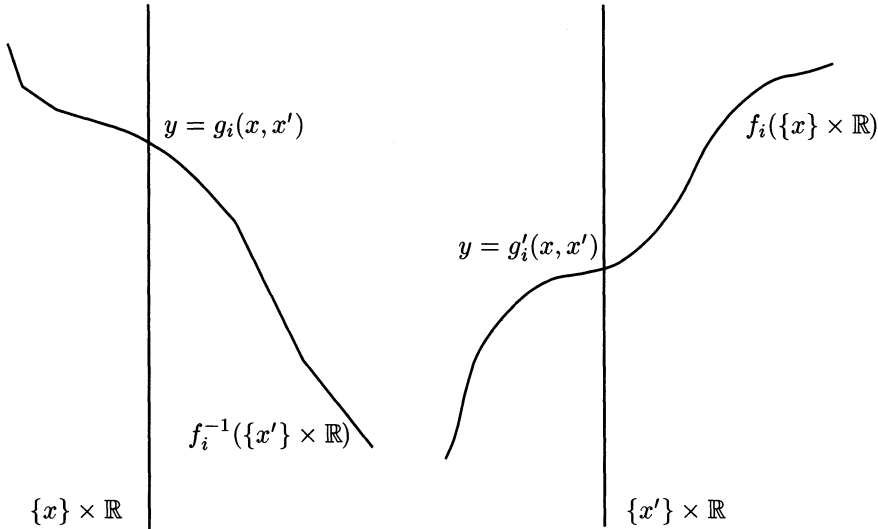


FIGURE 1

La forme différentielle

$$f_i^*(ydx) - ydx = y'dx' - ydx$$

est fermée puisque  $f_i$  préserve l'aire et l'orientation. Elle est donc exacte par le lemme de Poincaré : il existe une fonction

$$h_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

de classe  $C^2$ , telle que

$$dh_i = y'dx' - ydx.$$

Si on exprime  $h_i$  dans le système de coordonnées  $(x, x')$ , on obtient :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x}(x, x') = -g_i(x, x'), \quad \frac{\partial h_i}{\partial x'}(x, x') = g'_i(x, x').$$

La fonction  $h_i$  est une fonction génératrice de  $f_i$ , on a :

$$f_i \left( x, -\frac{\partial h_i}{\partial x}(x, x') \right) = \left( x', \frac{\partial h_i}{\partial x'}(x, x') \right).$$

On peut étendre la famille  $(f_i)_{0 \leq i < 2n}$  en une famille  $(f_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  par la relation de périodicité

$$f_{i+2n} = f_i,$$



et faire de même avec les familles

$$(g_i)_{0 \leq i < 2n}, \quad (g'_i)_{0 \leq i < 2n}, \quad (h_i)_{0 \leq i < 2n}.$$

On peut définir alors sur l'espace vectoriel

$$E = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2n} = x_i\} \approx \mathbf{R}^{2n},$$

la fonction

$$\begin{aligned} H : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^{2n-1} h_i(x_i, x_{i+1}), \end{aligned}$$

et le champ de gradient  $\xi$  qui vérifie :

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}).$$

On peut vérifier que le champ de vecteurs  $\xi$  est invariant par les translations

$$\begin{aligned} \tau_0 : E &\longrightarrow E \\ (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\longmapsto \left( x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_1 : E &\longrightarrow E \\ (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\longmapsto \left( x_i + \frac{1}{2}(1 - (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}}, \end{aligned}$$

et définit donc un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur l'espace quotient

$$\tilde{E} = E/[\tau_0, \tau_1] \approx \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2},$$

où  $[\tau_0, \tau_1]$  est le groupe engendré par les deux translations. Le fait que  $f$  préserve le centre de gravité nous dit que la fonction  $H$  est également invariante par  $\tau_0$  et par  $\tau_1$ , qu'elle définit une fonction  $\tilde{H}$  sur  $\tilde{E}$  et que  $\tilde{\xi}$  est son champ de gradient pour la structure riemannienne naturelle de  $\tilde{E}$ .

Montrons maintenant que les points critiques de  $\tilde{H}$  sont en bijection naturelle avec l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  des points fixes de  $F$  qui se relèvent en des points fixes de  $f$ . Il suffit de montrer que les singularités de  $\xi$  sont en bijection naturelle avec les points fixes de  $f$ . Pour cela, définissons les applications

$$\begin{aligned} q_i : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q'_i : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_i, g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i)), \end{aligned}$$

ainsi que la verticale

$$D_i = \{x_i\} \times \mathbf{R}.$$

Pour toute configuration périodique  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E$ , les courbes  $f_i^{-1}(D_{i+1})$  et  $f_{i-1}(D_{i-1})$  intersectent la verticale  $D_i$  respectivement au point  $z_i = q_i(x)$  et au point  $z'_i = q'_i(x)$ . La  $i$ -ème coordonnée  $\xi_i(x)$  du champ  $\xi(x)$  représente la différence des ordonnées entre ces deux points.

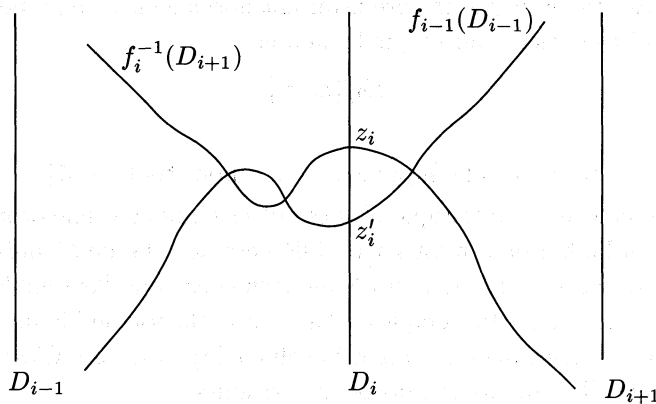


FIGURE 2

Ainsi, l'égalité

$$f_i(z_i) = z'_{i+1}$$

devient

$$f_i(z_i) = z_{i+1},$$

dans le cas où  $x$  est une singularité ; le point  $z_0 = q_0(x)$  est donc un point fixe de  $f$ .

Réciproquement si  $z$  est un point fixe de  $f$ , la suite  $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  définie ainsi :

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_{i+1} = f_i(z_i), \end{cases}$$

est périodique, de période  $2n$ , et la configuration

$$x = (p_1(z_i))_{i \in \mathbf{Z}},$$

qui appartient à  $E$ , est une singularité de  $\xi$ .

Expliquons maintenant comment on obtient le théorème de Conley-Zehnder. On peut écrire

$$\xi = \xi^* + \beta,$$

où  $\xi^*$  est le champ de gradient de la fonction quadratique

$$H^* : x \mapsto \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i x_{i-1} x_i = \sum_{j=1}^{n-1} (x_0 - x_{2j})(x_{2j+1} - x_{2j-1}),$$

associée à la décomposition

$$\text{Id} = f^{*-1} \circ f^* \circ \dots \circ f^{*-1} \circ f^*,$$

et où  $\beta$  est un champ de vecteurs  $\mathbf{Z}^{2n}$ -périodique. La dynamique du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}^*$  de  $\tilde{E}$  est très simple. Il y a un tore invariant normalement hyperbolique formé de singularités, qui n'est rien d'autre que le quotient

$$E_0/[\tau_0, \tau_1],$$

où

$$E_0 = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}$$

est le noyau de la forme quadratique  $H$ . Les autres points ont une orbite non bornée. La dynamique à l'infini de  $\tilde{\xi}$  n'est guère différente de celle de  $\tilde{\xi}^*$  puisque on ajoute un champ de vecteurs borné. On en déduit facilement que l'ensemble  $\Lambda$  des points d'orbite bornée est une partie compacte. Grâce à la théorie de l'indice de Conley, on sait en fait que cet ensemble a au moins la cohomologie du tore. C'est de cette façon qu'on montre que  $\tilde{H}$  a au moins trois points critiques.

L'argument essentiel dans la démonstration précédente est la connexité par arcs de l'ensemble des difféomorphismes préservant l'aire homotopes à l'identité. On ne sait pas, en dimension supérieure, si l'ensemble des difféomorphismes symplectiques homotopes à l'identité est connexe par arcs et on ne peut donc pas reprendre la démonstration précédente pour un difféomorphisme symplectique homotope à l'identité et préservant le centre de gravité. Par contre, cette preuve se généralise aux difféomorphismes hamiltoniens du tore  $\mathbf{T}^{2m}$ .

### 0.3. Rappels des résultats de [L1]

L'ensemble des difféomorphismes du tore homotopes à l'identité est également connexe par arcs. Ainsi, si  $f$  est un relèvement au plan d'un tel difféomorphisme, on peut écrire  $f$  comme composée d'applications déviant la verticale et construire par les formules données précédemment un champ de vecteurs  $\xi$  sur  $E$ , dont les singularités sont en bijection avec les points fixes de  $f$  par l'application  $q_0 : E \rightarrow \mathbf{R}^2$ . On peut construire également un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur  $\tilde{E}$ , relevé par  $\xi$ , dont les singularités sont en bijection avec la projection  $\text{Fix}(f)$  de l'ensemble des points fixes de  $f$  dans  $\mathbf{T}^2$ , par l'application  $\tilde{q}_0 : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2$  relevée par  $q_0$ . L'ensemble des points d'orbite bornée de  $\tilde{\xi}$  est une partie compacte  $\Lambda$  ayant au moins la cohomologie du tore. En effet, dans la construction du paragraphe 0.2, nous n'avons utilisé la fonction  $\tilde{H}$  que pour prouver l'existence d'au moins trois singularités de  $\tilde{\xi}$ .

L'objet principal de ce travail est l'étude de la dynamique des champs de vecteurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  définis par un relèvement  $f$  d'un difféomorphisme  $F$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité. Ce travail est la suite de [L1] où cette étude a été initiée, principalement dans le cas où  $f$  est sans point fixe. Rappelons dans ce paragraphe ce qui a été démontré dans [L1].

THÉORÈME 0.3.1. — *On suppose que  $f$  n'a pas de point fixe.*

- (i) *L'ensemble  $\Lambda \subset \tilde{E}$  des points d'orbites bornées par le flot défini par  $\tilde{\xi}$  est un tore topologique et l'application  $\tilde{q}_0$  induit un homéomorphisme entre  $\Lambda$  et  $\mathbf{T}^2$ .*
- (ii) *Toute courbe intégrale du flot défini sur  $\mathbf{T}^2$ , conjugué par  $\tilde{q}_0$  au flot de  $\tilde{\xi}$  restreint à  $\Lambda$ , se relève au plan en une droite de Brouwer de  $f$ .*

Une droite de Brouwer de  $f$  est une courbe  $C$ , image d'un plongement propre de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$ , tel que  $f(C)$  soit dans une composante connexe du complémentaire de  $C$  et  $f^{-1}(C)$  dans l'autre. Rappelons le théorème de translation de Brouwer (voir [Br] ou [Gu]) :

THÉORÈME 0.3.2. — *Par chaque point passe une courbe de Brouwer, pour un homéomorphisme du plan préservant l'orientation et sans point fixe.*

Le théorème montré dans [L1] donne une version équivariante du théorème de translation de Brouwer pour les difféomorphismes relevant un difféomorphisme du tore homotope à l'identité. Rappelons maintenant le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff :

THÉORÈME 0.3.3. — *Soit  $F$  un homéomorphisme de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  homotope à l'identité et préservant l'aire. On suppose que  $f$  est un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R} \times [0, 1]$  et qu'on a, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,*

$$p_1 \circ f(x, 0) < x \quad \text{et} \quad p_1 \circ f(x, 1) > x.$$

*Alors  $f$  a au moins deux points fixes qui se projettent dans l'anneau en deux points fixes distincts de  $F$ .*

Le lien entre le théorème de Poincaré-Birkhoff et le théorème de translation de Brouwer est assez ancien puisqu'il remonte à Kérékjártó [K] qui donne une preuve de l'existence d'au moins un point fixe sous les hypothèses du théorème de Poincaré-Birkhoff, en utilisant le théorème de translation de Brouwer. Plus tard, Franks [Fr1], [Fr2] et Winkelnkemper [Wi] ont redécouvert cette idée d'appliquer le théorème de translation de Brouwer au théorème de Poincaré-Birkhoff. Dans [Gu], Guillou donne une démonstration du théorème de translation de Brouwer et obtient une version équivariante impliquant directement le théorème de Poincaré-Birkhoff.

Le théorème 0.1.1, sous les hypothèses plus faibles où  $F$  est un homéomorphisme, est une généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff. Utilisant le théorème de translation de Brouwer, Franks a obtenu un point fixe sous ces hypothèses affaiblies

et Flucher [Flu] en a obtenu deux en développant les idées de Franks. On peut en obtenir trois (voir [L3]) en faisant le lien entre les méthodes topologiques de Franks et Flucher et les résultats du présent travail (en particulier le chapitre 9).

La propriété fondamentale du champ  $\xi$  utilisée dans [L1] s'énonce ainsi :

PROPOSITION 0.3.4. — *Il existe une fonction  $L_1$ , de la forme :*

$$L_1 : (x, y) \mapsto L(x - y),$$

*symétrique, à valeurs entières comprises entre  $-[n/2]$  et  $[n/2]$ , définie sur une partie ouverte de  $E \times E$ , indépendante de  $\xi$ , qui décroît le long des orbites du flot produit défini par le champ de vecteurs  $\xi \times \xi$ .*

Cette proposition est une conséquence du caractère tridiagonal cyclique du champ de vecteurs  $\xi$ , c'est-à-dire des propriétés suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i(x) = 0 \text{ si } j \notin \{i-1, i, i+1\},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \xi_{i+1}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \xi_i(x) > 0.$$

La fonction  $L_1$  est appelée *fonction d'enlacement* pour la raison suivante : si  $x$  et  $x'$  sont deux singularités distinctes de  $\xi$ , on a

$$L_1(x, x') = I(z, z'),$$

où  $z = q_0(x)$  et  $z' = q_0(x')$  sont les points fixes associés respectivement à  $x$  et  $x'$ , et où  $I(z, z')$  est le nombre d'enlacement de  $z$  et  $z'$ . Le nombre d'enlacement  $I(z, z')$  de deux points fixes  $z$  et  $z'$  est défini ainsi :

si  $(f_s)_{s \in [0,1]}$  est une isotopie de l'identité à  $f$ , formée de relèvements d'homéomorphismes de  $\mathbf{T}^2$ , l'indice de la courbe fermée

$$s \mapsto f_s(z) - f_s(z')$$

par rapport à  $(0, 0)$  est indépendant de l'isotopie considérée et égal à  $I(z, z')$ .

#### 0.4. Plan de l'article

Au chapitre 1, on introduit les notations. On donne ensuite la définition rigoureuse du nombre d'enlacement de deux points fixes et du nombre d'enlacement d'un point fixe et d'une orbite périodique, ainsi que différentes interprétations de cet entier. Finalement, on construit les champs de vecteurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  et on donne leurs premières propriétés dynamiques.

Au chapitre 2, on s'intéresse à la fonction d'enlacement  $L_1$ . La proposition 0.3.4 donne deux filtrations

$$(\mathcal{W}_j^-)_{-[n/2] \leq j \leq [n/2]} \quad \text{et} \quad (\mathcal{W}_j^+)_{-[n/2] \leq j \leq [n/2]},$$

sur  $E \times E - \Delta$ , où  $\Delta$  la diagonale de  $E$ , pour le flot produit. Ces filtrations sont indépendantes du champ de vecteurs  $\xi$ . Plus précisément, si on définit pour  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2]\}$ , les ensembles ouverts

$$\mathcal{W}_j = L_1^{-1}(\{j\}), \quad \mathcal{W}_j^- = \text{Int} \left( \bigcup_{k \leq j} \overline{\mathcal{W}_k} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_j^+ = \text{Int} \left( \bigcup_{k \geq j} \overline{\mathcal{W}_k} \right),$$

on a les résultats suivants :

- $\mathcal{W}_{[n/2]}^- = E \times E - \Delta$  ;
- la frontière de  $\mathcal{W}_j^-$  est une sous-variété topologique de codimension 1 ;
- si  $(x, x') \in \overline{\mathcal{W}_j^-}$ , et si  $t > 0$ , l'image de  $(x, x')$  par le flot produit au temps  $t$  appartient à  $\mathcal{W}_j^-$  ;
- des propriétés analogues pour les  $\mathcal{W}_j^+$ , qui sont cette fois-ci des répulseurs ;
- $\mathcal{W}_j = \mathcal{W}_j^- \cap \mathcal{W}_j^+$ .

On améliore ces résultats dans le chapitre 2, en ajoutant la propriété d'uniformité suivante (proposition 2.4.1) :

- il existe une partie fermée de  $E \times E - \Delta$  contenue dans  $\mathcal{W}_j^-$  telle que pour tout  $(x, x') \in \overline{\mathcal{W}_j^-}$ , l'image de  $(x, x')$  au temps 1 soit contenue dans cette partie fermée.

On déduit de cette propriété d'uniformité que les familles

$$(E \times \mathcal{W}_j^-)_{[n/2] \leq j \leq [n/2]} \quad \text{et} \quad (E \times \mathcal{W}_j^+)_{[n/2] \leq j \leq [n/2]},$$

où

$$\mathcal{W}_j = L^{-1}(\{j\}), \quad \mathcal{W}_j^- = \text{Int} \left( \bigcup_{k \leq j} \overline{\mathcal{W}_k} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_j^+ = \text{Int} \left( \bigcup_{k \geq j} \overline{\mathcal{W}_k} \right),$$

définissent deux filtrations sur le fibré tangent, pour le flot linéarisé, avec la même propriété d'uniformité (corollaire 2.4.2)

Au chapitre 3, on utilise les filtrations précédentes sur le fibré tangent, pour obtenir une décomposition dominée du fibré tangent (proposition 3.2.1). Plus précisément, on construit, par une méthode analogue à celle donnée par Ruelle dans [Ru], une décomposition continue et invariante

$$E = \bigoplus_{[n/2] \leq j \leq [n/2]} E_j(x)$$

de l'espace tangent en  $x$ . Les sous-espaces  $E_j(x)$  sont des plans, sauf dans le cas où  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$  où ce sont des droites ; on a la propriété d'expansivité suivante :

*Il existe des réels  $C > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , ne dépendant que du  $2n$ -uplet  $(f_0, \dots, f_{2n-1}) = \Phi$ , tels que si  $u \in E_j(x)$ ,  $u' \in E_{j'}(x)$  sont de norme 1, et si  $j < j'$ , alors*

$$\frac{\|u^{tt}\|}{\|u^t\|} \leq C\lambda^t \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où  $(x^t, u^t)$  et  $(x^t, u^{tt})$  sont les images respectives au temps  $t$  de  $(x, u)$  et  $(x, u')$  par le flot linéarisé.

Dans la suite du chapitre 3, on construit des variétés intégrales des champs de plans

$$x \mapsto E_j(x)$$

par une méthode analogue à la construction de variétés centrales. On les appelle des plans d'enlacement  $j$ . Ce sont des sous-variétés de classe  $C^1$ , de dimension 1 si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , de dimension 2 dans les autres cas. Ils vérifient la propriété suivante :

*Si  $x$  et  $x'$  sont deux points d'un plan d'enlacement  $j$ , on a*

$$L_1(x^t, x'^t) = j \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R},$$

*en notant  $x^t$  et  $x'^t$  la position respective de  $x$  et  $x'$  au temps  $t$  par le flot de  $\xi$ .*

Les plans d'enlacement 0 sont particuliers : ils sont invariants par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  et se projettent dans l'espace quotient  $\tilde{E}$  en des tores de classe  $C^1$ , appelés tores d'enlacement 0. On a les propriétés suivantes :

- par tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{E}$  passe un tore d'enlacement 0 ;
- l'application  $\tilde{q}_0 : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2$  induit un difféomorphisme entre un tore d'enlacement 0 et  $\mathbf{T}^2$  ;
- les inverses des difféomorphismes précédents sont uniformément lipschitziens ;
- la topologie de Hausdorff et la  $C^1$ -topologie coïncident sur l'ensemble des tores d'enlacement 0.

Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  définit un flot

$$(t, T) \mapsto T^t$$

sur l'ensemble des tores  $T$  d'enlacement 0. On montre alors l'équivalence des conditions suivantes :

- (i) l'orbite de  $T$  est relativement compacte ;
- (ii) la réunion des ensembles  $T^t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , est bornée dans  $\tilde{E}$  ;
- (iii) le tore  $T$  est inclus dans l'ensemble  $\Lambda$  des points de  $\tilde{E}$  d'orbite bornée ;
- (iv) le tore  $T$  rencontre  $\Lambda$ .

En particulier, l'ensemble des tores d'enlacement 0 et d'orbite bornée (*i.e.* relativement compacte), noté  $\mathcal{T}$ , est compact, et on a

$$\Lambda = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

On étudie au chapitre 4 les éléments critiques des champs de vecteurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$ , c'est-à-dire les singularités et les orbites périodiques. On a montré dans [L1] qu'on obtient ainsi tous les points récurrents de  $\tilde{\xi}$ . On redonne une démonstration de ce résultat (corollaire 4.2.3), en utilisant le fait que l'orbite d'un point  $x \in E$  est contenue dans un plan d'enlacement  $j$ , si sa projection dans l'espace quotient  $\tilde{E}$  est un point non errant de  $\tilde{\xi}$  (proposition 4.2.1). On définit ensuite le nombre d'enlacement de deux

éléments critiques. Les propriétés du nombre d'enlacement (proposition 4.3.1) seront utilisées fréquemment dans la suite de l'article.

On montre dans le chapitre 5 qu'il existe des tores d'enlacement 0 qui sont fixes sous l'action du flot. Plus précisément, notant  $\text{sing}(\tilde{\xi})$  l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}$  et  $\mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi}))$  l'ensemble des parties de  $\text{sing}(\tilde{\xi})$ , on montre que l'image  $\Sigma(T)$  d'un tore  $T$  par l'application

$$\begin{aligned}\Sigma : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi})) \\ T &\longmapsto \text{sing}(\tilde{\xi}) \cap T\end{aligned}$$

est maximale dans  $\Sigma(\mathcal{T})$  si et seulement si  $T$  est fixe et que  $\Sigma$  induit une bijection entre les tores fixes et les éléments maximaux (pour l'inclusion) de  $\Sigma(\mathcal{T})$  (proposition 5.2.1). Dans le cas où  $\tilde{\xi}$  n'a pas de singularité, l'ensemble  $\mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi}))$  se réduit à l'ensemble vide, on en déduit que  $\mathcal{T}$  n'a qu'un élément. On retrouve ainsi l'assertion (i) du théorème 0.2. On définit également dans ce paragraphe la notion d'ensemble non enlacé, c'est un ensemble de singularités qui est contenu dans un tore d'enlacement 0. Tout ensemble non enlacé est alors contenu dans un ensemble non enlacé maximal pour l'inclusion (proposition 5.2.2).

Au chapitre 6 (proposition 6.1.1), on montre que l'image par  $\tilde{q}_0$  d'un ensemble non enlacé de singularités de  $\tilde{\xi}$  est une partie non enlacée  $Z$  de  $\text{Fix}(f)$ , c'est-à-dire une partie  $Z$  vérifiant la propriété suivante :

il existe un chemin  $s \mapsto F_s$  dans l'ensemble des difféomorphismes du tore, joignant l'identité à  $F$ , qui se relève en un chemin  $s \mapsto f_s$  de l'identité à  $f$  et tel qu'on ait

$$Z \subset \text{Fix}(f_s),$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ .

On montre également que si  $X$  est maximal parmi les parties non enlacées, il en est de même de  $Z$ . On a la réciproque suivante (proposition 6.1.2) : toute partie  $Z \subset \text{Fix}(f)$  non enlacée s'écrit

$$Z = \tilde{q}_0(X),$$

où  $X$  est une partie non enlacée de singularités de  $\tilde{\xi}$ , et où  $\tilde{\xi}$  est le champ de vecteurs associé à une décomposition bien choisie de  $f$  en difféomorphismes déviant la verticale. On en déduit que  $Z$  est contenu dans un ensemble non enlacé maximal de  $\text{Fix}(f)$  (théorème 6.1.3).

On étudie également dans le chapitre 6, pour un tore fixe  $T$  d'enlacement 0, le flot conjugué par  $\tilde{q}_0$  au flot restreint à  $T$ , c'est-à-dire le flot défini sur  $\mathbf{T}^2$  par le champ de vecteurs

$$\tilde{\zeta} : z \longmapsto D\tilde{Q}_0 \left( \tilde{Q}_0^{-1}(z) \right) \cdot \tilde{\xi} \left( \tilde{Q}_0^{-1}(z) \right),$$

où  $\tilde{Q}_0 = \tilde{q}_0|_T$  (proposition 6.2.1). On en déduit alors le théorème suivant, qui généralise l'assertion (ii) du théorème 0.2 et qui est utilisée dans [GL] :



THÉOREME 6.3.1. — Soit  $F$  un difféomorphisme du tore  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité,  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  et  $Z \subset \text{Fix}(f)$  une partie non enlacée maximale. Il existe un champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  sur  $\mathbf{T}^2$ , continu et uniquement intégrable et un chemin  $s \mapsto f^s$  de l'identité à  $f$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$ , avec les propriétés suivantes :

- (i) l'ensemble des singularités de  $\tilde{\zeta}$  est  $Z$  ;
- (ii) l'ensemble  $Z$  est inclus dans  $\text{Fix}(f^s)$ , pour tout  $s \in [0, 1]$  ;
- (iii) si  $U$  est une composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - Z$  et si  $F^s$  est le difféomorphisme du tore relevé par  $f^s$ , toute courbe intégrale du champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}|_U$  relevée au revêtement universel de  $U$  est une droite de Brouwer du relèvement naturel de  $F|_U$  obtenu en relevant à partir de l'identité l'isotopie  $s \mapsto F^s|_U$ .

#### REMARQUES

- (i) Tout ensemble  $Z \subset \text{Fix}(f)$  vérifiant la conclusion du théorème est nécessairement une partie non enlacée maximale.
- (ii) Si  $f$  préserve l'aire et le centre de gravité, alors  $\tilde{\xi}$  est un champ de gradient et  $\tilde{\zeta}$  admet donc une fonction de Liapounoff, on en déduit que toute partie non enlacée maximale a au moins trois éléments.
- (iii) Si  $F = F^1$  est le temps 1 d'un flot  $(F^s)_{s \in \mathbf{R}}$  défini par un champ de vecteurs  $\tilde{\theta}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{T}^2$ , si  $f = f^1$  est le temps 1 du flot relevé  $(f^s)_{s \in \mathbf{R}}$ , si  $Z$  est l'ensemble des singularités de  $\tilde{\theta}$ , la conclusion du théorème est trivialement vérifiée avec le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  obtenu en composant  $\tilde{\theta}$  par une rotation d'angle  $\alpha \not\equiv 0[\pi]$ .

Au chapitre 7, on considère un chemin  $s \mapsto F_s$  de difféomorphismes du tore avec des bifurcations aux points fixes de type selle-nœud, ainsi qu'un relèvement  $s \mapsto f_s$ . On peut trouver un entier  $n$  et, sur la même variété  $\tilde{E}$ , un chemin  $s \mapsto \tilde{\xi}_s$  de champs de vecteurs de classe  $C^1$  associés à  $f_s$ . On étudie alors les bifurcations possibles pour la famille de tores fixes correspondante. On montre alors que l'ensemble des couples  $(s, T)$ , où  $T$  est un tore fixe de  $\tilde{\xi}_s$ , est une variété topologique de dimension 1 ; on étudie en détail les différents types de bifurcation (proposition 7.4.1).

Au chapitre 8, on se donne trois entiers premiers entre eux  $p$ ,  $p'$  et  $q$ , avec  $q > 0$  et on étudie le relèvement  $f^q - (p, p')$  de  $F^q$ . Si on se donne une décomposition de  $f$  en  $2n$  applications déviant la verticale, on peut construire comme précédemment un champ de vecteurs  $\xi$  sur un espace affine de dimension  $2nq$  dont les singularités sont en bijection avec les points fixes de  $f^q - (p, p')$  et un champ de vecteurs sur le quotient  $\tilde{E}$  dont les singularités sont en bijection avec les projections dans le tore de ces points fixes. On interprète ce qui a été fait précédemment dans ce cadre plus général. Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  est invariant par une transformation affine périodique naturelle  $\tilde{\varphi}$  de période  $q$ , qui est conjuguée à  $F$  sur l'ensemble des singularités. On s'intéresse principalement à l'ensemble  $\mathcal{T}'$  des éléments de  $\mathcal{T}$  invariants par cette application.

Pour un tore  $T \in \mathcal{T}'$ , on montre que l'ensemble

$$Z = \tilde{q}_0(\Sigma(T))$$

est une partie  $f$ -non enlacée au sens suivant :

il existe un chemin  $s \mapsto F_s$  de difféomorphismes du tore, qui se relève en un chemin  $s \mapsto f_s$  vérifiant :

- $\text{Fix}(f_0^q - (p, p')) = \mathbf{T}^2$  ;
- $f_1 = f$  ;
- $F_s|_Z = F|_Z$ .

On établit alors les propositions 8.4.1, 8.4.2, 8.5.1 et 8.5.2 qui sont similaires aux résultats montrés dans les chapitres 5 et 6.

Au chapitre 9, on s'intéresse au problème suivant. On peut définir naturellement le nombre d'enlacement  $\tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$  de deux points fixes  $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \text{Fix}(f)$ . On fixe un antécédent  $z$  de  $\tilde{z}$  et on somme les nombres d'enlacement  $I(z, z')$  pour tous les antécédents de  $\tilde{z}'$  (ceci est possible car ces entiers sont presque tous nuls). On définit également de façon naturelle, en prenant un itéré de  $f$ , le nombre d'enlacement  $\tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$  pour un point  $z \in \text{Fix}(f)$  et pour la projection  $\tilde{O}$  dans le tore d'une orbite périodique  $O$  de  $f$ . On considère une partie non enlacée maximale  $Z$  de  $\text{Fix}(f)$ . On étudie le nombre minimum de valeurs que doit prendre sur  $Z$  la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

où  $z' \in \text{Fix}(f)$  n'appartient pas à  $Z$  et le nombre minimum de valeurs que doit prendre sur  $Z$  la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

où  $\tilde{O}$  est la projection dans  $\mathbf{T}^2$  d'une orbite périodique de  $f$ . On montre que ces fonctions doivent prendre au moins deux valeurs (théorèmes 9.1.1 et 9.2.1) et on peut décrire très précisément le cas où elles prennent exactement deux valeurs (théorèmes 9.1.2 et 9.2.2). On en déduit en particulier le corollaire suivant, utilisé dans [L2] :

**COROLLAIRE 9.2.3.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $f$  a une orbite périodique  $O$  de période  $q \geq 2$  et on note  $\tilde{O}$  la projection de  $O$  dans le tore. La fonction*

$$z \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

*prend alors au moins deux valeurs sur  $\text{Fix}(f)$  et en prend au moins trois si la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^2 - \tilde{O}$  est irréductible, c'est-à-dire si elle est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.*

Au chapitre 10, on fait la liaison entre les résultats de cet article et un résultat de C. Golé dans le cadre plus classique des difféomorphismes de l'anneau exact-symplectiques déviant la verticale à droite : la construction de cercles fantômes contenant l'orbite maximisante et l'orbite minimax donnés par la théorie d'Aubry-Mather, pour chaque nombre rationnel  $p/q$ .

Ces courbes fantômes sont les analogues de nos tores fixes d'enlacement 0. On peut adapter tous les arguments des chapitres précédents dans ce cadre et donner une nouvelle démonstration de l'existence des cercles fantômes.

On conclut le chapitre 10 par une démonstration nouvelle d'un résultat établi dans [L3].

**THÉORÈME 10.7.1.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope au difféomorphisme*

$$F^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$$

*et dont les relèvements à  $\mathbf{R}^2$  dévient la verticale à droite. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha \in -[\varepsilon, \varepsilon]$  tel que le difféomorphisme*

$$F_\alpha : (x, y) \mapsto F(x, y) + (\alpha, 0)$$

*ait une orbite périodique.*

Je remercie Sigurd Angenent et Christophe Golé pour leurs précieuses explications sur les cercles fantômes, qui ont été fondamentales dans la réalisation de ce travail.

Je tiens également à remercier le *referee* pour son travail considérable. Ses remarques ont permis d'améliorer la lisibilité de l'article.

# CHAPITRE 1

## NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations. Nous rappelons ensuite les définitions importantes, en particulier la notion de difféomorphisme déviant la verticale (paragraphe 1.6). Nous construisons dans les paragraphes suivants, les champs de vecteurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  et commençons l'étude de leur dynamique. Tout ce qui suit se trouve de façon plus détaillée dans [L1].

### 1.1. Notations

On écrit respectivement  $\overline{Y}$ ,  $\text{Fr}(Y)$  et  $\text{Int}(Y)$ , pour l'adhérence, la frontière et l'intérieur d'une partie  $Y$  d'un espace topologique  $X$ . On note  $X - Y$  son complémentaire.

On note  $\text{fix}(f)$  l'ensemble des points fixes d'un homéomorphisme  $f$  d'un espace topologique  $X$ . On note  $\text{sing}(\theta)$  l'ensemble des singularités (c'est-à-dire l'ensemble des zéros) d'un champ de vecteurs  $\theta$  défini sur une variété  $M$  de classe  $C^1$ ; si ce champ est uniquement intégrable et complet, on note  $x^t$  la position au temps  $t$  d'un point  $x$  par le flot induit.

On munit le plan  $\mathbf{R}^2$  de son orientation et de sa structure euclidienne usuelles, on considère les projections canoniques

$$p_1 : (x, y) \mapsto x \quad \text{et} \quad p_2 : (x, y) \mapsto y,$$

et on note

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{T}^2 \\ x &\longmapsto x + \mathbf{Z}^2 \end{aligned}$$

le revêtement universel du tore  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$ .

### 1.2. Distance de Hausdorff

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Si  $Y$  et  $Y'$  sont deux parties fermées bornées non vides de  $X$ , on pose :

$$D(Y, Y') = \max \left( \sup_{y \in Y} \left( \inf_{y' \in Y'} d(y, y') \right), \sup_{y' \in Y'} \left( \inf_{y \in Y} d(y, y') \right) \right).$$

On obtient ainsi une distance sur l'ensemble des parties fermées bornées non vides de  $X$ , appelée la *distance de Hausdorff*. Si  $(X, d)$  est compact, l'espace métrique ainsi défini est également compact.

### 1.3. Difféomorphismes du tore

Pour tout entier  $k \geq 0$ , on note  $\text{Diff}^k(\mathbf{T}^2)$  l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^k$  du tore  $\mathbf{T}^2$  et  $D^k(\mathbf{T}^2)$  l'ensemble des relèvements à  $\mathbf{R}^2$  des éléments de  $\text{Diff}^k(\mathbf{T}^2)$  homotopes à l'identité. Les éléments de  $D^k(\mathbf{T}^2)$  sont les difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $\mathbf{R}^2$  qui s'écrivent

$$f = \text{Id} + \varphi,$$

où  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  est de classe  $C^k$  et  $\mathbf{Z}^2$ -périodique.

Si  $f$  et  $f'$  sont deux éléments de  $D^k(\mathbf{T}^2)$ , on pose :

$$d(f, f') = \max_{0 \leq l \leq k} \left( \max_{z \in \mathbf{R}^2} \|D^l f(z) - D^l f'(z)\| \right).$$

On obtient ainsi une distance sur  $D^k(\mathbf{T}^2)$  qui définit la  $C^k$ -topologie sur cet ensemble.

On obtient une distance sur  $\text{Diff}^k(\mathbf{T}^2)$  en posant, pour deux difféomorphismes du tore  $F$  et  $F'$  :

$$d(F, F') = \max \left( \max_{\tilde{z} \in \mathbf{T}^2} d(F(\tilde{z}), F'(\tilde{z})), \max_{1 \leq l \leq k} \left( \max_{\tilde{z} \in \mathbf{T}^2} \|D^l F(\tilde{z}) - D^l F'(\tilde{z})\| \right) \right),$$

où on pose

$$d(\tilde{z}, \tilde{z}') = \min \{ \|z - z'\| \mid z \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}\}), z' \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}'\}) \}$$

et

$$D^l F(\tilde{z}) = D^l f(z)$$

pour un relèvement  $f$  de  $F$  et un point  $z \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}\})$ .

L'ensemble  $D^k(\mathbf{T}^2)$ , muni de la loi de composition, est un groupe topologique, qui contient toutes les translations. Pour tout  $f \in D^k(\mathbf{T}^2)$  et pour tout  $a \in \mathbf{R}^2$ , l'application

$$\begin{aligned} f + a : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ z &\longmapsto f(z) + a \end{aligned}$$

appartient également à  $D^k(\mathbf{T}^2)$  et relève le même difféomorphisme que  $f$  si  $a \in \mathbf{Z}^2$ .

L'ensemble des points fixes de  $f \in D^k(\mathbf{T}^2)$  est invariant par toute translation entière, on note

$$\text{Fix}(f) = \Pi(\text{fix}(f))$$

son image dans le tore.

Rappelons quelques résultats sur les difféomorphismes du tore.

- Pour tout entier  $k \geq 0$ , la composante connexe de l'identité dans  $\text{Diff}^k(\mathbf{T}^2)$  est formée des difféomorphismes homotopes à l'identité (voir Epstein [Ep]).
- Pour tout entier  $k \geq 1$ , la composante connexe de l'identité a le type d'homotopie du tore (voir Earle et Eells [EE]). La partie formée des difféomorphismes homotopes à l'identité qui fixent un point donné est contractile, on en déduit facilement qu'il en est de même de  $D^k(\mathbf{T}^2)$ .
- Le type d'homotopie faible du groupe  $\text{Diff}^0(\mathbf{T}^2)$  est celui du tore (voir M. Hamstrom [Ha]), il en est de même du type d'homotopie, car  $\text{Diff}^0(\mathbf{T}^2)$  est un A.N.R. (voir Luke et Mason [LM]). En particulier  $D^0(\mathbf{T}^2)$  est contractile.
- Pour tout  $k \geq 1$ , l'ensemble des difféomorphismes de  $D^k(\mathbf{T}^2)$  qui préservent la mesure de Lebesgue  $\mu$  est connexe par arcs (voir l'appendice de Conley et Zehnder [CZ]).

On peut également consulter sur ces sujets Cerf [Ce], Smale [Sm] ou Gramain [Gr].

#### 1.4. Nombre d'enlacement de deux points fixes

On fixe dans ce paragraphe  $f \in D^0(\mathbf{T}^2)$  et on note  $F$  l'homéomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f$ . Si  $z_0$  et  $z_1$  sont deux points fixes distincts de  $f$ , et si  $(f_s)_{s \in [0,1]}$  est une isotopie joignant l'identité à  $f$  dans  $D^0(\mathbf{T}^2)$ , l'indice de la courbe fermée :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ s &\longmapsto f_s(z_0) - f_s(z_1) \end{aligned}$$

par rapport au point  $(0,0)$ , est indépendant de l'isotopie. C'est une conséquence de la contractilité de  $D^0(\mathbf{T}^2)$ . Cet entier est, par définition, le *nombre d'enlacement* de  $z_0$  et  $z_1$  : on le note  $I(z_0, z_1)$ . Cet entier coïncide avec le nombre d'enlacement des courbes fermées

$$C_0 = \{(f_s(z_0), s), s \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad C_1 = \{(f_s(z_1), s), s \in [0, 1]\}$$

de la variété construite à partir de  $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$  en identifiant tout point  $(z, 0)$  avec  $(z, 1)$ .

La fonction  $I$  vérifie les propriétés suivantes :

- elle est symétrique ;
- pour tout  $a \in \mathbf{Z}^2$ , on a

$$I(z_0 + a, z_1 + a) = I(z_0, z_1);$$

- pour tout  $a \in \mathbf{Z} - \{0\}$ , on a

$$I(z_0, z_0 + a) = 0;$$

- il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$\|z_1 - z_0\| \geq M \implies I(z_0, z_1) = 0.$$

Si  $\tilde{z}_0$  et  $\tilde{z}_1$  sont deux éléments de  $\text{Fix}(f)$ , on peut définir le *nombre d'enlacement* de  $\tilde{z}_0$  et  $\tilde{z}_1$ , noté  $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$ , de la façon suivante : on choisit  $z_0 \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}_0\})$  et on pose

$$\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1) = \sum_{z \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}_1\})} I(z_0, z),$$

en remarquant que la somme précédente est une somme finie. Si on fixe  $z_1 \in \Pi^{-1}(\tilde{z}_1)$ , on peut écrire

$$\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1) = \sum_{a \in \mathbf{Z}^2} I(z_0, z_1 + a) = \sum_{a \in \mathbf{Z}^2} I(z_0 - a, z_1) = \sum_{a \in \mathbf{Z}^2} I(z_1, z_0 - a) = \tilde{I}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_0).$$

Soit  $O$  une orbite périodique de période  $q \geq 2$  de  $f$  et  $z_0$  un point fixe. Pour tout point  $z_1 \in O$ , on peut considérer le nombre d'enlacement  $I(z_0, z_1)$  pour  $f^q$ . Cet entier est alors indépendant du choix de  $z_1$ , on le note  $I(z_0, O)$  : c'est le *nombre d'enlacement* de  $z_0$  et de  $O$ .

Si  $\tilde{z}_0$  appartient à  $\text{Fix}(f)$  et si  $\tilde{O}$  est une orbite périodique de  $F$  qui se relève en une orbite périodique de  $f$ , on peut définir le nombre d'enlacement  $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{O})$  de  $\tilde{z}_0$  et de  $\tilde{O}$  : on choisit  $\tilde{z}_1 \in \Pi^{-1}(\tilde{O})$  et on pose

$$\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{O}) = \tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$$

où  $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$  est défini pour  $f^q$  et indépendant du choix de  $\tilde{z}_1$ .

### 1.5. Ensembles non enlacés

On fixe dans ce paragraphe  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  et on note  $F$  le difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f$ . On dira qu'une partie  $Z$  de  $\text{Fix}(f)$  est *non enlacée* s'il existe un chemin continu  $s \mapsto f_s$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  joignant l'identité à  $f$  et tel que  $Z \subset \text{Fix}(f_s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . On peut définir naturellement la notion de *partie non enlacée maximale* au sens de l'inclusion.

Remarquons que le nombre d'enlacement  $I(z_0, z_1)$  entre deux points distincts  $z_0$  et  $z_1$  de  $\Pi^{-1}(Z)$  est nul et qu'il en est de même du nombre d'enlacement  $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$  entre deux points distincts  $\tilde{z}_0$  et  $\tilde{z}_1$  de  $Z$ .

Soient  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $p' \in \mathbf{Z}$  et  $q > 0$  trois entiers premiers entre eux. L'application  $f^q - (p_0, p_1)$  est un relèvement de  $F^q$ . On dira qu'une partie

$$Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'))$$

est *f-non enlacée* s'il existe un chemin continu  $s \mapsto f_s$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  joignant l'identité à  $f$  et tel qu'on ait

$$Z \subset \text{Fix}(f_s^q - (p, p')),$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ . En particulier, c'est une partie non enlacée de  $f^q - (p, p')$  invariante par  $F$ . On parlera là encore de *partie f-non enlacée maximale*.

### 1.6. Difféomorphismes déviant la verticale

On dit qu'un difféomorphisme  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  de classe  $C^1$ , préservant l'orientation, *dévie la verticale* si, pour tout réel  $x$ , les applications

$$y \mapsto p_1 \circ f(x, y) \quad \text{et} \quad y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$$

sont des difféomorphismes de  $\mathbf{R}$ . Si le premier difféomorphisme est croissant, le second est alors décroissant : on dit que  $f$  *dévie la verticale à droite*. Si, au contraire, le premier est décroissant, le second est croissant : on dit que  $f$  *dévie la verticale à gauche*. Si  $f$  dévie la verticale à droite (resp. à gauche), alors  $f^{-1}$  dévie la verticale à gauche (resp. à droite).

Si  $f$  dévie la verticale, on peut définir deux fonctions de classe  $C^1$

$$g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{et} \quad g' : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R},$$

telles que

$$f(x, y) = (x', y') \iff y = g(x, x') \quad \text{et} \quad y' = g'(x, x').$$

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , l'application

$$y \mapsto g(x, x')$$

est l'inverse du difféomorphisme

$$y \mapsto p_1 \circ f(x, y),$$

et l'application

$$y \mapsto g'(x, x')$$

l'inverse du difféomorphisme

$$y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y).$$

On peut interpréter géométriquement  $g(x, x')$  comme l'ordonnée de l'unique point d'intersection de la courbe  $f^{-1}(\{x'\} \times \mathbf{R})$  avec la droite  $\{x\} \times \mathbf{R}$  et  $g'(x, x')$  comme l'ordonnée de l'unique point d'intersection de la courbe  $f(\{x\} \times \mathbf{R})$  avec la droite  $\{x'\} \times \mathbf{R}$ .

Les fonctions  $g$  et  $g'$  sont appelées les *fonctions associées* à  $f$ , elles vérifient les inégalités

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x, x') > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g'}{\partial x}(x, x') < 0,$$

dans le cas où  $f$  dévie la verticale à droite, et les inégalités

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x, x') < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g'}{\partial x}(x, x') > 0,$$

dans le cas où  $f$  dévie la verticale à gauche.



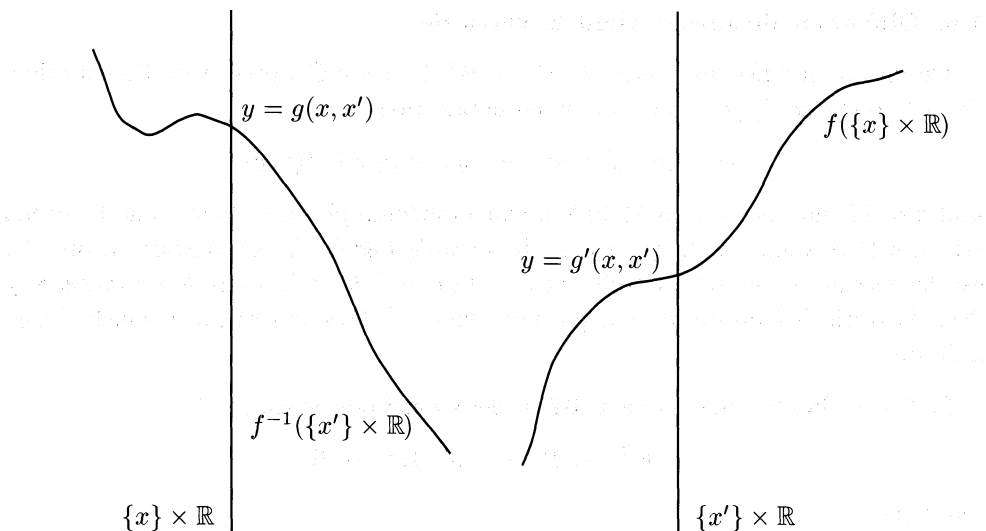


FIGURE 1

La notion de difféomorphisme déviant la verticale est naturelle quand on s'intéresse aux difféomorphismes préservant l'aire et l'orientation. Donnons-nous un tel difféomorphisme  $f$ . La forme différentielle

$$f^*(ydx) - ydx = y'dx' - ydx$$

est alors fermée et donc exacte par le lemme de Poincaré : il existe une fonction

$$h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

de classe  $C^2$ , telle que

$$dh = y'dx' - ydx.$$

Le fait que  $f$  dévie la verticale signifie que le couple  $(x, x')$  définit un système de coordonnées global sur le plan  $\mathbf{R}^2$ . Dans ce cas, on peut exprimer la fonction  $h$  dans le système de coordonnées  $(x, x')$ , on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, x') = -g(x, x'), \quad \frac{\partial h}{\partial x'}(x, x') = g'(x, x').$$

La fonction  $h$  est la *fonction génératrice* de  $f$ , elle est définie à une constante près par l'égalité :

$$f\left(x, -\frac{\partial h}{\partial x}(x, x')\right) = \left(x', \frac{\partial h}{\partial x'}(x, x')\right).$$

Un exemple simple de difféomorphisme déviant la verticale à droite, que l'on retrouvera tout au long de l'article, est l'application linéaire

$$f^* : (x, y) \longmapsto (x + y, y).$$

On notera  $F^*$  le difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f^*$ , appelé usuellement le *twist de Dehn*. Les fonctions

$$g^* : (x, x') \mapsto x' - x \quad \text{et} \quad g'^* : (x, x') \mapsto x' - x$$

sont les fonctions associées à  $f^*$ . Remarquons que  $f^*$  préserve l'aire et que la fonction

$$h^* : (x, x') \mapsto \frac{1}{2}(x' - x)^2$$

est une fonction génératrice de  $f^*$ .

### 1.7. Décomposition en difféomorphismes déviant la verticale

Nous définissons une suite  $(f_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$  de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^2$  en posant

$$\begin{cases} f_i^* = f^* & \text{si } i \text{ est pair,} \\ f_i^* = f^{*-1} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour tout entier  $n$ , nous notons  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble formé des  $2n$ -uplets

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1})$$

de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^2$  qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f_i - f_i^* \text{ est } \mathbf{Z}^2\text{-périodique,} \\ f_i \text{ dévie la verticale.} \end{cases}$$

En particulier  $\mathcal{D}_n$  contient le  $2n$ -uplet

$$\Phi^* = (f_0^*, \dots, f_{2n-1}^*).$$

Remarquons que chaque  $f_i$  relève un difféomorphisme du tore, qui est dans la classe d'isotopie de  $F^*$  ou de  $F^{*-1}$ , suivant la parité de  $i$ . Remarquons également que si  $g_i, g'_i$  sont les fonctions associées à  $f_i$  et  $g_i^*, g'^*_i$  les fonctions associées à  $f_i^*$ , alors chaque fonction  $g_i - g_i^*$  et  $g'_i - g'^*_i$  est  $\mathbf{Z}^2$ -périodique.

On peut munir  $\mathcal{D}_n$  de la distance

$$d(\Phi, \Phi') = \max_{0 \leq i < 2n} \left( \max_{z \in \mathbf{R}^2} (\max(\|f_i(z) - f'_i(z)\|, \|Df_i(z) - Df'_i(z)\|)) \right)$$

où

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \quad \text{et} \quad \Phi' = (f'_0, \dots, f'_{2n-1}),$$

en remarquant que chaque fonction  $f_i - f'_i$  est  $\mathbf{Z}^2$ -périodique.

Pour tout  $2n$ -uplet

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n,$$

le difféomorphisme

$$K_n(\Phi) = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$$

commute avec les translations entières ; on obtient ainsi une application continue

$$K_n : \mathcal{D}_n \longrightarrow D^1(\mathbf{T}^2).$$

Si  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$ , l'application

$$f \circ f^{*-1} - f^{*-1}$$

est  $\mathbf{Z}^2$ -périodique. De plus, si  $f$  est assez proche de l'identité,  $f \circ f^{*-1}$  dévie la verticale à gauche, ainsi

$$f = (f \circ f^{*-1}) \circ f^*$$

est dans l'image de  $\mathcal{D}_1$  par  $K_1$ . La connexité par arcs de  $D^1(\mathbf{T}^2)$  implique alors que tout élément de  $D^1(\mathbf{T}^2)$  est la composée de difféomorphismes proches de l'identité et se trouve donc dans l'image de  $\mathcal{D}_n$  par  $K_n$ , dès que  $n$  est assez grand. Tout difféomorphisme  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  se décompose donc en un nombre fini de difféomorphismes déviant la verticale alternativement à droite et à gauche. Si  $f$  préserve l'aire, c'est la composée de difféomorphismes proches de l'identité qui préservent l'aire. Comme  $f^*$  préserve également l'aire, on peut écrire  $f = K_n(\Phi)$ , où  $\Phi$  est un élément de  $\mathcal{D}_n$  dont chaque composante préserve l'aire.

La contractilité de  $D^1(\mathbf{T}^2)$  nous dit plus généralement que toute application continue

$$\Psi : X \longrightarrow D^1(\mathbf{T}^2)$$

définie sur un espace topologique compact, se relève sous la forme

$$\Psi = K_n \circ \widehat{\Psi},$$

où

$$\widehat{\Psi} : X \longrightarrow \mathcal{D}_n$$

est continue, si  $n$  est assez grand (voir [L1]).

### 1.8. Champ de vecteurs $\xi$ associé à une décomposition

On fixe dans ce paragraphe un  $2n$ -uplet

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$$

et on pose  $f = K_n(\Phi)$ . On commence par étendre notre famille en une famille  $(f_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  vérifiant la relation de périodicité

$$f_{i+2n} = f_i,$$

pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ . On note alors  $g_i$  et  $g'_i$  les fonctions associées à  $f_i$  ; elles vérifient

$$f_i(x, y) = (x', y') \iff y = g_i(x, x') \text{ et } y' = g'_i(x, x'),$$

ainsi que les inégalités

$$(-1)^i \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x, x') > 0 \quad \text{et} \quad (-1)^i \frac{\partial g'_i}{\partial x}(x, x') < 0.$$

Sur l'espace vectoriel

$$E = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2n} = x_i\} \approx \mathbf{R}^{2n},$$

on définit un champ de vecteurs de classe  $C^1$

$$\xi : x \longmapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbf{Z}}$$

par les égalités

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}).$$

On va interpréter géométriquement la signification du champ de vecteurs  $\xi$ . On définit, pour tout entier  $i$ , les applications

$$\begin{aligned} q_i : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q'_i : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_i, g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i)), \end{aligned}$$

ainsi que la verticale

$$D_i = \{x_i\} \times \mathbf{R}.$$

Pour toute configuration périodique  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E$ , les courbes  $f_i^{-1}(D_{i+1})$  et  $f_{i-1}(D_{i-1})$  intersectent la verticale  $D_i$  respectivement au point  $z_i = q_i(x)$  et au point  $z'_i = q'_i(x)$ . La  $i$ -ème coordonnée  $\xi_i(x)$  du champ  $\xi(x)$  représente la différence des ordonnées de ces deux points.

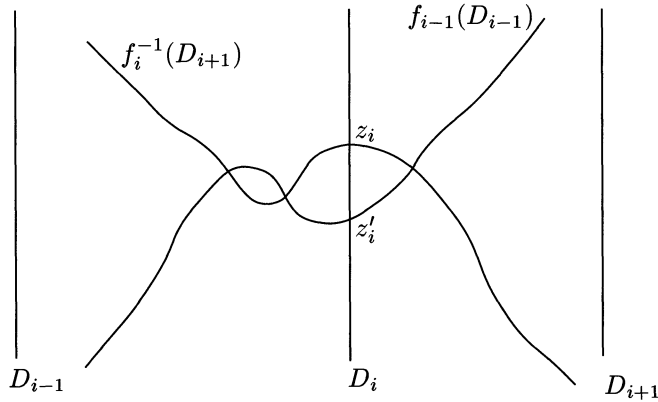


FIGURE 2

Puisque pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  on a

$$f_i(z_i) = z'_{i+1},$$

on en déduit les équivalences

$$\xi_i(x) = 0 \iff z'_i = z_i \iff f_{i-1}(z_{i-1}) = z_i.$$

Si  $x$  est une singularité de  $\xi$ , la relation

$$f_{i-1}(z_{i-1}) = z_i$$

est vraie pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  : on a donc

$$f(z_0) = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0(z_0) = z_{2n} = z_0.$$

Ainsi  $z_0 = q_0(x)$  est un point fixe de  $f$ .

Réciproquement si  $z$  est un point fixe de  $f$ , la suite  $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  définie ainsi :

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_{i+1} = f_i(z_i), \end{cases}$$

est périodique, de période  $2n$ , et la configuration

$$x = (p_1(z_i))_{i \in \mathbf{Z}},$$

qui appartient à  $E$ , est une singularité de  $\xi$ .

On a démontré que l'application  $q_0$  induit une bijection

$$q_0 : \text{sing}(\xi) \longrightarrow \text{fix}(f).$$

### 1.9. Champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ associé à une décomposition

Étudions le champ de vecteurs  $\xi^*$  défini sur  $E$  par

$$\Phi^* = (f_0^*, \dots, f_{2n-1}^*).$$

Les fonctions associées à  $f_i^*$  sont

$$g_i^* : (x, x') \longmapsto (-1)^i(x' - x) \quad \text{et} \quad g_i'^* : (x, x') \longmapsto (-1)^i(x' - x),$$

et le champ de vecteurs

$$\xi^* : x \longmapsto (\xi_i^*(x))_{i \in \mathbf{Z}}$$

s'écrit :

$$\xi_i^*(x) = (-1)^i(x_{i-1} - x_{i+1}).$$

C'est un champ de vecteurs linéaire qui est le gradient de la fonction

$$H^* : x \longmapsto \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i x_{i-1} x_i = \sum_{j=1}^{n-1} (x_0 - x_{2j})(x_{2j+1} - x_{2j-1}),$$

pour le produit scalaire

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{0 \leq i \leq 2n-1} x_i x'_i.$$

On notera  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne définie alors sur  $E$  de même que la norme d'opérateur définie sur  $L(E)$ .

La forme quadratique  $H^*$  est dégénérée, son noyau est le plan

$$E_0 = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\};$$

c'est l'ensemble des singularités de  $\xi^*$ . On vérifie sur cet exemple que l'application

$$q_0 : x \mapsto (x_0, x_1 - x_0)$$

induit une bijection entre  $E_0$  et le plan  $\mathbf{R}^2$ , et que tout point de  $\mathbf{R}^2$  est un point fixe de

$$K_n(\Phi^*) = f_{2n-1}^* \circ \cdots \circ f_0^* = f^{*-1} \circ f^* \circ \cdots \circ f^* = \text{Id}.$$

On a une décomposition orthogonale

$$E = E_0 \oplus E_- \oplus E_+$$

où  $E_-$  (resp.  $E_+$ ) est le sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives (resp. négatives).

Le champ de vecteurs  $\xi^*$  est invariant par les translations

$$\begin{aligned} \tau_0 : E &\longrightarrow E \\ (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\longmapsto \left( x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_1 : E &\longrightarrow E \\ (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\longmapsto \left( x_i + \frac{1}{2}(1 - (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}}. \end{aligned}$$

Il définit donc un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}^*$  sur l'espace quotient

$$\tilde{E} = E/[\tau_0, \tau_1] \approx \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2},$$

où  $[\tau_0, \tau_1]$  est le groupe engendré par les deux translations. Comme le sous-espace  $E_0$  est également invariant par  $\tau_0$  et  $\tau_1$ , on peut écrire, avec abus de notation,

$$\tilde{E} = \Lambda_0 \oplus E_- \oplus E_+,$$

où

$$\Lambda_0 = E_0/[\tau_0, \tau_1]$$

est un tore de dimension deux.

La projection canonique

$$\pi : E \longrightarrow \tilde{E}$$

est le revêtement universel de  $\tilde{E}$ . On munira  $\tilde{E}$  de la distance

$$d(\tilde{x}, \tilde{x}') = \min_{x \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}\}), x' \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}'\})} \|x - x'\|.$$

Considérons le champ de vecteurs  $\xi$  défini par un  $2n$ -uplet

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n.$$

Les applications  $g_i - g_i^*$  et  $g'_i - g'^*_i$  sont  $\mathbf{Z}^2$ -périodiques : le champ de vecteurs  $\xi - \xi^*$  est donc  $\mathbf{Z}^{2n}$ -périodique. En particulier  $\xi$  est invariant par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  et définit un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur  $\tilde{E}$ .

Chaque application

$$q_i : E \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad (\text{resp. } q'_i : E \longrightarrow \mathbf{R}^2)$$

définie au paragraphe 1.8 relève une application

$$\tilde{q}_i : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2 \quad (\text{resp. } \tilde{q}'_i : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2);$$

l'ensemble  $\text{sing}(\xi)$  est invariant par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  ; l'application  $\tilde{q}_0$  induit une bijection

$$\tilde{q}_0 : \text{sing}(\tilde{\xi}) \longrightarrow \text{Fix}(f).$$

### 1.10. Premières propriétés dynamiques de $\tilde{\xi}$

Le champ de vecteurs  $\xi - \xi^*$  est borné puisqu'il est  $\mathbf{Z}^{2n}$ -périodique. On en déduit que  $\xi$  est complet et que l'on peut majorer uniformément la norme  $\|D\xi(x)\|$  par une constante  $M > 0$ . On sait alors, par le lemme de Gronwall, que l'application qui à  $x$  associe sa position  $x^t$  au temps  $t$  est lipschitzienne de rapport  $e^{M|t|}$ . On a des propriétés analogues pour  $\tilde{\xi}$ .

Notons

$$x = x_0 + x_- + x_+$$

la décomposition d'un point

$$x \in \tilde{E} = \Lambda_0 \oplus E_- \oplus E_+.$$

Pour tout  $R > 0$ , l'ensemble

$$B_R = \left\{ x \in \tilde{E} \mid \|x_-\| < R \text{ et } \|x_+\| < R \right\},$$

est un bloc isolant de  $\tilde{\xi}^*$  au sens de Conley : l'ensemble des points dont l'orbite est contenue dans  $\overline{B_R}$  est inclus dans  $B_R$ . Cela provient du fait suivant : tout point  $x \in \text{Fr}(B_R)$  vérifie l'une au moins des deux propriétés :

- il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x^t \notin \overline{B_r}$  si  $t \in ]0, +\varepsilon[$ ,
- il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x^t \notin \overline{B_r}$  si  $t \in ]-\varepsilon, 0[$ .

Puisque  $\tilde{\xi} - \tilde{\xi}^*$  est borné, il existe  $R_0 > 0$  tel que  $B_R$  soit encore un bloc isolant de  $\tilde{\xi}$  dès que  $R \geq R_0$  est grand. On a la figure 3.

Remarquons que si  $x \notin B_{R_0}$ , alors deux cas sont possibles, où on pose

$$x^t = x_0^t + x_-^t + x_+^t :$$

- la fonction  $t \mapsto \|x_-^t\|$  est croissante et tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ,
- la fonction  $t \mapsto \|x_+^t\|$  est décroissante et tend vers  $+\infty$  en  $-\infty$ .

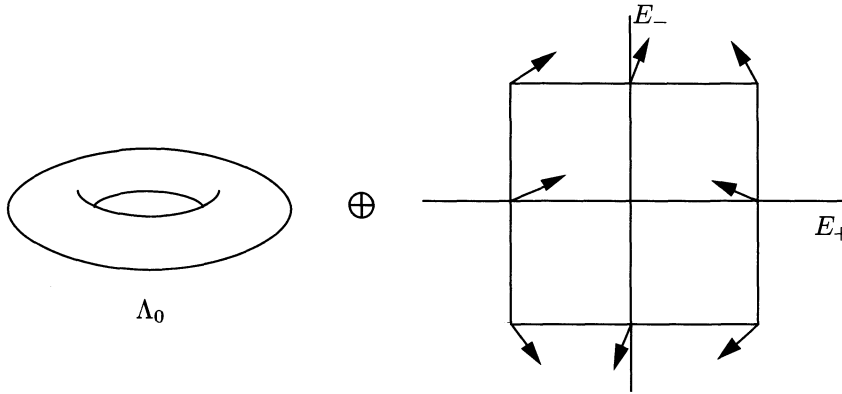


FIGURE 3

En particulier l'ensemble  $\Lambda$  des points dont l'orbite totale est bornée est une partie compacte contenue dans  $B_{R_0}$ .

On peut être plus précis si on utilise la théorie de l'indice de Conley [Co]. Considérons un voisinage ouvert relativement compact  $U$  de  $\Lambda$  et supposons que pour tout  $x \in \text{Fr}(U)$  l'une au moins des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

- il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x^t \notin \overline{U}$  si  $t \in ]0, +\varepsilon[$ ,
- il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $x^t \notin \overline{U}$  si  $t \in ]-\varepsilon, 0[$ .

Notons alors  $U^-$  l'ensemble des points de  $\text{Fr}(Y)$  qui vérifient la première propriété. C'est une partie fermée de  $\overline{U}$  et on peut considérer l'espace topologique  $\overline{U}/U^-$ , où  $U^-$  est identifié à un point. Le type d'homotopie de l'espace obtenu est alors indépendant de l'ouvert  $U$  choisi et s'appelle *l'indice de Conley* de  $\Lambda$ . On peut calculer l'indice de Conley de  $\Lambda$  en posant  $U = B_{R_0}$  ; on obtient la somme connexe du tore  $\mathbf{T}^2$  et de la sphère de dimension  $n-1$ . Ce n'est pas le type d'homotopie d'un point : on en déduit par la théorie de Conley que  $\Lambda$  n'est pas vide.

### 1.11. Dépendance continue par rapport à $\Phi$

On peut munir l'ensemble des champs de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $E$ , qui sont bornés ainsi que leurs différentielle, de la norme suivante :

$$\|\xi\| = \max \left( \sup_{x \in E} \|\xi(x)\|, \sup_{x \in E} \|D\xi(x)\| \right)$$

et faire de même pour l'ensemble des champs de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $\tilde{E}$  qui sont bornés ainsi que leur différentielle.

À tout  $2n$ -uplet  $\Phi \in \mathcal{D}_n$ , est associé un champ de vecteurs  $\xi_\Phi$  sur  $E$ , défini dans le paragraphe 1.8 et un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}_\Phi$  sur  $\tilde{E}$  défini dans le paragraphe 1.9. Les



applications

$$\Phi \longmapsto \xi_\Phi \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi} \longmapsto \tilde{\xi}_\Phi$$

sont alors continues.

Notons  $\Lambda_\Phi$  l'ensemble des points de  $\tilde{E}$  d'orbite bornée pour  $\tilde{\xi}_\Phi$ . Le réel  $R_0$  défini dans le paragraphe 1.10 pour un élément  $\Phi \in \mathcal{D}_n$  convient également pour tout  $\Phi' \in \mathcal{D}_n$  proche de  $\Phi$ . L'ensemble  $\Lambda_{\Phi'}$  est l'ensemble maximal globalement invariant par le flot contenu dans  $B_{R_0}$ . Si on munit l'ensemble des parties compactes de  $\tilde{E}$  de la topologie de Hausdorff, on en déduit que l'application

$$\Phi \longmapsto \Lambda_\Phi$$

est localement bornée et semi-continue supérieurement.

### 1.12. Étude du cas conservatif

Dans le cas où chaque application  $f_i$  préserve l'aire, le champ de vecteurs  $\xi$  est le champ de gradient de la fonction

$$H : E \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto \sum_{i=0}^{2n-1} h_i(x_i, x_{i+1}),$$

où  $h_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  est la fonction de classe  $C^2$  définie par les relations

$$\frac{\partial h_i}{\partial x}(x, x') = -g_i(x, x'), \quad \frac{\partial h_i}{\partial x'}(x, x') = g'_i(x, x'), \quad h_i(0, 0) = 0.$$

Si  $f$  préserve le centre de gravité, c'est-à-dire si

$$\int_{\mathbf{T}^2} (f - \text{Id}) d\mu = 0,$$

alors  $H$  est invariant par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  et définit donc naturellement une fonction  $\tilde{H}$  sur  $\tilde{E}$ . Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  est le champ de gradient de  $\tilde{H}$  pour la structure riemannienne héritée de celle de  $E$ .

On obtient alors le théorème de Conley-Zehnder, c'est-à-dire l'existence d'au moins trois points critiques de la fonction  $\tilde{H}$ , en montrant que  $\lambda$  a au moins la cohomologie du tore. Plus précisément en montrant que l'application

$$r^* : H^*(\Lambda_0, \mathbf{R}) \longrightarrow H^*(\Lambda, \mathbf{R})$$

induite sur l'algèbre de cohomologie d'Alexander par la projection orthogonale

$$r : \tilde{E} \longrightarrow \Lambda_0$$

est injective (voir [Co], [CE], [Flo]). On verra à la fin du chapitre 3 un résultat bien plus précis.

## CHAPITRE 2

### FONCTIONS D'ENLACEMENT

On étudie dans ce chapitre les fonctions d'enlacement. Après avoir rappelé dans les paragraphes 2.1 à 2.3 les résultats de [L1], on énonce dans le paragraphe 2.4 le résultat nouveau qui est une propriété d'uniformité. On en donne la démonstration dans les paragraphes 2.5 et 2.6.

#### 2.1. Fonction d'enlacement $L$

On considère l'application

$$\sigma : \mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \{-1, +1\},$$

qui à  $x > 0$  associe  $+1$  et qui à  $x < 0$  associe  $-1$ . On note  $[a]$  la partie entière d'un réel  $a \in \mathbf{R}$ .

La fonction

$$L : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1}),$$

est définie sur la partie ouverte

$$V = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E \mid x_i \neq 0, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}$$

de  $E$  et à valeurs entières, plus précisément à valeurs dans  $\{ -[n/2], \dots, [n/2] \}$ . Elle se prolonge par continuité à la partie ouverte

$$W = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E \mid x_i = 0 \implies x_{i-1} x_{i+1} > 0\},$$

et ne se prolonge de façon continue sur aucun ensemble plus grand (sauf si  $n = 1$  où elle est constamment nulle et se prolonge en zéro)(voir [L1]).

On peut donner une autre interprétation de la fonction  $L$ . On définit une application

$$\gamma : E \times [0, 2n] \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

de la façon suivante :

$$\gamma(x, s) = (i + 1 - s)(x_i, x_{i+1}) + (s - i)(x_{i+2}, x_{i+1}),$$

si  $s \in [i, i + 1]$  et si  $i$  est pair ;

$$\gamma(x, s) = (i + 1 - s)(x_{i+1}, x_i) + (s - i)(x_{i+1}, x_{i+2}),$$

si  $s \in [i, i + 1]$  et si  $i$  est impair.

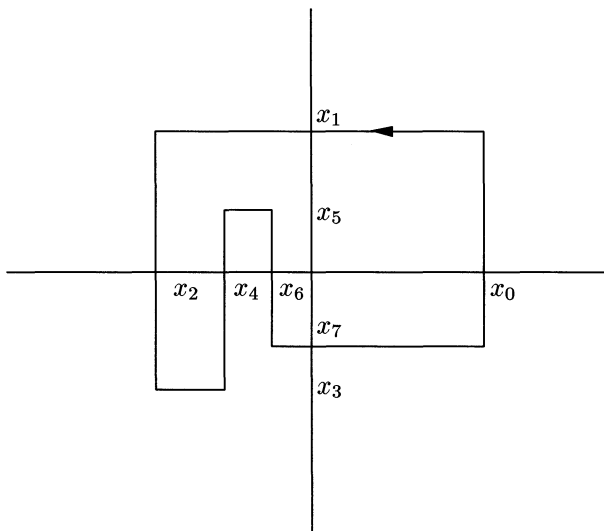


FIGURE 1

Le fait que  $x$  appartient à  $W$  signifie que la courbe fermée

$$\begin{aligned} \gamma^x : [0, 2n] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma^x(s) = \gamma(x, s) \end{aligned}$$

ne rencontre pas  $(0, 0)$  : l'indice de cette courbe par rapport à  $(0, 0)$  est exactement le nombre  $L(x)$ . Il suffit de montrer cette égalité dans le cas où  $x \in V$  car  $\gamma^x$  dépend continûment de  $x$ . La courbe est alors transverse à l'axe horizontal, et on peut écrire :

$$4L(x) = \sum_{j \in J^+} \sigma(x_{2j+1}) - \sigma(x_{2j-1}) + \sum_{j \in J^-} \sigma(x_{2j-1}) - \sigma(x_{2j+1}),$$

où

$$J^+ = \{j \in \{0, \dots, n-1\} \mid x_{2j} > 0 \text{ et } x_{2j-1} x_{2j+1} < 0\},$$

et

$$J^- = \{j \in \{0, \dots, n-1\} \mid x_{2j} < 0 \text{ et } x_{2j-1} x_{2j+1} < 0\}.$$

La première (resp. la seconde) somme n'est rien d'autre que le double du nombre d'intersection algébrique de la demi-droite orientée par  $(1, 0)$  (resp.  $(-1, 0)$ ) et de  $\gamma^x$ , c'est-à-dire de l'indice de la courbe par rapport à  $(0, 0)$ .

On définit, pour tout entier  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2]\}$ , les ensembles

$$W_j = L^{-1}(\{j\}), \quad W_j^- = \text{Int} \left( \bigcup_{k \leq j} \overline{W_k} \right) \quad \text{et} \quad W_j^+ = \text{Int} \left( \bigcup_{k \geq j} \overline{W_k} \right).$$

L'ensemble  $W_j$  ne rencontre pas le noyau de

$$\begin{aligned} r_0 : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_0, x_1), \end{aligned}$$

ainsi  $W_j \cup \{0\}$  ne contient aucun sous-espace vectoriel de dimension strictement supérieure à 2. Dans le cas où  $n$  est pair et où  $j = \pm[n/2]$ , il ne contient aucun sous-espace de dimension strictement supérieure à 1 : en effet,  $W_{[n/2]}$  est formé des suites  $(x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  qui ne s'annulent pas et telles que

$$\sigma(x_{2k}) = \sigma(x_{2k+1}) = (-1)^k, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z},$$

ou alors, telles que

$$\sigma(x_{2k}) = \sigma(x_{2k+1}) = (-1)^{k+1}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z};$$

et  $W_{-[n/2]}$  est du même type.

Si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts et si  $x - y \in W$ , l'entier

$$L_1(x, y) = L(x - y)$$

est l'indice de la courbe  $\gamma^{x-y}$  par rapport à  $(0, 0)$ ; comme  $\gamma^x$  dépend linéairement de  $x \in E$ , c'est également le nombre d'enlacement des deux courbes fermées disjointes

$$\Gamma^x = \{(\gamma^x(s), s), s \in [0, 2n]\} \quad \text{et} \quad \Gamma^{x'} = \{(\gamma^{x'}(s), s), s \in [0, 2n]\},$$

de la variété obtenue à partir de  $\mathbf{R}^2 \times [0, 2n]$  en identifiant les points  $(z, 0)$  et  $(z, 2n)$ .

## 2.2. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\xi$

Dans ce paragraphe, on fixe  $\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$ , on pose

$$f = K_n(\Phi) = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$$

et on note  $\xi$  le champ de vecteurs construit sur  $E$  au paragraphe 1.8. Le nom de fonctions d'enlacement données aux fonctions  $L$  ou  $L_1$  définies au paragraphe 2.1 provient de la remarque suivante prouvée dans [L1] :

**PROPOSITION 2.2.1.** — *Soient  $x$  et  $x'$  deux singularités distinctes de  $\xi$ . Si  $z = q_0(x)$  et  $z' = q_0(x')$  sont les points fixes de  $f$  associés respectivement à  $x$  et à  $x'$ , on a :*

$$L_1(x, x') = I(z, z').$$

Rappelons le résultat fondamental suivant, prouvé également dans [L1] :

PROPOSITION 2.2.2. — *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $E$  et si  $x - x'$  n'appartient pas à  $W$ , il existe alors un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $x^t - x'^t$  appartient à  $W$  si  $0 < |t| \leq \varepsilon$  et on a*

$$L_1(x^\varepsilon, x'^\varepsilon) < L_1(x^{-\varepsilon}, x'^{-\varepsilon}).$$

- (ii) *Si  $x \in E$  n'est pas une singularité et si  $\xi(x)$  n'appartient pas à  $W$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\xi(x^t)$  appartient à  $W$  si  $0 < |t| \leq \varepsilon$  et on a*

$$L(\xi(x^\varepsilon)) < L(\xi(x^{-\varepsilon})).$$

On déduit de cette proposition que la fonction

$$t \mapsto L_1(x^t, x'^t)$$

est définie sauf pour un ensemble fini de valeurs du temps, de cardinal au plus égal à  $2[n/2]$ , constante sur chaque intervalle de définition, décroissante, et qu'elle admet un saut en chaque point où elle n'est pas définie.

On en déduit également les résultats suivants (en posant  $W_{j+1}^+ = \emptyset$ ).

- (i) Si  $x - x'$  appartient à  $\overline{W_j^-} - \{0\}$  (resp. à  $\overline{W_j^+} - \{0\}$ ) alors  $x^t - x'^t$  appartient à  $W_j^-$  (resp. à  $W_j^+$ ).
- (ii) La valeur commune  $j^-$  (resp.  $j^+$ ) des  $L_1(x^t, x'^t)$  pour  $t \in ]0, \varepsilon]$  (resp.  $t \in [-\varepsilon, 0[$ ) donnée par la proposition 2.2.2 est le plus petit entier  $j$  tel que  $x - x' \in \overline{W_j^-}$  (resp. le plus grand entier  $j$  tel que  $x - x' \in \overline{W_j^+}$ ).
- (iii) Les parties  $W_j^-$  et  $W_{j+1}^+$  ont même frontière  $F_j$  dans  $E - \{0\}$  et on a

$$F_j = E - \{0\} - W_j^- - W_{j+1}^+.$$

- (iv) Si  $j < [n/2]$ , l'ensemble  $F_j$  est une variété topologique de codimension 1.

- (v) On a

$$P(E) - W = \bigcup_{[-n/2] \leq j < [n/2]} F_j$$

et

$$W_j = W_j^- \cap W_j^+.$$

- (vi) Si  $x - x' \in F_j$ , alors

$$x^t - x'^t \in W_j^- \quad \text{si } t > 0$$

et

$$x^t - x'^t \in W_{j+1}^+ \quad \text{si } t < 0.$$

Les conditions précédentes expriment que les familles,

$$(\mathcal{W}_j^-)_{-[n/2] \leq j \leq [n/2]} \quad \text{et} \quad (\mathcal{W}_j^+)_{-[n/2] \leq j \leq [n/2]},$$

où

$$\mathcal{W}_j^- = \{(x, x') \in E \times E \mid x - x' \in W_j^-\}$$

et

$$\mathcal{W}_j^+ = \{(x, x') \in E \times E \mid x - x' \in W_j^+\},$$

sont des filtrations du champ de vecteurs produit  $\xi \times \xi$  défini sur l'ensemble  $E \times E$  privé de la diagonale (voir Shub [Sh]).

### 2.3. Fonctions d'enlacement pour le champ de vecteurs $\tilde{\xi}$

On garde les notations du paragraphe 2.2 et on note  $\tilde{\xi}$  le champ de vecteurs construit par  $\Phi$  sur  $\tilde{E} = E/[\tau_0, \tau_1]$  au paragraphe 1.9.

Soient  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  deux points de  $\tilde{E}$ . Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in \pi^{-1}(\tilde{x})$  et tout  $x' \in \pi^{-1}(\tilde{x}')$ , on ait

$$\|x - x'\| \geq M \implies x - x' \in W_0.$$

En effet, si  $\|x - x'\|$  est assez grand, la droite engendrée par  $x - x'$  est proche du plan

$$E_0 = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}.$$

L'ensemble  $\tilde{W} \subset \tilde{E} \times \tilde{E}$  formé des couples  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \tilde{E} \times \tilde{E}$  tels que  $x - x' \in W$  pour tout  $x \in \pi^{-1}(\tilde{x})$  et tout  $x' \in \pi^{-1}(\tilde{x}')$  est donc une partie ouverte de  $\tilde{E} \times \tilde{E}$ , puisque son complémentaire est une réunion localement finie d'hypersurfaces affines de  $\tilde{E} \times \tilde{E}$ . De plus  $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$  si  $(\tilde{x}, \tilde{x}')$  appartient à  $\tilde{W}$ .

On peut définir une fonction  $\tilde{L}_1$  à valeurs entières sur  $\tilde{W}$  en posant :

$$\tilde{L}_1(\tilde{x}, \tilde{x}') = \sum_{x \in \pi^{-1}(\tilde{x})} L_1(x, x'),$$

où  $x' \in \pi^{-1}(\tilde{x}')$  est fixé, puisque la somme précédente est finie. Cette fonction est symétrique.

Comme conséquence de la proposition 2.2.1 (voir également [L1]), on obtient

**PROPOSITION 2.3.1.** — *Soient  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  deux singularités distinctes de  $\tilde{\xi}$ . Si  $\tilde{z} = \tilde{q}_0(\tilde{x})$  et  $\tilde{z}' = \tilde{q}_0(\tilde{x}')$  sont les points fixes associés respectivement à  $\tilde{x}$  et à  $\tilde{x}'$ , on a :*

$$\tilde{L}_1(\tilde{x}, \tilde{x}') = \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}').$$

Comme conséquence de la proposition 2.2.2 (voir également [L1]), on obtient :

**PROPOSITION 2.3.2.** — *Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  sont deux points distincts de  $\tilde{E}$  et si  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \notin \tilde{W}$ , il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $(\tilde{x}^t, \tilde{x}'^t)$  appartient à  $\tilde{W}$  si  $0 < |t| \leq \varepsilon$  et on a*

$$\tilde{L}_1(\tilde{x}^\varepsilon, \tilde{x}'^\varepsilon) < \tilde{L}_1(\tilde{x}^{-\varepsilon}, \tilde{x}'^{-\varepsilon}).$$

On a également, bien évidemment, l'analogue de l'assertion (ii) de la proposition 2.2.2.

Comme dans le paragraphe 2.1, on peut définir, pour tout entier  $j$ , les ensembles

$$\widetilde{W}_j = \widetilde{L}_1^{-1}(\{j\}), \quad \widetilde{W}_j^- = \text{Int} \left( \bigcup_{k \leq j} \widetilde{W}_k \right) \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_j^+ = \text{Int} \left( \bigcup_{k \geq j} \widetilde{W}_k \right).$$

Les familles

$$(\widetilde{W}_j^-)_{j \in \mathbf{Z}} \quad \text{et} \quad (\widetilde{W}_j^+)_{j \in \mathbf{Z}}$$

sont des filtrations du champ de vecteurs produit  $\widetilde{\xi} \times \widetilde{\xi}$  défini sur l'ensemble  $\widetilde{E} \times \widetilde{E}$  privé de la diagonale ; on a des propriétés analogues à celles du paragraphe 2.2.

## 2.4. Fonctions d'enlacement sur les fibrés tangents et projectifs

On va améliorer dans ce paragraphe la proposition 2.2.2. Plus précisément, on va ajouter une propriété d'uniformité, en se basant sur la démonstration donnée dans [L1]. Comme corollaire, on en déduira une proposition du même type pour le flot linéarisé.

La fonction  $L$  définie dans le paragraphe 2.1 est invariante par les homothéties de rapport non nul, de même que les ensembles  $W$ ,  $W_j$ ,  $W_j^-$ ,  $W_j^+$  et  $F_j$  ; on peut donc définir naturellement une fonction  $L$  sur l'espace projectif  $P(E)$ , des parties ouvertes  $W$ ,  $W_j$ ,  $W_j^-$ ,  $W_j^+$  et une partie fermée  $F_j$  de celui-ci, que l'on désignera du même nom pour ne pas alourdir les notations.

On munira  $P(E)$  de la distance définie par l'angle entre deux droites, et pour tout sous-espace vectoriel  $E'$  de  $E$ , on notera  $P(E')$  le sous-espace projectif formé des droites de  $E'$ .

Le flot linéarisé est défini sur le fibré tangent  $E \times E$  et induit également un flot sur le fibré projectif  $E \times P(E)$ . On notera  $(x, u)$  un élément du fibré tangent (ou projectif).

On montrera dans les paragraphes 2.5 et 2.6 le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.4.1.** — *Il existe un réel  $\delta > 0$ , ne dépendant que de  $\Phi$ , qui vérifie la propriété suivante :*

*si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $E$  et si la droite engendrée par  $x - x'$  appartient à  $F_j$ , alors la droite engendrée par  $x^1 - x'^1$  (resp.  $x^{-1} - x'^{-1}$ ) est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$  (resp. de  $W_j^-$ ).*

On en déduit les corollaires suivants :

**COROLLAIRE 2.4.2.** — *Si  $x$  est un point de  $E$  et  $u$  une droite appartenant à  $F_j$ , alors  $u^1$  (resp.  $u^{-1}$ ) est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$  (resp. de  $W_j^-$ ), où  $(x^t, u^t)$  est l'image au temps  $t$  de  $(x, u)$  par le flot linéarisé.*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que la composée du plongement

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbf{R} &\longrightarrow E \\ s &\longmapsto x + su\end{aligned}$$

par le flot au temps  $t$  est un plongement  $\gamma_t : \mathbf{R} \rightarrow E$  de classe  $C^1$  tel que

$$\gamma'_t(0) = u^t = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(s)^t - x^t}{s},$$

puis d'utiliser la proposition 2.4.1.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.3.** — *Si  $x$  est un point de  $E$  qui n'est pas une singularité de  $\xi$ , tel que la droite engendrée par  $\xi(x)$  appartienne à  $F_j$ , alors la droite engendrée par  $\xi(x^1)$  (resp.  $\xi(x^{-1})$ ) est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$  (resp. de  $W_j^-$ ).*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent, puisque l'image par le flot linéarisé de  $(x, \xi(x))$  est  $(x^t, \xi(x^t))$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.4**

- (i) *Si  $x$  et  $x'$  sont deux points de  $E$  et si  $x^t - x'^t \in W_j^-$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors la droite engendrée par  $x - x'$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$ .*
- (ii) *Soit  $(x, u)$  un point de  $E \times P(E)$  et  $(x^t, u^t)$  l'image au temps  $t$  par le flot linéarisé. Si  $u^t \in W_j^-$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors  $u$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$ .*
- (iii) *Soit  $x$  un point de  $E$ . Si  $\xi(x^t) \in W_j^-$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors la droite engendrée par  $\xi(x)$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$ .*

*Démonstration.* — On démontre l'assertion (i), les autres assertions se démontrant de façon similaire. Soit  $u$  la droite engendrée par  $x - x'$  et  $v \in F_j$  une droite telle que

$$d(u, v) = d(u, W_{j+1}^+).$$

La droite projective contenant  $u$  et  $v$  est formée de deux arcs joignant  $u$  à  $v$ , dont l'un au moins est de diamètre  $d(u, v)$ . On considère un paramétrage  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P(E)$  de cet arc, vérifiant  $\gamma(0) = u$  et  $\gamma(1) = v$ . Pour tout  $s \in ]0, 1]$ , on a

$$d(\gamma(s), v) < d(u, v).$$

On peut trouver un chemin  $s \mapsto x(s)$  dans  $E$ , issu de  $x'$ , tel que  $x - x(s)$  engendre  $\gamma(s)$ . On sait, grâce à la proposition 2.2.2 que

$$x^{-1} - x(1)^{-1} \in W_{j+1}^+,$$

et par hypothèse que

$$x^{-1} - x(0)^{-1} \in W_j^-.$$

Il existe donc  $s_0 \in [0, 1[$  tel que

$$x^{-1} - x(s_0)^{-1} \in F_j.$$



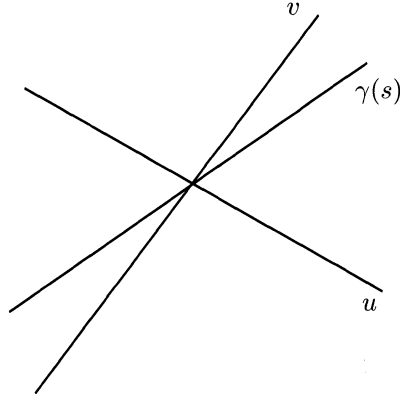


FIGURE 2

La proposition 2.4.1 nous dit que la droite  $\gamma(s_0)$  engendrée par  $x - x(s_0)$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$ . On en déduit

$$d(u, v) > d(\gamma(s_0), v) \geq \delta.$$

□

De la même manière on démontre :

#### COROLLAIRE 2.4.5

- (i) Si  $x$  et  $x'$  sont deux points de  $E$  et si  $x^t - x'^t \in W$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors la droite engendrée par  $x - x'$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $P(E) - W$ .
- (ii) Soit  $(x, u)$  un point de  $E \times P(E)$  et  $(x^t, u^t)$  l'image au temps  $t$  par le flot linéarisé. Si  $u^t \in W$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors  $u$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $P(E) - W$ .
- (iii) Soit  $x$  un point de  $E$ . Si  $\xi(x^t) \in W$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , alors la droite engendrée par  $\xi(x)$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $P(E) - W$ .

Avant de donner la preuve de la proposition 2.4.1, remarquons, en utilisant le caractère  $\mathbf{Z}^2$ -périodique des applications  $g_i - g_i^*$  et  $g'_i - g'^*_i$ , qu'il existe deux réels  $\alpha > 0$  et  $M > 0$  tels que, pour tout  $i \in \mathbf{Z}$  et pour tout  $(x, x') \in \mathbf{R}^2$ , on ait les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha \leq (-1)^i \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x, x') \leq M, \\ \alpha \leq (-1)^{i+1} \frac{\partial g'_i}{\partial x}(x, x') \leq M, \\ \left| \frac{\partial g_i}{\partial x}(x, x') \right| \leq M, \\ \left| \frac{\partial g'_i}{\partial x'}(x, x') \right| \leq M; \end{cases}$$

et tels que pour tout  $x \in E$  on ait

$$\|D\xi(x)\| \leq M.$$

## 2.5. Démonstration du lemme fondamental

Soient  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  et  $x' = (x'_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  deux éléments distincts de  $E$ , tels que  $x - x' \notin W$ . Notons  $u$  la droite engendrée par le vecteur  $x - x'$ , et plus généralement  $u_t$  la droite engendrée par  $x^t - x'^t$ .

LEMME 2.5.1. — *Supposons que*

$$\begin{aligned} x_i - x'_i &\neq 0 \\ x_{i+1} - x'_{i+1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{i+l} - x'_{i+l} &= 0 \\ x_{i+l+1} - x'_{i+l+1} &\neq 0. \end{aligned}$$

*Il existe alors des constantes  $a_r$  et  $b_r$ ,  $r \in \{0, \dots, [l/2]\}$ , strictement positives, et un réel  $\varepsilon \in ]0, 1]$  ne dépendant que de  $u$ , de  $\alpha$  et de  $M$ , tels que, pour tout  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] - \{0\}$ , on ait*

$$a_r \|x - x'\| |t^r| \leq \sigma_r \sigma(t^r) (x_{i+r}^t - x'_{i+r}{}^t)$$

*et*

$$b_r \|x - x'\| |t^r| \leq \sigma'_r \sigma(t^r) (x_{i+l+1-r}^t - x'_{i+l+1-r}{}^t),$$

*où*

$$\sigma_r = \sigma(x_i - x'_i) (-1)^{ri+r(r+1)/2}$$

*et*

$$\sigma'_r = \sigma(x_{i+l+1} - x'_{i+l+1}) (-1)^{r(i+l+1)+r(r+1)/2}.$$

*De plus, si  $l = 2m - 1$  est impair et si  $\sigma_m$  et  $\sigma'_m$  sont égaux, il existe  $c > 0$  ne dépendant que de  $u$  de  $\alpha$  et de  $M$  tel que*

$$c \|x - x'\| |t^m| \leq \sigma_m \sigma(t^m) (x_{i+m}^t - x'_{i+m}{}^t).$$

*Démonstration.* — Nous allons nous limiter au cas  $t > 0$ , l'autre cas se traitant de façon similaire, et montrer par récurrence sur  $s \in \{0, \dots, [l/2]\}$  la propriété suivante :

(P<sub>s</sub>). — *Il existe des réels positifs  $a_r$  et  $b_r$ ,  $0 \leq r \leq s$ , ne dépendant que de  $u$ , de  $\alpha$ , et de  $M$ , et pour tout  $\eta > 0$ , un réel  $\varepsilon > 0$  ne dépendant que de  $u$ , de  $\alpha$ , de  $M$  et de  $\eta$ , tels que si  $t \in ]0, \varepsilon]$  et si  $r \in \{0, \dots, s\}$ , alors :*

$$\begin{aligned} a_r \|x - x'\| t^r &\leq \sigma_r (x_{i+r}^t - x'_{i+r}{}^t), \\ b_r \|x - x'\| t^r &\leq \sigma'_r (x_{i+l+1-r}^t - x'_{i+l+1-r}{}^t), \end{aligned}$$

*et tels que*

$$|x_j^t - x'_j{}^t| \leq \eta \|x - x'\| t^s,$$

si  $j \in \{i + s + 1, \dots, i + j - s\}$ .

Puisque la norme de  $D\xi(x)$  est uniformément bornée par  $M$ , le lemme de Gronwall nous dit que pour tout  $t \in \mathbf{R}$  on a

$$\|x^t - x'^t - x + x'\| \leq \|x - x'\| (e^{M|t|} - 1),$$

et donc qu'il existe une constante  $M'$  dépendant de  $M$ , telle que pour tout  $t \in [-1, 1]$  on a

$$\|x^t - x'^t - x + x'\| \leq \|x - x'\| M' t.$$

La condition  $(P_0)$  est donc vraie si on prend

$$a_0 = \frac{|x_i - x'_i|}{2 \|x - x'\|}, b_0 = \frac{|x_{i+l+1} - x'_{i+l+1}|}{2 \|x - x'\|},$$

et

$$\varepsilon = \inf \left( 1, \frac{a_0}{M'}, \frac{b_0}{M'}, \frac{\eta}{M'} \right).$$

Supposons maintenant que  $1 \leq s \leq [l/2]$  et que  $(P_{s-1})$  soit vraie. Considérons les réels  $a_0, \dots, a_{s-1}, b_0, \dots, b_{s-1}$  et le réel  $\varepsilon$  associé à

$$\eta' = \inf \left( 1, \frac{\alpha a_{s-1}}{6M}, \frac{\alpha b_{s-1}}{6M}, \frac{\eta s}{4M} \right).$$

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_s(x_{i+s}^t - x'_{i+s}{}^t) &= \sigma_s g'_{i+s-1}(x_{i+s-1}^t, x_{i+s}^t) - \sigma_s g'_{i+s-1}(x'_{i+s-1}{}^t, x'_{i+s}{}^t) \\ &\quad - \sigma_s g_{i+s}(x_{i+s}^t, x_{i+s+1}^t) + \sigma_s g_{i+s}(x'_{i+s}{}^t, x'_{i+s+1}{}^t), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_s(x_{i+s}^t - x'_{i+s}{}^t) &= \sigma_s g'_{i+s-1}(x_{i+s-1}^t, x_{i+s}^t) - \sigma_s g'_{i+s-1}(x'_{i+s-1}{}^t, x'_{i+s}{}^t) \\ &\quad + \sigma_s g'_{i+s-1}(x'_{i+s-1}{}^t, x_{i+s}^t) - \sigma_s g'_{i+s-1}(x_{i+s-1}^t, x'_{i+s}{}^t) \\ &\quad - \sigma_s g_{i+s}(x_{i+s}^t, x_{i+s+1}^t) + \sigma_s g_{i+s}(x'_{i+s}{}^t, x'_{i+s+1}{}^t) \\ &\quad - \sigma_s g_{i+s}(x_{i+s}^t, x'_{i+s+1}{}^t) + \sigma_s g_{i+s}(x'_{i+s}{}^t, x'_{i+s+1}{}^t). \end{aligned}$$

La première ligne est positive et majorée par

$$\alpha a_{s-1} t^{s-1} \|x - x'\|,$$

et la valeur absolue de chacune des autres lignes est majorée par

$$M \eta' t^{s-1} \|x - x'\|.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} \sigma_s(x_{i+s}^t, x'_{i+s}{}^t) \geq \|x - x'\| (\alpha a_{s-1} t^{s-1} - 3M \eta' t^{s-1}) \geq \|x - x'\| \frac{\alpha a_{s-1}}{2} t^{s-1},$$

puis

$$\sigma_s(x_{i+s}^t - x'_{i+s}{}^t) \geq \|x - x'\| \frac{\alpha a_{s-1}}{2s} t^s.$$

De façon analogue on montre que

$$\sigma'_s(x_{i+l+1-s}^t - x_{i+l+1-s}'^t) \geq \|x - x'\| \frac{\alpha b_{s-1}}{2s} t^s.$$

De l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_s(x_j^t - x_j'^t) &= \sigma_s g'_{j-1}(x_{j-1}^t, x_j^t) - \sigma_s g'_{j-1}(x_{j-1}'^t, x_j'^t) \\ &\quad + \sigma_s g'_{j-1}(x_{j-1}'^t, x_j^t) - \sigma_s g'_{j-1}(x_{j-1}^t, x_j'^t) \\ &\quad - \sigma_s g_j(x_j^t, x_{j+1}^t) + \sigma_s g_j(x_j^t, x_{j+1}'^t) \\ &\quad - \sigma_s g_j(x_j^t, x_{j+1}'^t) + \sigma_s g_j(x_j'^t, x_{j+1}'^t) \end{aligned}$$

et du fait que la norme de chaque ligne est majorée par

$$M \eta' t^{s-1} \|x - x'\|,$$

on obtient

$$|x_j^t - x_j'^t| \leq \eta' t^s \|x - x'\|,$$

si  $j \in \{i + s + 1, \dots, i + l - s\}$ .

La proposition  $(P_s)$  est donc vraie, il suffit de prendre

$$a_s = \frac{\alpha a_{s-1}}{2s}, \quad b_s = \frac{\alpha b_{s-1}}{2s},$$

et de choisir le nombre  $\varepsilon$  associé à  $\eta'$  par  $(P_{s-1})$ . On vérifie que  $a_s$  et  $b_s$  ne dépendent que de  $\alpha$  de  $M$  et de  $u$ .

La propriété  $(P_{[l/2]})$  n'est rien d'autre que le lemme quand  $l$  est pair. Si  $l = 2m - 1$  est impair et si  $\sigma_m = \sigma'_m$ , on déduit le lemme de  $(P_{m-1})$ . En effet, appliquons  $(P_{m-1})$  avec

$$\eta' = \inf \left( 1, \frac{\alpha(a_{m-1} + b_{m-1})}{4M} \right),$$

on obtient cette fois-ci

$$\frac{d}{dt} \sigma_m(x_{i+m}^t, x_{i+m}'^t) \geq \|x - x'\| (\alpha a_{m-1} t^{m-1} + \alpha b_{m-1} t^{m-1} - 2\eta' M t^{m-1})$$

puis

$$\sigma_m(x_{i+m}^t, x_{i+m}'^t) \geq \|x - x'\| \frac{\alpha(a_{m-1} + b_{m-1})}{2m} t^m.$$

On pose alors

$$c = \alpha(a_{m-1} + b_{m-1})/2m,$$

et on choisit le réel  $\varepsilon$  associé à  $\eta'$  par la propriété  $(P_{m-1})$ . □

## 2.6. Démonstration de la proposition 2.4.1

Plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition 2.4.1. On peut trouver un réel  $\varepsilon > 0$  ne dépendant que de  $u$  et de  $\Phi$  tel que, pour tout intervalle maximal  $\{i + 1, \dots, i + l\}$  d'indices correspondant à des coordonnées nulles de  $x - x'$ , la conclusion du lemme 2.5.1 soit vérifiée. On connaît alors les signes de  $x_i^t - x_i'^t$  sauf éventuellement si  $i$  se trouve au milieu de l'un de ces intervalles (de longueur impaire) et si les signes de  $x_{i-1}^t - x_{i-1}'^t$  et de  $x_{i+1}^t - x_{i+1}'^t$  sont égaux. Ainsi  $x^t - x'^t$  appartient à  $W$  dès que  $t$  est non nul.

D'après le lemme précédent, on peut calculer pour chaque intervalle la somme

$$\sum_{j=i}^{i+l} (-1)^j \sigma(x_j^t - x_j'^t) \sigma(x_{j+1}^t - x_{j+1}'^t)$$

quand  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] - \{0\}$ . Elle est strictement positive (resp. strictement négative) si  $t < 0$  (resp.  $t > 0$ ), dans le cas où  $l \geq 2$  et dans le cas où  $l = 1$  et

$$(x_i - x'_i)(x_{i+2} - x'_{i+2}) < 0.$$

Elle vaut 0 dans le cas où  $l = 1$  et

$$(x_i - x'_i)(x_{i+2} - x'_{i+2}) < 0.$$

Puisque  $x - x'$  n'appartient pas à  $W$ , l'un des deux premiers cas apparaît au moins une fois : on en déduit

$$L(x^\varepsilon - x'^\varepsilon) < L(x^{-\varepsilon} - x'^{-\varepsilon}).$$

En particulier, si  $x - x' \in F_j$  et si  $t \in ]0, \varepsilon[$ , il existe  $j_- \leq j$  et  $j_+ > j$  tel que

$$x^t - x'^t \in W_{j_-}^- \quad \text{et} \quad x^{-t} - x'^{-t} \in W_{j_+}^+.$$

Montrons maintenant que la distance de la droite engendrée par  $x^\varepsilon - x'^\varepsilon$  à  $P(E) - W$  est minorée par un nombre  $\delta_u$  ne dépendant que de  $u$  (et de  $\Phi$ ). Notons  $I$  l'ensemble des indices pour lesquels le signe de  $x_i^t - x_i'^t$  est indéterminé. Si

$$\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E - W$$

est de norme 1, il existe au moins un entier  $i \notin I$  tel que  $\hat{x}_i$  s'annule ou ait un signe contraire à  $x_i^\varepsilon - x_i'^\varepsilon$ . On a donc

$$\left\| \hat{x} - \frac{x^\varepsilon - x'^\varepsilon}{\|x^\varepsilon - x'^\varepsilon\|} \right\| \geq \frac{|x_i^\varepsilon - x_i'^\varepsilon|}{\|x^\varepsilon - x'^\varepsilon\|} \geq \frac{M_u \|x - x'\|}{(1 + M') \|x - x'\|},$$

où  $M_u$  ne dépend que de  $u$  (et de  $\Phi$ ) : on a bien le résultat désiré.

Comme les applications  $x \mapsto x^t$  sont uniformément lipschitziennes, pour  $t \in [-1, 1]$ , il existe un réel  $\delta'_u < \pi/2$ , ne dépendant que de  $\delta_u$  (et de  $\Phi$ ), tel que pour tout triplet  $(\hat{x}, \hat{x}', \hat{x}'') \in E^3$ , si les vecteurs  $\hat{x}' - \hat{x}$  et  $\hat{x}'' - \hat{x}$  ont même norme et font un angle  $\leq \delta'_u$ , alors l'angle des vecteurs  $\hat{x}'^\varepsilon - \hat{x}^\varepsilon$  et  $\hat{x}''^\varepsilon - \hat{x}^\varepsilon$  est  $\leq \delta_u/2$ . En particulier, si  $\hat{x}' - \hat{x}$  engendre  $u$ , alors  $\hat{x}''^\varepsilon - \hat{x}^\varepsilon \in W_j^-$ .

Puisque  $F_j$  est compact, il existe un réel  $\delta$  tel que tout point de  $P(E)$  à une distance au plus  $\delta$  de  $F_j$  est contenu dans une boule de centre  $u \in F_j$  et de rayon  $\delta'_u$ . Si  $\hat{x}$  et  $\hat{x}'$  sont deux points distincts de  $E$  et si la droite engendrée par  $\hat{x} - \hat{x}'$  appartient à  $F_j$ , la droite engendrée par  $\hat{x}^{-1} - \hat{x}'^{-1}$  (qui appartient à  $W_{j+1}^+$ ) est donc à une distance au moins  $\delta$  de  $F_j$  et donc à une distance au moins  $\delta$  de  $W_j^-$ . Si  $\delta$  est assez petit, on sait, par les mêmes arguments, que la droite engendrée par  $\hat{x}^1 - \hat{x}'^1$  est également à une distance au moins  $\delta$  de  $W_{j+1}^+$ .  $\square$



## CHAPITRE 3

### DÉCOMPOSITION DOMINÉE DU FIBRÉ TANGENT, VARIÉTÉS INTÉGRALES

Dans le paragraphe 3.2, on utilise le corollaire 2.4.2 pour obtenir une décomposition dominée du fibré tangent. On cherche alors des variétés intégrales de cette décomposition dans les paragraphes 3.3 à 3.6. On conclura ce chapitre en montrant que l'ensemble  $\Lambda$  des orbites bornées de  $\tilde{\xi}$  est une réunion de tores de classe  $C^1$ .

#### 3.1. Matrices de Jacobi

L'élément essentiel dans la démonstration de la proposition 2.4.1, en particulier de la décroissance de la fonction

$$(x, u) \mapsto L(u)$$

le long des orbites du flot linéarisé (illustrée dans le corollaire 2.4.2), est le fait que chaque matrice

$$D\xi(x) = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2n-1}$$

est tridiagonale cyclique et symétrique par signe, autrement dit :

- $a_{i,j}$  est nul si  $j$  est différent de  $i, i-1, i+1$  modulo  $2n$ ,
- $\sigma(a_{i,i+1}) = \sigma(a_{i+1,i})$  si  $0 \leq i < 2n-1$ ,
- $\sigma(a_{2n-1,0}) = \sigma(a_{0,2n-1})$ .

Le corollaire 2.4.2 appliqué au champ de vecteurs linéaire  $\xi^*$  défini au paragraphe 1.9, nous dit que le flot

$$(x, t) \mapsto e^{tA^*} x$$

admet une filtration sur  $P(E)$ , où

$$A^* = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2n-1}$$

est la matrice définie ainsi :

$$\begin{cases} a_{i,j} = (-1)^{i+1} & \text{si } j = i+1 \text{ modulo } 2n, \\ a_{i,j} = (-1)^i & \text{si } j = i-1 \text{ modulo } 2n, \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est vrai plus généralement pour n'importe quelle matrice  $A$  d'ordre  $m$  tridiagonale cyclique et symétrique par signe ; la fonction définissant cette filtration étant explicite et dépendant des signes  $\sigma(a_{i,i+1})$  (voir [L1]). Un cas déjà connu est celui



des matrices de Jacobi, où les signes  $\sigma(a_{i,i+1})$  sont positifs et où la matrice est symétrique. Utilisant cette filtration, on sait décomposer le spectre de la matrice. Si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres de  $A$ , ordonnées et comptées avec leur ordre de multiplicité, on a les inégalités :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \dots < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k+1} < \dots$$

(voir Van Moerbeke [Mo] ou Angenent [An1]).

On pourrait diagonaliser directement la matrice  $A^*$  écrite plus haut et montrer que les valeurs propres s'écrivent

$$\mu_j = 2 \sin j\pi/n, j \in \{ -[n/2], \dots, [n/2] \},$$

que le sous-espace propre associé à  $\mu_j$  est contenu dans  $W_j \cup \{0\}$ , et qu'il est de dimension 2, excepté si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , où il est de dimension 1. On donnera une démonstration dynamique, comme pour les matrices de Jacobi, de cette décomposition spectrale, dans le paragraphe suivant.

### 3.2. Existence d'une décomposition dominée du fibré tangent

Nous prouverons dans ce paragraphe le résultat suivant :

#### PROPOSITION 3.2.1

- (i) Pour tout  $x \in E$ , l'ensemble  $E_j(x)$ , formé du vecteur nul de  $E$  et des vecteurs  $u \in E$  tels que l'orbite de  $(x, u)$  par le flot linéarisé soit contenue dans  $E \times W_j$ , est un sous-espace vectoriel de  $E$ ;
- (ii) la dimension de  $E_j(x)$  est égale à 1 si  $n$  est pair et si  $j = \pm[n/2]$ ;
- (iii) la dimension de  $E_j(x)$  est égale à 2 dans les autres cas;
- (iv) on a la décomposition

$$E = \bigoplus_{[n/2] \leq j \leq [n/2]} E_j(x);$$

- (v) on a

$$E_j(\tau_0(x)) = E_j(\tau_1(x)) = E_j(x);$$

- (vi) l'image au temps  $t$  de  $\{x\} \times E_j(x)$  par le flot linéarisé est  $\{x^t\} \times E_j(x^t)$ ;
- (vii) chaque application  $x \mapsto E_j(x)$  est continue pour la topologie usuelle des grassmanniennes;
- (viii) il existe des réels  $C > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , ne dépendant que de  $\Phi$ , tels que si  $u \in E_j(x)$ ,  $u' \in E_{j'}(x)$  sont de norme 1, et si  $j < j'$ , alors

$$\frac{\|u'^t\|}{\|u^t\|} \leq C\lambda^t \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où  $(x^t, u^t)$  et  $(x^t, u'^t)$  sont les images respectives au temps  $t$  de  $(x, u)$  et  $(x, u')$  par le flot linéarisé.

*Démonstration.* — La démonstration est du même type que celle donnée par Ruelle dans [Ru] et se fait en plusieurs étapes. L'élément principal est l'utilisation du birapport entre quatre droites, suivant une idée de Garret Birkhoff [Bi]. Pour tout  $x \in E$ , on définit les ensembles

$$P_j(x), P_j^-(x), P_j^+(x)$$

formés des droites  $u \in P(E)$  telles que l'orbite de  $(x, u)$  par le flot linéarisé soit entièrement contenue respectivement dans

$$E \times W_j, E \times W_j^-, E \times W_j^+.$$

Les propriétés suivantes sont évidentes :

- les ensembles  $P_j(x), P_j^-(x), P_j^+(x)$  sont fermés ;
- on a

$$P_j(\tau_0(x)) = P_j(\tau_1(x)) = P_j(x),$$

et des égalités analogues pour  $P_j^-(x)$  et  $P_j^+(x)$  ;

- on a

$$P_j(x) = P_j^-(x) \cap P_j^+(x);$$

- l'image au temps  $t$  par le flot linéarisé de  $\{x\} \times P_j(x)$  est  $\{x^t\} \times P_j(x^t)$ , de même pour les autres ensembles.

Pour montrer la proposition, il reste à montrer :

- que les ensembles  $P_j(x)$  sont des sous-espaces projectifs  $P_j(x) = P(E_j(x))$  de  $P(E)$  ;
- que les sous-espaces vectoriels  $E_j(x)$  ont les dimensions demandées dans la proposition ;
- que  $E$  est somme directe des  $E_j(x)$  ;
- que la propriété d'expansivité (viii) est satisfaite ;

en effet, les applications

$$x \mapsto P_j(x), \quad x \mapsto P_j^-(x), \quad x \mapsto P_j^+(x)$$

étant semi-continues supérieurement pour la distance de Hausdorff, seront nécessairement continues.

Nous allons commencer par démontrer la propriété d'expansivité.

LEMME 3.2.2. — *Il existe des réels  $C > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , ne dépendant que de  $\Phi$ , tels que pour tous vecteurs  $u$  et  $u'$  de  $E$  de norme 1 dont les droites engendrées sont respectivement dans  $P_j^-(x)$  et dans  $P_{j+1}^+(x)$ , on a*

$$\frac{\|u^t\|}{\|u^t\|} \leq C\lambda^t \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où  $(x^t, u^t)$  et  $(x^t, u'^t)$  sont les images respectives au temps  $t$  de  $(x, u)$  et  $(x, u')$  par le flot linéarisé.

*Démonstration.* — Fixons  $x \in E$  et notons  $\{x^t\} \times U^t$  l'image de  $\{x\} \times U$  par le flot linéarisé pour toute partie  $U$  de  $P(E)$ . Considérons deux droites  $u \in P_j^-(x)$  et  $u' \in P_{j+1}^+(x)$ , où  $-[n/2] \leq j < [n/2]$ .

La droite projective passant par  $u$  et  $u'$  définit deux arcs ouverts joignant  $u$  à  $u'$ , on en choisit un que l'on note  $\gamma$ . Si on écrit  $d_t(v, v')$  pour le logarithme du birapport des quatre droites  $(u^t, v, v', u'^t)$ , on obtient une distance  $d_t$  sur  $\gamma^t$  qui est invariante par le flot (voir [Bi]) :

$$d_t(v^t, v'^t) = d_0(v, v'),$$

On ne confondra pas ces distances avec la distance  $d$  définie par les angles.

L'arc  $\gamma^t$  rencontrant

$$F_j = P(E) - W_j^- \cup W_{j+1}^+,$$

on peut considérer le point  $v_t$  de  $F_j \cap \gamma^t$  le plus proche (pour la paramétrage de l'arc) de  $u'^t$ . En écrivant  $(x^{t+s}, v_t^s)$  pour l'image de  $(x^t, v_t)$  au temps  $s$  par le flot linéarisé, on définit ainsi  $v_t^s$ , pour  $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ . Le corollaire 2.4.2 nous dit que  $v_t^s$  est dans  $W_j^-$  si  $s > 0$ , et donc plus proche de  $u'^{s+t}$  que  $v_{s+t}$ ; de plus, l'arc joignant  $v_{s+t}$  à  $v_t^s$  est formé des points  $u_{t+v}^{s-v}$ ,  $v \in [0, s]$ , et donc contenu dans  $W_j^-$  sauf à l'extrémité  $v_{s+t}$ .

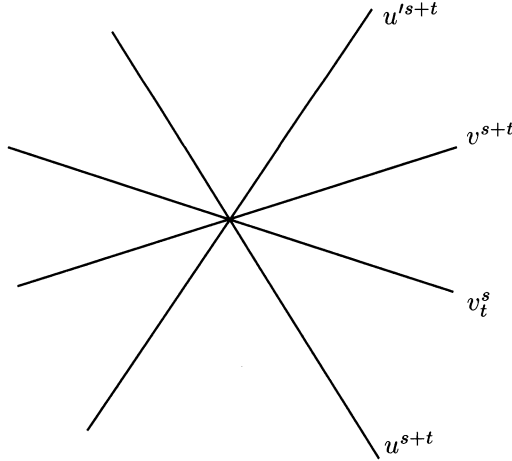


FIGURE 1

Plus précisément le corollaire 2.4.4 nous dit que les angles

$$d(v_t^1, v_{t+1}), d(v_{t+1}, u'^{t+1}) \quad \text{et} \quad d(u'^{t+1}, u^{t+1})$$

sont minorés par une constante  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\Phi$ . L'angle  $d(u'^{t+1}, v_t^1)$  est également minoré par une constante  $\delta' > 0$ , qui ne dépend que de  $\Phi$ , puisque  $d(u^t, v_t) \geq \delta$ , et puisque les différentielles  $D\xi(x')$  sont uniformément bornées pour

$x' \in E$ . On en déduit que le birapport entre les droites  $u^{t+1}, v_t^1, v_{t+1}, u'^{t+1}$  est uniformément minoré : il existe donc un réel  $\eta > 0$ , ne dépendant que de  $\Phi$ , tel que

$$d_{t+1}(v_t^1, v_{t+1}) \geq \eta.$$

Les points  $u', v_0, v_{-1}^1, \dots, v_{-k}^k, u$  se placent dans cet ordre sur  $\gamma$ . On vient de montrer que la distance  $d_0(v_0, v_{-k}^k)$  est supérieure à  $k\eta$  : on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{-k}^k = u.$$

On sait également que l'arc ouvert qui joint  $v_0$  à  $v_{-k}^k$  est contenu dans  $W_j^-$  : on en déduit que  $\gamma$  ne rencontre  $F_j$  qu'au point  $v_0$ .

Soient  $\hat{u}$  et  $\hat{u}'$  deux vecteurs unitaires engendrant respectivement  $u$  et  $u'$ , soient  $(x^t, \hat{u}^t)$  et  $(x^t, \hat{u}'^t)$  les images par le flot linéarisé. L'inégalité

$$d_k(v_0^k, v_k) \geq k\eta \quad \text{pour tout entier } k \geq 0,$$

et la minoration uniforme par  $\delta$  des angles

$$d(u^k, v_k), d(v_k, u'^k) \quad \text{et} \quad d(u'^k, u^k),$$

entre les trois droites  $u^k, u'^k$  et  $v_k$  impliquent qu'il existe  $C > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  ne dépendant que de  $\Phi$  tels que, pour tout entier  $k \geq 0$ , on ait

$$\frac{\|\hat{u}'^k\|}{\|\hat{u}^k\|} \leq C\lambda^k, \quad \frac{\|\hat{u}^{-k}\|}{\|\hat{u}'^{-k}\|} \leq C\lambda^k.$$

On a le même résultat pour  $t \geq 0$  réel au lieu de  $k \geq 0$  entier (quitte à changer la constante  $C$ ) puisque les différentielles  $D\xi(x')$  sont uniformément bornées pour  $x' \in E$ .  $\square$

**LEMME 3.2.3.** — *Les ensembles  $P_j, P_j^-$  et  $P_j^+$ , valeurs communes respectives de  $P_j(x), P_j^-(x)$  et  $P_j^+(x)$  dans le cas du champ de vecteurs  $\xi^*$ , sont des sous-espaces projectifs de  $P(E)$ . Si on écrit*

$$P_j = P(E_j), \quad P_j^- = P(E_j^-), \quad P_j^+ = P(E_j^+),$$

*la dimension de  $E_j$  est 1 si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , la dimension est 2 dans le cas contraire. Enfin, on a*

$$E_j^- = \bigoplus_{- [n/2] \leq l \leq j} E_l \quad \text{et} \quad E_j^+ = \bigoplus_{j \leq l \leq [n/2]} E_l.$$

**Démonstration.** — La matrice  $A^*$  associée à  $\xi^*$ , étant symétrique, est diagonalisable. On considère une base  $(e_i)_{0 \leq i \leq 2n-1}$  de vecteurs propres de  $A^*$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , la droite engendrée par  $e_i$  est fixe et donc contenue dans un ensemble  $P_j$ . On note  $E_j$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de base dont la droite associée est dans  $P_j$ .

Commençons par montrer que  $P(E_j)$  est contenu dans  $P_j$ . Comme  $P(E_j)$  est invariant par le flot, il suffit de montrer qu'il est contenu dans  $W_j$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une droite  $u' \in P(E_j) - W_j^+$  (le cas où  $u' \in P(E_j) - W_j^-$  se traitant de façon similaire). Toute droite  $u$  de l'ensemble  $\omega$ -limite de  $u'$  appartient alors à  $P_{j-1}^- \cap P(E_j)$ . On considère un vecteur unitaire  $\hat{u}$  engendrant  $u$  et on note  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$  les vecteurs de la base propre qui engendrent  $E_j$ . On peut écrire

$$\hat{u} = \sum_{l=1}^k \alpha_l e_{j_l}.$$

D'après le lemme 3.2.2, on sait que pour tout  $l \in \{1, \dots, k\}$  on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|e_{j_l}^t\|}{\|\hat{u}^t\|} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|\hat{u}^t\|}{\|\hat{u}^t\|} = 0,$$

puisque

$$\|\hat{u}^t\| \leq \sum_{l=1}^k |\alpha_l| \|e_{j_l}^t\|,$$

ce qui est absurde.

Le sous-espace vectoriel  $E_j$ , étant contenu dans  $W_j \cup \{0\}$ , est de dimension au plus un si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , au plus deux dans les autres cas. Puisque  $E$  est somme directe des  $E_j$ , la somme des dimensions de ces sous-espaces doit être égale à  $2n$  : on en déduit que  $E_j$  est de dimension un si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , de dimension deux dans les autres cas.

Si on pose

$$E_j^- = E_{-[n/2]} + \dots + E_j \quad \text{et} \quad E_j^+ = E_j + \dots + E_{[n/2]},$$

on peut montrer de façon similaire qu'on a

$$P(E_j^-) \subset P_j^- \quad \text{et} \quad P(E_j^+) \subset P_j^+.$$

Finalement, on déduit de la propriété d'expansivité démontrée dans le lemme 3.2.2, et de la décomposition

$$E = \bigoplus_{-[n/2] \leq j \leq [n/2]} E_j,$$

que les inclusions

$$P(E_j) \subset P_j, \quad P(E_j^-) \subset P_j^- \quad \text{et} \quad P(E_j^+) \subset P_j^+$$

sont en fait des égalités. □

LEMME 3.2.4. — Les ensembles  $P_j(x)$ ,  $P_j^-(x)$  et  $P_j^+(x)$ , sont des sous-espaces projectifs de  $P(E)$ . Si on écrit

$$P_j(x) = P(E_j(x)), \quad P_j^-(x) = P(E_j^-(x)), \quad P_j^+(x) = P(E_j^+(x)),$$

la dimension de  $E_j(x)$  est 1 si  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ , la dimension est 2 dans le cas contraire. Enfin, on a

$$E_j^-(x) = \bigoplus_{-[n/2] \leq l \leq j} E_l(x) \quad \text{et} \quad E_j^+(x) = \bigoplus_{j \leq l \leq [n/2]} E_l(x).$$

*Démonstration.* — Fixons  $x \in E$ . On va démontrer que les ensembles  $P_j^-(x)$  et  $P_j^+(x)$  sont des sous-espaces projectifs de  $P(E)$  de même dimension respectivement que  $P_j^-$  et  $P_j^+$ . Cela est clair pour  $P_{[n/2]}^-$  et  $P_{-[n/2]}^+$  qui sont tous deux égaux à  $P(E)$ .

Fixons  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2] - 1\}$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , notons  $\{x\} \times P^k$  l'image au temps  $k$  de  $\{x^{-k}\} \times P_j^-$  et  $\{x\} \times P'^k$  l'image au temps  $-k$  de  $\{x^k\} \times P_{j+1}^+$ . Choisissons une valeur d'adhérence  $P$  de la suite  $(P^k)_{k \geq 0}$  (pour la distance de Hausdorff) et une valeur d'adhérence  $P'$  de la suite  $(P'^k)_{k \geq 0}$ . Ce sont des sous-espaces projectifs de même dimension que  $P_j^-$  et  $P_{j+1}^+$  qui sont contenus respectivement dans  $P_j^-(x)$  et  $P_{j+1}^+(x)$ .

Les ensembles  $P$  et  $P'$  étant disjoints, les sous-espaces vectoriels associés sont supplémentaires. De la propriété d'expansivité démontrée au lemme 3.2.2 et de la décomposition de  $E$  en somme de deux sous-espaces que l'on vient d'obtenir, on déduit qu'on a

$$P = P_j^-(x) \quad \text{et} \quad P' = P_{j+1}^+(x).$$

Puisque  $P_j(x)^-$  (resp.  $P_j(x)^+$ ) est un sous-espace projectif de même dimension que  $P_j^-$  (resp.  $P_j^+$ ), on en déduit que chaque ensemble

$$P_j(x) = P_j^-(x) \cap P_j^+(x)$$

est un sous-espace projectif de même dimension que  $P_j$ . La démonstration du lemme est achevée : on écrit

$$P_j(x) = P(E_j(x)).$$

□

REMARQUE. — L'assertion (v) de la proposition 3.2.1 permet de définir naturellement  $E_j(\tilde{x})$  pour  $\tilde{x} \in \tilde{E}$  en choisissant  $x \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}\})$  et en posant

$$E_j(\tilde{x}) = E_j(x).$$

On a un résultat analogue à la proposition 3.2.1 dans l'espace quotient  $\tilde{E}$ .

### 3.3. Variétés intégrales des champs d'espaces $x \mapsto E_j^-(x)$ et $x \mapsto E_j^+(x)$

Si  $E'$  et  $E''$  sont deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$ , on identifiera, pour ne pas alourdir les notations, une application

$$\psi : E' \longrightarrow E''$$

et son graphe

$$G_\psi = \{x + \psi(x), x \in E'\}.$$

On notera  $p_j^-$  et  $p_j^+$  les projections orthogonales respectives sur les sous-espaces  $E_j^-$  et  $E_j^+$  définis au paragraphe 3.2. Enfin, on posera par définition

$$E_{[n/2]+1}^+ = E_{[-n/2]-1}^- = \{0\}.$$

On définit, pour  $j \in \{[-n/2], \dots, -1\}$ , l'ensemble  $\mathcal{G}_j^-$  des applications

$$\psi : E_j^- \longrightarrow E_{j+1}^+$$

vérifiant la propriété

$$(Q_j^-) \quad \text{pour tout } (x, x') \in G_\psi^2, \quad x \neq x' \implies x - x' \in \overline{W_j^-};$$

et pour tout  $j \in \{0, \dots, [n/2]\}$ , l'ensemble  $\mathcal{G}_j^-$  des applications

$$\psi : E_j^- \longrightarrow E_{j+1}^+$$

vérifiant la propriété  $(Q_j^-)$  et qui sont invariantes par les translations  $\tau_0$  et  $\tau_1$  définies au paragraphe 1.9.

De façon analogue, on définira l'ensemble  $\mathcal{G}_j^+$  des applications

$$\psi : E_j^+ \longrightarrow E_{j-1}^-$$

vérifiant la propriété

$$(Q_j^+) \quad \text{pour tout } (x, x') \in G_\psi^2, \quad x \neq x' \implies x - x' \in \overline{W_j^+},$$

et invariantes par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  si  $j \leq 0$ . On notera également  $\mathcal{G}_j^-$  ou  $\mathcal{G}_j^+$  l'ensemble des graphes de ces applications.

Remarquons que si  $i < 0$  et si  $G \in \mathcal{G}_i^-$ , alors les graphes

$$\tau_0^k \circ \tau_1^l(G), \quad (k, l) \neq (0, 0),$$

appartiennent également à  $\mathcal{G}_i^-$  et sont disjoints deux à deux, puisque pour tout  $x \in E$ , on a

$$\tau_0^k \circ \tau_1^l(x) - x \in W_0.$$

On a une propriété analogue pour  $G \in \mathcal{G}_j^+$ , si  $j > 0$ .

L'ensemble  $\mathcal{G}_j^-$  est une partie fermée, pour la  $C^0$ -topologie (*i.e.* la topologie compacte-ouverte), de l'ensemble des applications de  $E_j^-$  dans  $E_{j+1}^+$ ; on munira  $\mathcal{G}_j^-$  de cette topologie. Puisque  $E_{j+1}^+$  est contenu dans  $W_{j+1}^+$ , il existe une constante  $M > 0$

ne dépendant que de  $n$  telle que toute application  $\psi \in \mathcal{G}_j^-$  est lipschitzienne de rapport  $M$ . Par le théorème d'Ascoli, on sait que les propriétés suivantes sont équivalentes, pour une partie  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{G}_j^-$  :

- la partie  $\mathcal{G}$  est relativement compacte ;
- il existe  $x \in E_j^-$  tel que la famille  $(\psi(x))_{\psi \in \mathcal{G}}$  soit bornée ;
- pour tout  $x \in E_j^-$ , la famille  $(\psi(x))_{\psi \in \mathcal{G}}$  est bornée ;
- il existe une partie bornée  $B$  de  $E$  rencontrant tout graphe  $G_\psi$ ,  $\psi \in \mathcal{G}$ .

On a des propriétés similaires pour  $\mathcal{G}_j^+$ .

**PROPOSITION 3.3.1.** — *L'image  $G^t$  d'un graphe  $G = G_\psi \in \mathcal{G}_j^-$  (resp.  $G \in \mathcal{G}_j^+$ ) par le flot est encore contenue dans  $\mathcal{G}_j^-$  si  $t > 0$  (resp. dans  $\mathcal{G}_j^+$  si  $t < 0$ ).*

*Démonstration.* — L'image  $G^t$ ,  $t > 0$ , d'un graphe  $G = G_\psi \in \mathcal{G}_j^-$  vérifie la propriété  $(Q_j^-)$  d'après la proposition 2.2.2. Elle est également invariante par les translations  $\tau_0$  et  $\tau_1$ , si  $j \geq 0$ . Il reste à montrer que c'est le graphe d'une application de  $E_j^-$  dans  $E_{j+1}^+$  et donc que la restriction de  $p_j^-$  à  $G^t$  est un homéomorphisme de  $G^t$  sur  $E_j^-$ . Puisque  $G^t$  vérifie la propriété  $(Q_j^-)$ , cette restriction est un homéomorphisme bilipschitzien de  $G^t$  sur son image. L'application

$$\begin{aligned} E_j^- &\longrightarrow E_j^- \\ x &\longmapsto p_j^-((x + \psi(x))^t) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme bilipschitzien de  $E_j^-$  sur  $p_j^-(G^t)$  comme composée de trois homéomorphismes bilipschitziens. Elle est donc propre. On en déduit l'égalité

$$p_j^-(G^t) = E_j^-.$$

□

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j^- \times [0, +\infty[ &\longrightarrow \mathcal{G}_j^- \\ (G, t) &\longmapsto G^t \end{aligned}$$

est continue. On a un semi-flot sur  $\mathcal{G}_j^-$  défini pour les valeurs positives du temps ; de même on a un semi-flot sur  $\mathcal{G}_j^+$  défini pour les valeurs négatives du temps. On posera

$$\widehat{\mathcal{G}}_j^- = \widehat{\mathcal{G}}_j^-(\Phi) = \{\psi \in \mathcal{G}_j^- \mid G_\psi^t \in \mathcal{G}_j^-, \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}\},$$

et

$$\widehat{\mathcal{G}}_j^+ = \widehat{\mathcal{G}}_j^+(\Phi) = \{\psi \in \mathcal{G}_j^+ \mid G_\psi^t \in \mathcal{G}_j^+, \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}\};$$

et là encore on notera  $\widehat{\mathcal{G}}_j^-$  ou  $\widehat{\mathcal{G}}_j^+$  l'ensemble des graphes de ces applications.

**PROPOSITION 3.3.2.** — *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *L'ensemble  $\widehat{\mathcal{G}}_j^-$  est une partie fermée de  $\mathcal{G}_j^-$ .*



- (ii) L'ensemble  $\widehat{\mathcal{G}}_j^-$  est formé d'applications de classe  $C^1$  ; sur cet ensemble la  $C^0$ -topologie et la  $C^1$ -topologie coïncident.
- (iii) Tout graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  est une sous-variété dont l'espace tangent en  $x$  est  $E_j^-(x)$ .
- (iv) Il existe une constante  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\Phi$ , telle que si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ , la droite engendrée par  $x' - x$  est à une distance au moins  $\delta > 0$  de  $P(E) - W_{j+1}^+$ .

*Démonstration.* — L'assertion (i) est évidente et l'assertion (iv) une conséquence immédiate du corollaire 2.4.4. Montrons maintenant les assertions (ii) et (iii).

Soit  $G = G_\psi \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ . Pour tout  $x \in G$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ , définissons  $\Lambda_x^t \subset P(E)$  de la façon suivante :

la droite  $u$  appartient à  $\Lambda_x^t$  si et seulement s'il existe deux suites  $(x_k)_{k \geq 0}$  et  $(x'_k)_{k \geq 0}$  dans  $G^t$  convergeant vers  $x^t$ , avec  $x_k \neq x'_k$ , telles que la droite engendrée par  $x'_k - x_k$  converge vers  $u$  quand  $k$  tend vers l'infini.

Fixons  $u \in \Lambda_x^0$  et notons  $(x^t, u^t)$  l'image de  $(x, u)$  par le flot linéarisé. On sait que pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , le vecteur  $u^t$  appartient à  $\Lambda_x^t$  et donc à  $\overline{W_j^-}$ , on en déduit que  $u$  appartient à l'ensemble  $P_j^-(x)$  défini au paragraphe précédent. Cela signifie que l'application  $\psi$  est différentiable et que sa différentielle en un point  $x \in E_j^-$  est l'inverse de la restriction de  $p_j^-$  à  $E_j^-(x + \psi(x))$ . On en déduit immédiatement les assertions (iii) et (iv).  $\square$

REMARQUES. — Par tout point  $x$  de  $E$  passe un graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ , il suffit en effet de prendre une valeur d'adhérence de la suite

$$((x^{-k} + E_j^-)^k)_{k \geq 0}.$$

Si l'orbite de  $x$  est bornée, l'orbite de tout graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  contenant  $x$  est relativement compacte ; c'est encore le cas, si l'orbite de  $\pi(x)$  par  $\tilde{\xi}$  est bornée et si  $j \geq 0$ . On dira par définition que  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  est un *graphe d'orbite bornée* si l'orbite totale de  $G$  par le flot est une partie relativement compacte de  $\mathcal{G}_j^-$ .

### 3.4. Propriétés de stabilité

Nous allons démontrer dans ce paragraphe des résultats de stabilité que nous utiliserons très souvent dans les chapitres suivants.

PROPOSITION 3.4.1. — Si  $\psi$  appartient à  $\widehat{\mathcal{G}}_j^-$ , et si  $\Delta\psi : E_j^- \rightarrow E_{j+1}^+$  est une application lipschitzienne de rapport  $\delta/2$  (invariante par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  dans le cas où  $j \geq 0$ ), alors on a

$$\psi + \Delta\psi \in \mathcal{G}_j^-.$$

*Démonstration.* — Soient  $x \in E_j^-$  et  $x' \in E_j^-$ . Le vecteur  $x - x'$  appartient à  $E_j^-$  et les vecteurs

$$\psi(x) - \psi(x') \quad \text{et} \quad \Delta\psi(x) - \Delta\psi(x')$$

à  $E_{j+1}^+ = E_j^{-\perp}$ . Le sinus de l'angle entre la droite engendrée par

$$\psi(x) - \psi(x') + \Delta\psi(x) - \Delta\psi(x') + x - x'$$

et la droite engendrée par

$$\psi(x) - \psi(x') + x - x'$$

est majoré par

$$\frac{\|\psi(x) - \psi(x') + \Delta\psi(x) - \Delta\psi(x') - (\psi(x) - \psi(x'))\|}{\|x - x'\|}.$$

Il est majoré par  $\delta/2$  par hypothèse. L'angle entre les deux droites est majoré par  $\delta\pi/4$ . Le vecteur

$$\psi(x) - \psi(x') + \Delta\psi(x) - \Delta\psi(x') + x - x'$$

appartient donc à  $W_j^-$ . □

On déduit de ce résultat et du théorème d'extension de Whitney [Wh], les résultats suivants (et leurs analogues pour  $\widehat{\mathcal{G}}_j^+$ ).

**PROPOSITION 3.4.2.** — Soit  $j$  un entier strictement négatif et  $X = \{x^0, \dots, x^m\}$  une partie finie de  $E$ , contenue dans un graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ . Il existe alors un réel  $\eta > 0$  tel que toute partie  $X^* = \{x^{*0}, \dots, x^{*m}\}$  de  $E$ , qui vérifie  $\|x^{*k} - x^k\| \leq \eta$  pour tout  $k \in \{0, \dots, m\}$ , soit contenue dans un graphe  $G^* \in \mathcal{G}_j^-$ .

**PROPOSITION 3.4.3.** — Soit  $j$  un entier positif ou nul et  $X = \{x^0, \dots, x^m\}$  une partie finie de  $\tilde{E}$ , telle que  $\pi^{-1}(X)$  soit contenue dans  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ . Il existe alors un réel  $\eta > 0$  tel que, si une partie  $X^* = \{x^{*0}, \dots, x^{*m}\}$  de  $\tilde{E}$  vérifie  $D(x^{*k}, x^k) \leq \eta$  pour tout  $k \in \{0, \dots, m\}$ , alors  $\pi^{-1}(X^*)$  est contenu dans un graphe  $G^* \in \mathcal{G}_j^-$ .

**PROPOSITION 3.4.4.** — Soit  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow E$  un plongement de classe  $C^1$  tel que  $\gamma(0)$  appartienne à un graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et tel que  $\gamma'(0) \in E_j^-(\gamma(0))$ . Il existe alors  $\eta > 0$ , tel que  $\gamma([- \eta, \eta])$  soit contenu dans un graphe  $G^* \in \mathcal{G}_j^-$ .

**PROPOSITION 3.4.5.** — Soit  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow E$  un plongement de classe  $C^1$  dont l'image est contenue dans un graphe  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$ . Il existe alors  $\eta > 0$ , tel que l'image de tout plongement  $\gamma^* : [-1, 1] \rightarrow E$  de classe  $C^1$  qui vérifie  $\max_{t \in [-1, 1]} \|\gamma^{*'}(t) - \gamma'(t)\| \leq \eta$ , soit contenue dans un graphe  $G^* \in \mathcal{G}_j^-$ .

### 3.5. Variétés intégrales des champs de plans $x \mapsto E_j(x)$

On note  $\mathcal{P}_j$  l'ensemble des parties non vides  $P$  de la forme

$$P = G \cap G', \quad G \in \mathcal{G}_j^-, \quad G' \in \mathcal{G}_j^+$$

et  $\widehat{\mathcal{P}}_j$  l'ensemble (invariant par le flot) des parties non vides  $P$  de la forme

$$P = G \cap G', \quad G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-, \quad G' \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+.$$

Supposons d'abord que  $n$  est impair, ou alors que  $n$  est pair et que  $j \neq \pm[n/2]$ . Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , définissons le plan vectoriel

$$E'_k = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_i = 0 \text{ si } i \neq k \text{ et } i \neq k+1 \pmod{2n}\}.$$

PROPOSITION 3.5.1. — *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Il existe une partie fermée, pour la  $C^0$ -topologie, de l'ensemble des applications continues de  $E'_k$  dans  $E'_k{}^\perp$ , tel que  $\widehat{\mathcal{P}}_j$  soit formé des graphes des éléments de cette partie.*
- (ii) *Les applications précédentes sont toutes de classe  $C^1$ ; sur l'ensemble de ces applications, la  $C^0$ -topologie et la  $C^1$ -topologie coïncident.*
- (iii) *Tout plan  $P \in \widehat{\mathcal{P}}_j$  est une sous-variété de dimension deux dont le plan tangent en  $x$  est  $E_j(x)$ .*
- (iv) *Il existe une constante  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\Phi$ , telle que si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $P \in \widehat{\mathcal{P}}_j$ , la droite engendrée par  $x' - x$  est à une distance au moins  $\delta > 0$  de  $P(E) - W_j$ .*

*Démonstration.* — Considérons  $P = G \cap G'$ , où  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et  $G' \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+$ . En tout point  $x$  de  $P$ , les espaces tangents  $E_j^-(x)$  et  $E_j^+(x)$  à  $G$  et  $G'$  s'intersectent en l'espace  $E_j(x)$  de dimension maximale égale à 2; on en déduit l'assertion (iii).

La droite vectorielle passant par deux points distincts de  $P$  est à la fois dans  $W_j^-$  et dans  $W_j^+$ , donc dans  $W_j$ . Elle est plus précisément à une distance au moins  $\delta$  de  $P(E) - W_j$ , où  $\delta$  est la constante donnée par le corollaire 2.4.5. En particulier, la restriction de

$$r_k : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_k, x_{k+1})$$

à  $P$  est un difféomorphisme bilipschitzien de  $P$  sur son image. Comme  $P$  est une partie fermée de  $E$ , l'image de  $P$  par  $r_k$  est le plan  $\mathbf{R}^2$  tout entier. L'ensemble  $P$  apparaît donc comme le graphe  $P_\psi$  d'une application continue  $\psi$  de  $E'_k$  dans  $E'_k{}^\perp$ . Comme  $r_k$  est injective sur chaque ensemble  $E_j(x)$ , cette application est en fait de classe  $C^1$ .

On peut donc identifier  $\widehat{\mathcal{P}}_j$  et un ensemble d'applications  $\psi$  de classe  $C^1$  de  $E'_k$  dans  $E'_k{}^\perp$ , sur lequel la  $C^0$ -topologie et la  $C^1$ -topologie coïncident.

Il reste à démontrer que cet ensemble d'applications est fermé pour la  $C^0$ -topologie. On considère une suite  $(P_{\psi_m})_{m \geq 0}$  et on suppose que la suite  $(\psi_m)_{m \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact vers  $\psi : E'_k \rightarrow E'^{\perp}_k$ . On peut écrire

$$P_{\psi_m} = G_m \cap G'_m,$$

où  $G_m \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et  $G'_m \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+$ . Puisque la suite  $(\psi_m)_{m \geq 0}$  est convergente, il existe une partie bornée de  $E$  qui rencontre chaque  $P_{\psi_m}$  et qui rencontre donc chaque  $G_m$  et chaque  $G'_m$ . Quitte à extraire une suite, on peut donc toujours supposer que chacune des suites  $(G_m)_{m \geq 0}$  et  $(G'_m)_{m \geq 0}$  converge respectivement vers  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et  $G' \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+$ . Le graphe de  $\psi$  coïncide avec  $P = G \cap G'$ .  $\square$

REMARQUE. — Il est facile de voir que la topologie définie naturellement sur  $\mathcal{P}_j$  par cette proposition, est indépendante de  $k$  : on munira  $\mathcal{P}_j$  de cette topologie.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $n$  est pair et où  $j = \pm[n/2]$ . On a

$$\mathcal{P}_{-[n/2]} = \mathcal{G}_{-[n/2]}^- \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{[n/2]} = \mathcal{G}_{[n/2]}^+.$$

Les éléments  $P \in \widehat{\mathcal{P}}_j$  sont alors des variétés de dimension 1. Énonçons le résultat analogue à la proposition 3.5.1 et pour cela définissons, pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , la droite

$$E''_k = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_i = 0 \text{ si } i \neq k \pmod{2n}\}.$$

PROPOSITION 3.5.2. — *On suppose que  $n$  est pair et que  $j = \pm[n/2]$ .*

- (i) *Il existe une partie fermée, pour la  $C^0$ -topologie, de l'ensemble des applications continues de  $E''_k$  dans  $E''^{\perp}_k$ , tel que  $\widehat{\mathcal{P}}_j$  soit formé des graphes des éléments de cette partie.*
- (ii) *Les applications précédentes sont toutes de classe  $C^1$  ; sur l'ensemble de ces applications, la  $C^0$ -topologie et la  $C^1$ -topologie coïncident.*
- (iii) *Tout élément  $P$  de  $\mathcal{P}_j$  est une sous-variété de dimension un dont la tangente en  $x$  est  $E_j(x)$ .*
- (iv) *Il existe une constante  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\Phi$ , telle que si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $P \in \widehat{\mathcal{P}}_j$ , la droite engendrée par  $x' - x$  est à une distance au moins  $\delta > 0$  de  $P(E) - W_j$ .*

Les éléments de  $\widehat{\mathcal{P}}_j$  seront appelés des *plans d'enlacement  $j$* . On a les propriétés suivantes :

- tout plan d'enlacement 0 est invariant par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  ;
- tout plan  $P$  d'enlacement  $j \neq 0$  est disjoint du plan d'enlacement  $\tau_0^k \circ \tau_1^l(P)$ , si  $(k, l) \neq (0, 0)$ .

Par définition, on dira qu'un plan  $P$  d'enlacement  $j$  est *d'orbite bornée* si l'orbite de  $P$  par le flot est relativement compacte dans  $\mathcal{P}_j$ . Il est facile de voir que  $P$  est d'orbite bornée si et seulement si  $P$  est l'intersection de deux graphes  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et

$G' \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+$  d'orbites bornées, ou encore s'il existe une partie bornée de  $E$  rencontrant chaque  $P^t$ .

Comme conséquence du paragraphe 3.3, on sait que par tout point  $x$  de  $E$  passe une variété  $P \in \widehat{\mathcal{P}}_j$ , si  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2]\}$ . Si l'orbite de  $x$  est bornée,  $P$  est un plan d'enlacement  $j$  d'orbite bornée.

### 3.6. Variétés intégrales dans le quotient $\widetilde{E}$

Si  $j < 0$ , l'image par le revêtement universel  $\pi : E \rightarrow \widetilde{E}$  d'un graphe  $G \in \mathcal{G}_j^-$  est le graphe d'une application de  $E_j^-$  dans le quotient  $E_{j+1}^+ / [\tau_0, \tau_1]$ ; si  $j \geq 0$ , c'est le graphe d'une application de  $E_j^- / [\tau_0, \tau_1]$  dans  $E_{j+1}^+$ . L'image de  $G \in \widehat{\mathcal{G}}_j^-$  par  $\pi$  est une variété tangente au champ  $\widetilde{x} \mapsto E_j^-(\widetilde{x})$  défini sur  $\widetilde{E}$ , variété difféomorphe à  $E_j^-$  dans le cas où  $j > 0$  et à  $E_j^- / [\tau_0, \tau_1]$  dans le cas où  $j \geq 0$ .

De même l'image par  $\pi$  d'un plan d'enlacement  $j$  est une variété tangente au champ  $\widetilde{x} \mapsto E_j(x)$  : cette variété est difféomorphe à  $\mathbf{R}$  dans le cas où  $n$  est pair et  $j = \pm[n/2]$ ; difféomorphe au tore  $\mathbf{T}^2$  si  $j = 0$ ; difféomorphe à  $\mathbf{R}^2$  dans tous les autres cas.

L'image par  $\pi$  d'un plan d'enlacement 0 est un tore plongé de classe  $C^1$ , homotope au tore  $\Lambda_0$ , que l'on appellera *tore d'enlacement 0*. On notera  $\mathcal{T}_0$  l'ensemble des tores d'enlacement 0. On a les propriétés suivantes :

- tout tore d'enlacement 0 est le graphe d'une application de classe  $C^1$  de  $E'_k / \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$  dans  $E'_k{}^\perp$ , où

$$E'_k = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_i = 0 \text{ si } i \neq k \text{ et } i \neq k+1 \pmod{2n}\};$$

- le rapport de Lipschitz des applications précédentes est majoré par une constante ne dépendant que de  $\Phi$ ;
- la  $C^1$ -topologie et la  $C^0$ -topologie coïncident sur l'ensemble des ces applications et définissent naturellement une topologie indépendante de  $k$  sur  $\mathcal{T}_0$ ;
- cette topologie coïncide également avec celle définie par la distance de Hausdorff.

Par tout point  $\widetilde{x}$  de  $\widetilde{E}$  passe un tore d'enlacement 0. Ce tore est d'orbite bornée si  $\widetilde{x}$  est d'orbite bornée. Le caractère uniformément lipschitzien des applications de  $E'_k / \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$  de  $E'_k{}^\perp$  définissant les tores d'enlacement 0 implique l'équivalence des conditions suivantes pour un tore  $T \in \mathcal{T}_0$  :

- le tore  $T$  est d'orbite bornée;
- la réunion des ensembles  $T^t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , est bornée dans  $\widetilde{E}$ ;
- le tore  $T$  est contenu dans l'ensemble  $\Lambda$  des points de  $\widetilde{E}$  d'orbite bornée;
- le tore  $T$  rencontre  $\Lambda$ .

En particulier, l'ensemble des tores d'enlacement 0 et d'orbite bornée est compact, on le note  $\mathcal{T}$ . L'ensemble  $\Lambda$  est donc la réunion des tores  $T$  de  $\mathcal{T}$ . Sur l'ensemble compact non vide  $\mathcal{T}$  on a un flot induit par  $\widetilde{\xi}$ , on étudiera dans la chapitre 5 la dynamique de ce flot et on montrera que certains de ces tores sont fixes.

## CHAPITRE 4

### ÉLÉMENTS CRITIQUES DES CHAMPS DE VECTEURS $\xi$ ET $\tilde{\xi}$

Nous étudions dans ce chapitre les éléments critiques des champs de vecteurs  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$ , c'est-à-dire les singularités et les orbites périodiques. Après avoir défini la notion importante d'ensemble non enlacé, nous montrerons que l'orbite d'un point non errant de  $\tilde{\xi}$  est tracée sur un plan d'enlacement  $j$ . Nous en déduisons que l'ensemble des points récurrents de  $\xi$  est la réunion des éléments critiques, comme pour un champ de vecteurs du plan. Nous définirons également le nombre d'enlacement de deux éléments critiques distincts de  $\xi$  et le nombre d'enlacement d'une orbite périodique de  $\xi$ . Plus généralement nous définirons le nombre d'enlacement d'une courbe de Jordan bien enlacée. Les résultats de ce chapitre seront utilisés par la suite, principalement aux chapitres 5 et 9.

#### 4.1. Ensembles bien enlacés

Nous dirons qu'une partie  $X$  de  $E$  est *bien enlacée* si, pour tout couple  $(x, x')$  de points distincts de  $X$ , le vecteur  $x' - x$  appartient à  $W$ , c'est-à-dire si la fonction

$$L_1 : (x, x') \mapsto L(x - x')$$

introduite au paragraphe 2.1 est bien définie sur  $X \times X - \Delta$ , où  $\Delta$  est la diagonale de  $E \times E$ .

Nous dirons qu'une partie  $\tilde{X}$  de  $\tilde{E}$  est *bien enlacée* si  $\pi^{-1}(X)$  est une partie bien enlacée de  $E$ . De façon équivalente,  $\tilde{X}$  est une partie bien enlacée de  $\tilde{E}$  si l'application  $\tilde{L}_1$ , introduite au paragraphe 2.3, est bien définie sur  $\tilde{X} \times \tilde{X} - \tilde{\Delta}$ , où  $\tilde{\Delta}$  est la diagonale de  $\tilde{E} \times \tilde{E}$ .

#### REMARQUES

- (i) On a défini au paragraphe 2.1 une application continue

$$\gamma : E \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

par les relations :

$$\gamma(x, s) = (i + 1 - s)(x_i, x_{i+1}) + (s - i)(x_{i+2}, x_{i+1}),$$

si  $s \in [i, i + 1]$  et si  $i$  est pair ;

$$\gamma(x, s) = (i + 1 - s)(x_{i+1}, x_i) + (s - i)(x_{i+1}, x_{i+2}),$$

si  $s \in [i, i + 1]$  et si  $i$  est impair.

Si  $X$  est une partie bien enlacée de  $E$ , alors chaque application

$$\begin{aligned} \gamma_s : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto \gamma_s(x) = \gamma(x, s) \end{aligned}$$

est injective sur  $X$  ; en particulier, chaque application

$$\begin{aligned} r_i : E &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

est injective sur  $X$ .

- (ii) Soit  $\Phi$  un élément de  $\mathcal{D}_n$  et  $\xi$  le champ de vecteurs défini sur  $E$  par  $\Phi$ . Soit  $X$  une partie bien enlacée de  $E$  invariante par le flot engendré par  $\xi$ . Si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $X$ , le vecteur  $x^t - x'^t$  est contenu dans  $W$ , quel que soit  $t \in \mathbf{R}$ . On sait, grâce au corollaire 2.4.5, qu'il existe  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\Phi$ , tel que la droite engendrée par  $x - x'$  est à une distance au moins  $\delta$  de  $P(E) - W$  (dans l'espace projectif). On en déduit que l'adhérence de  $X$  est une partie bien enlacée invariante de  $E$ , on en déduit également que la restriction de chaque application  $r_i$  à  $X$  est un homéomorphisme bilipschitzien de  $X$  sur son image.
- (iii) Pour des raisons analogues, si  $\tilde{\xi}$  est le champ de vecteurs défini sur  $\tilde{E}$  par  $\Phi$ , l'adhérence de toute partie bien enlacée  $\tilde{X}$  de  $\tilde{E}$ , invariante par le flot engendré par  $\tilde{\xi}$ , est bien enlacée. De plus, pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , l'application

$$\tilde{r}_i : \tilde{E} \longrightarrow \mathbf{T}^2,$$

relevée par  $r_i$ , induit par restriction un homéomorphisme bilipschitzien de  $\tilde{X}$  sur son image.

- (iv) Tout plan d'enlacement  $j$  de  $\xi$  est un ensemble bien enlacé de  $E$ .
- (v) Tout tore d'enlacement 0 de  $\xi$  est un ensemble bien enlacé de  $\tilde{E}$ .
- (vi) La réunion  $R$  des éléments critiques de  $\xi$  est bien enlacée : c'est une conséquence de la proposition 2.2.2 et du fait que  $R \times R$  est contenu dans l'ensemble des points récurrents du flot produit sur  $E \times E$ .
- (vii) Pour les mêmes raisons (en particulier grâce à la proposition 2.3.2), la réunion  $\tilde{R}$  des éléments critiques de  $\tilde{\xi}$  est une partie bien enlacée de  $\tilde{E}$ .

## 4.2. Une propriété des points non errants de $\tilde{\xi}$

On se donne dans ce paragraphe  $\Phi \in \mathcal{D}_n$  et on note  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  les champs de vecteurs définis respectivement sur  $E$  et  $\tilde{E}$  par  $\Phi$ .

**PROPOSITION 4.2.1.** — *Si  $\tilde{x} \in \tilde{E}$  est un point non errant de  $\tilde{\xi}$ , l'orbite de tout point  $x \in \pi^{-1}(\tilde{x})$  est contenue dans un plan d'enlacement  $j$ .*

*Démonstration.* — On a vu au paragraphe 3.3 que tout point de  $E$  est contenu dans un plan d'enlacement  $j$ , et ceci quel que soit  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2]\}$ . La proposition est donc démontrée dans le cas où  $\tilde{x}$  est une singularité. Nous supposons dorénavant que  $\tilde{x}$  n'est pas une singularité.

Le couple  $(\tilde{x}, \tilde{\xi}(\tilde{x}))$  est un point non-errant du flot linéarisé. On en déduit, grâce à la proposition 2.2.2, que  $\tilde{\xi}(\tilde{x}^t)$  appartient à  $W$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ; plus précisément à un certain  $W_j$ ,  $j \in \{-[n/2], \dots, [n/2]\}$ ; plus précisément encore à l'espace  $E_j(\tilde{x}^t)$  défini au paragraphe 3.2.

Pour montrer qu'il existe un plan d'enlacement  $j$  contenant l'orbite de  $x \in \pi^{-1}(\tilde{x})$ , il suffit de montrer que pour tout réel  $t > 0$ , il existe un plan d'enlacement  $j$  contenant l'ensemble

$$O_t(x) = \{x^s, s \in [-t, t]\}.$$

En utilisant les propriétés de compacité énoncées à la fin du paragraphe 3.3 et en choisissant une valeur d'adhérence de la suite ainsi formée pour  $t$  entier, on obtiendra la variété cherchée.

Considérons donc l'ensemble  $A$  des réels  $t \geq 0$  tels qu'il existe un plan d'enlacement  $j$  qui contienne  $O_t(x)$ . L'ensemble  $A$  est non vide puisqu'il contient 0 et il est fermé, toujours grâce aux propriétés de compacité qui viennent d'être rappelées. Il reste donc à montrer qu'il est ouvert.

Supposons que l'ensemble  $O_t(x)$  soit contenu dans un plan d'enlacement  $j$ . Grâce aux propositions 3.4.4 et 3.4.5, nous savons qu'il existe  $\eta > 0$ , tel que si  $x' \in E$  vérifie  $\|x' - x\| < \eta$ , l'ensemble  $O_{t+\eta}(x')$  est contenu dans un graphe de  $\mathcal{G}_j^-$  et dans un graphe de  $\mathcal{G}_j^+$ .

Puisque  $\tilde{x}$  est non errant, il existe une suite  $(x_k)_{k \geq 0}$  qui converge vers  $x$ , une suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  qui converge vers  $+\infty$ , et deux suites d'entiers  $(l_k)_{k \geq 0}$  et  $(m_k)_{k \geq 0}$ , telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_0^{l_k} \circ \tau_1^{m_k}(x_k^{t_k}) = x.$$

Pour  $k$  assez grand, on peut trouver un graphe  $G_k \in \mathcal{G}_j^-$ , contenant  $O_{t+\eta}(x_k)$  et un graphe  $G'_k \in \mathcal{G}_j^+$  contenant  $O_{t+\eta}(x_k^{t_k})$ . On obtient un graphe  $G \in \hat{\mathcal{G}}_j^-$  contenant  $O_{t+\eta}(x)$  en choisissant une valeur d'adhérence de la suite

$$\left( \tau_0^{l_k} \circ \tau_1^{m_k}(G_k^{t_k}) \right)_{k \geq 0},$$



et un graphe  $G' \in \widehat{\mathcal{G}}_j^+$  ayant même propriété en choisissant une valeur d'adhérence de la suite

$$\left( \tau_0^{-l_k} \circ \tau_1^{-m_k} (G'_k - t_k) \right)_{k \geq 0}.$$

L'intersection  $G \cap G'$  est un plan d'enlacement  $j$  qui contient  $O_{t+\eta}(x)$ .  $\square$

On en déduit immédiatement :

**COROLLAIRE 4.2.2.** — *L'orbite de tout point non errant de  $\xi$  est contenue dans un plan d'enlacement.*

On en déduit également

**COROLLAIRE 4.2.3.** — *L'ensemble des points récurrents de  $\xi$  est la réunion des éléments critiques.*

*Démonstration.* — Soit  $x$  un point récurrent de  $\xi$ . D'après le corollaire 4.2.2, l'orbite de  $x$  est tracée sur un plan d'enlacement  $j$ , que l'on note  $P$ . L'ensemble  $P$  est une sous-variété de classe  $C^1$  de  $E$ , difféomorphe à  $\mathbf{R}$  si  $n$  est pair et si  $j = \pm[n/2]$ , difféomorphe à  $\mathbf{R}^2$  dans les autres cas. Le champ de vecteurs  $\xi'$  défini sur  $P$ , égal en un point  $x' \in P$  à la projection orthogonale de  $\xi(x')$  sur  $E_j(x')$ , est un champ de vecteurs continu sur  $P$  qui coïncide avec  $\xi$  sur l'orbite de  $x$ . L'arc  $t \mapsto x^t$  est donc une courbe intégrale récurrente de  $\xi'$ .

Si  $P$  est de dimension 1, ceci n'est possible que si  $x$  est une singularité ; si  $P$  est de dimension 2, ceci n'est possible, par le théorème de Poincaré-Bendixson, que si  $x$  est une singularité ou un point périodique.  $\square$

**REMARQUE.** — Si l'orbite d'un point  $x$  est tracée sur un plan d'enlacement  $j \neq 0$  et si l'orbite de  $\pi(x)$  est bornée, il en est de même de celle de  $x$ . En effet, si  $\Lambda$  est l'ensemble des orbites bornées de  $\tilde{\xi}$ , il existe une constante  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in \pi^{-1}(\Lambda)$  et tout  $x' \in \pi^{-1}(\Lambda)$

$$\|x - x'\| \geq M \implies x - x' \in W_0.$$

### 4.3. Nombre d'enlacement de courbes de Jordan bien enlacées

Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux parties connexes non vides disjointes telles que  $\Gamma \cup \Gamma'$  soit bien enlacé, on note  $L_1(\Gamma, \Gamma')$  la valeur commune des quantités

$$L_1(x, x'), (x, x') \in \Gamma \times \Gamma',$$

que l'on appellera le *nombre d'enlacement* de  $\Gamma$  et de  $\Gamma'$ .

Si  $C$  est une courbe de Jordan (*i.e.* si  $C$  est homéomorphe à  $\mathbf{T}^1$ ) et si  $C$  est bien enlacée, on notera  $L_1(C)$  la valeur commune des quantités

$$L_1(x, x'), (x, x') \in C \times C - \Delta,$$

que l'on appellera *le nombre d'enlacement* de  $C$ .

On a défini au paragraphe 4.1, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , une application

$$\gamma_s : E \longrightarrow \mathbf{R}^2.$$

Si  $C$  est une courbe de Jordan bien enlacée et si  $x \notin C$ , trois cas sont possibles :

- (i) il existe  $s \in [0, 2n]$  tel que  $\gamma_s(x)$  appartienne à  $\gamma_s(C)$ , c'est le cas où l'ensemble  $\{x\} \cup C$  n'est pas bien enlacé ;
- (ii) pour tout  $s \in [0, 2n]$  le point  $\gamma_s(x)$  est dans la composante connexe bornée de  $\mathbf{R}^2 - \gamma_s(C)$ , on dira alors que  $x$  est à l'intérieur de  $C$  ;
- (iii) pour tout  $s \in [0, 2n]$  le point  $\gamma_s(x)$  est dans la composante connexe non bornée de  $\mathbf{R}^2 - \gamma_s(C)$ , on dira alors que  $x$  est à l'extérieur de  $C$ .

Plus généralement, on dira qu'une partie  $\Gamma$  est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de  $C$  si chaque point de  $\Gamma$  est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de  $C$ .

La proposition qui suit s'applique en particulier au calcul du nombre d'enlacement  $L_1(\Gamma, \Gamma')$  de deux éléments critiques distincts.

**PROPOSITION 4.3.1.** — *Soit  $C$  une courbe de Jordan bien enlacée.*

- (i) *Si  $x$  est à l'intérieur de  $C$ , on a*

$$L_1(x, C) = L_1(C).$$

- (ii) *Si  $x$  est à l'intérieur de  $C$  et  $x'$  à l'extérieur de  $C$ , on a*

$$x - x' \in W \quad \text{et} \quad L_1(x', x) = L_1(x', C).$$

*Démonstration.* — Soit  $C$  une courbe de Jordan bien enlacée et  $x$  un point à l'intérieur de  $C$ . Pour tout  $s \in [0, 2n]$ , on note  $D_s$  la réunion de la courbe de Jordan  $\gamma_s(C)$  et de sa composante intérieure. On va montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Gamma : \gamma_0(C \cup \{x\}) \times [0, 2n] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, s) &\longmapsto \Gamma_s(z), \end{aligned}$$

où

$$\Gamma_s = \gamma_s \circ (\gamma_0|_{C \cup \{x\}})^{-1},$$

peut se prolonger de façon continue en une application

$$\begin{aligned} \Gamma : D_0 \times [0, 2n] &\longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ (z, s) &\longmapsto \Gamma_s(z), \end{aligned}$$

où  $\Gamma_s$  est un homéomorphisme entre  $D_0$  et  $D_s$ . On en déduira que l'indice de chaque courbe fermée

$$s \longmapsto \Gamma_s(z) - \Gamma_s(z')$$

par rapport à  $(0, 0)$  est indépendant du couple

$$(z, z') \in D_0 \times D_0, \quad z \neq z'.$$

On aura donc prouvé l'assertion (i). De même, on en déduira que l'indice de chaque courbe fermée

$$s \mapsto \Gamma_s(z) - \gamma_s(x')$$

par rapport à  $(0, 0)$  est indépendant de  $z \in D_0$ . On aura donc prouvé l'assertion (ii).

Pour montrer le résultat d'extension, on peut utiliser par exemple la théorie de Carathéodory (voir [Ca]). On munit  $\mathbf{R}^2$  d'une structure complexe en identifiant  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{C}$ , on fixe  $z^* \in \gamma_0(C)$  et on note  $\mu_s$  l'unique homéomorphisme de

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$$

sur  $D_s$  qui envoie 0 sur  $\gamma_s(x)$ , qui envoie 1 sur  $\Gamma_s(z^*)$  et qui est conforme sur l'intérieur de  $\mathbf{D}$ .

L'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathbf{D} \times [0, 2n] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (z, s) &\longmapsto \mu_s(z) \end{aligned}$$

est alors continue (voir T. Rado [Ra]), et l'application

$$\nu_s = (\mu_s|_{S^1})^{-1} \circ \Gamma_s|_{\gamma_0(C)} \circ \mu_0|_{S^1}$$

est un homéomorphisme de

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

qui dépend continûment de  $s$ .

Chacun des  $\nu_s$  laisse fixe 1 et on a

$$\nu_0 = \nu_{2n} = \text{Id}.$$

Le chemin  $s \mapsto \nu_s$  est donc homotope à zéro dans l'ensemble des homéomorphismes de  $S^1$ . On peut prolonger chaque  $\nu_s$  à  $\mathbf{D}$  de façon à obtenir un chemin fermé  $s \mapsto \nu_s$  d'homéomorphismes de  $\mathbf{D}$ , vérifiant  $\nu_0 = \nu_{2n} = \text{Id}$ , et tel que :

- pour tout  $s \in [0, 2n]$  et pour tout  $z \in \mathcal{D}$ , on ait

$$|\nu_s(z)| = |z|;$$

- pour tout  $s \in [0, 2n]$  et pour tout  $z \in \mathcal{D}$ , on ait

$$|z| \leq 1/2 \implies \nu_s(z) = z.$$

L'application

$$\Gamma_s = \mu_s \circ \nu_s \circ \mu_0^{-1}$$

est un prolongement de  $\gamma_s$  qui convient. □

REMARQUES. — Soit  $\Phi \in \mathcal{D}_n$  et  $C$  une orbite périodique du champ de vecteurs  $\xi_\Phi$ .

- (i) Le nombre d'enlacement  $L_1(C)$  est la valeur commune des  $L(\xi_\Phi(x))$ ,  $x \in C$ .

(ii) La famille

$$\tau_0^r \circ \tau_1^s(C), \quad (r, s) \in \mathbf{Z}^2,$$

est formée de courbes distinctes. Chaque courbe est à l'extérieur de toute autre courbe de cette famille et le nombre d'enlacement de ces deux courbes est nul.

(iii) On montre dans [L1], que l'une des courbes  $f(q_0(C))$  ou  $f^{-1}(q_0(C))$  est dans la composante connexe bornée du complémentaire de  $q_0(C)$ , où  $f = K_n(\Phi)$  et

$$q_0 : x \longmapsto (x_0, g_0(x_0, x_1))$$

l'application définie au paragraphe 1.8. Il y a donc au moins un point fixe dans cette composante et la singularité correspondante est à l'intérieur de  $C$ .

#### 4.4. Construction d'un plan d'enlacement contenant des éléments critiques

PROPOSITION 4.4.1. — Soit  $\Phi \in \mathcal{D}_n$ . Si  $C$  est une orbite périodique de  $\xi_\Phi$  et si  $x$  est une singularité à l'intérieur de  $C$ , il existe un plan d'enlacement  $j = L_1(C)$  qui contient  $C$  et  $x$ .

*Démonstration.* — On a vu dans la proposition 4.2.1 qu'il existe un plan d'enlacement  $j = L_1(C)$  qui contient  $C$ . Si on veut construire un plan d'enlacement  $j$  qui contient en plus le point  $x$ , on peut reprendre la démonstration de cette proposition. Si on fixe  $x' \in C$ , on montre exactement comme dans le proposition 4.2.1 que l'ensemble  $A$  des réels  $t$  pour lesquels il existe un plan d'enlacement  $j$  qui contienne à la fois  $x$  et

$$O_t(x') = \{x'^s \mid s \in [0, t]\}$$

est ouvert et fermé. Pour démontrer la proposition 4.4.1, il reste à vérifier que  $A$  est non vide.

Pour cela il suffit de construire deux graphes  $G \in \mathcal{G}_j^-$  et  $G' \in \mathcal{G}_j^+$  qui contiennent  $x$  et  $x'$ , puis de prendre une valeur d'adhérence de chacune des suites  $(G^{kt_0})_{k \geq 0}$  et  $(G'^{-kt_0})_{k \geq 0}$ , où  $t_0$  est la période de  $C$ . On va chercher nos graphes parmi les sous-espaces affines, on les obtiendra, grâce au lemme suivant appliqué à  $u = x' - x$ .

LEMME 4.4.2. — Soit  $u \in E$ . Si  $u$  appartient à  $W_j$ , il existe deux sous-espaces vectoriels

$$E_j'^- \subset W_j^- \cup \{0\} \quad \text{et} \quad E_j'^+ \subset W_j^+ \cup \{0\}$$

de mêmes dimensions que  $E_j^-$  et  $E_j^+$ , qui contiennent tous deux le vecteur  $u$ .

*Démonstration.* — Il suffit de trouver une matrice tridiagonale cyclique, symétrique par signe, dont le noyau contient  $u$ ; ce vecteur appartiendra nécessairement aux sous-espaces

$$E_j'^- \subset W_j^- \cup \{0\} \quad \text{et} \quad E_j'^+ \subset W_j^+ \cup \{0\}$$

donnés par la décomposition spectrale de la matrice.

On doit donc trouver trois suites

$$(a_i)_{i \in \mathbf{Z}}, \quad (b_i)_{i \in \mathbf{Z}}, \quad (c_i)_{i \in \mathbf{Z}},$$

de période  $2n$ , telles que, pour tout entier  $i$  on ait :

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = 0$$

et

$$\sigma(a_i) = (-1)^i, \quad \sigma(c_i) = (-1)^{i+1},$$

en ayant comme hypothèses

$$u_i = 0 \implies u_{i-1} u_{i+1} > 0.$$

Si  $u_i \neq 0$ , on posera

$$a_i = (-1)^i, \quad c_i = (-1)^{i+1}, \quad b_i = \frac{(-1)^{i+1} u_{i-1} + (-1)^i u_{i+1}}{u_i};$$

si  $u_i = 0$ , on posera

$$a_i = (-1)^i |u_{i+1}|, \quad c_i = (-1)^{i+1} |u_{i-1}|, \quad b_i = 0.$$

□

**COROLLAIRE 4.4.3.** — Soit  $\Phi \in \mathcal{D}_n$ . Soient  $C$  une orbite périodique de  $\xi_\Phi$  et  $D$  l'ensemble formé de  $C$  et des points de  $E$  qui sont à l'intérieur de  $C$ . La composante connexe de  $D$  qui contient  $C$  contient alors toutes les singularités de  $\xi_\Phi$  qui sont à l'intérieur de  $C$ .

*Démonstration.* — Si  $x$  est une singularité de  $\xi_\Phi$ , on peut trouver un plan d'enlacement  $j = L_1(C)$  qui contient  $C$  par la proposition 4.4.1. On le note  $P$ . L'adhérence de la composante connexe bornée de  $P - C$  contient  $x$ , contient  $C$  et est contenue dans  $D$ . □

#### 4.5. Une propriété des ensembles finis bien enlacés

Nous utiliserons au chapitre 5 le résultat suivant :

**PROPOSITION 4.5.1.** — Si  $X$  est une partie finie bien enlacée de  $\tilde{E}$ , il existe  $\Phi' \in \mathcal{D}_n$  tel que  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi}_{\Phi'})$ .

*Démonstration.* — Considérons un élément quelconque

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1})$$

de  $\mathcal{D}_n$ . Notons  $g_i$  et  $g'_i$  les fonctions associées à  $f_i$ . Rappelons que les applications

$$q_i : x \mapsto (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \quad \text{et} \quad q'_i : x \mapsto (x_i, g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i))$$

ont été définies au paragraphe 1.8 et qu'on a

$$f_i \circ q_i = q'_{i+1}.$$

Puisque  $\pi^{-1}(X)$  est bien enlacé, on sait que si  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  et  $x' = (x'_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  sont deux points distincts de  $\pi^{-1}(X)$ , alors

$$x_i = x'_i \implies (x_{i+1} - x'_{i+1})(x_{i-1} - x'_{i-1}) > 0.$$

En particulier si

$$p_1 \circ q_i(x) = p_1 \circ q_i(x') \quad \text{et} \quad p_2 \circ q_i(x) < p_2 \circ q_i(x'),$$

alors

$$p_1 \circ q'_i(x) = p_1 \circ q'_i(x') \quad \text{et} \quad p_2 \circ q'_i(x) < p_2 \circ q'_i(x').$$

Chacun des ensembles

$$q_i(\pi^{-1}(X)) \quad \text{et} \quad q'_i(\pi^{-1}(X)),$$

étant invariant par les translations entières, il existe un difféomorphisme du plan

$$\varphi_i : (x, y) \mapsto (x, \mu_i(y)),$$

qui commute avec les translations entières, qui laisse invariant chaque verticale, et qui envoie chaque point  $q'_i(x)$  sur  $q_i(x)$ . Si on pose

$$f'_i = \varphi_{i+1} \circ f_i,$$

le  $2n$ -uplet

$$\Phi' = (f'_0, \dots, f'_{2n-1}),$$

appartient à  $\mathcal{D}_n$ . Il vérifie la propriété demandée puisque les fonctions associées à  $f'_i$  sont  $g_i$  et  $\mu_{i+1} \circ g'_i$ .  $\square$



## CHAPITRE 5

### EXISTENCE DE TORES FIXES D'ENLACEMENT 0

Nous fixons dans ce chapitre un élément  $\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1})$  de  $\mathcal{D}_n$  et nous notons  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  les champs de vecteurs définis respectivement sur  $E$  et  $\tilde{E}$  par  $\Phi$ . Nous poserons également

$$f = K_n(\Phi) = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0.$$

Dans le paragraphe 3.6 nous avons introduit l'ensemble  $\mathcal{T}$  des tores d'enlacements 0 d'orbite bornée, qui sont des sous-variétés de classe  $C^1$  difféomorphes à  $\mathbf{T}^2$ . La réunion de ces tores est l'ensemble compact  $\Lambda$  des points  $\tilde{x} \in \tilde{E}$  d'orbite bornée. Les topologies  $C^0$  et  $C^1$  coïncident sur  $\mathcal{T}$  de même que la topologie de Hausdorff; cet espace est compact pour cette topologie. Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  définit un flot naturel sur  $\mathcal{T}$ . Le but de ce chapitre est de montrer que certains de ces tores sont fixes, plus précisément de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tore  $T \in \mathcal{T}$  soit fixe.

#### 5.1. Ensembles non enlacés

Toute partie  $X$  de  $\tilde{E}$  formée de singularités de  $\tilde{\xi}$  est bien enlacée, d'après la remarque (vii) du paragraphe 4.1. On dit qu'elle est *non enlacée*, si  $\pi^{-1}(X)$  est contenu dans un élément de  $\mathcal{P}_0$ , c'est-à-dire à la fois dans un graphe  $G \subset \mathcal{G}_0^-$  et dans un graphe  $G' \subset \mathcal{G}_0^+$  (voir paragraphes 3.3 et 3.5 pour la définition de  $\mathcal{G}_0^-$ ,  $\mathcal{G}_0^+$  et  $\mathcal{P}_0$ ). La propriété pour un ensemble de singularités d'être enlacé se lit sur les coordonnées de ces points. On dira que c'est *un ensemble enlacé* dans le cas contraire. On dira que  $X$  est un *ensemble non enlacé maximal* s'il est maximal, au sens de l'inclusion, parmi les ensembles non enlacés. Remarquons que la fonction d'enlacement

$$L_1 : (x, x') \mapsto L(x' - x)$$

s'annule sur

$$\pi^{-1}(X) \times \pi^{-1}(X) - \Delta.$$

**PROPOSITION 5.1.1.** — *Un ensemble  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est non enlacé si et seulement s'il est contenu dans un élément de  $\mathcal{T}$ .*



*Démonstration.* — Si  $X$  est contenu dans un tore d'enlacement 0, alors  $\pi^{-1}(X)$  est contenu dans un plan d'enlacement 0, a fortiori dans un élément de  $\mathcal{P}_0$ .

Pour montrer l'autre implication, il suffit d'étudier le cas où  $X$  est non vide puisque  $\mathcal{T}$  est non vide. L'ensemble  $\pi^{-1}(X)$  est contenu dans un graphe  $G \subset \mathcal{G}_0^-$  et dans un graphe  $G' \subset \mathcal{G}_0^+$ . Les propriétés de compacité énoncées au paragraphe 3.3 nous permettent alors de choisir une valeur d'adhérence  $\widehat{G}$  de la suite  $(G^k)_{k \geq 0}$  et une valeur d'adhérence  $\widehat{G}'$  de la suite  $(G'^{-k})_{k \geq 0}$ . On obtient un plan d'enlacement 0 et d'orbite bornée  $P = \widehat{G} \cap \widehat{G}'$  qui contient  $\pi^{-1}(X)$ . Il se projette par  $\pi$  sur un tore d'enlacement 0 et d'orbite bornée qui contient  $X$ .  $\square$

**PROPOSITION 5.1.2.** — *L'adhérence d'une partie  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est non enlacée. De plus, l'ensemble des parties fermées non enlacées et non vides est compact pour la topologie de Hausdorff.*

*Démonstration.* — La partie  $X$  est contenue dans un tore  $T \in \mathcal{T}$ . Comme les ensembles  $T$  et  $\text{sing}(\tilde{\xi})$  sont fermés, l'adhérence de  $X$  est également contenue dans  $T$  : c'est un ensemble non enlacé.

Montrons la seconde partie de la proposition. Soit  $(X_k)_{k \geq 0}$  une suite de parties fermées non enlacées et non vides. Chaque  $X_k$  est contenu dans un tore  $T_k \in \mathcal{T}$ . Comme les ensembles  $\text{sing}(\tilde{\xi})$  et  $\mathcal{T}$  sont compacts, on peut extraire une suite  $(k_l)_{l \geq 0}$  telle que  $(X_{k_l})_{l \geq 0}$  converge vers  $X$ , partie fermée non vide de  $\text{sing}(\tilde{\xi})$ , et que  $(T_{k_l})_{l \geq 0}$  converge vers  $T \in \mathcal{T}$ . La partie  $X$  est alors contenue dans  $T$ , elle est non enlacée.  $\square$

On en déduit immédiatement :

**COROLLAIRE 5.1.3.** — *Une partie  $X$  de  $\text{sing}(\tilde{\xi})$  est non enlacée si et seulement si c'est le cas de toute partie finie de  $X$ .*

## 5.2. Caractérisation des tores fixes d'enlacement 0

On note  $\mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi}))$  l'ensemble des parties de  $\text{sing}(\tilde{\xi})$  et on considère l'application

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi})) \\ T &\longmapsto T \cap \text{sing}(\tilde{\xi}), \end{aligned}$$

qui associe, à chaque tore d'enlacement 0, l'ensemble des singularités qu'il contient.

Le résultat principal du chapitre 5 est le suivant.

**PROPOSITION 5.2.1.** — *L'image  $\Sigma(T)$  de  $T \in \mathcal{T}$  est un ensemble non enlacé maximal si et seulement si  $T$  est fixe ; de plus la restriction de  $\Sigma$  à l'ensemble des tores fixes est injective et induit donc une bijection entre l'ensemble des tores fixes et l'ensemble des parties non enlacées maximales.*

La démonstration se décompose en trois étapes.

- Première étape : si  $T \in \mathcal{T}$  est fixe, alors  $\Sigma(T)$  est maximal.
- Deuxième étape : si  $T \in \mathcal{T}$  n'est pas fixe, alors  $\Sigma(T)$  n'est pas maximal.
- Troisième étape : si  $T$  et  $T'$  sont deux tores fixes distincts, alors  $\Sigma(T) \neq \Sigma(T')$ .

Nous donnerons la démonstration de la proposition 5.2.1 dans les paragraphes 5.3, 5.4 et 5.5. Nous allons conclure ce paragraphe par une application de la proposition 5.2.1.

**PROPOSITION 5.2.2.** — *Tout ensemble non enlacé  $X$  est contenu dans un ensemble non enlacé maximal.*

*Démonstration.* — La proposition est évidente si  $\tilde{\xi}$  n'a qu'un nombre fini de singularités. On peut donner une démonstration dans le cas général qui utilise le lemme de Zorn, en remarquant le caractère inductif de l'ensemble des parties non enlacées qui contiennent  $X$ . Ceci est dû au fait qu'un ensemble est non enlacé si et seulement si c'est le cas de toutes ses parties finies.

On peut également utiliser la proposition 5.2.1 et chercher à construire un tore fixe contenant  $X$ . On supposera  $X$  non vide (si  $X$  est vide et maximal, il n'y a rien à faire, si  $X$  est vide et n'est pas maximal, on peut ajouter un point à  $X$ ).

On se donne une partie finie non vide  $X'$  de  $X$ . On note  $Z'$  l'ensemble des points fixes de  $f$  associé à  $X'$ . On peut trouver une suite  $(f'_k)_{k \geq 0}$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  qui converge vers  $f$ , telle que chaque difféomorphisme  $F'_k$  de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f'_k$  ait un nombre fini de points fixes, parmi lesquels les points de  $Z'$ . Plus précisément on peut supposer que, pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on a

$$Z' \subset \text{Fix}(f'_k).$$

Quitte à tronquer la suite, on peut écrire

$$f'_k = f_{2n-1}^k \circ f_{2n-2} \circ \cdots \circ f_0,$$

où

$$\Phi_k = (f_0, \dots, f_{2n-2}, f_{2n-1}^k) \in \mathcal{D}_n.$$

La suite  $(\Phi_k)_{k \geq 0}$  tend alors vers  $\Phi$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ ; la suite  $(\tilde{\xi}_{\Phi_k})_{k \geq 0}$  vers  $\tilde{\xi}$ ; la suite  $(X'_k)_{k \geq 0}$ , formée des singularités de  $\tilde{\xi}_{\Phi_k}$  associées à  $Z'$ , vers  $X'$  (pour la distance de Hausdorff). Puisque  $X'$  est non enlacé, on sait, grâce à la proposition 3.4.2, qu'il en est de même de  $X'_k$  dès que  $k$  est grand. Comme  $\tilde{\xi}_{\Phi_k}$  n'a qu'un nombre fini de singularités, l'ensemble  $X'_k$  est contenu dans un ensemble non enlacé maximal et donc dans un tore fixe d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}_{\Phi_k}$ .

On choisit un tel tore, que l'on note  $T_k$ . Toute valeur d'adhérence de la suite  $(T_k)_{k \geq 0}$  est un tore fixe d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}$  qui contient  $X'$ . En écrivant  $X$  comme limite d'une suite de sous-parties finies et en prenant une valeur d'adhérence de la

suite de tores fixes correspondante, on obtient un tore fixe  $T$  contenant  $X$ . L'ensemble  $\Sigma(T)$  est un ensemble non enlacé maximal qui contient  $X$ .  $\square$

#### REMARQUES

- (i) Les arguments de la démonstration de la proposition 5.2.1 nous permettent également de montrer le résultat suivant. Soit  $C$  une orbite fermée d'enlacement  $j$  de  $\xi$  et  $\mathcal{P}_C$  l'ensemble des plans d'enlacement  $j$  qui contiennent  $C$ . Définissons

$$\begin{aligned}\Sigma_C : \mathcal{P}_C &\longrightarrow \mathcal{P}(\text{sing}(\xi)) \\ P &\longmapsto \text{sing}(\xi) \cap D_C(P),\end{aligned}$$

où  $D_C(P)$  est la composante connexe bornée de  $P - C$ . Alors  $D_C(P)$  est fixe si et seulement si  $\Sigma_C(P)$  est maximal dans  $\Sigma_C(\mathcal{P}_C)$ . En particulier, toute orbite fermée borde un disque invariant.

- (ii) Si  $\tilde{\xi}$  n'a pas de singularité, c'est-à-dire si  $f$  n'a pas de point fixe, l'ensemble  $\mathcal{T}$  se réduit à un tore fixe, c'est l'assertion (i) du théorème 0.3.1. Si  $\tilde{\xi}$  n'a qu'une singularité, c'est-à-dire si  $\text{Fix}(f)$  se réduit à un élément, il n'y a qu'un seul tore fixe, il contient cette singularité. Les autres tores éventuels de  $\mathcal{T}$  ne contiennent pas cette singularité.

### 5.3. Première étape de la démonstration de la proposition 5.2.1

Nous voulons démontrer le résultat suivant :

PREMIÈRE ÉTAPE. — *Si  $T \in \mathcal{T}$  est fixe, alors  $\Sigma(T)$  est un ensemble non enlacé maximal.*

Nous allons démontrer en fait le résultat plus fort :

PROPOSITION 5.3.1. — *Soit  $P$  un plan fixe d'enlacement 0. Pour tout  $x \in \text{sing}(\xi) - P$ , il existe  $x' \in \text{sing}(\xi) \cap P$  tel que  $L_1(x', x) \neq 0$ .*

*Démonstration.* — Soit  $x \in \text{sing}(\xi) - P$  et  $x_*$  le point de  $P$  tel que  $r_0(x_*) = r_0(x)$ . Puisque  $x_* - x$  n'appartient pas à  $W$ , deux cas sont possibles :

$$x_*^t - x \in W_{-1}^-, \quad \text{pour tout } t > 0,$$

ou

$$x_*^t - x \in W_1^+, \quad \text{pour tout } t < 0.$$

Nous nous limitons au premier cas, le second se traitant de façon similaire. Puisque  $P$  est contenu dans  $\Lambda$ , la droite passant par  $x$  et tout point  $x' \in P$  suffisamment éloigné appartient à  $W_0$  ; on en déduit que l'orbite positive de  $x_*$  est bornée et, grâce au théorème de Poincaré-Bendixson, que  $\omega(x_*)$  contient un élément critique. Remarquons que la fonction

$$x' \longmapsto L_1(x', x)$$

est bien définie sur  $\omega(x_*)$  et prend une valeur constante égale à

$$j = \lim_{t \rightarrow +\infty} L_1(x_*^t, x) < 0.$$

Si  $\omega(x_*)$  contient une singularité  $x'$ , on a  $L_1(x', x) = j$  : la proposition est démontrée.

Si  $\omega(x_*)$  contient une orbite fermée  $C$ , celle-ci est tracée sur le plan invariant  $P$  et on peut trouver une singularité  $x' \in P$  à l'intérieur de  $C$ . On déduit des égalités

$$L_1(C) = 0 \quad \text{et} \quad L_1(x, C) = j$$

et de la proposition 4.3.1, que  $x$  est à l'extérieur de  $C$  ; on en déduit ensuite, toujours grâce à la proposition 4.3.1, que

$$L_1(x', x) = j.$$

□

#### 5.4. Deuxième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1

Nous voulons démontrer le résultat suivant :

DEUXIÈME ÉTAPE. — Si  $T \in \mathcal{T}$  n'est fixe, alors l'ensemble non enlacé  $\Sigma(T)$  n'est pas maximal.

*Démonstration.* — Soit  $T \in \mathcal{T}$  un tore qui n'est pas fixe. Il existe donc un point  $\tilde{x} \in T$  tel que  $\tilde{\xi}(\tilde{x})$  n'est pas tangent à  $T$ . Rappelons que les ensembles  $E_j(\tilde{x})$ ,  $E_j^-(\tilde{x})$  et  $E_j^+(\tilde{x})$  ont été définis au paragraphe 3 et que l'espace tangent à  $T$  en  $\tilde{x}$  est  $E_0(\tilde{x})$ . Le vecteur  $\tilde{\xi}(\tilde{x})$  a donc une composante non nulle sur  $E_{-1}^-(\tilde{x})$  ou sur  $E_1^+(\tilde{x})$ . Nous n'étudierons que le premier cas, le second étant similaire. On sait, grâce aux propositions 3.2.1 et 2.2.2, que la distance de la droite engendrée par  $\tilde{\xi}(\tilde{x}^t)$  à  $P(E_{-1}^-(\tilde{x}^t))$  (dans l'espace projectif) tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , et que  $L(\tilde{\xi}(\tilde{x}^t))$  garde une valeur constante  $j < 0$  pour  $t$  assez grand. On va étudier deux cas.

*Premier cas : l'ensemble  $\omega(\tilde{x})$  contient une singularité  $\tilde{x}'$ .* — Il existe alors une suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  tendant vers  $+\infty$ , telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}^{t_k} = \tilde{x}'.$$

On peut toujours supposer que la suite  $(T^{t_k})_{k \geq 0}$  est convergente de limite  $T'$ . Le tore  $T'$  contient  $\tilde{x}'$  et  $\Sigma(T)$  ; pour montrer que  $\Sigma(T)$  n'est pas maximal, il suffit donc de montrer que  $\tilde{x}'$  n'appartient pas à  $\Sigma(T)$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\tilde{x}' \in \Sigma(T)$ . Pour  $k$  assez grand, on peut affirmer :

- que la droite engendrée par  $\tilde{\xi}(\tilde{x}^{t_k})$  est proche de  $P(E_{-1}^-(\tilde{x}'))$  ;

- que la droite engendrée par  $\tilde{x}^{t_k} - \tilde{x}'$  est contenue dans  $W_0$  (pour être rigoureux que la droite engendrée par un relevé du point  $\tilde{x}'$  dans  $E$  et par le relevé de  $\tilde{x}^{t_k}$  qui est proche).

Cela contredit les propriétés locales de  $\tilde{\xi}$  au voisinage de  $\tilde{x}'$ , données par la décomposition spectrale de  $D\tilde{\xi}(\tilde{x}')$  étudiée au chapitre 3.

*Second cas : l'ensemble  $\omega(\tilde{x})$  ne contient pas de singularité.* — La fonction

$$\tilde{x}' \mapsto L(\tilde{\xi}(\tilde{x}'))$$

est alors bien définie et constante égale à  $j$  sur  $\omega(\tilde{x})$ . De même, pour tout  $x'' \in \pi^{-1}(\Sigma(T))$ , la fonction

$$x \mapsto L_1(x, x'')$$

est bien définie et vaut 0 sur  $\pi^{-1}(\omega(\tilde{x}))$ .

Fixons  $x \in \pi^{-1}(\omega(\tilde{x}))$ . L'orbite de ce point est contenue dans un plan d'enlacement  $j$  d'après la proposition 4.2.1 ; elle est bornée, d'après la remarque qui suit cette proposition. L'ensemble  $\omega$ -limite

$$\omega(x) \subset \pi^{-1}(\omega(\tilde{x}))$$

contient donc une orbite fermée  $C$ .

Comme le nombre d'enlacement  $L_1(C)$  est égal à  $j$  et comme le nombre d'enlacement  $L_1(x'', C)$  est nul pour tout  $x'' \in \pi^{-1}(\Sigma(T))$ , nous savons d'après la proposition 4.3.1 que toutes les singularités  $x'' \in \pi^{-1}(\Sigma(T))$  sont à l'extérieur de  $C$ . Nous avons vu également au paragraphe 4.3 (remarque (iii)) qu'il existe au moins une singularité  $x'$  à l'intérieur de  $C$ . Il reste donc à prouver que l'ensemble  $\Sigma(T) \cup \{\tilde{x}'\}$  est non enlacé, où  $\tilde{x}' = \pi(x')$ . Utilisant le corollaire 5.1.3 il suffit de trouver pour toute partie finie  $X \subset \Sigma(T)$ , un graphe  $G \in \mathcal{G}_0^-$  et un graphe  $G' \in \mathcal{G}_0^+$  qui contiennent  $\pi^{-1}(X) \cup \{x'\}$ .

Notons  $D$  l'ensemble formé de  $C$  et des points qui sont à l'intérieur de  $C$ . Notons  $D'$  l'ensemble des points  $x' \in D$  tels que  $\{x'\} \cup \pi^{-1}(X)$  est contenu dans un graphe  $G \in \mathcal{G}_0^-$  et dans un graphe  $G' \in \mathcal{G}_0^+$ . Le corollaire 4.4.3 nous dit que  $D$  est connexe, ce qui suit nous permettra d'affirmer que  $D'$  est égal à  $D$ .

L'ensemble  $D'$  est clairement fermé dans  $D$  d'après les propriétés des graphes  $G \in \mathcal{G}_0^-$  et  $G' \in \mathcal{G}_0^+$  données au chapitre 3.

L'ensemble  $D'$  est ouvert dans  $D$ . En effet, si  $x'$  appartient à  $D'$ , alors  $\pi(x') \cup X$  est bien enlacé. On peut donc trouver, grâce à la proposition 4.5.1, un  $2n$ -uplet  $\Phi' \in \mathcal{D}_n$  tel que

$$\pi(x') \cup X \subset \text{sing}(\tilde{\xi}_{\Phi'}).$$

On applique alors la proposition 3.4.2, on sait que si  $x''$  est proche de  $x'$ , il existe  $G \in \mathcal{G}_0^-$  et  $G' \in \mathcal{G}_0^+$  tels que

$$\{x''\} \cup \pi^{-1}(X) \subset G \cap G'.$$

L'ensemble  $D'$  contient  $C$ . En effet,  $\pi(C)$  étant inclus dans  $\omega(x)$ , on peut construire, pour tout point de  $\pi(C)$  une suite de la forme  $(T^{t_k})_{k \geq 0}$  qui converge dans  $\mathcal{T}$  vers un tore contenant ce point.  $\square$

### 5.5. Troisième étape de la démonstration de la proposition 5.2.1

Nous voulons démontrer le résultat suivant.

TROISIÈME ÉTAPE. — Si  $T$  et  $T'$  sont deux tores fixes distincts, alors  $\Sigma(T) \neq \Sigma(T')$ .

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde, on se donne deux tores fixes distincts  $T$  et  $T'$  et on suppose que  $\Sigma(T) = \Sigma(T')$ . On pose  $P = \pi^{-1}(T)$  et  $P' = \pi^{-1}(T')$ . Nous utiliserons souvent la remarque suivante :

*Si  $x \in P$  et si  $x' \in P'$  sont distincts et si l'un des points est une singularité, la différence  $x - x'$  appartient à  $W_0$ .*

Le flot produit défini sur  $E \times E$  est invariant par les fonctions

$$\tau_0 \times \tau_0 : (x, x') \mapsto (\tau_0(x), \tau_0(x'))$$

et

$$\tau_1 \times \tau_1 : (x, x') \mapsto (\tau_1(x), \tau_1(x')),$$

de même que la fonction  $L_1$ , et définissent donc naturellement un flot et une fonction sur l'espace

$$\hat{E}_2 = E \times E / [\tau_0 \times \tau_0, \tau_1 \times \tau_1].$$

On gardera le même nom pour la fonction  $L_1$ , on notera

$$\hat{\pi} : E \times E \longrightarrow \hat{E}_2$$

l'application de revêtement et  $\hat{\Delta}$  l'image de diagonale.

Puisque  $T \neq T'$ , il existe  $x \in P$  et  $x' \in P'$  distincts, tels que  $r_0(x) = r_0(x')$ . Deux cas sont possibles :

$$x^t - x'^t \in W_{-1}^-, \quad \text{pour tout } t > 0,$$

ou

$$x^t - x'^t \in W_1^+, \quad \text{pour tout } t < 0.$$

On étudie là encore le premier cas et on note

$$j = \lim_{t \rightarrow +\infty} L_1(x^t, x'^t) < 0.$$

#### LEMME 5.5.1

(i) On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x^t - x'^t = 0$ .

(ii) L'ensemble  $\omega(\pi(x)) = \omega(\pi(x'))$  est contenu dans  $\text{sing}(\tilde{\xi})$ .

*Démonstration.* — L'orbite positive de  $\widehat{\pi}(x, x')$  dans  $\widehat{E}_2$  est bornée puisque les plans  $P$  et  $P'$  sont contenus dans  $\Lambda$  et la fonction  $L_1$  est définie en tout point de  $\omega(\widehat{\pi}(x, x')) - \widehat{\Delta}$  et vaut  $j$  en ce point. On en déduit que si  $\widehat{\pi}(x_*, x'_*)$  appartient à  $\omega(\widehat{\pi}(x, x'))$ , et si l'un des points  $x_*$  ou  $x'_*$  est une singularité, on a  $x_* = x'_*$ . Pour montrer le lemme il suffit donc de montrer que l'on a

$$\omega(\pi(x')) \subset \text{sing}(\widetilde{\xi}).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point  $x'_* \in \pi^{-1}(\omega(\pi(x')))$  qui ne soit pas une singularité de  $\xi$ . Il existe alors  $x_* \in \pi^{-1}(\omega(\pi(x)))$  tel que  $\widehat{\pi}(x_*, x'_*)$  appartienne à  $\omega(\widehat{\pi}(x, x'))$ . Pour tout  $(t, t') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , le couple  $\widehat{\pi}(x_*^t, x'^{t'})$  appartient à  $\omega(\widehat{\pi}(x^t, x'^{t'}))$  : l'entier  $L_1(x_*^t, x'^{t'})$  est donc bien défini si  $x_*^t \neq x'^{t'}$ . La fonction  $\widehat{L}_1$  est donc bien définie sur  $A - \{0\}$ , où

$$A = \{x'^{t'} - x_*^t \mid (t, t') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}.$$

Remarquons que l'ensemble  $A - \{0\}$  est connexe. C'est évident si les orbites de  $x_*$  et de  $x'_*$  sont distinctes mais c'est également vrai si elles sont égales qu'elles soient périodiques ou non. Ainsi la fonction  $\widehat{L}_1$  est constante égale à  $j$  sur  $A - \{0\}$ .

On déduit de ce qui précède que l'orbite de  $x_*$  est bornée. Son ensemble  $\omega$ -limite contient donc une singularité  $x_{**}$  ou une orbite fermée  $C$ . Le premier cas est impossible. En effet si on écrit

$$x_{**} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_*^{t_k},$$

on aura

$$L_1(x'_*, x_{**}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} L_1(x'_*, x_*^{t_k}) = j.$$

Le second cas est également impossible. En effet, tout point  $x_{**} \in C$  s'écrivant

$$x_{**} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_*^{t_k},$$

on a

$$L_1(x'_*, x_{**}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} L_1(x'_*, x_*^{t_k}) = j.$$

On sait aussi que  $L_1(C) = 0$  puisque  $C$  est tracée sur  $P$ . On déduit de la proposition 3.4.1 que  $x'_*$  est à l'extérieur de  $C$ . Or on peut trouver une singularité  $x_{***} \in P$  à l'intérieur de  $C$  : on a  $L_1(x'_*, x_{***}) = j$ , ce qui est impossible.  $\square$

*Suite de la démonstration de la troisième étape.* — On va étudier deux cas.

*Premier cas : L'ensemble  $\omega(\pi(x))$  ne se réduit pas à un point.* — L'ensemble  $\omega(\pi(x))$  est connexe et formé de singularités, on en déduit que  $D\widetilde{\xi}(\widetilde{x})$  a un noyau non nul, pour tout  $\widetilde{x} \in \omega(\pi(x))$ , noyau contenu dans  $E_0(\widetilde{x})$ . On en déduit ensuite que le spectre de  $D\widetilde{\xi}(\widetilde{x})$  restreint à  $E_{-1}^-(\widetilde{x})$  est formé de nombres complexes de partie réelle strictement positive.

Il existe un voisinage  $U$  de  $\omega(\pi(x))$  et deux réels  $\eta > 0$  et  $T > 0$  qui vérifie la propriété suivante :

*si  $\tilde{x} \in U$  et si la distance de la droite engendrée par  $u \in E - \{0\}$  à  $P(E_{-1}^-(x^*))$  est inférieure à  $\eta$ , alors*

$$\|u^T\| \geq 3\|u\|,$$

*où  $(\tilde{x}^t, u^t)$  est l'image au temps  $t$  de  $(\tilde{x}, u)$  par le flot linéarisé.*

Puisque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^t - x'^t = 0$$

et puisque

$$x^t - x'^t \in W_{-1}^- \quad \text{si } t > 0,$$

on en déduit que la distance de la droite engendrée par  $x^t - x'^t$  à  $P(E_{-1}^-(x^t))$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si  $t$  est assez grand, on sait que  $\pi(x^t)$  appartient à  $U$ , on a donc :

$$\|x'^{t+T} - x^{t+T} - u_t\| \leq \|x'^t - x^t\|,$$

où  $(x^{t+T}, u_t)$  est l'image au temps  $T$  de  $(x^t, x'^t - x^t)$  par le flot linéarisé. On en déduit

$$\|x'^{t+T} - x^{t+T}\| \geq 2\|x'^t - x^t\|,$$

ce qui est impossible.

*Second cas : L'ensemble  $\omega(\pi(x))$  se réduit à un point.* — Dans ce cas l'ensemble  $\omega(x)$  se réduit également à un point. On pose

$$x_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^t,$$

et on considère les applications

$$\kappa : t \mapsto x^t \quad \text{et} \quad \kappa' : t \mapsto x'^t.$$

Grâce à la décomposition spectrale de  $D\xi(x_*)$ , on sait qu'il existe quatre réels  $\eta$ ,  $T$ ,  $K$  et  $K'$ , strictement positifs, avec  $8K \leq K'$ , qui vérifient la propriété suivante :

*si la distance de la droite engendrée par  $u \in E - \{0\}$  à  $P(E_0(x_*))$  (resp. à  $P(E_{-1}^-(x_*))$ ) est inférieure à  $\eta$ , alors  $\|u^T\| \leq K\|u\|$  (resp.  $\|u^T\| \geq K'\|u\|$ ), où  $(x_*, u^t)$  est l'image au temps  $t$  de  $(x_*, u)$  par le flot linéarisé.*

L'application qui à un point de  $E$  associe sa position au temps  $t$  est de classe  $C^1$  et sa différentielle en  $x_*$  est l'application

$$u \mapsto u^T.$$



On en déduit que pour  $t$  assez grand, on a :

$$\|\kappa(t+T) - x_* - u_t\| \leq K \|\kappa(t) - x_*\|$$

$$\|\kappa'(t+T) - x_* - u'_t\| \leq K \|\kappa'(t) - x_*\|$$

$$\|\kappa(t+T) - \kappa'(t+T) - u''_t\| \leq K \|\kappa(t) - \kappa'(t)\| \leq \frac{K'}{2} \|\kappa(t) - \kappa'(t)\|$$

où

$$(x_*, u_t), \quad (x_*, u'_t), \quad (x_*, u''_t)$$

sont les images respectives par le flot linéarisé au temps  $T$  de

$$(x_*, \kappa(t) - x_*), \quad (x_*, \kappa'(t) - x_*), \quad (\kappa(t), \kappa(t) - \kappa'(t)).$$

On a donc

$$\|\kappa(t+T) - x_*\| \leq 2K \|\kappa(t) - x_*\|, \quad \|\kappa'(t+T) - x_*\| \leq 2K \|\kappa'(t) - x_*\|$$

et

$$\|\kappa(t+T) - \kappa'(t+T)\| \geq \frac{K'}{2} \|\kappa(t) - \kappa'(t)\|.$$

On obtient finalement

$$\frac{\|\kappa(t + (k+1)T) - x_*\|}{\|\kappa(t + (k+1)T) - \kappa'(t + (k+1)T)\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|\kappa(t + kT) - x_*\|}{\|\kappa(t + kT) - \kappa'(t + kT)\|}$$

et

$$\frac{\|\kappa'(t + (k+1)T) - x_*\|}{\|\kappa(t + (k+1)T) - \kappa'(t + (k+1)T)\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|\kappa'(t + kT) - x_*\|}{\|\kappa(t + kT) - \kappa'(t + kT)\|},$$

pour tout entier  $k > 0$ . Si on somme ces deux inégalités, on en déduit que la suite de terme général

$$\frac{\|\kappa(t + kT) - x_*\| + \|\kappa'(t + kT) - x_*\|}{\|\kappa(t + kT) - \kappa'(t + kT)\|}$$

tend vers 0, or le terme général de cette suite est toujours supérieur ou égal à 1.  $\square$

## CHAPITRE 6

### PROPRIÉTÉS DES TORES FIXES

Nous fixons dans ce chapitre un élément  $\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1})$  de  $\mathcal{D}_n$  et nous notons  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  les champs de vecteurs définis respectivement sur  $E$  et  $\tilde{E}$  par  $\Phi$ . Nous poserons également

$$f = K_n(\Phi) = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0.$$

Nous définirons, pour tout tore fixe  $T \in \mathcal{T}$ , le champ de vecteurs

$$\tilde{\zeta}_0 = \tilde{q}_{0*}(\tilde{\xi}|_T)$$

sur  $\mathbf{T}^2$ , image du champ de vecteur  $\tilde{\xi}$  restreint à  $T$  par l'application  $\tilde{q}_0$  définie au paragraphe 1.8. Nous étudierons les propriétés de  $\tilde{\zeta}_0$  liées à la dynamique de  $f$ .

Dans le cas où  $\tilde{\xi}$  n'a pas de singularité, il n'y a qu'un tore fixe. On montre dans [L1] que le champ de vecteur  $\tilde{\zeta}_0$ , qui est sans singularité, est uniquement intégrable et que toute courbe intégrale se relève à  $\mathbf{R}^2$  en une *droite de Brouwer* de  $f$ . Nous donnerons dans ce chapitre la définition d'une droite de Brouwer et généraliserons le résultat de [L1] au cas où il y a des singularités.

#### 6.1. Lien entre les parties non enlacées de $\text{sing}(\tilde{\xi})$ et les parties non enlacées de $\text{Fix}(f)$

Soit  $P \subset E$  un plan d'enlacement  $j$  (de dimension 2) et  $i \in \mathbf{Z}$ . Puisque chacune des applications

$$(x, x') \mapsto (x, g_i(x, x')) \quad \text{et} \quad (x, x') \mapsto (x', g'_i(x, x'))$$

est un difféomorphisme bilipschitzien de  $\mathbf{R}^2$  et puisque

$$r_i : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_i, x_{i+1})$$

induit par restriction un difféomorphisme bilipschitzien de  $P$  sur  $\mathbf{R}^2$ , les applications

$$q_i : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \quad \text{et} \quad q'_i : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_i, g'_i(x_{i-1}, x_i))$$

induisent par restriction des difféomorphismes bilipschitziens de  $P$  sur  $\mathbf{R}^2$ . On notera respectivement  $Q_i$  et  $Q'_i$  ces restrictions.

L'application  $f_i$  se déduit des applications  $Q_i$  et  $Q'_i$  par la relation

$$f_i = Q'_{i+1} \circ Q_i^{-1}.$$

L'application  $Q_i \circ Q'^{-1}_i$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  qui s'écrit

$$Q_i \circ Q'^{-1}_i : (x, y) \mapsto (x, \mu_i(x, y)),$$

où

$$y < y' \implies \mu_i(x, y) < \mu_i(x, y').$$

Cette dernière propriété caractérise le fait que  $P$  est un ensemble bien enlacé. On en déduit que pour tout  $s \in [0, 1]$ , l'application

$$s \operatorname{Id} + (1-s)Q_i \circ Q'^{-1}_i$$

est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  qui laisse invariant chaque verticale. On en déduit également que l'application

$$\begin{aligned} \widehat{f}_i^s &= (s \operatorname{Id} + (1-s)Q_{i+1} \circ Q'^{-1}_{i+1}) \circ f_i \\ &= (sQ'_{i+1} + (1-s)Q_{i+1}) \circ Q_i^{-1} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  qui dévie la verticale.

Remarquons que l'on a

$$\widehat{f}_{2n-1}^0 \circ \cdots \circ \widehat{f}_0^0 = (Q_0 \circ Q_{2n-1}^{-1}) \circ \cdots \circ (Q_1 \circ Q_0^{-1}) = \operatorname{Id},$$

et

$$\widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_0^1 = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0 = f.$$

Puisque pour tout  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in P$ , on a

$$\widehat{f}_i^s(x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, sg'_i(x_i, x_{i+1}) + (1-s)g_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2})),$$

on obtient les résultats suivants :

- la première fonction  $g_i^s$  associée à  $\widehat{f}_i^s$  par la relation du paragraphe 1.5 ne dépend pas de  $s$  et reste égale à  $g_i$  ;
- toute singularité  $x \in P \cap \operatorname{sing}(\xi)$  est une singularité de  $\xi^s = \xi_{\widehat{\Phi}^s}$ , où

$$\widehat{\Phi}^s = (\widehat{f}_0^s, \dots, \widehat{f}_{2n-1}^s);$$

- l'image par  $q_0$  de toute singularité  $x \in P \cap \operatorname{sing}(\xi)$  est un point fixe  $z$  de chaque application

$$\widehat{f}^s = \widehat{f}_{2n-1}^s \circ \cdots \circ \widehat{f}_0^s;$$

- si  $P$  est fixe par le flot induit par  $\xi$ , il est également fixe par le flot induit par chaque  $\xi_s$  et on a

$$\xi^s|_P = s \xi|_P.$$

Si on suppose de plus que  $P$  est un plan d'enlacement 0, alors chaque application  $\widehat{f}_i^s - f_i$  est  $\mathbf{Z}^2$ -périodique. Si on note  $T$  le tore d'enlacement 0 relevé par  $P$  et  $X = \Sigma(T)$  l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}_T$ , l'ensemble  $Z = \tilde{q}_0(X)$  est contenu dans  $\text{Fix}(\widehat{f}^s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . C'est donc une partie non enlacée de  $\text{Fix}(f)$  (voir paragraphe 1.5). C'est en fait une partie non enlacée maximale. En effet, grâce aux propositions 5.3.1 et 2.2.1, on sait que pour tout point fixe  $z$  de  $f$  qui n'appartient pas à  $\Pi^{-1}(Z)$ , il existe  $z' \in \Pi^{-1}(Z)$  tel que  $I(z', z) \neq 0$ .

Puisque toute partie non enlacée  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est contenue dans une partie non enlacée maximale, et donc dans un tore fixe d'enlacement 0, on en déduit :

PROPOSITION 6.1.1

- (i) *L'image par  $\tilde{q}_0$  de toute partie non enlacée  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est une partie non enlacée  $Z \subset \text{Fix}(f)$ .*
- (ii) *L'image par  $\tilde{q}_0$  de toute partie non enlacée maximale  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est une partie non enlacée maximale  $Z \subset \text{Fix}(f)$ .*

On va démontrer un résultat dans l'autre sens :

PROPOSITION 6.1.2. — *Soit  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité,  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  et  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé (resp. un ensemble non enlacé maximal). Il existe alors un entier  $n \geq 0$  et un élément*

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$$

*vérifiant*

$$f = K_n(\Phi) = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0,$$

*tel que l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}_\Phi$  associé à  $Z$  soit une partie non enlacée (resp. une partie non enlacée maximale).*

*Démonstration.* — Soit  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé et  $s \mapsto f_s$  un chemin dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  défini sur  $[0, 1]$ , joignant l'identité à  $f$ , formé d'applications laissant fixe tout point de  $\Pi^{-1}(Z)$ . On sait qu'il existe  $n \geq 0$  et un chemin

$$s \mapsto \Phi_s = (f_0^s, \dots, f_{2n-1}^s)$$

dans  $\mathcal{D}_n$  vérifiant

$$\Phi_0 = (f_0^*, \dots, f_{2n-1}^*),$$

tel que pour tout  $s \in [0, 1]$ , on ait

$$f_s = f_{2n-1}^s \circ \dots \circ f_0^s,$$

voir [L1].

On note alors  $X_s \subset \text{sing}(\tilde{\xi}_{\Phi_s})$  l'ensemble associé à  $Z$ . A chaque point  $x$  de  $X_1$  est associé un chemin  $s \mapsto x_s$  dans  $E$ , aboutissant en  $x$  et formé pour tout  $s \in [0, 1]$  d'un point de  $X_s$ .

On veut montrer que  $X_1$  est non enlacé. Il suffit de le démontrer pour toute partie finie  $X' = \{x^0, \dots, x^m\}$  de  $X$ . L'ensemble formé des réels  $s \in [0, 1]$  tels que  $X'_s = \{x_s^0, \dots, x_s^m\}$  soit non enlacé est fermé. Il est également ouvert, d'après la proposition 3.4.2. Comme il contient 0, il contient également 1.

Il est évident, par la proposition 6.1.1, que  $X$  est maximal si  $Z$  est maximal.  $\square$

On déduit des propositions 6.1.2, 6.1.1 et 5.2.2, le résultat suivant :

**THÉORÈME 6.1.3.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . Toute partie non enlacée  $Z \subset \text{Fix}(f)$  est contenue dans une partie non enlacée maximale.*

On déduit également des propositions 6.1.2, 5.3.1 et 2.2.2 :

**PROPOSITION 6.1.4.** — *Si  $Z \subset \text{Fix}(f)$  est une partie non enlacée maximale alors pour tout point fixe  $z \notin \Pi^{-1}(Z)$ , il existe  $z' \in \Pi^{-1}(Z)$  tel que  $I(z, z') \neq 0$ .*

## 6.2. Une propriété des tores fixes d'enlacement 0

Soit  $P$  un plan d'enlacement 0 fixe par le flot engendré par  $\xi$ . On garde les notations du paragraphe 6.1.

Les champs de vecteurs

$$\zeta_i = Q_{i*}(\xi|_P) \quad \text{et} \quad \zeta'_i = Q'_{i*}(\xi|_P),$$

images respectives de  $\xi|_P$  par  $Q_i$  et  $Q'_i$  sont des champs de vecteurs continus définis sur le plan,  $\mathbf{Z}^2$ -périodiques et uniquement intégrables. De plus, les singularités de  $\zeta_0$  sont des points fixes de  $f$ .

On définit une application

$$\begin{aligned} [0, 2n] &\longrightarrow \mathcal{D}_n \\ s &\longmapsto \Phi^s = (f_0^s, \dots, f_{2n-1}^s) \end{aligned}$$

de la façon suivante : on pose

$$f_i^s = \begin{cases} \widehat{f}_i^0 & \text{si } s \leq 2n - i - 1, \\ \widehat{f}_i^{s-2n+i+1} & \text{si } 2n - i - 1 \leq s \leq 2n - i, \\ \widehat{f}_i^1 & \text{si } s \geq 2n - i. \end{cases}$$

On définit alors

$$f^s = f_{2n-1}^s \circ \dots \circ f_0^s.$$

Soit  $z = Q_0(x)$  une singularité de  $\zeta_0$ . Pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , on a

$$Q_i(x) = Q'_i(x) \quad \text{et} \quad f_i^s(z) = f_i(z).$$

On en déduit que  $f^s(z) = z$  pour tout  $s \in [0, 2n]$ .

Soit  $z = Q_0(x)$  un point qui n'est pas une singularité de  $\zeta_0$ . On sait que chaque application  $s \mapsto f^s(z)$  est de classe  $C^1$  sur  $[i, i+1]$ , on sait également qu'il existe un entier  $i$  tel que  $Q_i(x) \neq Q'_i(x)$ . On va calculer, pour  $s \in [2n-i-1, 2n-i]$ , le produit mixte

$$\det \left( Df^s(z) \cdot \zeta_0(z), \frac{d}{ds} f^s(z) \right).$$

On définit, pour  $i \in \mathbf{Z}$  et  $s' \in [0, 1]$  l'application

$$Q_i^{s'} = s'Q'_i + (1-s')Q_i,$$

qui envoie  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  sur

$$(x_i, s'g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) + (1-s')g_i(x_i, x_{i+1})).$$

Puisque

$$f^s = \widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_{i+1}^1 \circ (sQ'_{i+1} + (1-s)Q_{i+1}) \circ Q_0^{-1},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f^s(z) &= D \left( \widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_{i+1}^1 \right) (z_s) \cdot (Q'_{i+1}(x) - Q_{i+1}(x)) \\ &= D \left( \widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_{i+1}^1 \right) (z_s) \cdot (0, \xi_{i+1}(x)) \end{aligned}$$

où on pose

$$z_s = Q_{i+1}^{s-2n+i+1}(x).$$

De même

$$\begin{aligned} Df^s(z) \cdot \zeta_0(z) &= Df^s(Q_0(x)) \cdot (DQ_0(x) \cdot \xi(x)) \\ &= D(f^s \circ Q_0)(x) \cdot \xi(x) \\ &= D \left( \widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_{i+1}^1 \right) (z_s) \cdot (DQ_{i+1}^{s-2n+i+1}(x) \cdot \xi(x)). \end{aligned}$$

Comme la première coordonnée du vecteur

$$DQ_{i+1}^{s-2n+i+1}(x) \cdot \xi(x)$$

est  $\xi_{i+1}(x)$ , on en déduit que

$$\det (DQ_{i+1}^{s-2n+i+1}(x) \cdot \xi(x), Q'_{i+1}(x) - Q_{i+1}(x)) \geq 0.$$

Comme  $\widehat{f}_{2n-1}^1 \circ \cdots \circ \widehat{f}_{i+1}^1$  préserve l'orientation, on en déduit que

$$\det \left( Df^s(z) \cdot \zeta_0(z), \frac{d}{ds} f^s(z) \right) \geq 0,$$

avec une inégalité stricte si  $\xi_{i+1}(x) \neq 0$ .

Écrivons sous forme de proposition ce qu'on vient de montrer, en notant  $\tilde{\zeta}_0$  le champ de vecteurs sur  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $\zeta_0$  et en notant  $F^s$  le difféomorphisme du tore relevé par  $f^s$ , pour  $s \in [0, 2n]$ .

PROPOSITION 6.2.1. — *On a les propriétés suivantes :*

- (i) *le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}_0$  est continu et uniquement intégrable ;*
- (ii) *l'ensemble des singularités de  $\tilde{\zeta}_0$  est une partie non enlacée maximale  $Z \subset \text{Fix}(f)$  ;*
- (iii) *l'application  $s \mapsto f^s$  est un chemin de l'identité à  $f$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  ;*
- (iv)  *$Z \subset \text{Fix}(f^s)$ , pour tout  $s \in [0, 2n]$  ;*
- (v) *l'application  $s \mapsto F^s(z)$  est de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $[i, i+1]$ ,  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$  ;*
- (vi) *si  $z \in \mathbf{T}^2 - Z$ , l'application*

$$s \mapsto \det \left( DF^s(z) \cdot \tilde{\zeta}_0(z), \frac{d}{ds} F^s(z) \right),$$

*qui est définie sur chaque intervalle  $]i, i+1[$ ,  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , est positive ou nulle, et strictement positive sur au moins un de ces intervalles.*

### 6.3. Un théorème de translation sur le tore

Gardons les notations du paragraphe 6.2, considérons une composante connexe  $U$  de  $\mathbf{T}^2 - Z$  et notons  $\hat{U}$  le revêtement universel de  $U$ . On sait que  $\hat{U}$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^2$ . On peut faire les remarques suivantes :

- chaque difféomorphisme  $F^s$ ,  $s \in [0, 2n]$ , laisse invariant  $U$  ;
- l'isotopie restreinte  $s \mapsto F^s|_U$  se relève en une isotopie  $s \mapsto \hat{F}^s$  issue de l'identité sur  $\hat{U}$  ;
- le champ de vecteur restreint  $\tilde{\zeta}_0|_U$  se relève en un champ de vecteurs  $\hat{\zeta}$  sur  $\hat{U}$ , uniquement intégrable et sans singularité ;
- toute courbe intégrale de  $\hat{\zeta}$  est un plongement topologique propre de  $\mathbf{R}$  dans  $\hat{U}$  (puisque'il n'y a pas de singularité) ;
- toute courbe intégrale de  $\hat{\zeta}$  est envoyée le long de l'isotopie  $s \mapsto \hat{F}^s$  toujours plus à gauche ;
- toute courbe intégrale  $C$  de  $\hat{\zeta}$  est disjointe de son image par  $\hat{F}^1$  et sépare  $\hat{F}^1(C)$  et  $(\hat{F}^1)^{-1}(C)$ .

Le difféomorphisme  $\hat{F}^1$  préserve l'orientation et n'a pas de point fixe. Le théorème de translation de Brouwer nous dit que par tout point passe une *droite de Brouwer*, c'est-à-dire un plongement topologique propre  $C$  de  $\mathbf{R}$  tel que  $C$  soit disjoint de  $\hat{F}^1(C)$  et sépare  $\hat{F}^1(C)$  et  $(\hat{F}^1)^{-1}(C)$  (voir Brouwer [Br], voir également Guillou [Gu]). Toute courbe intégrale de  $\hat{\zeta}$  est donc une droite de Brouwer de  $\hat{F}^1$ .

Remarquons en particulier que si  $z \in \text{Fix}(f)$  n'appartient pas à  $Z$ , la courbe fermée  $s \mapsto F^s(z)$  n'est pas homotope à zéro dans  $\mathbf{T}^2 - Z$ . Ceci n'est pas surprenant puisque  $Z$  est une partie non enlacée maximale, d'après la proposition 6.1.1.

Les propositions 6.1.2, 6.2.1 nous permettent donc d'affirmer :

**THÉORÈME 6.3.1.** — Soit  $F$  un difféomorphisme du tore  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité,  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  et  $Z \subset \text{Fix}(f)$  une partie non enlacée maximale. Il existe un champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  sur  $\mathbf{T}^2$ , continu et uniquement intégrable et un chemin  $s \mapsto f^s$  de l'identité à  $f$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$ , tels que :

- (i) l'ensemble des singularités de  $\tilde{\zeta}$  soit  $Z$  ;
- (ii) l'ensemble  $Z$  soit inclus dans  $\text{Fix}(f^s)$ , pour tout  $s \in [0, 1]$  ;
- (iii) si  $U$  est une composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - Z$  et si  $F^s$  est le difféomorphisme du tore relevé par  $f^s$ , toute courbe intégrale du champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}|_U$  relevée au revêtement universel de  $U$  est une droite de Brouwer du revêtement naturel de  $F|_U$  obtenu en relevant à partir de l'identité l'isotopie  $s \mapsto F^s|_U$ .

#### 6.4. Une propriété des ensembles bien enlacés

On va utiliser les notations de ce chapitre pour démontrer dans le dernier paragraphe un résultat sur les ensembles non enlacés que l'on utilisera au chapitre 9. Rappelons que les ensembles bien enlacés ont été définis au paragraphe 4.1. et que  $\Pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  est le revêtement universel du tore.

**PROPOSITION 6.4.1.** — Soit  $\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$  et  $f = K_n(\Phi)$ . Soit  $X$  une partie bien enlacée de  $\tilde{E}$  et  $Z = \tilde{q}_0(X)$  son image par  $\tilde{q}_0$  dans le tore. Il existe alors une application continue

$$\Theta : Z \times [0, 2n] \longrightarrow \mathbf{T}^2,$$

telle que :

- (i) chaque application partielle  $\tilde{z} \mapsto \tilde{\Theta}(\tilde{z}, s)$  soit injective sur  $Z$  ;
- (ii) pour tout  $\tilde{z} \in Z$  et tout  $z \in \Pi^{-1}(\{\tilde{z}\})$ , le chemin  $t \mapsto \Theta(\tilde{z}, s)$  se relève en un chemin de  $z$  à  $f(z)$  ;
- (iii) pour tout  $\tilde{z} \in \text{Fix}(f)$  et tout  $s \in [0, 1]$ , on ait  $\Theta(\tilde{z}, s) = z$ .

*Démonstration.* — Il suffit de reprendre ce qui a été fait dans les paragraphes 6.1 et 6.2. Les restrictions de  $q_i$  et  $q'_i$  à  $\pi^{-1}(X)$ , notées respectivement  $Q_i$  et  $Q'_i$ , sont injectives et on peut écrire

$$f_i = Q'_{i+1} \circ Q_i^{-1}$$

sur l'ensemble  $Q_i(\pi^{-1}(X))$ .

Les formules données au paragraphe 6.1 et 6.2 définissent des applications  $\hat{f}_i^s$  et  $f_i^s$  sur  $Q_i(\pi^{-1}(X))$ . Contrairement à l'expression

$$\hat{f}^s = \hat{f}_{2n-1}^s \circ \dots \circ \hat{f}_0^s$$

qui n'a pas de sens pour  $s \in [0, 1]$ , l'application

$$f^s = f_{2n-1}^s \circ \dots \circ f_0^s$$



est bien définie, pour  $s \in [0, 2n]$ , sur

$$\Pi^{-1}(Z) = Q_0(\pi^{-1}(X)),$$

puisque  $f_i^1$  et  $\widehat{f}_i^1$  sont définies sur le plan tout entier, égales à  $f_i$ . L'application  $f^s$  commute avec les translations entières et permet de définir

$$F^s : Z \longrightarrow \mathbf{T}^2.$$

L'application

$$\Theta : (\widetilde{z}, s) \longmapsto F^s(\widetilde{z})$$

vérifie bien les trois conditions : la première condition provient de l'injectivité de chaque application  $f_i^s$ , conséquence du caractère bien enlacé de l'ensemble  $X$ .  $\square$

## CHAPITRE 7

### BIFURCATION DES TORES FIXES

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux bifurcations des tores fixes pour une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore avec des bifurcations aux points fixes de type selle-nœud. Le type de bifurcation sera lié au nombre de rotation réel des points fixes de bifurcation. Nous commencerons par définir ce nombre de rotation dans le premier paragraphe.

#### 7.1. Nombre de rotation d'un point fixe

Nous allons rappeler ce qu'est le *nombre de rotation réel* d'un point fixe  $z$  d'un difféomorphisme  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  (voir J. Mather [Ma]).

L'ensemble  $\Delta$  des demi-droites vectorielles du plan muni de sa topologie usuelle est naturellement homéomorphe au cercle  $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ . L'orientation de  $\mathbf{R}^2$  définit alors une orientation sur  $\Delta$ . Si  $z$  est un point fixe de  $f$ , la différentielle  $Df(z)$  induit un homéomorphisme  $G$  de  $\Delta$  qui préserve l'orientation et qui a donc un nombre de rotation, élément de  $\mathbf{T}^1$ .

Tout chemin  $s \mapsto f_s$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$ , de l'identité à  $f$ , formé d'applications qui laissent fixe le point  $z$ , définit une isotopie  $(G_s)_{s \in [0,1]}$  joignant l'identité (de  $\Delta$ ) à  $G$ . On peut relever cette isotopie au revêtement universel  $\hat{\Delta} \approx \mathbf{R}$  en une isotopie  $(g_s)_{s \in [0,1]}$  issue de l'identité. Le nombre de rotation de  $g_1$ , qui est un représentant réel du nombre de rotation de  $G$ , est alors indépendant du chemin  $s \mapsto f_s$ . En effet, l'ensemble des difféomorphismes de  $D^1(\mathbf{T}^2)$  qui fixent  $z$  est contractile. On l'appelle le nombre de rotation réel de  $z$  (ou plus simplement le nombre de rotation de  $z$ ). Pour tout  $\tilde{z} \in \text{Fix}(f)$ , le nombre de rotation de  $z \in \pi^{-1}(\{\tilde{z}\})$  ne dépend pas du choix de  $z$ , on peut donc définir le nombre de rotation de  $\tilde{z}$ .

Une façon équivalente de définir le nombre de rotation d'un point fixe  $z$  de  $f$  est la suivante.

Pour tout  $z' \neq z$ , on note  $D(z')$  la demi-droite engendrée par le vecteur  $z' - z$ . On compactifie  $\mathbf{R}^2 - \{z\}$  en ajoutant deux copies  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de  $\Delta$ , et en posant :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = \alpha \in \Delta_1 \quad \text{si} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k\| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} D(z_k) = \alpha;$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = \beta \in \Delta_2 \quad \text{si} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} D(z_k) = \beta.$$

Le difféomorphisme  $f$  se prolonge alors en un homéomorphisme  $\bar{f}$  du compactifié

$$\mathbf{A} = (\mathbf{R}^2 - \{z\}) \sqcup \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \approx \mathbf{T}^1 \times [0, 1],$$

égal à l'identité sur le bord  $\Delta_1$ . Le relèvement de  $\bar{f}$  au revêtement universel  $\widehat{\mathbf{A}}$  de  $\mathbf{A}$ , qui est égal à l'identité sur le bord relevé  $\widehat{\Delta}_1$  induit par restriction un homéomorphisme sur  $\widehat{\Delta}_2$  dont le nombre de rotation est exactement le nombre de rotation de  $z$ .

Dans le cas où 1 est valeur propre de  $Df(z)$ , le nombre de rotation de  $z$  est entier et peut être caractérisé ainsi : si  $f' \in D^1(\mathbf{T}^2)$  est proche de  $f$  et si  $z'$  et  $z''$  sont deux points fixes de  $f'$  proches de  $z$ , alors le nombre d'enlacement de ces deux points fixes est égal au nombre de rotation de  $z$ .

## 7.2. Nombre de rotation et nombre d'enlacement

On va montrer le résultat suivant, dont on connaît l'analogue pour les matrices de Jacobi (voir Mather [Ma] ou Angenent [An1]).

**PROPOSITION 7.2.1.** — *Soit  $\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$  et  $f = K_n(\Phi)$ . La différentielle  $D\xi_\Phi(x)$  en une singularité  $x$  a une valeur propre nulle si et seulement si la différentielle  $Df(z)$  au point fixe  $z = q_0(x)$  a une valeur propre égale à 1. De plus, le noyau de  $D\xi_\Phi(x)$  est contenu dans l'espace  $E_j(x)$ , où  $j$  est le nombre de rotation de  $z$ .*

*Démonstration.* — Nous montrons la proposition en adaptant les arguments de [Ma], [An1] et également de MacKay et Starck [MS].

Commençons par prouver la première assertion. Si  $u = (u_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  est un vecteur non nul du noyau de  $D\xi_\phi(x)$ , il appartient à un espace  $E_j(x)$ , le vecteur

$$v = Dq_0(x) \cdot u$$

de  $\mathbf{R}^2$  est alors non nul et fixe par  $Df(z)$ . Réciproquement, si  $Df(z)$  a un vecteur fixe  $v \in \mathbf{R}^2$ , si  $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  est la suite définie par les relations

$$z_0 = z, \quad z_{i+1} = f^i(z),$$

et si  $(v_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  est la suite définie par les relations

$$v_0 = v, \quad v_{i+1} = Df_i(z_i) \cdot v_i,$$

alors le vecteur  $u = (p_1(v_i))_{i \in \mathbf{Z}}$  appartient au noyau de  $D\xi_\phi(x)$ .

Démontrons maintenant la seconde assertion. On peut trouver  $f' \in D^1(\mathbf{T}^1)$  proche de  $f$ , laissant fixes deux points  $z'$  et  $z''$  proches de  $z$ , puis écrire

$$f' = f'_{2n-1} \circ f_{2n-2} \circ \cdots \circ f_0,$$

où

$$\Phi' = (f_0, \dots, f_{2n-2}, f'_{2n-1})$$

est proche de  $\Phi$ . Le champ de vecteurs  $\xi_{\Phi'}$  a alors deux singularités  $x'$  et  $x''$  proches de  $x$  et la droite passant par ces deux points est nécessairement proche de  $E_j(x)$ ; ainsi l'entier  $j = L_1(x', x'')$ , qui est le nombre d'enlacement de  $z'$  et  $z''$ , est égal au nombre de rotation de  $z$ .  $\square$

### 7.3. Famille à un paramètre avec des bifurcations de type selle-nœud

On se donne dans la suite du chapitre 7 une famille  $(f_s)_{s \in [0,1]}$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) l'application  $(s, z) \mapsto f_s(z)$  est de classe  $C^1$  ;
- (ii) chaque ensemble  $\text{Fix}(f_s)$  est fini ;
- (iii) l'ensemble

$$M = \{(s, z) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \mid f_s(z) = z\}$$

est une sous-variété de classe  $C^1$  de dimension 1, dont le bord est contenu dans  $\{0, 1\} \times \mathbf{R}^2$  ;

- (iv) l'ensemble  $M'$  des points verticaux de  $M$ , c'est-à-dire des points  $(s, z)$  où le vecteur tangent est de la forme  $(0, v)$  est fini et se projette injectivement sur un ensemble  $S$  de  $[0, 1]$  ;
- (v) si  $(0, v)$  est un vecteur tangent à  $M$  en un point vertical  $(s, z)$ , alors  $v$  est un vecteur fixe de  $Df_s(z)$  ;
- (vi) en un point vertical  $(s, z)$  la courbe  $M$  se trouve localement à droite ou à gauche du plan  $\{s\} \times \mathbf{R}^2$  ;
- (vii) si  $(s, z)$  n'est pas un point vertical, alors 1 n'est pas valeur propre de  $Df_s(z)$ .

On peut relever l'isotopie  $(f_s)_{s \in [0,1]}$  en une isotopie

$$(\Phi_s)_{s \in [0,1]} = (f_0^s, \dots, f_{2n-1}^s)$$

de  $\mathcal{D}_n$  telle que

$$f_s = K_n(\Phi_s) = f_{2n-1}^s \circ \cdots \circ f_0^s$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ . On peut supposer de plus qu'il existe une subdivision  $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $[0, 1]$ , telle que  $S' = \{s_0, \dots, s_k\}$  soit disjoint de  $S$  et que les applications

$$(s, z) \mapsto f_i^s(z)$$

soient de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $[s_j, s_{j+1}]$ .

Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_{\Phi_s}$  défini sur  $\tilde{E}$  a un nombre fini de singularités et l'ensemble

$$N = \left\{ (s, x) \in [0, 1] \times \tilde{E} \mid \tilde{\xi}_s(x) = 0 \right\}$$

est une variété topologique de dimension 1 dont le bord est dans  $\{0, 1\} \times \tilde{E}$ . De façon plus précise :

- la variété  $N$  s'écrit au voisinage de tout point  $(s, x)$  tel que  $s \notin S \cup S'$  comme le graphe d'une application

$$\psi : [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \longrightarrow \tilde{E}$$

de classe  $C^1$  ;

- la variété  $N$  s'écrit au voisinage de tout point  $(s, x)$  tel que  $s \in S'$  comme le graphe d'une application

$$\psi : [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \longrightarrow \tilde{E}$$

qui est de classe  $C^1$  sur  $[s - \varepsilon, s]$  et sur  $[s, s + \varepsilon]$  ;

- tout point  $(s, x) \in N$  tel que  $s \in S$  soit un point vertical, la variété  $N$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $(s, x)$  localement à droite ou à gauche de  $\{s\} \times \tilde{E}$  et la tangente au point est dirigée par un vecteur  $(0, u)$ , où  $u$  appartient au noyau de  $D\tilde{\xi}_s(x)$  ;
- si  $(s, x) \in N$  n'est pas un point vertical de  $N$ , alors 0 n'est pas valeur propre de  $D\tilde{\xi}_s(x)$ .

#### 7.4. Bifurcation des tores fixes

Pour tout  $s \in S$  notons  $z(s)$  l'unique point fixe de bifurcation de la famille  $(F_s)_{s \in [0, 1]}$  relevée par la famille  $(f_s)_{s \in [0, 1]}$ , notons  $\rho(s) \in \mathbf{Z}$  le nombre de rotation au point fixe  $z(s)$ , notons  $x(s)$  l'unique singularité de bifurcation de la famille  $(\tilde{\xi}_s)_{s \in [0, 1]}$  au point  $s$ . Notons  $\mathcal{T}'_s$  l'ensemble des tores fixes d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}_s$ . Rappelons que  $\mathcal{T}'_s$  est contenu dans l'espace topologique  $\mathcal{T}^*$ , formé des sous-variétés  $T$  de classe  $C^1$  telles que chaque application

$$r_k : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_k, x_{k+1})$$

soit un difféomorphisme de  $T$  sur  $\mathbf{T}^2$ , muni de la  $C^1$ -topologie. Nous définissons alors

$$\mathcal{N} = \{(s, T) \in [0, 1] \times \mathcal{T}^* \mid T \in \mathcal{T}'_s\},$$

et pour tout couple  $c = (s, T) \in \mathcal{N}$  nous notons

$$\tilde{\zeta}_c = q_{0*}(\tilde{\xi}_{s|T})$$

le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{T}^2$  dont nous avons étudié les propriétés au paragraphe 6.

Nous allons démontrer le résultat suivant.

## PROPOSITION 7.4.1

- (i) *L'ensemble  $\mathcal{N}$  est une variété topologique dont le bord est contenu dans  $\{0, 1\} \times \mathcal{T}^*$ .*  
(ii) *Au voisinage d'un couple  $c_0 = (s_0, T_0) \in \mathcal{N}$  tel que  $s_0 \notin S$ , la variété  $\mathcal{N}$  est le graphe d'une application continue*

$$\chi : [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathcal{T}^*;$$

*si on pose  $c(s) = (s, \chi(s))$ , il n'y a pas de bifurcation aux singularités pour la famille  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c(s)}$ .*

- (iii) *Au voisinage d'un couple  $c_0 = (s_0, T_0) \in \mathcal{N}$  tel que  $s_0 \in S$  et  $x(s_0) \notin T_0$ , la variété  $\mathcal{N}$  est le graphe d'une application continue*

$$\chi : [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathcal{T}^*;$$

*si on pose  $c(s) = (s, \chi(s))$ , il n'y a pas de bifurcation aux singularités de la famille  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c(s)}$ .*

- (iv) *Au voisinage d'un couple  $c_0 = (s_0, T_0) \in \mathcal{N}$  tel que  $s_0 \in S$ ,  $x(s_0) \in T_0$  et  $\rho(s_0) = 0$ , la variété  $\mathcal{N}$  est le graphe d'une application continue*

$$\chi : [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathcal{T}^*;$$

*si on pose  $c(s) = (s, \chi(s))$ , il y a une bifurcation de type selle-nœud en la singularité  $z(s_0)$  de  $\tilde{\zeta}_{c(s_0)}$  pour la famille  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c(s)}$ .*

- (v) *Tout couple  $c_0 = (s_0, T_0) \in \mathcal{N}$  tel que  $s_0 \in S$ ,  $x(s_0) \in T_0$  et  $\rho(s_0) \neq 0$ , est un point vertical; au voisinage de  $c_0$  la variété  $\mathcal{N}$  est localement à droite ou à gauche de  $\{s_0\} \times \mathcal{T}^*$ ; il n'y a pas de bifurcation aux singularités pour la famille  $u \mapsto \tilde{\zeta}_{c(u)}$ , si  $u \mapsto c(u)$  est un paramétrage d'un voisinage de  $c_0$  dans  $\mathcal{N}$  défini sur un intervalle  $I$ .*

*Démonstration.* — Nous allons étudier quatre cas. Nous utiliserons souvent les résultats suivants.

- L'application  $c \mapsto \tilde{\zeta}_c$  est continue, si on munit l'ensemble des champs de vecteurs continus sur  $\mathbf{T}^2$  de la topologie de la convergence uniforme.
- Soit  $I$  un intervalle disjoint de  $S$  et

$$x^k : s \longmapsto x^k(s), \quad 1 \leq k \leq K,$$

des applications continues de  $I$  dans  $\tilde{E}$  formées pour tout  $s$  d'une singularité de  $\tilde{\xi}_s$ . Si l'un des ensemble  $\{x_s^1, \dots, x_s^K\}$  est un ensemble non enlacé maximal de  $\tilde{\xi}_s$ , il en est ainsi de tous ces ensembles. Il suffit d'utiliser les arguments de connexité sur les ensembles non enlacés, que l'on a déjà employés et qui utilisent la proposition 3.4.1. Si on note  $T_s$  le tore fixe qui contient  $\{x_s^1, \dots, x_s^K\}$ , l'application  $s \mapsto T_s$  est alors continue.

*Étude de  $\mathcal{N}$  au voisinage d'un point  $c_0 = (s_0, T_0)$  tel que  $s_0 \notin S$ .* — On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \cap S = \emptyset$ . A chaque singularité  $x$  de  $\tilde{\xi}_{s_0}$  est associé un unique chemin  $s \mapsto x_s$  défini sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  formé, pour tout  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ , d'une singularité de  $\tilde{\xi}_s$ , et tel que  $x_{s_0} = x$ . L'ensemble

$$X_s = \{x_s, x \in \Sigma(T_0)\}$$

est un ensemble bien enlacé maximal de  $\tilde{\xi}_s$ . Si on note  $T_s = \chi(s) \in \mathcal{T}'_s$  le tore fixe de  $\tilde{\xi}_s$  qui contient  $X_s$ , l'application  $\chi$  est continue. L'application  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c(s)}$  est également continue, il n'y a pas de bifurcation aux singularités.

*Étude de  $\mathcal{N}$  au voisinage d'un point  $c_0 = (s_0, T_0)$  tel que  $s_0 \in S$  et  $x(s_0) \notin T_0$*

On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \cap S = \{s_0\}$ . A chaque singularité  $x \neq x(s_0)$  de  $\tilde{\xi}_{s_0}$  est associé un unique chemin  $s \mapsto x_s$  défini sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  formé, pour tout  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ , d'une singularité de  $\tilde{\xi}_s$ , et tel que  $x_{s_0} = x$ . On en déduit que l'ensemble

$$X_s = \{x_s, x \in \Sigma(T_0)\}$$

est un ensemble bien enlacé maximal de  $\tilde{\xi}_s$ . On conclut comme dans le premier cas.

*Étude de  $\mathcal{N}$  au voisinage d'un point  $c_0 = (s_0, T_0)$  tel que  $s_0 \in S$ ,  $x(s_0) \in T_0$  et  $\rho_0(s_0) = 0$ .* — On suppose qu'au voisinage de  $(s_0, x(s_0))$ , la variété  $N$  est à droite de  $\{s_0\} \times \tilde{E}$ . On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \cap S = \{s_0\}$ .

À chaque singularité  $x \neq x(s_0)$  de  $\tilde{\xi}_{s_0}$  est associé un unique chemin  $s \mapsto x_s$  défini sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  formé, pour tout  $s$ , d'une singularité de  $\tilde{\xi}_s$ , et tel que  $x_{s_0} = x$ . Il existe en plus deux chemins  $s \mapsto x_s^-$  et  $s \mapsto x_s^+$ , définis sur  $[s_0, s_0 + \varepsilon]$ , formés pour tout  $s$  d'une singularité de  $\tilde{\xi}_s$ , et tels que  $x_{s_0}^- = x_{s_0}^+ = x(s_0)$ .

Étudions d'abord ce qui se passe à droite de  $s_0$ . On a vu au paragraphe 7.2 que la tangente à  $N$  au point  $(s_0, x(s_0))$  est dirigée par le vecteur  $(0, u)$ , où  $u \in E_0(x(s_0))$ . La projection de  $N$  dans  $\tilde{E}$  est donc tangente en  $x(s_0)$  au tore  $T_0$ . Les propositions 3.4.2 et 3.4.3 impliquent que pour  $s \geq s_0$  assez proche de  $s_0$ , l'ensemble

$$X_s = \{x_s, x \in \Sigma(T_0) - \{x(s_0)\}\} \cup \{x_s^-, x_s^+\}$$

est un ensemble non enlacé maximal. Par prolongement, c'est encore vrai pour tout  $s \in ]s_0, s_0 + \varepsilon]$ . Le tore fixe  $T_s = \chi(s)$  qui contient  $X_s$  dépend continûment de  $s$ , il est égal  $T_0$  quand  $s = s_0$ .

Étudions maintenant ce qui se passe à gauche de  $s_0$ . Pour tout  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0[$ , l'ensemble

$$X_s = \{x_s, x \in \Sigma(T_0) - \{x(s_0)\}\}$$

est non enlacé. Montrons qu'il est maximal et pour cela supposons que  $s$  soit proche de  $s_0$ . Il suffit de montrer que pour tout

$$x' \in \text{sing}(\xi_{s_0}) - \pi^{-1}(T_0),$$

il existe

$$x \in \pi^{-1}(\Sigma(T_0) - \{x(s_0)\})$$

tel que  $L_1(x, x') \neq 0$ .

Pour  $s \in ]s_0, s_0 + \varepsilon]$ , les singularités  $x_s^-$  et  $x_s^+$  de  $\tilde{\xi}_s|_{T_s}$  sont non dégénérées et ont donc un indice égal à  $+1$  ou  $-1$ . L'indice de la singularité  $x(s_0)$  de  $\tilde{\xi}_{s_0}|_{T_0}$ , qui est la somme de ces deux indices, est donc un entier pair. La fonction  $x \mapsto L_1(x, x')$  n'est pas entièrement définie sur  $P_0 = \pi^{-1}(T_0)$  et prend donc, par la proposition 2.2.2, des valeurs strictement positives ou strictement négatives. Limitons-nous au second cas et notons  $j$  la valeur minimale prise par cette fonction. Nous savons alors que l'ensemble

$$O_j = \{x \in P_0 \mid x - x' \in W_j\}$$

est non vide et borné ; nous savons également que c'est un attracteur et que sa frontière est une variété topologique, cela grâce à la proposition 2.2.2 ; nous savons de plus qu'il est simplement connexe grâce à la proposition 4.3.1. On en déduit que la somme des indices des singularités contenues dans chaque composante connexe de  $O_i$  est égale à  $+1$ . En particulier, chaque composante connexe contient une singularité dont l'image par  $\pi$  n'est pas  $x_0$ .

Pour  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0[$ , notons  $T_s = \chi(s) \in \mathcal{T}'_s$  le tore fixe qui contient  $X_s$ . La fonction  $\chi$  est continue sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0[$  et a pour limite  $T_0$  quand  $s$  tend vers  $s_0$ . La fonction  $\chi$  est donc continue sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  : son graphe est un voisinage de  $c_0$  dans  $\mathcal{N}$ . Si on pose  $c(s) = (s, T_s)$ , il y a une bifurcation de type selle-nœud en la singularité  $z(s_0)$  de  $\tilde{\zeta}_{c_0}$  pour la famille  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c(s)}$  : il n'y a pas de singularité proche de  $z(s_0)$  quand  $s$  est à gauche de  $s_0$ , il y en a deux non dégénérées, quand  $s$  est à droite de  $s_0$ .

*Étude de  $\mathcal{N}$  au voisinage d'un point  $c_0 = (s_0, T_0)$  tel que  $s_0 \in S$ ,  $x(s_0) \in T_0$  et  $\rho_0(s_0) \neq 0$ .* — On suppose qu'au voisinage de  $c(s_0, x(s_0))$ , la variété  $N$  est à droite de  $\{s_0\} \times \tilde{E}$ . On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \cap S' = \{s_0\}$ .

Là encore, on peut associer à chaque singularité  $x \neq x(s_0)$  un chemin  $s \mapsto x_s$  défini sur  $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  et à  $x(s_0)$  deux chemins  $s \mapsto x_s^-$  et  $s \mapsto x_s^+$ , définis sur  $[s_0, s_0 + \varepsilon]$  vérifiant les propriétés décrites dans le cas précédent.

Étudions ce qui se passe à droite de  $s_0$ . La projection de  $N$  dans  $\tilde{E}$  est dirigée par un vecteur  $u \in E_j(x(s_0))$ , où  $j = \rho(s_0) \neq 0$  : on en déduit que  $\tilde{L}_1(x_s^-, x_s^+) = j$  pour  $s$  proche de  $s_0$ . Les ensembles

$$X_s^- = \{x_s, x \in \Sigma(T_0) - \{x(s_0)\}\} \cup \{x_s^-\}$$

et

$$X_s^+ = \{x_s, x \in \Sigma(T_0) - \{x(s_0)\}\} \cup \{x_s^+\}$$

sont donc des ensembles non enlacés maximaux de  $\tilde{\xi}_s$  si  $s \in [s_0, s_0 + \varepsilon]$ . On note  $T_s^- \in \mathcal{T}'_s$  (resp.  $T_s^+ \in \mathcal{T}'_s$ ) le tore fixe qui contient  $X_s^-$  (resp.  $X_s^+$ ). Les applications

$$\chi^- : s \mapsto T_s^- \quad \text{et} \quad \chi^+ : s \mapsto T_s^+$$



sont continues, distinctes en tout point sauf en  $s_0$  ou elles valent  $T_0$ .

Étudions maintenant ce qui se passe à gauche de  $s_0$ . D'après les propriétés spectrales de  $D\xi(x(s_0))$ , données par exemple par la proposition 3.2.1, on sait que  $x(s_0)$  est un puits du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}_{s_0|T_0}$  si  $j < 0$  et une source si  $j > 0$ . Ainsi, si  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  est proche de  $s_0$ , tout tore fixe de  $\tilde{\xi}_s$  proche de  $T_0$  contient une singularité proche de  $x(s_0)$ . Ceci est impossible si  $s < s_0$ . Ainsi l'ensemble

$$X_s = \{x_s, x \in \Sigma(T_0) - \{x(s_0)\}\}$$

est un ensemble non enlacé non maximal de  $\tilde{\xi}_s$  si  $s \in [s_0 - \varepsilon, s_0[$ .

Au voisinage de  $c_0$ , l'ensemble  $\mathcal{N}$  est la réunion des graphes de  $\chi^-$  et de  $\chi^+$ ; c'est une variété topologique en ce point. Remarquons, en posant  $c^-(s) = (s, T_s^-)$  et  $s_s^+ = (s, T_s^+)$ , qu'il n'y a pas de bifurcation aux singularités pour les familles  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c^-(s)}$  et  $s \mapsto \tilde{\zeta}_{c^+(s)}$ . Dans le cas où  $j < 0$ ,  $\tilde{q}_0(x_s^-)$  est un puits de  $\tilde{\zeta}_{c^-(s)}$  et  $\tilde{q}_0(x_s^+)$  un puits de  $\tilde{\zeta}_{c^+(s)}$ . Dans le cas où  $j > 0$ , ce sont des sources.  $\square$

## CHAPITRE 8

### ÉTUDE DES ITÉRÉS

On considère dans ce chapitre un difféomorphisme  $F$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité, un relèvement  $f$  de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ , et trois entiers premiers entre eux  $p$ ,  $p'$  et  $q$ , avec  $q > 0$ . On va étudier le relèvement  $f^q - (p, p')$  de  $F^q$ .

On écrit

$$f = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0,$$

où

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n,$$

et on définit la suite  $(f_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  par la relation de périodicité  $f_{i+2n} = f_i$ . Enfin, on note  $g_i$  et  $g'_i$  les applications associées à  $f_i$  (voir paragraphe 1.6).

#### 8.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$

On définit une suite  $(a_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  en posant

$$\begin{cases} a_i = p & \text{si } i \text{ est pair,} \\ a_i = p + p' & \text{si } i \text{ est impair;} \end{cases}$$

on considère l'espace affine

$$E = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2nq} = x_i + a_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\},$$

ainsi que l'espace vectoriel associé

$$E' = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2nq} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}.$$

On définit sur  $E$  un champ de vecteurs

$$\xi : x \longmapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbf{Z}},$$

c'est-à-dire une application de  $E$  dans  $E'$ , en posant

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}).$$

Ce champ de vecteurs est invariant par les translations :

$$\begin{aligned}\tau_0 : E &\longrightarrow E, (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longrightarrow \left( x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}}, \\ \tau_1 : E &\longrightarrow E, (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longrightarrow \left( x_i + \frac{1}{2}(1 - (-1)^i) \right)_{i \in \mathbf{Z}},\end{aligned}$$

ainsi que par le décalage

$$\varphi : E \longrightarrow E, \quad (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longrightarrow (x_{i+2n})_{i \in \mathbf{Z}}.$$

Remarquons que  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  et  $\varphi$  commutent deux à deux et qu'on a

$$\varphi^q = \tau_0^p \circ \tau_1^{p+p'}.$$

Le champ de vecteurs  $\xi$  définit naturellement un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur

$$\tilde{E} = E/[\tau_0, \tau_1] \approx \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2nq-2},$$

invariant par l'application périodique  $\tilde{\varphi}$  induite par  $\varphi$ .

Pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , on définit

$$q_i : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \quad \text{et} \quad q'_i : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_i, g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i));$$

on sait alors que  $q_0$  induit une bijection entre l'ensemble des singularités de  $\xi$  et l'ensemble des points  $z \in \mathbf{R}^2$  vérifiant

$$f^q(z) = z + (p, p').$$

## 8.2. Propriétés dynamiques des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$ pour $f^q - (p, p')$

L'application

$$f^* : (x, y) \longmapsto \left( x + \frac{p}{q}, y + \frac{p'}{q} \right)$$

s'écrit

$$f^* = f_{2n-1}^* \circ \cdots \circ f_0^*,$$

où la suite  $(f_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$  est définie comme suit :

$$\begin{cases} f_i^* : (x, y) \longmapsto (x + y, y) & \text{si } i \text{ est pair,} \\ f_i^* : (x, y) \longmapsto \left( x - y + \frac{p}{nq}, y + \frac{p'}{nq} \right) & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le  $2n$ -uplet

$$\Phi^* = (f_0^*, \dots, f_{2n-1}^*)$$

appartient alors à  $\mathcal{D}_n$ .

Le champ de vecteurs  $\xi^*$  défini sur  $E$  associé à  $\Phi^*$  est un champ de gradient linéaire et l'ensemble des singularités est un plan affine normalement hyperbolique dont les variétés stables et instables sont de dimension  $nq + 1$ . On peut écrire

$$\xi = \xi^* + \beta$$

où  $\beta$  est  $\mathbf{Z}^{2nq}$ -périodique, on en déduit que la réunion  $\Lambda$  des orbites bornées de  $\tilde{\xi}$  est compacte et non vide.

La fonction

$$L : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq 2nq-1} (-1)^i \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1}),$$

est définie sur la partie ouverte

$$W = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E' \mid x_i = 0 \implies x_{i-1}x_{i+1} > 0\},$$

et on peut définir, là encore, les ensembles  $W_j$ ,  $W_j^+$  et  $W_j^-$ .

À partir de  $L$  on peut définir, comme dans le chapitre 2, une fonction  $L_1$  sur  $E \times E$  et la fonction  $(x, u) \mapsto L(u)$  sur les fibrés tangents et projectifs  $E \times E'$  et  $E \times P(E')$ . Ces fonctions vérifient des résultats analogues aux propositions 2.2.2 et 2.4.2. On en déduit que l'on a une décomposition du fibré tangent  $E \times E'$  similaire à celle donnée par la proposition 3.2.1. En particulier, on a une décomposition

$$E' = E_{[-nq/2]} \oplus \cdots \oplus E_{[nq/2]}$$

donnée par le champ  $\tilde{\xi}^*$ , où les  $E_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E'$  de dimension 2 (ou 1 dans les cas exceptionnels).

On considère la suite  $(x_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$  de  $E$  définie par les égalités

$$x_{2j}^* = \frac{jp}{nq} \quad \text{et} \quad x_{2j+1}^* = \frac{j(p+p')}{nq}.$$

On note alors  $\mathcal{G}_j^-$  l'ensemble des applications

$$\psi : E_{[-nq/2]} \oplus \cdots \oplus E_j \longrightarrow E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_{[nq/2]},$$

invariantes par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  si  $j \geq 0$ , et telles que la droite vectorielle passant par deux points distincts du graphe

$$G_\psi = \{x^* + x + \varphi(x), \quad x \in E_{[-nq/2]} \oplus \cdots \oplus E_j\}$$

soit contenue dans  $W_j^-$ .

On définit de façon analogue un ensemble  $\mathcal{G}_j^+$ , puis des ensembles  $\widehat{\mathcal{G}}_j^-$  et  $\widehat{\mathcal{G}}_j^+$  invariants par le flot. On peut définir ensuite la notion de plan d'enlacement  $j$ ; de tore d'enlacement 0; d'ensemble bien enlacé; d'ensemble de singularités non enlacé. Tous ces ensembles correspondent au relèvement  $f^q - (p, p')$  de  $F^q$ . On sait que l'ensemble  $\mathcal{T}$  des tores d'enlacement 0 et d'orbites bornées est compact, non vide, et invariant par le flot, et que la réunion des éléments de  $\mathcal{T}$  est exactement  $\Lambda$ . On sait aussi que

l'application  $\Sigma$  qui à  $T \in \mathcal{T}$  associe  $\text{sing}(\tilde{\xi}) \cap T$  prend ses valeurs dans l'ensemble des parties non enlacées et induit une bijection entre les tores fixes et les ensembles non enlacés maximaux.

### 8.3. Ensembles $\varphi$ -non enlacés

L'application  $\tilde{\varphi}$  induit une application périodique du même nom sur  $\mathcal{T}$ , qui commute avec le flot ; l'ensemble  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  des tores invariants par  $\tilde{\varphi}$  est donc compact et invariant par le flot. On dira qu'un ensemble de singularités de  $\tilde{\xi}$  est  $\varphi$ -non enlacé s'il est contenu dans un élément de  $\mathcal{T}'$  et on définira de façon naturelle un ensemble  $\varphi$ -non enlacé maximal. Tout ensemble  $\varphi$ -non enlacé est un ensemble non enlacé invariant par  $\tilde{\varphi}$ .

Si  $T \in \mathcal{T}'$  est fixe, l'ensemble  $\Sigma(T)$  est maximal dans  $\Sigma(\mathcal{T})$  et donc dans  $\Sigma(\mathcal{T}')$ . Si  $T \in \mathcal{T}'$  n'est pas fixe,  $\Sigma(T)$  n'est pas maximal dans  $\Sigma(\mathcal{T})$ . Nous allons voir dans la proposition suivante qu'il n'est pas non plus maximal dans  $\Sigma(\mathcal{T}')$

**PROPOSITION 8.3.1.** — *Un tore  $T \in \mathcal{T}'$  est fixe par le flot si et seulement si  $\Sigma(T)$  est maximal dans  $\Sigma(\mathcal{T}')$ .*

*Démonstration.* — Supposons que  $T \in \mathcal{T}'$  ne soit pas fixe et reprenons la démonstration de la proposition 5.2.1. Regardons attentivement le début la deuxième étape, en gardant les mêmes notations. Dans le cas où  $\omega(\tilde{x})$  contient une singularité  $\tilde{x}'$ , le tore  $T'$  que l'on construit est également invariant par  $\tilde{\varphi}$  et la démonstration est terminée. Dans l'autre cas, où  $\omega(\tilde{x})$  contient une orbite fermée  $C$ , on considère cette fois-ci l'ensemble  $D'$  des points  $x' \in D$  tels que

$$\{x', \dots, \varphi^{q-1}(x')\} \cup \pi^{-1}(X)$$

soit contenu dans un graphe  $G \subset \mathcal{G}_0^-$  et dans un graphe  $G' \subset \mathcal{G}_0^+$ , tous deux invariants par  $\varphi$ . Cet ensemble est non vide puisqu'il contient  $C$ , il est clairement fermé, il suffit de montrer qu'il est ouvert dans  $D$ .

Cela provient des remarques suivantes :

- puisque  $p$ ,  $p'$  et  $q$  sont premiers entre eux, les courbes  $\varphi^k(C)$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , sont disjointes deux à deux et  $\varphi^k(C)$  est à l'extérieur de  $\varphi^{k'}(C)$  si  $k \neq k'$  ;
- si  $x$  est à l'intérieur de  $C$ , alors  $\varphi^k(x)$  est à l'intérieur de  $\varphi^k(C)$  et donc à l'extérieur de  $C$  pour  $k$  non nul ;
- l'ensemble  $\pi(\{x, \dots, \varphi^{q-1}(x)\}) \cup X$  est bien enlacé.

□

**COROLLAIRE 8.3.2.** — *Pour toute partie  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $X$  est un ensemble  $\varphi$ -non enlacé maximal ;
- $X$  est un ensemble non enlacé maximal invariant par  $\tilde{\varphi}$ .

*Démonstration.* — Tout ensemble non enlacé maximal  $X$  invariant par  $\tilde{\varphi}$  est contenu dans un tore fixe  $T \in \mathcal{T}$ . Puisque  $\tilde{\varphi}(T)$  et  $T$  ont mêmes singularités, on a  $\tilde{\varphi}(T) = T$  d'après la proposition 5.2.1., ainsi  $X$  est un ensemble  $\varphi$ -non enlacé maximal. La réciproque est évidente.  $\square$

#### 8.4. Correspondance avec les ensembles $f$ -non enlacés

Nous allons voir le lien avec les parties

$$Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'))$$

qui sont  $f$ -non enlacées. Celles-ci ont été définies au paragraphe 1.5.

PROPOSITION 8.4.1. — *L'image par  $\tilde{q}_0$  d'un ensemble de singularités  $\varphi$ -non enlacé (resp.  $\varphi$ -non enlacé maximal) est une partie  $f$ -non enlacée (resp.  $f$ -non enlacée maximale) de  $\text{Fix}(f^q - (p, p'))$ .*

*Démonstration.* — On va reprendre les notations du paragraphe 6.1. Considérons un tore  $T$  d'enlacement 0 invariant par  $\tilde{\varphi}$  et posons  $P = \pi^{-1}(T)$ . Les restrictions respectives  $Q_i$  et  $Q'_i$  de  $q_i$  et  $q'_i$  à  $P$  vérifient

$$Q_{i+2n} = Q_i \circ \varphi \quad \text{et} \quad Q'_{i+2n} = Q'_i \circ \varphi.$$

On définit, comme dans le paragraphe 6.1,

$$\hat{f}_i^s = (sQ'_{i+1} + (1-s)Q_{i+1}) \circ Q_i^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}^s = (\hat{f}_0^s, \dots, \hat{f}_{2n-1}^s) \in \mathcal{D}_n.$$

L'égalité

$$f = \hat{f}_{2n-1}^1 \circ \dots \circ \hat{f}_0^1$$

est encore vérifiée. Le difféomorphisme

$$\hat{f} = \hat{f}_{2n-1}^0 \circ \dots \circ \hat{f}_0^0$$

vérifie

$$\hat{f}^q(z) = z + (p, p'),$$

pour tout  $z \in \mathbf{R}^2$ , et est conjugué à  $\varphi|_P$  par  $Q_0$ . En particulier le champ de vecteurs

$$\zeta_0 = Q_{0*}(\xi|_P)$$

est invariant par  $\hat{f}$ .

L'isotopie  $(\hat{f}_s)_{s \in [0,1]}$ , où

$$\hat{f}_s = \hat{f}_{2n-1}^s \circ \dots \circ \hat{f}_0^s,$$

entre  $\hat{f}$  et  $f$  laisse invariante les singularités de  $\zeta_0$ . Ainsi, l'image de  $\Sigma(T)$  par  $\tilde{q}_0$  est une partie  $f$ -non enlacée. Si  $\Sigma(T)$  est une partie  $\varphi$ -non enlacée maximale, c'est-à-dire si  $T$  est fixe, l'image par  $\tilde{q}_0$  est une partie non enlacée maximale.  $\square$

Énonçons maintenant la proposition inverse.

PROPOSITION 8.4.2. — Soient  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . Soient  $p, p'$  et  $q$  trois entiers premiers entre eux, avec  $q > 0$ , et  $Z$  une partie de  $\text{Fix}(f^q - (p, p'))$  qui est  $f$ -non enlacée (resp.  $f$ -non enlacée maximale). Il existe alors  $n \geq 0$  et

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$$

vérifiant

$$f = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0,$$

tel que l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}_\Phi$  associé à  $Z$  soit une partie non enlacée (resp. une partie non enlacée maximale).

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 6.1.2 presque mot à mot en appliquant les lemmes de perturbation à des graphes de  $\mathcal{G}_0^-$  et  $\mathcal{G}_0^+$  qui sont invariants par  $\tilde{\varphi}$ .  $\square$

En particulier, grâce aux propositions 8.3.1, 8.4.1 et 8.4.2, on obtient :

THÉORÈME 8.4.3. — Soit  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . Soient  $p, p'$  et  $q$  trois entiers premiers entre eux avec  $q > 0$ .

- (i) Toute partie  $Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'))$  qui est  $f$ -non enlacée est contenue dans une partie  $f$ -non enlacée maximale.
- (ii) Les parties  $Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'))$  qui sont  $f$ -non enlacées maximales, sont les parties non enlacées maximales invariantes par  $F$ .

### 8.5. Un théorème de translation dans le cas périodique

Soit  $T$  un tore d'enlacement 0 invariant par  $\tilde{\varphi}$  et fixe par le flot. On pose  $P = \pi^{-1}(T)$ , on reprend les notations du paragraphe 6.2 et on note  $\tilde{\zeta}_0$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{T}^2$  et relevé par  $\zeta_0$ . On peut construire par les mêmes formules que dans le paragraphe 6.2 une isotopie  $(f^s)_{s \in [0, 2n]}$  de  $\hat{f}$  à  $f$ . En notant  $F^s$  le difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f^s$ , on obtiendra cette fois ci :

PROPOSITION 8.5.1. — On a les propriétés suivantes :

- (i) le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}_0$  est continu et uniquement intégrable ;
- (ii) l'ensemble des singularités de  $\tilde{\zeta}_0$  est une partie  $\varphi$ -non enlacée maximale

$$Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'));$$

- (iii) l'application  $s \rightarrow f^s$  est un chemin dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$  ;
- (iv) l'application  $(f^0)^q - (p, p')$  est l'identité ;
- (v) on a

$$Z \subset \text{Fix}((f^s)^q - (p, p')),$$

pour tout  $s \in [0, 2n]$  ;

- (vi) Le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}_0$  est invariant par  $F^0$  ;

- (vii) l'application  $s \mapsto F^s(z)$  est de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $[i, i+1]$ ,  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$  ;  
 (viii) si  $z \in \mathbf{T}^2 - Z$ , l'application

$$s \mapsto \det \left( DF^s(z) \cdot \tilde{\zeta}_0(z), \frac{d}{ds} F^s(z) \right),$$

qui est définie sur chaque intervalle  $]i, i+1[$ ,  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , est positive ou nulle, et strictement positive sur au moins un de ces intervalles.

Le fait que le champ  $\tilde{\zeta}_0$  soit invariant par  $F^0$  permet de montrer que si  $U$  est une composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - \Sigma(T)$ , alors toute courbe intégrale de  $\tilde{\zeta}_0|_U$  relevée au revêtement universel de  $U$  est une droite de Brouwer du relèvement naturel de  $F \circ (F^0)^{-1}|_U$  défini en relevant, à partir de l'identité, l'isotopie  $s \mapsto F_s \circ (F^0)^{-1}|_U$  définie sur  $[0, 2n]$ . On obtient alors :

THÉORÈME 8.5.2. — Soient  $F$  un difféomorphisme du tore  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . Soient  $p, p'$ , et  $q$  trois entiers premiers entre eux, avec  $q > 0$ , et

$$Z \subset \text{Fix}(f^q - (p, p'))$$

une partie  $f$ -non enlacée maximale. Il existe un champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  sur  $\mathbf{T}^2$ , continu et uniquement intégrable et un chemin  $s \mapsto f^s$  aboutissant en  $f$  dans  $D^1(\mathbf{T}^2)$ , relevant un chemin  $s \mapsto F^s$  dans les difféomorphismes du tore, tels que :

- (i) l'ensemble des singularités de  $\tilde{\zeta}$  soit  $Z$  ;
- (ii) l'ensemble  $Z$  soit inclus dans  $\text{Fix}((f^s)^q - (p, p'))$ , pour tout  $s \in [0, 1]$  ;
- (iii) l'application  $(f^0)^q - (p, p')$  soit l'identité ;
- (iv) le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  soit invariant par  $F^0$  ;
- (v) si  $U$  est une composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - Z$ , toute courbe intégrale du champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}|_U$  relevée au revêtement universel de  $U$  est une droite de Brouwer du relèvement naturel de  $F \circ (F^0)^{-1}|_U$  défini par l'isotopie  $s \mapsto F^s \circ (F^0)^{-1}|_U$ .





## CHAPITRE 9

### FONCTION D'ENLACEMENT DÉFINIE PAR UN POINT FIXE OU UNE ORBITE PÉRIODIQUE

On s'intéresse dans ce chapitre au nombre minimum de valeurs que doit prendre le nombre d'enlacement  $\tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$ , défini au paragraphe 1.5, quand  $\tilde{O}$  est la projection dans le tore d'une orbite périodique  $O$  de  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  et quand  $\tilde{z}$  varie dans  $\text{Fix}(f)$ . Plus précisément on fera varier  $\tilde{z}$  dans un ensemble non enlacé maximal de  $\text{Fix}(f)$ . On commencera dans le premier paragraphe à préciser la proposition 6.1.4 et à chercher le nombre minimum de valeurs prises par la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}'),$$

sur un ensemble non enlacé maximal  $Z$  de  $\text{Fix}(f)$ , quand  $\tilde{z}'$  appartient à  $\text{Fix}(f) - Z$ .

#### 9.1. Fonction d'enlacement définie par un point fixe

On va démontrer deux résultats complémentaires.

**THÉORÈME 9.1.1.** — Soient  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  et  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé maximal. Pour tout point  $\tilde{z}' \in \text{Fix}(f) - Z$ , la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend au moins deux valeurs sur  $Z$ .

**THÉORÈME 9.1.2.** — Soit  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$ , soit  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé maximal et soit  $\tilde{z}' \in \text{Fix}(f) - Z$ . Les deux seuls cas où la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend exactement deux valeurs sur  $Z$  sont les suivants, où  $F$  est le difféomorphisme du tore relevé par  $f$ .

- (i) Il existe une courbe fermée simple  $C$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à zéro telle que :
  - la courbe  $F(C)$  soit homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \{\tilde{z}'\}$  ;
  - l'ensemble  $Z$  rencontre les deux composantes connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$  ;

- la composante connexe  $V$  de  $\mathbf{T}^2 - C$  qui est simplement connexe contient  $\tilde{z}'$  ;
  - la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}', \tilde{z})$  soit constante et non nulle sur  $Z \cap V$  ;
  - la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}', \tilde{z})$  soit nulle sur  $Z \cap V'$ , où  $V'$  est l'autre composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$ .
- (ii) Il existe une courbe fermée simple  $C \subset \mathbf{T}^2$  non homotope à zéro telle que :
- la courbe  $F(C)$  soit homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \{\tilde{z}'\}$  ;
  - aucune des deux valeurs prises par la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$  sur  $Z$  ne soit nulle.

*Démonstration des deux théorèmes.* — Utilisons la proposition 6.1.2 et écrivons

$$f = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0,$$

où

$$\Phi = (f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{D}_n,$$

et où l'ensemble des singularités associées à  $Z$  est contenu dans un tore fixe d'enlacement 0.

Notons  $T$  ce tore, posons  $P = \pi^{-1}(T)$ , et rappelons que  $\Sigma(T)$  désigne l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}$  qui sont dans  $T$ . Notons  $\tilde{x}'$  la singularité de  $\tilde{\xi}$  correspondant à  $\tilde{z}'$  (qui n'est donc pas dans  $T$ ) et choisissons  $x' \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}'\})$ .

La fonction

$$l : x \longmapsto L_1(x, x')$$

n'est pas définie sur le plan  $P$  tout entier, puisqu'elle n'est pas définie sur l'élément de  $P$  qui a même image que  $x'$  par  $r_0$ .

Si  $x \in P$  et si  $\|x\|$  est assez grand, alors  $L_1(x, x')$  est bien défini et égal à 0. On en déduit que le domaine de définition  $U$  de  $l$  est une partie ouverte  $U$  de  $P$  dont le complémentaire  $K$  est compact. Grâce à la proposition 4.3.1, on sait que les composantes connexes bornées de  $U$  sont simplement connexes et que la composante connexe non bornée est homéomorphe à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  : on en déduit que  $K$  est connexe.

La fonction

$$\tilde{l} : \tilde{x} \longmapsto \sum_{x \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}\})} l(x)$$

est définie sur le complémentaire  $\tilde{U}$  de  $\pi(K)$ . Puisque  $\pi(K)$  est compact et connexe, on a les propriétés suivantes :

- il existe au plus une composante connexe de  $\tilde{U}$  qui n'est pas simplement connexe ;
- celle-ci, si elle existe, est homéomorphe au tore privé d'un point ou à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  ;
- la fonction  $\tilde{l}$  est nulle sur cette composante, si elle existe.

On va donc étudier trois cas. On notera  $A^t$  l'image d'une partie  $A$  de  $\tilde{E}$  au temps  $t$  par le flot induit par le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$ .

*Premier cas : toute composante connexe de  $\tilde{U}$  est simplement connexe.* — Comme  $\tilde{l}$  n'est pas définie entièrement sur le tore, elle prend au moins deux valeurs ; on note alors  $j^-$  et  $j^+$  les valeurs respectivement minimale et maximale. La proposition 2.3.2 nous dit que la frontière de chacun des ensembles  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$  et  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$  est une variété topologique de dimension un du tore  $T$ , c'est-à-dire une réunion finie de courbes fermées simples disjointes deux à deux. Chaque composante connexe de  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$ , qui est simplement connexe par hypothèse, est bordée par une courbe fermée simple homotope à zéro. D'après la proposition 2.3.2, elle est attractive : elle contient donc une singularité. On a un résultat analogue pour l'ensemble  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$ , chaque composante étant alors répulsive. On obtient une singularité qui n'appartient ni à  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$ , ni à  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$ , pour des raisons d'indice. En effet l'ensemble

$$M = T - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^-\}) \right)^1 - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^+\}) \right)^{-1}$$

est une variété à bord dont la caractéristique d'Euler est égale à  $-n_- - n_+$ , où  $n_-$  (resp.  $n_+$ ) est le nombre de composantes connexes de  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$  (resp.  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$ ). Comme la dynamique sur chaque bord est rentrante ou sortante, on peut appliquer la formule de Poincaré-Hopf à  $M$  : la somme des indices aux singularités du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}|_M$ , si celles-ci sont en nombre fini est égal à  $-n_- - n_+$ . Les singularités qui sont dans  $M$  n'appartiennent ni à  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$ , ni à  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$ .

La fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend donc au moins trois valeurs sur  $Z$  dans ce cas.

*Deuxième cas : l'une des composantes connexes  $\tilde{U}'$  de  $\tilde{U}$  est difféomorphe à  $\mathbf{T}^2$  moins un point.* — On garde les notations du premier cas. On sait que la fonction  $\tilde{l}$  vaut 0 sur  $\tilde{U}'$ . Ainsi si  $j^- \neq 0$  et  $j^+ \neq 0$ , les arguments employés dans le premier cas sont encore valables : la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend au moins trois valeurs sur  $Z$ .

Étudions maintenant le cas où  $j^- \neq 0$  et  $j^+ = 0$  (le cas où  $j^- = 0$  et  $j^+ \neq 0$  se traitant de façon similaire). La composante connexe  $\tilde{U}'$  est répulsive et sa frontière est une courbe de Jordan homotope à zéro. Elle contient une singularité puisque sa caractéristique d'Euler est  $-1$ . Chaque composante connexe de  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$  contient également une singularité. On en déduit que la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend au moins deux valeurs sur  $Z$ .

La formule de Poincaré-Hopf appliquée à la variété à bord

$$M = T - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^-\}) \right)^1 - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^+\}) \right)^{-1}$$

nous dit que la somme des indices aux singularités du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}|_M$ , si celles-ci sont en nombre fini, est égale à  $2 - n_- - n_+$ . On en déduit, dans le cas où la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

ne prend que deux valeurs, que chaque ensemble  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$  et  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$  est connexe et que la réunion de ces deux ensembles contient toutes les singularités de  $\tilde{\xi}$  sur  $T$ .

Il n'y a pas de singularité proche de la frontière de  $\tilde{U}'$ . On peut donc choisir une courbe fermée simple  $\Gamma \subset \tilde{U}'$  homotope à zéro dans  $T$  et suffisamment proche de la frontière de  $\tilde{U}'$  pour que toute singularité contenue dans  $U'$  soit contenue dans la composante connexe non simplement connexe de  $T - \Gamma$ . L'ensemble  $\Gamma \cup \Sigma(T) \cup \tilde{x}'$  étant bien enlacé, la proposition 6.4.1 nous dit que la courbe  $\tilde{q}_0(\Gamma)$  est une courbe  $C$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à zéro et que  $F(C)$  est homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \tilde{z}'$ .

Comme l'ensemble  $\tilde{x}' \cup \tilde{U}$  est bien enlacé, l'application  $\tilde{q}_0$  est injective sur cet ensemble. Ainsi  $\tilde{z}'$  se trouve dans la composante connexe simplement connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$ , de même que tous les points fixes dont le nombre d'enlacement avec  $\tilde{z}'$  est  $j^-$ . Les points fixes dont le nombre d'enlacement avec  $\tilde{z}'$  est 0 se trouvent dans l'autre composante connexe.

*Troisième cas : l'une des composantes connexes  $\tilde{U}'$  de  $\tilde{U}$  est homéomorphe à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ .* — On garde, là encore, les mêmes notations. On sait que la fonction  $\tilde{l}$  vaut 0 sur  $\tilde{U}'$ . Si  $j^- \neq 0$  et  $j^+ \neq 0$ , on sait, pour les mêmes raisons que dans les deux cas précédents, que la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend au moins trois valeurs sur  $Z$ .

Étudions maintenant le cas où  $j^- \neq 0$  et  $j^+ = 0$ . La composante connexe  $\tilde{U}'$  dont la frontière est formée de deux courbes de Jordan homotopes (et non homotopes à zéro) est alors répulsive. La formule de Poincaré-Hopf appliquée à

$$M = T - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^-\}) \right)^1 - \left( \tilde{l}^{-1}(\{j^+\}) \right)^{-1}$$

nous dit que la somme des indices aux singularités du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}|_M$ , si celles-ci sont en nombre fini est égale à  $1 - n_- - n_+$  et est donc strictement positive. On en déduit que la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

prend au moins deux valeurs sur  $Z$ , l'une égale à  $j^-$ , l'autre strictement comprise entre  $j^-$  et  $j^+$ . On en déduit également, dans le cas où la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

ne prend que deux valeurs, que chaque ensemble  $\tilde{l}^{-1}(\{j^-\})$  et  $\tilde{l}^{-1}(\{j^+\})$  est connexe et qu'il n'y a pas de singularité dans  $\tilde{U}$ .

Il n'y a pas de singularité proche de la frontière de  $\tilde{U}'$ . On peut donc choisir, près de la frontière de  $\tilde{U}'$ , une courbe fermée simple  $\Gamma \subset \tilde{U}'$  non homotope à zéro et disjointe de  $\Sigma(T)$ . L'ensemble  $K$  étant connexe est alors située dans une bande délimitée par deux relèvements successifs de  $\Gamma$ . L'ensemble  $\Gamma \cup \Sigma(T) \cup \tilde{x}'$  est bien enlacé : la courbe  $\tilde{q}_0(\Gamma)$  est une courbe  $C$  de  $\mathbf{T}^2$  non homotope à zéro et  $F(C)$  est homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \{\tilde{z}'\}$ .  $\square$

Puisque l'ensemble  $Z' = Z \cup \{\tilde{z}'\}$  est enlacé, la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^2 - Z'$  n'est pas isotope à l'identité ni à aucun homéomorphisme périodique. Dans le cadre de la théorie de Thurston des homéomorphismes des surfaces, on dit que le difféomorphisme restreint  $F|_{\mathbf{T}^2 - Z'}$  est *réductible* s'il existe une courbe fermée  $C$ , qui n'est homotope ni à zéro ni aux petits cercles centrés aux points de  $Z'$ , telle que  $F(C)$  soit homotope à  $C$  dans  $\mathbf{T}^2 - Z'$ . La théorie de Thurston des homéomorphismes des surfaces nous dit alors que la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^2 - Z$  est soit réductible, soit isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov, (voir Thurston [T] ou Fathi, Laudenbach, Poenaru [FLP]). Chacune des deux situations particulières, où la fonction  $z \mapsto \tilde{I}(z, z')$  ne prend que deux valeurs sur  $Z$ , a lieu dans un cas réductible. On peut donc écrire :

**COROLLAIRE 9.1.3.** — *Soit  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$ , soit  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé maximal et soit  $\tilde{z}' \in \text{Fix}(f) - Z$ . Si la restriction à  $Z \cup \{z\}$  du difféomorphisme  $F$  de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f$  est irréductible, alors la fonction*

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{z}')$$

*prend au moins trois valeurs sur  $Z$ .*

## 9.2. Fonction d'enlacement définie par une orbite périodique

On peut généraliser les résultats précédents au cas des orbites périodiques. Pour tout  $q \geq 2$  les ensembles  $\mathcal{D}_n^q$  et  $\mathcal{D}_{nq}$  sont égaux. Si  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$  est associé à  $\Phi \in \mathcal{D}_n$  par la relation

$$f = K_n(\Phi),$$

alors  $f^q$  est associé au  $n$ -uplet  $\Phi_q = (\Phi, \Phi, \dots, \Phi)$  de  $\mathcal{D}_n^q$  par la relation

$$f^q = K_{nq}(\Phi_q).$$

On associe à  $\Phi_q$  un champ de vecteurs  $\xi_q = \xi_{\Phi_q}$  sur

$$E_q = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+2nq} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}$$

et un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}_q$  sur  $\tilde{E}_q = E_q/[\tau_0, \tau_1]$ . Le champ de vecteurs  $\xi_q$  est alors tangent au sous-espace vectoriel  $E$  de  $E_q$  et la restriction à  $E$  n'est rien d'autre que  $\xi$ . Parmi les tores d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}_q$  figurent en particulier les tores d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}$ . Les singularités de  $\tilde{\xi}_q$  correspondent à des points périodiques de  $F$ , plus précisément

aux éléments de  $\text{Fix}(f^q)$ . Celles qui correspondent à des points périodiques de période  $q$  n'appartiennent évidemment à aucun tore d'enlacement 0 de  $\tilde{\xi}$ .

On définit une fonction d'enlacement  $L_q$ , analogue à la fonction  $L_1$ , sur un ouvert de  $E_q \times E_q$  et une fonction  $\tilde{L}_q$  analogue à la fonction  $\tilde{L}_1$  sur un ouvert de  $\tilde{E}_q \times \tilde{E}_q$ . La fonction  $L_1$  est invariante par l'application  $\varphi \times \varphi$ , où

$$\varphi : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_{i+nq})_{i \in \mathbf{Z}}$$

est définie sur  $E_q$ , périodique de période  $q$ .

Soit  $\tilde{z} \in \text{Fix}(f)$ , soit  $O$  une orbite périodique de  $f$  de période  $q$  et soit  $\tilde{O} = \pi(O)$ . Si  $\tilde{x}$  est la singularité de  $\tilde{\xi}$  associée à  $\tilde{z}$  et si  $\tilde{x}'$  est l'une des  $q$  singularités de  $\tilde{\xi}_q$  qui sont associées à un point de  $\tilde{O}$ , on a

$$\tilde{L}_q(\tilde{x}, \tilde{x}') = \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O}).$$

On peut alors démontrer les énoncés suivants :

**THÉORÈME 9.2.1.** — *Soit  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$ , soit  $O$  une orbite périodique de période  $q \geq 2$  de  $f$  et soit  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé maximal. Si on pose  $\tilde{O} = \pi(O)$ , la fonction*

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

*prend alors au moins deux valeurs sur  $Z$ .*

**THÉORÈME 9.2.2.** — *Soit  $f \in D^1(\mathbf{T}^2)$ , soit  $O$  une orbite périodique de période  $q \geq 0$  de  $f$  et soit  $Z \subset \text{Fix}(f)$  un ensemble non enlacé maximal. Si on note  $F$  le difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  relevé par  $f$  et si on pose  $\tilde{O} = \pi(O)$ , il n'y a que deux cas où la fonction*

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

*prend exactement deux valeurs sur  $Z$ .*

- (i) *Il existe une courbe fermée simple  $C$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à zéro telle que :*
  - *la courbe  $F(C)$  soit homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \tilde{O}$  ;*
  - *l'ensemble  $Z$  rencontre les deux composantes connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$*
  - *la composante connexe  $V$  de  $\mathbf{T}^2 - C$  qui est simplement connexe contienne  $\tilde{O}$  ;*
  - *la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$  soit constante et non nulle sur  $Z \cap V$  ;*
  - *la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$  soit nulle sur  $Z \cap V'$ , où  $V'$  est l'autre composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$ .*
- (ii) *Il existe une courbe fermée simple  $C \subset \mathbf{T}^2$  non homotope à zéro telle que :*
  - *la courbe  $F(C)$  soit homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \tilde{O}$  ;*
  - *aucune des deux valeurs prises par la fonction  $\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$  sur  $Z$  ne soit nulle.*

*Démonstration.* — On reprend mot à mot la démonstration des théorèmes 9.1.1 et 9.1.2, où  $T$  est le tore d'enlacement 0 contenant l'ensemble des singularités associées à  $Z$  (et donc contenu dans  $\tilde{E}$ ) et où  $\tilde{x}' \in \tilde{E}_q$  est l'une des  $q$  singularités de  $\tilde{\xi}_q$  associées à  $\tilde{O}$ . On vérifie bien, dans le cas où la fonction

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

ne prend que deux valeurs et où  $\tilde{U}$  est homéomorphe au tore privé d'un point, que l'orbite  $\tilde{O}$  est entièrement contenue dans la composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$ .

La démonstration précédente nous dit la courbe  $F^q(C)$  est homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \tilde{O}$ . On construit cette homotopie à l'aide de la fonction  $\Theta$  définie dans la proposition 6.4.1. En gardant les notations du paragraphe 6.4, cette homotopie est naturellement définie sur  $[0, 2nq]$ . Or si on regarde le début de cette homotopie, plus précisément l'homotopie restreinte à  $[0, 2n]$ , on remarque qu'elle permet en fait de montrer que la courbe  $F(C)$  est homotope à  $C$  relativement à  $Z \cup \tilde{O}$ .  $\square$

On a un résultat analogue au corollaire 9.1.3. On va conclure ce paragraphe en énonçant une version plus faible mais bien plus parlante de ce qui vient d'être démontré dans ce paragraphe.

**COROLLAIRE 9.2.3.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $f$  a une orbite périodique  $O$  de période  $q \geq 2$  et on pose  $\tilde{O} = \pi(O)$ . La fonction*

$$z \mapsto \tilde{I}(\tilde{z}, \tilde{O})$$

*prend alors au moins deux valeurs sur  $\text{Fix}(f)$  et en prend au moins trois si la restriction de  $F$  à  $\mathbf{T}^2 - O$  est irréductible, c'est-à-dire si elle est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.*





## CHAPITRE 10

### CONSTRUCTION DE CERCLES FANTÔMES

Dans [Go], Golé définit la notion de cercle fantôme de nombre de rotation  $p/q$  pour un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale et préservant l'aire, puis montre l'existence d'un tel cercle passant par les orbites périodiques minimisantes et les orbites périodiques minimax de nombre de rotation  $p/q$  données par la théorie d'Aubry-Mather. Ces cercles fantômes sont les analogues de nos tores invariants, nous allons voir comment les méthodes vues plus haut permettent de les retrouver. Ce qui suit permet également de réinterpréter les résultats montrés par Angenent dans [An2] et de retrouver des résultats de Baesens et Mac Kay [BM].

On a introduit dans le paragraphe 1.6 le difféomorphisme

$$f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y),$$

et les fonctions

$$g^* = g'^* : (x, x') \mapsto x' - x$$

associées à  $f^*$ .

On se donne dans le chapitre 10 un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbf{R}^2$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) l'application  $f$  relève un difféomorphisme  $F$  de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  homotope à l'identité ;
- (ii) l'application  $f$  dévie la verticale à droite ;
- (iii) si  $g$  et  $g'$  sont les fonctions associées à  $f$ , alors

$$g - g^* \quad \text{et} \quad g' - g'^*$$

sont bornées sur  $\mathbf{R}^2$  ainsi que leurs différentielles.

La condition (iii) est vérifiée si  $f$  coïncide avec  $f^*$  dès que  $|y|$  est assez grand, puisque les applications  $g - g^*$  et  $g' - g'^*$  sont à support compact. La condition (iii) est également vérifiée si  $f$  dévie la verticale à droite et si  $f$  est le relèvement à  $\mathbf{R}^2$

d'un difféomorphisme du tore homotope au twist de Dehn  $F^*$  relevé par  $f^*$ , puisque les applications  $g - g^*$  et  $g' - g'^*$  sont alors  $\mathbf{Z}^2$ -périodiques.

On se donne également deux entiers  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} - \{0\}$  premiers entre eux. On va construire comme dans le chapitre 8 un champ de vecteurs  $\xi$  sur un espace affine  $E$  et un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur une variété quotient  $\tilde{E}$ . On va étudier les propriétés de ces champs de vecteurs, on retrouvera des résultats similaires à ceux du chapitre 8.

### 10.1. Construction des champs de vecteurs $\xi$ et $\tilde{\xi}$

On considère l'espace affine

$$E = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}$$

et l'espace vectoriel associé

$$E' = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+q} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}.$$

On définit sur  $E$  un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \xi : E &\longrightarrow E' \\ x &\longmapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

en posant

$$\xi_i(x) = g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}).$$

Ce champ de vecteurs est invariant par la translation

$$\tau : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_i + 1)_{i \in \mathbf{Z}}$$

et par le décalage

$$\varphi : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbf{Z}} :$$

il induit un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur l'espace quotient

$$\tilde{E} = E/\tau \approx \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^{q-1}.$$

Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  est invariant par l'application périodique (de période  $q$ )

$$\tilde{\varphi} : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}$$

relevée par  $\varphi$ .

On peut définir les applications

$$q_i : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_i, g(x_i, x_{i+1})) \quad \text{et} \quad q'_i : (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \longmapsto (x_i, g'(x_{i-1}, x_i));$$

on sait que  $q_0$  induit une bijection entre les singularités de  $\xi$  et les points  $z \in \mathbf{R}^2$  tels que

$$f^q(z) = z + (p, 0).$$

## 10.2. Premières propriétés dynamiques de $\xi$ et de $\tilde{\xi}$

Le champ de vecteur  $\xi^*$  associé à  $f^*$  s'écrit

$$\xi_i^*(x) = 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1};$$

c'est le champ de gradient de la fonction

$$H : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{q-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Comme  $H$  est invariant par  $\tau$ , le champ  $\tilde{\xi}^*$  est également un champ de gradient. C'est aussi le cas de  $\tilde{\xi}$  si  $f$  est exacte-symplectique, c'est-à-dire si la forme  $f^*(ydx) - ydx$  est exacte.

La forme quadratique  $H$  est positive et son noyau  $E_0 \subset E'$  est de dimension 1, formé des suites constantes. On peut donc écrire

$$E' = E_0 \oplus E_-,$$

où  $E_- \subset E'$  est le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives de la matrice hessienne de  $H$ . L'ensemble des singularités de  $\xi^*$  est le sous-espace affine

$$x^* + E_0,$$

où  $x^* = (x_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$  est la suite qui vérifie

$$x_i^* = ip/q,$$

pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ .

On peut écrire de même, avec abus de notation,

$$\tilde{E} = \Lambda_0 \oplus E_-,$$

où

$$\Lambda_0 = (x^* + E_0)/\tau$$

est le tore de dimension 1 formé des singularités de  $\tilde{\xi}^*$ .

Le champ de vecteurs  $\xi - \xi^*$  est borné : on en déduit comme dans le paragraphe 1.10 que l'ensemble

$$B_R = \{x = x_0 + x_- \in \tilde{E} \mid \|x_-\| < R\}$$

est un ouvert répulsif de  $\tilde{\xi}$  si  $R$  est grand, où  $x_0$  et  $x_-$  sont les « composantes » respectives de  $x$  dans  $\Lambda_0$  et dans  $E_-$ . Plus précisément, si  $x \in \text{Fr}(B_R)$ , on a

$$x^t \in B_R \quad \text{si } t < 0$$

et

$$x^t \notin \overline{B_R} \quad \text{si } t > 0.$$

En particulier la réunion  $\Lambda$  des orbites bornées de  $\xi$  est compacte et non vide.

### 10.3. Fonctions d'enlacement

La fonction d'enlacement  $L$  s'écrit cette fois-ci

$$L : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto \frac{1}{4} \left( \sum_{i=0}^{q-1} \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1}) - q \right),$$

elle est définie sur

$$W = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E' \mid x_i = 0 \implies x_{i-1} x_{i+1} < 0\},$$

et prend ses valeurs dans  $\{-[q/2], \dots, 0\}$  (voir [L1]).

On peut définir alors la fonction

$$L_1 : (x, x') \mapsto L(x - x')$$

sur une partie ouverte de  $E \times E$  et une fonction  $\tilde{L}_1$  sur une partie ouverte de  $\tilde{E} \times \tilde{E}$  en posant

$$\tilde{L}_1(\tilde{x}, \tilde{x}') = \sum_{k \in \mathbf{Z}} L_1(x, \tau^k(x')),$$

où  $x \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}\})$  et  $x' \in \pi^{-1}(\{\tilde{x}'\})$ . On a alors des résultats similaires aux propositions 2.2.2, 2.3.1 et 2.3.2. En effet les fonctions  $g - g^*$  et  $g' - g'^*$  étant bornées ainsi que leurs différentielles, on peut trouver des constantes  $K$  et  $\alpha$  qui nous permettent de reprendre la démonstration de la proposition 2.4.1.

On peut définir de façon similaire des ensembles  $W_j, W_j^-, W_j^+$  de  $E'$  ou de  $P(E')$  et des ensembles  $\mathcal{W}_j, \mathcal{W}_j^-, \mathcal{W}_j^+$  du fibré tangent  $E \times E'$  ou du fibré projectif  $E \times P(E')$  de  $E$ . On obtient une décomposition du fibré tangent analogue à la décomposition donnée par la proposition 3.2.1. Cependant, la dimension des espaces  $E_j(x)$  est différente. En effet  $W_0$  est formé des suites dont les termes sont tous non nuls et de même signe. Si  $q$  est pair,  $W_{-[q/2]}$  est formé des suites de termes non nuls et dont les signes sont alternés. Comme aucun de ces ensembles ne contient de plan, la dimension des espaces  $E_0(x)$  sera égale à 1 de même que celle des espaces  $E_{-[q/2]}$  si  $q$  est pair, les autres  $E_j(x)$  auront une dimension égale à 2.

Remarquons que la décomposition continue du fibré tangent, plus grossière,

$$\{x\} \times E' = E_0(x) \oplus E_-(x)$$

où

$$E_-(x) = \bigoplus_{j < 0} E_j(x),$$

avec les propriétés naturelles d'expansivité, provient directement de [Ru].

On peut définir, comme dans les paragraphes 3.3 et 8.2, des ensembles  $\mathcal{G}_j^-, \mathcal{G}_j^+, \hat{\mathcal{G}}_j^-$  et  $\hat{\mathcal{G}}_j^+$  pour  $j \in \{-[q/2], \dots, 0\}$ . L'ensemble  $\mathcal{G}_0^+$  est formé des applications  $\psi : E_0 \rightarrow E_-$ , invariantes par  $\tau$ , et telles que le vecteur différence entre deux points distincts de

$$G_\psi = \{x^* + x + \psi(x), x \in E_0\}$$

ait des coordonnées non nulles et de même signe. Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , l'ensemble  $\widehat{\mathcal{G}}_0^+$  est formé de graphes d'applications de classe  $C^1$  définies sur

$$E_k'' = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_i = 0 \text{ si } i \not\equiv k[q]\}$$

à valeurs dans

$$E_k''^\perp = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_i = 0 \text{ si } i \equiv k[q]\}.$$

La  $C^1$ -topologie et la  $C^0$ -topologie coïncident sur l'ensemble des ces applications et ne dépend pas de  $k$ . On définit alors les tores d'enlacement 0, qui sont les images dans  $\widehat{E}$  des graphes de  $\widehat{\mathcal{G}}_0^+$ , et qui sont des tores plongés de classe  $C^1$  de dimension 1. On note  $\widehat{\mathcal{T}}_0$  l'ensemble de ces tores. Comme dans les paragraphes 3.6 et 8.2, on a les propriétés suivantes :

- la topologie de Hausdorff et la  $C^1$ -topologie coïncident sur  $\widehat{\mathcal{T}}_0$ ;
- l'ensemble  $\mathcal{T}$  des tores  $T \in \widehat{\mathcal{T}}_0$  d'orbite bornée est compact et non vide;
- l'ensemble  $\Lambda$  est la réunion des tores  $T \in \mathcal{T}$ .

Les tores fixes et invariants par  $\varphi$  sont appelées *courbes fantômes* (ce sont en fait leurs images par  $\widetilde{q}_0$  qui sont les courbes fantômes de Golé).

#### 10.4. Ensembles non enlacés

On peut introduire, comme dans le paragraphe 5.1, la notion d'ensemble non enlacé : c'est un ensemble  $X$  de singularités qui est contenu dans un tore  $T \in \mathcal{T}$ . Si on note  $Z$  l'ensemble des points périodiques de  $F$  correspondant, le fait que  $X$  soit non enlacé implique que pour tout  $(z, z') \in \Pi_1^{-1}(Z)$  et pour tout entier  $k$ , on a la relation suivante :

$$p_1(z) < p_1(z') \implies p_1(f^k(z)) < p_1(f^k(z')),$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x + \mathbf{Z}, y) \end{aligned}$$

est le revêtement universel de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ .

Cette condition nécessaire est suffisante. En effet, si  $Z$  vérifie la condition précédente, on peut considérer le graphe linéaire par morceaux  $G \in \mathcal{G}_0^+$  obtenu comme réunion des segments joignant deux singularités correspondant à deux points périodiques consécutifs, puis en choisissant une valeur d'adhérence de la suite  $(G^{-n})_{n \geq 0}$ , obtenir un graphe  $\widehat{G} \in \widehat{\mathcal{G}}_0^+$  passant par toutes les singularités de  $\xi$  définies par  $Z$ .

Si on suppose que  $X$  est contenu dans un tore  $T \in \mathcal{T}$  invariant par  $\widetilde{\varphi}$ , l'ensemble  $Z$  est invariant par  $F$ , c'est un ensemble *bien ordonné* d'orbites périodiques. Réciproquement si  $Z$  est un ensemble bien ordonné d'orbites périodiques, le graphe  $G$  est invariant par  $\widetilde{\varphi}$  de même que la valeur d'adhérence  $\widehat{G}$ .

Comme exemple d'ensembles bien ordonnés, on connaît la réunion des orbites périodiques minimisantes de nombre de rotation  $p/q$  donnés par la théorie d'Aubry-Mather dans le cas où  $f$  est exacte-symplectique. On peut également ajouter à cet ensemble les orbites périodiques de type minimax.

### 10.5. Existence de tores fixes d'enlacement 0

On peut démontrer l'analogue de la proposition 5.2.1. La démonstration est plus simple car la dynamique d'un flot sur un tore de dimension 1 est bien plus simple que celle d'un flot sur un tore de dimension 2.

**PROPOSITION 10.5.1.** — *L'image  $\Sigma(T)$  de  $T \in \mathcal{T}$  est un ensemble non enlacé maximal si et seulement si  $T$  est fixe ; de plus la restriction de  $\Sigma$  à l'ensemble des tores fixes est injective.*

*Démonstration.* — Là encore, la démonstration se fait en trois étapes.

*Première étape : si  $T \in \mathcal{T}$  est fixe, alors  $\Sigma(T)$  est un ensemble non enlacé maximal*

Soit  $T \in \mathcal{T}$  un tore fixe et  $x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  une singularité de  $\xi$  qui n'appartient pas à  $\pi^{-1}(T)$ . On considère le point  $x_* = (x_{*i})_{i \in \mathbf{Z}}$  de  $\pi^{-1}(T)$  tel que  $x_{*0} = x_0$ . Puisque  $x_* - x \notin W_0$ , on a

$$x_*^t - x^t = x_* - x \in W_{-1}^-,$$

pour tout  $t > 0$ . L'orbite positive de  $x_*$ , étant située sur  $\pi^{-1}(T)$ , est nécessairement bornée. Elle converge donc vers une singularité  $x' \in \pi^{-1}(T)$ . On a

$$L_1(x, x') = \lim_{t \rightarrow +\infty} L_1(x, x_*^t) < 0;$$

on en déduit que  $\Sigma(T) \cup \{\pi(x)\}$  est enlacé.

*Deuxième étape : Si  $T \in \mathcal{T}$  n'est pas fixe, alors  $\Sigma(T)$  n'est pas maximal*

Soit  $T \in \mathcal{T}$  un tore qui n'est pas fixe et  $\tilde{x}$  un point de  $T$  où  $\tilde{\xi}(\tilde{x})$  n'est pas tangent à  $T$ . La composante de  $\tilde{\xi}(\tilde{x})$  sur  $E_-(\tilde{x})$  n'est pas nulle. On reprend la démonstration du paragraphe 5.4 en gardant les mêmes notations. Si  $\omega(\tilde{x})$  contient une singularité  $\tilde{x}'$ , on montre comme dans le paragraphe 5.4 que  $\tilde{x}' \notin \Sigma(T)$  et que  $\Sigma(T) \cup \{\tilde{x}'\}$  est non enlacé. Si  $\omega(x)$  ne contient pas de singularité, on sait que l'orbite de tout point  $x$  de  $\pi^{-1}(\omega(\tilde{x}))$  est tracée sur un plan d'enlacement  $j < 0$ . Elle est donc bornée et contient dans son adhérence une orbite périodique  $C$ . Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 5.4, il existe une singularité  $x'$  à l'intérieur de  $C$ , en particulier  $q_i(x')$  est dans la composante intérieure de la courbe de Jordan  $q_i(C)$ , pour tout entier  $i$ . Interprétant en termes de coordonnées le fait que pour tout  $x'' \in C$ , l'ensemble  $\Sigma(T) \cup \{\pi(x'')\}$  est contenu dans un tore  $T \in \mathcal{T}$ , on sait que chaque courbe  $q_i(C)$  se trouve contenue dans une bande verticale  $\Delta_i$  qui ne contient aucun point de  $q_i(\pi^{-1}(\Sigma(T)))$  et que l'ensemble des points de  $\pi^{-1}(\Sigma(T))$  dont l'image par  $q_i$  est à droite de cette bande est indépendant de  $i$ .

Le point  $q_i(x')$  appartient également à cette bande verticale ainsi  $\pi(x')$  n'appartient pas à  $\Sigma(T)$ , de plus l'ensemble  $\Sigma(T) \cup \{\pi(x')\}$  est non enlacé.

*Troisième étape : Si  $T \in \mathcal{T}$  et  $T' \in \mathcal{T}$  sont fixes et distincts, alors  $\Sigma(T) \neq \Sigma(T')$*

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $T$  et  $T'$  soient deux tores fixes distincts tels que  $\Sigma(T) = \Sigma(T')$ . On peut trouver

$$x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \pi^{-1}(T)$$

et

$$x' = (x'_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \pi^{-1}(T')$$

distincts tels que  $x_0 = x'_0$ .

Étudions deux cas.

*Premier cas : l'ensemble  $\Sigma(T) = \Sigma(T')$  n'est pas vide.* — On sait alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^t = x_* \in \Sigma(T) = \Sigma(T')$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'^t = \hat{x}'_* \in \Sigma(T') = \Sigma(T).$$

Si  $x_* \neq \hat{x}'_*$ , la contradiction provient de l'égalité

$$L_1(x_*, x'_*) < 0;$$

si  $x_* = \hat{x}'_*$ , la contradiction est du même type que celle obtenue à la fin du paragraphe 5.5.

*Second cas : l'ensemble  $\Sigma(T) = \Sigma(T')$  est vide.* — Tout couple de la variété  $T \times T'$  est récurrent pour le flot produit. Grâce à l'analogue de la proposition 2.3.2, on sait que la fonction  $\tilde{L}_1$  est définie sur  $T \times T'$  privé de la diagonale. Comme  $\tilde{L}_1$  n'est pas définie sur le couple  $(\pi(x), \pi(x'))$ , on a une contradiction.  $\square$

L'application  $\Sigma$  induit donc une bijection entre les tores fixes et les ensembles non enlacés maximaux. Comme dans le paragraphe 8.3 on considère l'ensemble  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  des tores invariants par  $\tilde{\varphi}$ , on a alors :

- un tore  $T \in \mathcal{T}'$  est fixe si et seulement si  $\Sigma(T)$  est maximal dans  $\Sigma(\mathcal{T}')$  ;
- tout ensemble  $\Sigma(T)$ ,  $T \in \mathcal{T}'$ , est contenu dans un tore fixe appartenant à  $\mathcal{T}'$  ;
- une partie  $X \subset \text{sing}(\tilde{\xi})$  est contenue dans un tore  $T \in \mathcal{T}'$  si et seulement si et seulement si elle est non enlacée et invariante par  $\tilde{\varphi}$ .

Remarquons que la dernière assertion a été également démontrée dans le paragraphe 10.4.

On déduit de ces assertions, qu'il existe une courbe fantôme passant par les orbites minimisantes et minimax dans le cas où  $f$  est exacte-symplectique. On retrouve ainsi le résultat montré par Golé dans [Go].

Dans le cas où  $\tilde{\xi}$  n'a pas de singularité, on a la situation suivante :



- l'ensemble  $\mathcal{T}$  se réduit à un tore fixe  $T$  ;
- le tore  $T$  est une orbite périodique ;
- les coordonnées de  $\tilde{\xi}(x)$  sont toutes strictement positives pour tout  $x \in T$ , ou alors toutes strictement négatives pour tout  $x \in T$  ;
- on a  $\Lambda = T$  ;
- le tore  $T$  est l'ensemble  $\alpha$ -limite de toute orbite de  $\tilde{\xi}$ .

### 10.6. Une démonstration directe d'existence de courbes fantômes

On peut donner une démonstration plus rapide de l'existence des courbes fantômes qui malheureusement ne se généralise pas aux tores de dimension 2 étudiés dans les chapitres précédents et qui est due au fait que  $W_0$  est un cône convexe.

Soit  $X$  une partie non vide de  $\text{sing}(\xi)$  invariante par  $\varphi$  et  $\tau$  et contenue dans un graphe  $G \in \mathcal{G}_0^+$ . Notons  $\mathcal{G}_X$  l'ensemble des applications  $\psi \in \mathcal{G}_0^+$  invariantes par  $\varphi$  dont le graphe contient  $X$ . On a alors :

- l'ensemble  $\mathcal{G}_X$  est non vide et convexe : si  $(\psi, \psi') \in \mathcal{G}_X^2$  et si  $s \in [0, 1]$ , alors l'application

$$x \mapsto s\psi(x) + (1-s)\psi'(x)$$

appartient à  $\mathcal{G}_X$  ;

- l'ensemble  $\mathcal{G}_X$  est invariant par le semi-flot, défini pour les temps  $t \leq 0$  ;
- l'ensemble  $\mathcal{G}_X$  est compact.

Grâce au théorème de Schauder-Tychonoff, on sait qu'il contient un graphe fixe.

Si  $X$  est vide, on peut reprendre l'argument en notant  $\mathcal{G}_X$  l'ensemble des applications  $\psi \in \mathcal{G}_0^+$  invariantes par  $\varphi$ , telles que

$$\sup_{x \in E_0} \|\psi(x)\| \leq M,$$

où  $M$  est un réel choisi suffisamment grand.

### 10.7. Une application aux difféomorphismes du tore

Nous allons donner dans ce paragraphe une démonstration nouvelle d'un résultat démontré dans [L3], qui exprime en particulier qu'un difféomorphisme de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , qui est  $C^1$ -proche du twist de Dehn peut être approché en  $C^k$ -topologie par un difféomorphisme ayant une orbite périodique.

**THÉORÈME 10.7.1.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à*

$$F^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$$

*et dont les relèvements à  $\mathbf{R}^2$  dévient la verticale à droite. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  tel que le difféomorphisme*

$$F_a : (x, y) \mapsto F(x, y) + (a, 0)$$

*ait une orbite périodique.*

*Démonstration.* — Choisissons un relèvement  $f$  de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$  et considérons pour tout  $a \in \mathbf{R}$  le difféomorphisme

$$f_a : (x, y) \mapsto f(x, y) + a.$$

Celui-ci dévie également la verticale à droite. Si  $g$  et  $g'$  sont les fonctions associées à  $f$ , les fonctions associées à  $f_a$  sont  $g$  et  $g' + a$ .

Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $F$  pour la  $C^1$ -topologie tel que tout difféomorphisme  $F' \in \mathcal{U}$  admette un relèvement  $f'$  à  $\mathbf{R}^2$  qui dévie la verticale à droite et dont les fonctions associées sont uniformément proches, à  $\varepsilon/3$  près, de  $g$  et de  $g'$ . Par le  $C^1$ -closing lemma (voir Pugh, Robinson [PR], voir également M.-C. Arnaud [Arna]), nous savons que l'on peut trouver  $F' \in \mathcal{U}$  admettant une orbite périodique. Il existe donc un entier  $q > 0$ , des entiers relatifs  $p$  et  $p'$  et un point  $z \in \mathbf{R}^2$  tel que

$$f'^q(z) = z + (p, p').$$

On considère l'espace affine

$$E = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}$$

et l'espace vectoriel associé

$$E' = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+q} = x_i, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}.$$

On définit un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \xi : E &\longrightarrow E' \\ x &\longmapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{cases} \xi_i(x) = g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}), & \text{si } i \not\equiv 0[q], \\ \xi_i(x) = g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}) - p', & \text{si } i \equiv 0[q]. \end{cases}$$

Ce champ de vecteurs est invariant par l'application

$$\tau : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_i + 1)_{i \in \mathbf{Z}}$$

et induit un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur l'espace quotient  $\tilde{E} = E/\tau$ .

L'application

$$q_0 : x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_0, g(x_0, x_1))$$

induit une bijection entre les singularités de  $\xi$  et les points  $z \in \mathbf{R}^2$  tels que

$$f^q(z) = z + (p, p').$$

On peut écrire  $\xi = \xi^* + \beta$ , où  $\beta$  est un champ de vecteurs borné (et même  $\mathbf{Z}^q$ -périodique) et où le champ  $\xi^*$  défini pour

$$f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$$

vérifie :

$$\begin{cases} \xi_i^*(x) = x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i, & \text{si } i \neq 0[q], \\ \xi_i^*(x) = x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i + p_1, & \text{si } i \equiv 0[q]. \end{cases}$$

On est dans une situation analogue à la situation étudiée au début de ce chapitre et tout ce qui a été fait dans les paragraphes 10.1 à 10.5 reste valable. En particulier, on peut utiliser les dernières remarques du paragraphe 10.5, dans le cas où  $\xi$  n'a pas de singularité.

On note  $\tilde{\xi}_a$  le champ de vecteurs défini sur  $\tilde{E}$  par  $f_a$  : il s'écrit

$$\tilde{\xi}_a = \tilde{\xi} + v_a,$$

où  $v_a$  est le vecteur dont toutes les coordonnées sont  $a$ . On note  $\tilde{\xi}'$  le champ de vecteurs défini sur  $\tilde{E}$  par  $f'$  : il s'obtient à partir de  $\tilde{\xi}$  en ajoutant un champ de vecteurs dont toutes les coordonnées sont bornées par

$$\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.$$

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que l'un des champs de vecteurs  $\tilde{\xi}_a$ ,  $a \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , a une singularité. On va raisonner par l'absurde et supposer le contraire.

On a les propriétés suivantes, remarquées au paragraphe 10.5 (sauf la dernière qui est une conséquence de la première) :

- l'ensemble des points d'orbites bornées de  $\tilde{\xi}_a$  est une orbite périodique  $T_a$  ;
- le tore  $T_a$  est l'ensemble  $\alpha$ -limite de toute orbite de  $\tilde{\xi}_a$  ;
- les coordonnées de  $\tilde{\xi}_a(x)$  sont toutes strictement positives pour tout  $x \in T_a$ , ou alors toutes strictement négatives pour tout  $x \in T_a$  ;
- l'application  $a \mapsto T_a$  est continue (pour la topologie de Hausdorff) ;

On en déduit bien évidemment que le signe apparaissant dans la troisième assertion est le même pour chaque  $a$ .

Puisque  $\tilde{\xi}'$  a une singularité, il existe un point  $\tilde{x} \in \tilde{E}$  tel que chaque coordonnée de  $\tilde{\xi}(x)$  soit inférieure ou égale à  $2\varepsilon/3$ . En particulier les coordonnées de  $\tilde{\xi}_\varepsilon(\tilde{x})$  sont toutes strictement positives. Il en est de même de celles de  $\tilde{\xi}_\varepsilon(\tilde{x}')$  si  $\tilde{x}'$  appartient à l'orbite négative de  $\tilde{x}$ , puisque l'ensemble  $W_0 \in \tilde{E} \times P(E')$  est négativement invariant par le flot linéarisé, et également si  $\tilde{x}'$  appartient à l'ensemble  $\alpha$ -limite  $\alpha(x) = T_\varepsilon$ . De façon analogue, les coordonnées de  $\tilde{\xi}_{-\varepsilon}(\tilde{x}')$  sont toutes strictement négatives si  $\tilde{x}'$  appartient à  $T_{-\varepsilon}$ . On a obtenu une contradiction.  $\square$

### 10.8. Une question naturelle

On considère le relèvement  $f$  d'un difféomorphisme  $F$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité qui s'écrit

$$f = f_{2n-1} \circ \cdots \circ f_0,$$

où

$$\Phi = (f_0, \dots, f_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n.$$

On note alors  $g$  et  $g'$  les fonctions associées à  $f$ .

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  on considère l'élément

$$\Phi_{a,b} = (h_b \circ f_0, h_a \circ f_1, h_b \circ f_2, \dots, h_a \circ f_{2n-1})$$

de  $\mathcal{D}_n$ , où

$$h_t : (x, y) \mapsto (x, y + t).$$

On pose alors

$$f_{a,b} = K_n(\Phi_{a,b}).$$

On peut alors se poser le problème suivant :

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , existe-t-il  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  vérifiant  $a^2 + b^2 < \varepsilon^2$  et tel que  $f_{a,b}$  ait une orbite périodique ?*

Un tel résultat permettrait d'approcher en topologie  $C^k$  tout difféomorphisme de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité par un difféomorphisme admettant une orbite périodique.

On sait que le résultat est vrai dans le cas où  $f$  préserve la mesure de Lebesgue  $\mu$ , on peut montrer en effet que l'on a

$$\int_{\mathbf{T}^2} (f_{a,b} - \text{Id}) d\mu = \int_{\mathbf{T}^2} (f - \text{Id}) d\mu + n(a, a + b),$$

si chaque  $f_i$  préserve  $\mu$ . L'intégrale précédente peut prendre des valeurs dans  $\mathbf{Q}^2$  pour  $a$  et  $b$  aussi petits que l'on veut. On sait dans ce cas, que  $F_{a,b}$  a des orbites périodiques, grâce au théorème de Conley-Zehnder appliqué à un itéré de  $F$ .

Expliquons en quoi l'étude faite dans le paragraphe 10.7 rend la question naturelle.

Par le  $C^1$ -closing lemma appliqué à  $F$ , nous savons qu'il existe  $f'$  proche de  $f$  qui s'écrit

$$f' = f'_{2n-1} \circ \dots \circ f'_0$$

où

$$\Phi' = (f'_0, \dots, f'_{2n-1}) \in \mathcal{D}_n$$

est proche de  $\Phi$ , tel que le difféomorphisme  $F'$  relevé par  $F$  admette une orbite périodique. Il existe donc des entiers  $p, p'$  et  $q$  (avec  $q > 0$ ) et un point  $z \in \mathbf{R}^2$  tel que

$$f^q(z) = z + (p, p').$$

Plus précisément nous pouvons supposer que pour chaque  $i$  les fonctions associées à  $f'_i$  sont uniformément proche, à  $\varepsilon/3$  près, des fonctions associées à  $f_i$ . Par des arguments similaires à ceux du paragraphe 10.7 nous savons qu'il existe un point  $x' \in E$  tel que chaque coordonnée de  $\xi(x')$  soit inférieure ou égale à  $2\varepsilon/3$ , où  $\xi$  est le champ de vecteurs défini par  $\Phi$  sur l'espace affine  $E$  introduit au paragraphe 8.1.

Pour tout couple  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ , le champ de vecteurs  $\xi_{a,b}$  défini sur  $E$  par  $\Phi_{a,b}$  s'écrit

$$\xi_{a,b} = \xi + v_{a,b},$$

où le vecteur  $v_{a,b}$  a ses coordonnées paires égales à  $a$  et ses coordonnées impaires égales à  $b$ . Quand  $(a, b)$  décrit le cercle de rayon  $\varepsilon$ , la courbe

$$(a, b) \longmapsto \xi_{a,b}(x')$$

est à valeurs dans  $W_0$  et se projette sur  $\mathbf{R}^2$  par chaque application

$$r_i : x \longmapsto (x_i, x_{i+1})$$

en une courbe fermée dont l'indice par rapport à  $(0, 0)$  est  $(-1)^i$ . Peut-on remplacer l'argument de connexité employé au paragraphe 10.7 par un argument d'indice et montrer, grâce à la dynamique des champs de vecteurs, que l'un des champs de vecteurs  $\xi_{a,b}$  a une singularité quand  $(a, b)$  parcourt la boule unité de rayon  $\varepsilon$  ?

# APPENDICE



# INFINITÉ D'ORBITES PÉRIODIQUES POUR LES DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS DE L'ANNEAU

J.-M. Gambaudo et P. Le Calvez

## 0. Introduction

Nous allons démontrer le résultat suivant, où  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  est le tore de dimension 1.

**THÉORÈME 0.1.** — *Un difféomorphisme de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ , homotope à l'identité, qui a un point fixe, qui n'est pas l'identité, et qui laisse invariante une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  chargeant les ouverts (i.e.  $\mu(U) \neq 0$  pour tout ouvert non vide  $U$ ), a des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes.*

Nous en déduisons alors le résultat ci-dessous, en considérant au voisinage de deux points fixes le système de coordonnées polaires usuel  $(r, \theta)$  puis en éclatant chaque point en un cercle d'équation  $r = 0$ .

**COROLLAIRE 0.2.** — *Un difféomorphisme de classe  $C^2$  de la sphère  $S^2$ , qui préserve l'orientation, qui laisse invariant une mesure de probabilité chargeant les ouverts, qui a trois points fixes, et qui n'est pas l'identité, a des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes.*

Le théorème 0.1 est dû à Franks [Fr3] sous l'hypothèse plus faible d'un homéomorphisme, résultat amélioré plus tard dans le cas de l'anneau ouvert [Fr4]. Dans [Fr3], Franks donne une très belle application du théorème : il existe une infinité de géodésiques fermées pour une métrique riemannienne sur la sphère  $S^2$  qui admet un « anneau de Birkhoff » (on sait d'autre part que le résultat est encore vrai s'il n'y a pas d'anneau de Birkhoff, voir Bangert [Ba]). La méthode utilisée par Franks utilise la notion, introduite par Schwartzman [S], de vecteur de rotation : c'est un élément du groupe d'homologie  $H_1(M, \mathbf{R})$  associé à toute mesure de probabilité invariante par un homéomorphisme isotope à l'identité d'une variété compacte  $M$  (à bord ou non).

Dans notre démonstration nous n'utiliserons cette notion, appelée alors nombre de rotation, que dans le cadre élémentaire de l'anneau et du tore. Le principe de



la démonstration est le suivant. À partir du difféomorphisme de l'anneau original, nous construisons par recollement et conjugaison un difféomorphisme du tore. Nous cherchons à démontrer que celui-ci possède des orbites de périodes arbitrairement grandes. Nous utilisons alors un résultat sur les difféomorphismes du tore, prouvé dans [L], qui donne une version équivariante et avec points fixes du théorème de translation de Brouwer. Cela nous permet (généralement par restriction) d'obtenir des homéomorphismes de l'anneau ayant une mesure invariante de nombre de rotation non nul. Nous utilisons ensuite deux critères connus d'existence d'infinité d'orbites périodiques pour des homéomorphismes de l'anneau.

Au paragraphe 1, on introduit les notations. Dans les paragraphes 2 à 5, on étudie les propriétés du nombre de rotation d'une mesure invariante par un homéomorphisme de l'anneau ou du tore. Au paragraphe 6 on rappelle deux critères d'existence d'infinité d'orbites périodiques pour un homéomorphisme de l'anneau. Au paragraphe 7, on rappelle la version sur le tore du théorème de translation de Brouwer. Au paragraphe 8, on démontre un résultat analogue au théorème 0.1 pour certains difféomorphismes du tore ; c'est la partie la plus technique de l'article. Au paragraphe 9, on prouve le théorème 0.1, on utilise pour cela les résultats du paragraphe 8 ainsi qu'un lemme de conjugaison qu'on démontre en appendice du paragraphe 10.

## 1. Notations

Nous notons  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  le tore de dimension 1 et

$$p_1 : (x, y) \mapsto x, \quad p_2 : (x, y) \mapsto y,$$

les projections définies sur  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}^2$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$  ou dans  $\mathbf{T}^1$  suivant le cas. Nous notons

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{T}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + \mathbf{Z}, y + \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

le revêtement universel du tore et

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x + \mathbf{Z}, y), \end{aligned}$$

celui de l'anneau. Nous définissons également la translation

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 1, y). \end{aligned}$$

Si  $\mu$  est une mesure sur un ensemble  $E$  muni d'une  $\sigma$ -algèbre et si  $X \subset E$  est une partie mesurable de mesure non nulle et finie, nous notons  $\mu_X$  la mesure de probabilité définie par la relation

$$\mu_X(Y) = \mu(X \cap Y) / \mu(X).$$

Un espace topologique  $A$  est *annulaire* s'il est homéomorphe au produit de  $\mathbf{T}^1$  et d'un intervalle non trivial de  $\mathbf{R}$ . Une courbe fermée simple dans  $A$  est *essentielle* si elle n'est pas homotope à zéro.

Soit  $f$  un homéomorphisme de  $\mathbf{R}^2$  préservant l'orientation. Nous appelons *droite de Brouwer* de  $f$  l'image  $C$  d'un plongement topologique propre de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$ , qui ne contient pas de point fixe, qui est disjointe de  $f(C)$  et de  $f^{-1}(C)$  et qui sépare ces deux ensembles. Le théorème de translation de Brouwer affirme que par tout point passe une droite de Brouwer si  $f$  n'a pas de point fixe (voir Brouwer [Br], voir également Guillou [Gu] pour une démonstration moderne du résultat).

## 2. Nombre de rotation sur l'anneau compact

Soit  $F$  un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R} \times [0, 1]$ . Le *nombre de rotation*  $\rho(z)$  d'un point  $z \in \mathbf{T}^1 \times [0, 1]$  est défini, quand il existe, par

$$\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{p_1 \circ f^n(\hat{z})}{n},$$

où  $\hat{z}$  est un point quelconque de  $\Pi_1^{-1}(\{z\})$ .

Si  $F$  préserve une mesure borélienne de probabilité  $\mu$ , le théorème ergodique de Birkhoff appliqué à la fonction

$$r = p_1 \circ f - p_1$$

définie sur l'anneau, exprime que le nombre de rotation est défini presque partout, que la fonction  $\rho$  obtenue est intégrable et que

$$\int \rho d\mu = \int r d\mu.$$

Cette intégrale, notée  $\rho(\mu)$ , est le *nombre de rotation* de  $\mu$ ; elle dépend du relèvement  $f$ .

Soit  $z$  un point périodique de  $F$  de période  $q$ . Il existe alors un entier  $p$  tel que

$$f^q(\hat{z}) = T^p(\hat{z}),$$

pour tout  $\hat{z} \in \Pi_1^{-1}(\{z\})$ . Le nombre rationnel  $p/q$  est alors le nombre de rotation de la mesure discrète invariante portée par l'orbite de  $z$ .

Soit  $G$  un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ , qui induit l'identité sur le groupe d'homologie de degré 1, et  $g$  un relèvement de  $G$  à  $\mathbf{R} \times [0, 1]$ . Il est facile de voir qu'un point  $z$  a un nombre de rotation pour  $f$  si et seulement si  $G(z)$  a un nombre de rotation pour  $g \circ f \circ g^{-1}$  et que ces réels sont égaux. De plus, si  $\mu$  est une mesure de probabilité invariante par  $F$ , le nombre de rotation de  $\mu$  pour  $f$  est égal au nombre de rotation de la mesure  $G_*(\mu)$  pour  $g \circ f \circ g^{-1}$ . Cela implique que le nombre de rotation est

bien défini pour un homéomorphisme homotope à l'identité d'un ensemble annulaire compact, dès qu'on se donne un générateur du groupe d'homologie de degré 1.

### 3. Nombre de rotation sur l'anneau ouvert

Dans le cas d'un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$  la situation est plus compliquée. En effet, il n'est pas difficile de montrer que l'existence d'un nombre de rotation pour un point n'est pas stable par conjugaison (il suffit que l'orbite du point ne soit pas bornée). Une façon naturelle de définir le nombre de rotation est alors de se limiter aux points récurrents de  $F$ . On dira qu'un point récurrent  $z$  a un nombre de rotation  $\rho(z)$  si pour toute suite extraite  $(F^{n_k}(z))_{k \geq 0}$  de la suite  $(F^n(z))_{n \geq 0}$  qui converge vers  $z$  on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{p_1 \circ f^{n_k}(\hat{z})}{n_k} = \rho(z)$$

si  $\hat{z} \in \Pi_1^{-1}(\{z\})$ , et si on a un résultat analogue pour les suites extraites de  $(F^n(z))_{n \leq 0}$  qui convergent vers  $z$ . Avec cette définition il est clair que l'existence d'un nombre de rotation est stable par conjugaison.

Si  $F$  préserve une mesure de probabilité  $\mu$  on dit que  $\mu$  a un nombre de rotation si presque tout point récurrent a un nombre de rotation et si la fonction mesurable  $\rho$  obtenue est intégrable, on posera alors

$$\rho(\mu) = \int \rho d\mu.$$

Ce nombre est invariant par conjugaison et peut être défini sur un ensemble annulaire ouvert (*i.e.* homéomorphe à  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$ ), dès qu'on se donne un générateur du groupe d'homologie de degré 1.

Dans le cas où  $F$  est la restriction d'un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ , la nouvelle définition du nombre de rotation de  $\mu$  coïncide avec l'ancienne puisque presque tout point est récurrent. Nous prendrons cette nouvelle définition pour définir plus généralement le nombre de rotation d'une mesure invariante pour un homéomorphisme homotope à l'identité d'un ensemble annulaire.

Considérons les paires  $(A, f)$  formées d'un ensemble annulaire  $A$  et d'un relèvement  $f$  au revêtement universel d'un homéomorphisme de  $A$  homotope à l'identité. Nous dirons que  $(A, f)$  se plonge essentiellement dans  $(A', f')$  s'il existe un plongement topologique

$$I : A \longrightarrow A'$$

qui induit une application injective sur les groupes d'homologie de degré 1 et tel que

$$i \circ f = f' \circ i,$$

où  $i$  est un relèvement de  $I$ . Une mesure  $\mu$  sur  $A$  invariante par l'homéomorphisme  $F$ , qui est relevé par  $f$ , a un nombre de rotation pour  $f$  si et seulement si la mesure  $I_*(\mu)$

définie sur  $A'$  a un nombre de rotation pour  $f'$ . Ces deux nombres sont les mêmes si on choisit un générateur  $\mathcal{G}$  de  $H_1(A, \mathbf{R})$  et le générateur  $i_*(\mathcal{G})$  de  $H_1(A', \mathbf{R})$ . En particulier si  $A'$  est compact toute mesure invariante par  $F$  a un nombre de rotation. C'est le cas particulièrement si  $F$  se prolonge par continuité en un homéomorphisme d'un anneau compact. Par abus de langage, et s'il n'y a pas d'ambiguïté, nous dirons que  $A$  se plonge essentiellement dans  $A'$ .

#### 4. Un critère de non-nullité du nombre de rotation

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. — *Soit  $F$  un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R} \times ]0, 1[$ . On suppose qu'il existe un plongement topologique*

$$\Gamma : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$$

*qui vérifie les hypothèses suivantes :*

(i) *on a*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p_2 \circ \Gamma(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p_2 \circ \Gamma(t) = 1;$$

(ii) *si*

$$\gamma : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \times ]0, 1[$$

*est un relèvement de  $\Gamma$ , alors  $C = \gamma(\mathbf{R})$  ne rencontre pas  $f(C)$ .*

*Alors le nombre de rotation d'une mesure de probabilité invariante qui charge les ouverts est non nul, s'il est bien défini.*

*Démonstration.* — On suppose que le nombre de rotation  $\rho(\mu)$  de  $\mu$  est bien défini. On peut trouver un homéomorphisme  $H$  de  $\mathbf{T}^1 \times ]0, 1[$  homotope à l'identité, qui envoie  $C$  sur la verticale  $\{0\} \times ]0, 1[$ . On considère alors un relèvement  $h$  de  $H$ . On pose

$$f' = h \circ f \circ h^{-1} \quad \text{et} \quad F' = H \circ F \circ H^{-1}.$$

On sait que la mesure  $\mu' = H_*(\mu)$  a un nombre de rotation pour  $f'$  et que ce nombre est égal à  $\rho(\mu)$ . L'image par  $f'$  de la verticale  $\{0\} \times ]0, 1[$  est disjointe de cette verticale, on la supposera à droite de celle-ci.

La fonction

$$r' = p_1 \circ f' - p_1$$

est minorée par  $-1$ . La fonction

$$R' = E \circ p_1 \circ f' - E \circ p_1,$$

où  $E$  désigne la fonction partie entière, est positive ; elle est de plus strictement positive sur un ensemble de mesure non nulle. Il en est de même des fonctions

$$R'_p = \inf(p, R').$$

Notons  $R'^n$  la somme de Birkhoff de la fonction  $R'$ , c'est-à-dire posons

$$R'^n = \frac{1}{n}(R' + \dots + R' \circ F'^{n-1}) = \frac{1}{n}(E \circ p_1 \circ f'^n - E \circ p_1).$$

Définissons de même les sommes de Birkhoff  $R'_p{}^n$  de chaque  $R'_p$  et la somme de Birkhoff  $r'^n$  de  $r'$ .

Par hypothèse, on sait que le nombre de rotation  $\rho'(z)$  est bien défini (pour  $f'$ ) pour presque tout point récurrent  $z$  de  $F'$ . On sait également, par le théorème de Birkhoff que pour presque tout point récurrent  $z$ , chacune des suites  $(R'_p{}^n(z))_{n \geq 0}$  converge vers un réel  $\rho'_p(z)$ . Des inégalités

$$R'_p{}^n \leq R'^n \quad \text{et} \quad |R'^n - r'^n| \leq \frac{2}{n},$$

on déduit que  $\rho'_p \leq \rho'$ . En intégrant on obtient

$$\int R' d\mu' = \sup_{p \geq 0} \left( \int R'_p d\mu' \right) = \sup_{p \geq 0} \left( \int \rho'_p d\mu' \right) \leq \int \rho' d\mu' = \rho(\mu).$$

On en déduit d'abord que  $R'$  est intégrable, puis par le théorème ergodique de Birkhoff, que la suite  $(R'^n(z))_{n \geq 0}$  converge presque partout vers  $\rho'(z)$  et que

$$\int R' d\mu' = \rho(\mu).$$

Comme la fonction  $R'$  est toujours positive et qu'elle est strictement positive sur un ensemble de mesure non nulle, on en déduit que  $\rho(\mu) > 0$ .  $\square$

## 5. Nombre de rotation sur le tore

Soit  $F$  un homéomorphisme du tore  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . On peut définir le nombre de rotation  $\rho(z)$  de  $z \in \mathbf{T}^2$  en posant

$$\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{p_1 \circ f^n(\hat{z})}{n},$$

où  $\hat{z} \in \Pi^{-1}(\{z\})$ , si cette limite existe. C'est alors un élément de  $\mathbf{R}^2$ . Si  $F$  préserve une mesure de probabilité  $\mu$ , on définit de la même façon le nombre de rotation de  $\mu$  en posant

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbf{T}^2} \rho d\mu = \int_{\mathbf{T}^2} f - \text{Id} d\mu.$$

La première coordonnée de  $\rho(\mu)$  est caractérisée ainsi : on considère une courbe fermée simple  $C$  homotope à  $\{0\} \times \mathbf{T}^1$ , puis un relèvement  $C^*$  dans le revêtement annulaire  $\mathbf{R} \times \mathbf{T}^1$  du tore et on calcule l'aire algébrique délimitée par  $C^*$  et  $f^*(C^*)$ , où  $f^*$  est l'homéomorphisme de  $\mathbf{R} \times \mathbf{T}^1$  relevé par  $f$ . En particulier si  $C^*$  est fixe, la première coordonnée est nulle. On a un résultat analogue pour la seconde coordonnée.

## 6. Critères d'existence d'orbites périodiques dans un ensemble annulaire

Le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff donne un critère suffisant d'existence d'une infinité d'orbites périodiques pour un homéomorphisme de l'anneau compact préservant l'aire. Ce théorème peut s'énoncer en terme de nombres de rotation de mesures. Il existe différentes généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. Nous allons en donner deux, écrites sous forme d'un théorème. L'assertion (i) est due à Franks [Fr1], l'assertion (ii) à Birkhoff [Bi2] et à Kérékjártó [K] (voir également [Fr2]).

**THÉORÈME 6.1.** — *Soit  $F$  un homéomorphisme homotope à l'identité d'un ensemble annulaire  $A$ . On suppose que  $F$  laisse invariantes deux mesures de probabilité  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ayant des nombres de rotation distincts pour un relèvement de  $F$ . Il existe alors des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes dans chacun des cas suivants :*

- (i) *la mesure  $\mu_1$  charge tous les ouverts de  $A$  ;*
- (ii) *l'ensemble  $A$  est compact, le support de  $\mu_1$  est dans un des bords de  $A$  et le support de  $\mu_2$  dans l'autre bord, enfin toute courbe fermée simple essentielle de  $A$  rencontre son image par  $F$ .*

## 7. Un champ de vecteurs sur le tore dont les courbes intégrales relevées sont des droites de Brouwer

On a montré dans [L] le résultat suivant :

**THÉORÈME 7.1.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . Il existe un champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  sur  $\mathbf{T}^2$ , un chemin  $s \mapsto F_s$  de  $[0, 1]$  dans l'ensemble des difféomorphismes du tore, et un entier  $n \geq 1$ , qui vérifient les propriétés suivantes :*

- (i) *le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  est continu et uniquement intégrable ;*
- (ii) *le chemin  $s \mapsto F_s$  joint l'identité à  $F$  et se relève en un chemin qui joint l'identité à  $f$  ;*
- (iii) *pour toute singularité  $z$  de  $\tilde{\zeta}$ , le chemin  $s \mapsto F_s(z)$  est constant égal à  $z$  ;*
- (iv) *si  $\tilde{\zeta}(z) \neq 0$ , l'application  $s \mapsto F_s(z)$  est de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $[i/2n, (i+1)/2n]$ ,  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , et l'application*

$$s \mapsto \det \left( DF_s(z) \cdot \tilde{\zeta}(z), \frac{d}{ds} F_s(z) \right),$$

*est positive ou nulle, et strictement positive sur au moins un de ces intervalles.*

### REMARQUES

- (i) L'assertion (iv) exprime qu'une courbe intégrale de  $\tilde{\zeta}$  est envoyée toujours plus à gauche par l'isotopie  $s \mapsto F_s$ . En particulier, pour chaque composante connexe  $U$  du complémentaire de l'ensemble des singularités, toute courbe intégrale du

champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}|_U$  relevée au revêtement universel de  $U$  est une droite de Brouwer du relèvement naturel de  $F|_U$  obtenu en relevant à partir de l'identité l'isotopie  $s \mapsto F^s|_U$ . On a un résultat analogue pour une courbe intégrale propre dans  $U$ , si  $U$  est une partie ouverte connexe invariante par l'isotopie.

- (ii) Dans le cas où  $z$  n'est pas une singularité, la demi-tangente au point de départ du chemin  $s \mapsto F_s(z)$  n'est pas nécessairement la valeur de  $\frac{d}{ds}F_s(z)$  en 0, c'est la valeur de  $\frac{d}{ds}F_s(z)$  en  $s_0$ , où

$$s_0 = \sup \{s \in [0, 1] \mid F_{s'}(z) = z \text{ pour tout } s' \in [0, s]\}.$$

On a un résultat du même type pour la demi-tangente au point d'arrivée.

- (iii) La construction faite dans [L] permet généralement d'obtenir plusieurs champs de vecteurs de ce type. On les obtient en construisant, à partir d'une décomposition de  $f$  en  $2n$  applications déviant la verticale (voir [L]), un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  de classe  $C^1$  et complet sur une variété affine  $\tilde{E}$  difféomorphe à  $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$ . On construit naturellement une fibration

$$\tilde{q}_0 : \tilde{E} \longrightarrow \mathbf{T}^2$$

qui induit une bijection entre l'ensemble des singularités de  $\tilde{\xi}$  et l'ensemble des points fixes de  $F$  qui se relèvent en des points fixes de  $f$ . L'ensemble des points d'orbite bornée par le flot induit par  $\tilde{\xi}$  est une réunion de sous-variétés  $T$  de classe  $C^1$ , telles que  $\tilde{q}_0|_T$  soit un difféomorphisme entre  $T$  et  $\mathbf{T}^2$ . Le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  définit un flot sur cet ensemble de tores et fixe au moins l'un d'entre eux. Pour chaque tore fixe  $T$ , le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$ , image par  $\tilde{q}_0$  du champ de vecteurs  $\tilde{\xi}|_T$ , vérifie le théorème 7.1.

- (iv) Dans le cas où  $F$  préserve la mesure de Lebesgue et où le nombre de rotation de cette mesure est nul, le champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  est un champ de gradient. Le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  admet donc un fonction de Liapounoff.

Nous allons donner une propriété dynamique de  $\tilde{\zeta}$  sous une hypothèse un peu plus faible.

**PROPOSITION 7.2.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $F$  préserve une mesure  $\mu$  chargeant les ouverts et que le nombre de rotation de  $\mu$  est nul (pour  $f$ ). Les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite d'un point  $z \in \mathbf{T}^2$ , pour le flot associé à tout champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  obtenu par le théorème 7.1, sont formés de singularités de  $\tilde{\zeta}$ .*

*Démonstration.* — Nous savons que l'ensemble  $\alpha$ -limite  $\alpha(z)$  et l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(z)$  sont non vides, compacts et connexes. Montrons qu'ils sont formés uniquement de singularités. Plus généralement, montrons que les seuls points non errants pour le flot sont les singularités. Pour cela raisonnons par l'absurde.

Supposons que  $z_0$  soit non errant et que  $\tilde{\zeta}(z_0) \neq 0$ . Considérons un voisinage  $W$  de  $z_0$  où le champ de vecteurs est trivialisable (un «flow-box»), puis une courbe fermée simple  $C$  de classe  $C^1$ , telle que la tangente orientée en un point  $z \in C$  soit la demi-droite engendrée par  $\tilde{\zeta}(z)$  si  $z$  n'appartient pas à  $W$ , et une demi-droite proche de celle-ci si  $z$  appartient à  $W$ .

D'après la propriété (iv) du théorème 7.1, on peut supposer qu'en tout point  $z \in C$ , la demi-tangente de l'arc  $s \mapsto F_s(z)$  en  $z$  est transverse à  $C$ . De même on peut supposer que la demi-tangente de l'isotopie au point  $F_1(z) = F(z)$  est transverse à la courbe  $F(C)$  au point  $F(z)$ .

*Premier cas : la courbe  $C$  n'est pas homotope à zéro.* — Considérons un revêtement

$$\Pi^* : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{T}^2,$$

où  $\mathbf{A}$  est annulaire et où  $\Pi^{*-1}(C)$  est formé de courbes fermées. Notons  $(f_s^*)_{s \in [0,1]}$  l'isotopie relevée à  $\mathbf{A}$ . Si  $C^*$  est une composante connexe de  $\Pi^{*-1}(C)$ , l'ensemble

$$K = \{f_s^*(z^*) \mid z^* \in C^*, \quad s \in [0, 1]\}$$

est une partie compacte dont la frontière est formée uniquement de points de  $C^*$  ou de  $f_1^*(C^*)$ . Ces deux courbes orientées sont homotopes. L'allure locale de  $K$  au voisinage de tout point  $z^* \in C^*$  et de tout point  $z^* \in f_1^*(C^*)$ , ainsi que l'orientation commune des deux courbes nous dit que la frontière de  $K$  est exactement la réunion de ces courbes et que celles-ci sont disjointes. Cela contredit le fait que  $\mu$  est une mesure qui charge les ouverts et qui a un nombre de rotation égal à 0.

*Second cas : la courbe  $C$  est homotope à zéro.* — On montre de façon analogue que l'un des ensembles  $F(C)$  ou  $F^{-1}(C)$  est contenu dans la composante connexe simplement connexe de  $\mathbf{T}^2 - C$ , ce qui contredit le fait que  $\mu$  charge les ouverts.  $\square$

## 8. Démonstration du résultat fondamental

Nous allons montrer le résultat suivant :

**PROPOSITION 8.1.** — *Soit  $F$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbf{T}^2$  homotope à l'identité et distinct de l'identité et  $f$  un relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R}^2$ . On suppose que  $f$  laisse fixe les horizontales  $\mathbf{R} \times \{k\}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . On suppose de plus que  $F$  laisse invariante une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  chargeant les ouverts et de nombre de rotation pour  $f$  égal à 0. Alors  $F$  admet des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes.*

*Démonstration.* — On considère le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$  défini par le théorème 7.1, ainsi que l'isotopie  $s \mapsto (F_s)$  et l'isotopie relevée  $s \mapsto f_s$ .

Puisque  $F$  n'est pas l'identité, il existe un point  $z$  tel que  $\tilde{\zeta}(z) \neq 0$ . On note  $U_\alpha$  la composante connexe de  $\mathbf{T}^2 - \alpha(z)$  qui contient  $z$ ; on note  $U_\omega$  la composante connexe



de  $\mathbf{T}^2 - \omega(z)$  qui contient  $z$ ; enfin on pose

$$U = U_\alpha \cap U_\omega.$$

Remarquons que les ensembles  $U_\alpha$ ,  $U_\omega$  et  $U$  sont invariants par chaque application  $F_s$ ,  $s \in [0, 1]$ . On note  $\phi$  le relèvement de  $F|_U$  au revêtement universel de  $U$  obtenu en relevant l'isotopie  $s \mapsto F_s|_U$  à partir de l'identité.

L'assertion (iv) du théorème 7.1 nous dit que toute courbe intégrale de  $\zeta|_U$  se relève en une droite de Brouwer de  $\phi$ . Grâce au lemme 4.1, on obtient :

LEMME 8.2. — *Dans le cas où  $U$  est annulaire, où l'orbite de  $z$  joint les deux bouts de  $U$  et où  $\mu_U$  a un nombre de rotation, celui-ci est non nul.*

Puisque  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  sont compacts connexes et non vides, chacun des ensembles  $U_\alpha$  et  $U_\omega$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^2$ , à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ , ou au tore  $\mathbf{T}^2$  privé d'un point; c'est-à-dire simplement connexe, annulaire ou hyperbolique. On énumère ci-dessous les situations possibles quant à la topologie des ensembles  $U_\alpha$ ,  $U_\omega$  et  $U$  (en échangeant éventuellement le rôle de  $U_\alpha$  et  $U_\omega$ ).

- Cas 1 : Les ensembles  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  sont disjoints;  $U_\alpha$  est simplement connexe;  $U_\omega$  est hyperbolique;  $U$  est annulaire.
- Cas 2 : Les ensembles  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  sont disjoints;  $U_\alpha$  et  $U_\omega$  sont tous deux annulaires; leurs premiers groupes d'homologie ont un générateur commun;  $U$  est également annulaire.
- Cas 3 : Les ensembles  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  sont disjoints;  $U_\alpha$  est annulaire;  $U_\omega$  est hyperbolique;  $U$  est homéomorphe à l'anneau ouvert privé d'un point.
- Cas 4 : Les ensembles  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  sont disjoints;  $U_\alpha$  et  $U_\omega$  sont hyperboliques;  $U$  est homéomorphe au tore  $\mathbf{T}^2$  privé de deux points.
- Cas 5 : Les ensembles  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  ne sont pas disjoints.

On va montrer dans chacun des cas, que  $F$  a une infinité d'orbites périodiques, de périodes arbitrairement grandes.

*Cas 1.* — L'ensemble  $U$  est annulaire et l'orbite de  $z$  joint les deux bouts de  $U$ . Nous allons montrer que  $f$  a des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes, ce qui impliquera le même résultat pour  $F$ . Nous allons donc nous placer dans le plan.

Considérons un point  $z^* \in \Pi^{-1}(\{z\})$  et notons  $U_\alpha^*$  et  $U_\omega^*$  les complémentaires respectifs des ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite de  $z^*$  pour le flot relevé. Les ensembles  $U_\alpha^*$  et  $U^* = U_\alpha^* \cap U_\omega^*$  se projettent alors homéomorphiquement sur  $U_\alpha$  et sur  $U$ . Fixons alors  $z_1^* \in \omega(z^*)$ .

On peut compactifier l'ensemble  $\mathbf{R}^2 - \{z_1^*\}$  et obtenir un ensemble annulaire compact  $A$  en considérant un système de coordonnées polaires au point  $z_1^*$  et en rajoutant un cercle à l'infini : on identifie  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{C}$ , on considère une copie  $\Sigma$  de

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\},$$

puis on pose

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = e^{i\theta} \in \Sigma$$

si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |z_k| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Arg}(z_k) = e^{i\theta}.$$

Chaque application  $f_s$  commutant avec les translations entières, l'isotopie  $s \mapsto f_s$  se prolonge par continuité en une isotopie sur  $A$  formée d'applications qui fixent tout point de  $\Sigma$ . Cette isotopie se relève naturellement au revêtement universel de  $A$  en une isotopie de l'identité à une application  $\varphi$ . Le nombre de rotation induit par  $\varphi$  sur le cercle à l'infini est alors nul. Le couple  $(U, \phi)$  est essentiellement plongé dans l'anneau compact  $(A, \varphi)$ . On en déduit que la mesure  $\mu_U$  a un nombre de rotation, puis que ce nombre est non nul d'après le lemme 8.2.

Considérons maintenant l'ensemble annulaire  $A' \subset A$  obtenu en compactifiant le bout de  $U_\alpha^* - \{z_1^*\}$  correspondant à  $z_1^*$  par un système de coordonnées polaires. Le couple  $(U, \phi)$  est alors essentiellement plongé dans  $(A', \varphi)$ .

On démontre que  $f$  a des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes en utilisant l'assertion (i) du théorème 6.1 appliqué au couple  $(A', \varphi)$  dans le cas où le nombre de rotation induit par  $\varphi$  sur le bord de  $A'$  est nul, en utilisant l'assertion (ii) du même théorème appliqué au couple  $(A, \varphi)$  dans le cas où il est non nul. En effet, le fait que  $f$  préserve une mesure chargeant les ouverts implique que la propriété d'intersection supposée dans l'assertion (ii) est vérifiée.

*Cas 2.* — L'ensemble  $U$  est annulaire et l'orbite de  $z$  joint les deux bouts de  $U$ . On peut compactifier  $U$  par la théorie des bouts premiers de Carathéodory [Ca] et prolonger l'application en un homéomorphisme de l'anneau compact : on en déduit que le nombre de rotation de la mesure  $\mu_U$  est bien défini et là encore qu'il est non nul (pour  $\phi$ ).

Le nombre de rotation de la mesure  $\mu_U$ , en tant qu'élément de  $\mathbf{R}^2$  défini au paragraphe 5, est de la forme  $(r, 0)$ ,  $r \neq 0$ , car  $f$  laisse invariante chaque droite  $\mathbf{R} \times \{k\}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . On en déduit qu'on a

$$i^*(H_1(U, \mathbf{R})) = \mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2 = H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}),$$

où  $i : U \rightarrow \mathbf{T}^2$  est l'inclusion. Ainsi, si  $M$  est un entier assez grand le couple  $(U, \phi)$  se plonge essentiellement dans le couple  $(A, f)$  où  $A$  est l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times [-M, M]$ .

Puisque, par hypothèse, le nombre de rotation (élément de  $\mathbf{R}^2$ ) de  $\mu$  est nul, on sait que le nombre de rotation de la mesure  $\mu$  relevée à  $A$  est nul. On applique alors l'assertion (i) du théorème 6.1 à  $(A, f)$  ; on obtient des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes pour  $F$ .

*Cas 3.* — La courbe intégrale de  $\tilde{\zeta}$  qui passe par  $z$  joint deux bouts distincts de  $U$ . On note  $A$  l'ensemble annulaire obtenu en compactifiant le troisième bout en un point  $a$  et  $\nu$  la mesure de probabilité définie naturellement sur  $A$  à partir de  $\mu_U$ . L'isotopie  $s \mapsto F_{s|U}$  définit une isotopie dans  $A$  formée d'homéomorphismes qui fixent  $a$ . On note  $\varphi$  l'homéomorphisme du revêtement universel de  $A$  défini naturellement par cette isotopie. Le nombre de rotation de la mesure de Dirac en  $a$  est alors nul pour  $\varphi$ . On peut là encore prolonger l'homéomorphisme de  $A$  relevé par  $\varphi$  à un anneau compact par la théorie des bouts premiers. Le nombre de rotation de  $\nu$  pour  $\varphi$  est donc bien défini et non nul d'après la propriété (iv) du théorème 7.1 vérifiée par le champ de vecteurs  $\tilde{\zeta}$ . En appliquant l'assertion (i) du théorème 6.1, on en déduit que  $F|_U$  a des orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes.

*Cas 4.* — On verra dans l'étude du cas 5 que c'est le cas 4 est le seul possible si  $F$  a un nombre fini de points fixes. On note  $f_s^*$  le difféomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  relevé par  $f_s$  et on définit

$$\begin{aligned} \Pi_2 : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{T}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + \mathbf{Z}, y). \end{aligned}$$

La courbe intégrale  $C^*$  du champ de vecteurs relevé passant par un point  $z^* \in \Pi_2^{-1}(\{z\})$  joint la composante connexe  $\alpha(z^*)$  de  $\Pi_2^{-1}(\alpha(z))$  à la composante connexe  $\omega(z^*)$  de  $\Pi_2^{-1}(\omega(z))$ .

Si  $M$  est un entier suffisamment grand, on a

$$f_s^*(C^*) \subset \mathbf{T}^1 \times [-M, M]$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ ; si  $M'$  est un entier suffisamment grand, on a

$$f_s^*(\mathbf{T}^1 \times ]-\infty, -M']) \cap (\mathbf{T}^1 \times [-M-1, +\infty[) = \emptyset$$

et

$$f_s^*(\mathbf{T}^1 \times [M', +\infty[) \cap (\mathbf{T}^1 \times ]-\infty, M+1]) = \emptyset,$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ .

Notons  $A_s$  l'ensemble annulaire compact compris entre les deux courbes

$$f_s^*(\mathbf{T}^1 \times \{-M'\}) \quad \text{et} \quad f_s^*(\mathbf{T}^1 \times \{M'\}).$$

On verra plus loin comment construire, pour tout  $s \in [0, 1]$ , un homéomorphisme

$$\theta_s : \mathbf{T}^1 \times [-M', M'] \longrightarrow A_s,$$

égal à l'identité sur  $\mathbf{T}^1 \times [-M, M]$ , tel que  $\theta_s$  dépende continûment de  $s$  pour la topologie de la convergence uniforme et tel que chacune des applications  $\theta_0$  et  $\theta_1$  soit l'identité. La famille

$$(\theta_s^{-1} \circ f_s^*)_{s \in [0, 1]}$$

est une isotopie de  $\mathbf{T}^1 \times [-M', M']$  joignant l'identité à  $f_1^*$ .

On construit un ensemble annulaire  $A$  en identifiant à un point chaque bord

$$\mathbf{T}^1 \times \{-M'\} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^1 \times \{M'\}$$

de la composante connexe  $V^*$  de

$$\mathbf{T}^1 \times [-M', M'] - (\alpha(z^*) \cup \omega(z^*))$$

qui contient  $z^*$ , et on note  $\mu^{**}$  la mesure définie naturellement sur  $A$  par  $\mu_{|V^*}^*$ . Chaque application  $\theta_s^{-1} \circ f_s^*$  définit naturellement un homéomorphisme  $f_s^{**}$  de  $A$ . On obtient ainsi une isotopie  $s \mapsto f_s^{**}$ , qui se relève au revêtement universel en une isotopie de l'identité à une application  $\varphi$ , formée d'applications fixant les deux points correspondants aux bords. L'application  $f_1^{**}$  préserve  $\mu^{**}$  et le nombre de rotation de cette mesure pour  $\varphi$  est bien défini et non nul. On peut conclure comme dans les autres cas.

Pour construire la famille  $(\theta_s)_{s \in [0,1]}$ , on peut commencer par munir  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  d'une structure complexe. On sait alors qu'il existe une application conforme entre

$$\mathbf{T}^1 \times ]M+1, M'_s[,$$

où  $M'_s > M+1$  est uniquement défini, et l'ensemble annulaire ouvert délimité par les courbes

$$f_s^*(\mathbf{T}^1 \times \{M+1\}) \quad \text{et} \quad f_s^*(\mathbf{T}^1 \times \{M'\}),$$

qui envoie le bout inférieur sur le bout inférieur. Cette application se prolonge en un homéomorphisme entre les anneaux fermés correspondants et l'application est alors uniquement déterminée par la valeur en un point de  $\mathbf{T}^1 \times \{M+1\}$ . On note  $\theta'_s$  celui qui fixe le point  $(0, M+1)$  puis on définit

$$\theta_s : \mathbf{T}^1 \times [M+1, M'] \longrightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R},$$

$$(x, y) \longmapsto \theta'_s \left( x, M+1 + \frac{M'_s - M - 1}{M' - M - 1} (y - M - 1) \right).$$

On peut montrer alors que l'application  $\theta_s$  dépend continûment de  $s$  pour la topologie de la convergence uniforme (voir T. Rado [Ra] pour la démonstration du problème analogue où l'on a une famille d'ouverts simplement connexes du plan délimités par des courbes de Jordan dépendant continûment d'un paramètre).

On définit de la même façon  $\theta_s$  sur  $\mathbf{T}^1 \times [-M', -M-1]$ , et on construit ensuite très facilement  $\theta_s$  sur  $\mathbf{T}^1 \times [-M-1, M+1]$  de façon à vérifier les propriétés demandées.

*Cas 5.* — Supposons maintenant que  $\alpha(z)$  et  $\omega(z)$  s'intersectent. L'ensemble  $U$  est alors homéomorphe à  $\mathbf{R}^2$ , à  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ , ou au tore  $\mathbf{T}^2$  privé d'un point. Le premier cas est impossible car l'orbite de  $z$  serait une courbe de Brouwer de  $F|_U$ , ce qui contredirait la préservation de la mesure. Le troisième cas est également impossible, car l'orbite de  $z^* \in \Pi^{-1}(\{z\})$  par le champ relevé, serait contenue dans la composante connexe annulaire de  $\mathbf{R}^2 \setminus \alpha(z^*) \cup \omega(z^*)$ , serait issue d'un bout de l'anneau et aboutirait au même bout, enfin séparerait son image par  $f$  de son image inverse, ce qui contredirait

la préservation de la mesure  $\mu$  relevée au plan. Si l'on est dans le deuxième cas et si la courbe intégrale de  $z$  est issue et aboutit au même bout de  $U$ , on a une contradiction du même type ; si la courbe intégrale joint les deux bouts de  $U$ , on se retrouve dans une situation vue auparavant.  $\square$

## 9. Démonstration du théorème

Rappelons l'énoncé du théorème que l'on veut démontrer :

**THÉORÈME 0.1.** — *Un difféomorphisme  $F$  de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ , homotope à l'identité, qui a un point fixe, qui n'est pas l'identité, et qui laisse invariante une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  chargeant les ouverts (i.e.  $\mu(U) \neq 0$  pour tout ouvert non vide  $U$ ), a des orbites périodiques de période arbitrairement grande.*

*Démonstration.* — On considère un point fixe  $z_0$ . On note  $f$  le relèvement de  $F$  à  $\mathbf{R} \times [0, 1]$  qui fixe tout point de  $\Pi_1^{-1}(\{z_0\})$ . Si le nombre de rotation  $\rho(\mu)$  de  $\mu$  pour  $f$  est non nul, l'assertion (i) du théorème 6.1, appliquée à  $\mu_1 = \mu$  et à la mesure de Dirac  $\mu_2$  concentrée en  $z_0$ , nous dit que  $F$  a des orbites périodiques de période arbitrairement grande. On supposera donc que ce nombre de rotation est égal à 0.

On peut prolonger  $F$  à  $\mathbf{T}^1 \times [-1, 1]$  par réflexion en posant, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{T}^1 \times [-1, 0]$ ,

$$F(x, y) = (p_1 \circ F(x, -y), -p_2 \circ F(x, -y)),$$

puis prolonger cette application en un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$  par la relation :

$$F(x, y + 2) = F(x, y) + (0, 2);$$

on prolonge de façon analogue  $f$  au plan obtenant un relèvement de  $F$ . On peut également prolonger la mesure par réflexion.

L'application  $F$  est le relèvement d'un homéomorphisme de  $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/2\mathbf{Z}$ , mais n'est généralement pas un difféomorphisme. Cependant la proposition qui sera démontrée dans l'appendice nous permet de dire que  $F$  est conjugué à un difféomorphisme du tore  $\mathbf{T}^2$  par une application du type

$$(x, y) \mapsto (x, \varphi(y))$$

Ce difféomorphisme préserve une mesure définie à partir de  $\mu$  qui charge les ouverts et dont le nombre de rotation est nul pour le relèvement conjugué à  $f$ . Il vérifie toutes les conditions de la proposition 8.1. Comme ce difféomorphisme est composé de deux copies de  $F$  à conjugaison près, le théorème suit.  $\square$

## 10. Annexe

Pour tout homéomorphisme  $F : W \rightarrow W'$  entre deux voisinages de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  dans  $\mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[$  laissant  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  invariant, on peut définir le *symétrisé*  $F^\sigma$  de  $F$ . Si on pose

$$r(x, y) = (x, -y),$$

c'est l'homéomorphisme

$$F^\sigma : W \cup r(W) \longrightarrow W' \cup r(W')$$

égal à  $F$  sur  $W$  et à  $r \circ F \circ r$  sur  $r(W)$ .

Le symétrisé de  $F = (F_1, F_2)$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  si et seulement si  $F$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  et si on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, 0) = 0,$$

pour tout  $x \in \mathbf{T}^1$ .

**PROPOSITION 10.1.** — *Soit  $F : W \rightarrow W'$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  entre deux voisinages de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  dans  $\mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[$  laissant  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$  invariant. Il existe un homéomorphisme*

$$H : \mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[$$

*de la forme*

$$H : (x, y) \longmapsto (x, \varphi(y)),$$

*où  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $[0, +\infty[$ , tel que le symétrisé de  $H^{-1} \circ F \circ H$  soit un difféomorphisme de classe  $C^1$ .*

*Démonstration.* — On écrit

$$F = (F_1, F_2) \quad \text{et} \quad F^{-1} = (F_1^-, F_2^-).$$

On sait alors que pour tout  $x \in \mathbf{T}^1$ , on a

$$F_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, 0) > 0,$$

et des résultats similaires pour  $F_2^-$ .

On fixe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\mathbf{T}^1 \times [0, \varepsilon] \subset W \cap W'.$$

On définit ensuite une application

$$L : [0, \varepsilon] \longrightarrow [0, +\infty[$$

continue, croissante et s'annulant en 0, en posant

$$L(y) = \max_{(x, y') \in \mathbf{T}^1 \times [0, y]} \left( \max \left( \left| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y') \right|, \left| \frac{\partial F_2^-}{\partial x}(x, y') \right| \right) \right).$$

On considère également un réel  $K > 1$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, \varepsilon]$ , on ait

$$K^{-1}y \leq F_2(x, y) \leq Ky$$

et

$$K^{-1}y \leq F_2^-(x, y) \leq Ky.$$

LEMME 10.2. — *Il existe une application continue*

$$\theta : ]0, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[$$

*telle que :*

- (i)  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \theta(y) = +\infty$  ;
- (ii)  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \theta(y)L(y) = 0$  ;
- (iii)  $\int_0^1 \theta(s) ds < +\infty$  ;
- (iv) si  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(y'_n)_{n \geq 0}$  sont deux suites convergeant vers 0 telles que

$$K^{-1} \leq \frac{y_n}{y'_n} \leq K$$

*pour tout  $n \geq 0$ , alors la suite  $\left( \frac{\theta(y_n)}{\theta(y'_n)} \right)_{n \geq 0}$  converge vers 1.*

*Démonstration.* — Si  $L$  s'annule sur un voisinage de 0, l'application

$$\theta : y \longmapsto \max(-\log(y), 1)$$

vérifie les conditions du lemme. Sinon on commence par construire une application continue  $\theta_1$  vérifiant les trois premières conditions en posant

$$\theta_1(y) = \max\left(\min(-\log(y), L(y)^{-1/2}), 1\right),$$

puis on définit

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbf{R} &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) = \log(\theta_1(e^{-t})), \end{aligned}$$

en remarquant qu'on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_1(t) = +\infty.$$

On construit maintenant une application de classe  $C^1$

$$\gamma : \mathbf{R} \longrightarrow [0, +\infty[$$

de classe  $C^1$  vérifiant

- $\gamma \leq \gamma_1$  ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$  ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) = 0$ .

Pour cela on choisit une suite  $(u_k)_{k \geq 0}$  vérifiant

- $u_0 = 0$  ;
- $u_{k+1} - u_k \geq k$  pour tout  $k \geq 0$  ;
- $\gamma(t) \geq k$  pour tout  $t \geq u_k$ .

On lisse ensuite convenablement l'application affine par morceaux joignant les points  $(u_0, 0)$  et  $(u_k, k - 1)$ ,  $k \geq 1$ .

L'application

$$\begin{aligned} \theta : ]0, +\infty[ &\longrightarrow [1, +\infty[ \\ y &\longmapsto e^{\gamma(-\log(y))} \end{aligned}$$

vérifie la condition (i) puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$ , les conditions (ii) et (iii) puisque  $\theta \leq \theta_1$ , enfin la condition (iv) puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) = 0$ .  $\square$

L'application

$$y \longmapsto \int_0^y \theta(s) ds$$

est un homéomorphisme de  $[0, +\infty[$  dont l'inverse, noté  $\varphi$ , est de classe  $C^1$  et a une dérivée positive qui ne s'annule qu'en 0. Montrons que l'application

$$H : (x, y) \longmapsto (x, \varphi(y))$$

vérifie les conditions de la proposition et pour cela écrivons

$$H^{-1} \circ F \circ H = F^* = (F_1^*, F_2^*).$$

L'application

$$F_1^* : (x, y) \longmapsto F_1(x, \varphi(y))$$

est de classe  $C^1$  et on a

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial y}(x, 0) = \varphi'(0) \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

L'application

$$F_2^* : (x, y) \longmapsto \varphi^{-1}(F_2(x, \varphi(y)))$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R} \times ]0, +\infty[$  et on a

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x}(x, y) = \frac{\theta(F_2(x, \varphi(y)))}{\theta(\varphi(y))} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, \varphi(y)) \theta(\varphi(y))$$

et

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial y}(x, y) = \frac{\theta(F_2(x, \varphi(y)))}{\theta(\varphi(y))} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, \varphi(y))$$

puisque

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\theta(\varphi(y))} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1'}(y) = \theta(y).$$



Si  $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$  est une suite convergeant vers  $(x, 0)$ , la suite

$$\left( \frac{\theta(F_2(x_n, \varphi(y_n)))}{\theta(\varphi(y_n))} \right)_{n \geq 0}$$

converge vers 1 d'après la propriété (iv) vérifiée par  $\theta$  et la suite

$$\left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_n, \varphi(y_n)) \theta(\varphi(y_n)) \right)_{n \geq 0}$$

vers 0 d'après la propriété (ii). Ainsi  $F_2^*$  est de classe  $C^1$  et on a

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, 0).$$

Pour les mêmes raisons, l'application  $F^{*-1}$  est de classe  $C^1$ . Comme on a

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial y}(x, 0) = 0,$$

le symétrisé de  $F^*$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ . □

## BIBLIOGRAPHIE

- [An1] S. B. ANGENENT. The periodic orbits of an area preserving twist map, *Commun. Math. Phys.*, **115** (1988), 353–374.
- [An2] S. B. ANGENENT. Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **10** (1990), 15–41.
- [AG] S. B. ANGENENT, C. GOLÉ. Lamination by ghost circles, *preprint, E.T.H. Zurich*, (1991).
- [Arno] V. I. ARNOLD. Méthodes mathématiques de la mécanique classique, *Editions MIR*.
- [Arna] M.-C. ARNAUD. Le «closing lemma» en topologie  $C^1$ , *Mémoires Soc. Math. France*, **74** (1998).
- [Ba] V. BANGERT. On the existence of closed geodesics on two-spheres, *International. J. of Math.*, **4** (1993), 1–10.
- [Bi] G. BIRKHOFF. Extensions of Jentzsch's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 219–227.
- [Bi2] G. D. BIRKHOFF. An extension of Poincaré's last Geometric theorem, *Acta Math.*, **47** (1925), 297–311.
- [Br] L. E. J. BROUWER. Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.*, **72** (1912), 37–54.
- [BM] C. BAESSENS, R. S. MAC KAY. Gradient dynamics of tilted Frenkel-Kontorova models, *Nonlinearity*, **11** (1998), 949–964.
- [Ca] C. CARATHÉODORY. Untersuchungen über die konforme Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, *Math. Ann.*, **72** (1912), 107–144.
- [Ce] J. CERF. Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 227–380.

- [Cha] M. CHAPERON Une idée du type «géodésiques brisées» pour les systèmes hamiltoniens, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **298** (1984), 293–296.
- [Che] YU. V. CHEKANOV. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds, *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, **30** (1996), 56–69.
- [Co] C. CONLEY. Isolated invariant sets and the Morse index, *Conference board of the Mathematical Sciences*, **38** (1978).
- [CE] C. CONLEY, R. EASTON. Isolated invariant sets and isolating blocks, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **158** (1971), 35–61.
- [CZ] C. CONLEY, E. ZEHNDER. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold, *Invent. Math.*, **73** (1983), 33–49.
- [Ep] D. EPSTEIN. Curves on 2-manifolds and isotopies, *Acta. Math.*, **115** (1966), 83–107.
- [EE] C. EARLE, J. EELLS. A fibre bundle description of teichmüller theory, *J. Diff. Geom.*, **4** (1970), 169–185.
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU. Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque, Soc. Math. France*, **66-67** (1979), 621–626.
- [Flo] A. FLOER. A refinement of Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **7** (1987), 93–103.
- [Flu] M. FLUCHER. Fixed points of measure preserving homeomorphisms, *Manuscripta Math.*, **68** (1990), 271–293.
- [Fr1] J. FRANKS. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem, *Annals of Math.*, **128** (1988), 139–151.
- [Fr2] J. FRANKS. A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem, *Contemp. Math.*, **81** (1988), 139–151.
- [Fr3] J. FRANKS. Geodesics on  $S^2$  and periodic points of annulus homeomorphisms, *Invent. Math.*, **108** (1992), 403–418.
- [Fr4] J. FRANKS. Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero, *New York J. Math.*, **2** (1996), 1–19.
- [GL] J.-M. GAMBAUDO, P. LE CALVEZ. Infinité d'orbites périodiques pour les homéomorphismes conservatifs de l'anneau, ce volume.
- [Go] C. GOLÉ. Ghost circles for twist maps, *J. Diff. Equations*, **97** (1992), 140–173.
- [Gr] A. GRAMAIN, Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **6** (1973), 53–66.

- [Gu] L. GUILLOU. Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff, *Topology*, **33** (1990), 331–351.
- [Ha] M. HAMSTROM. Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold. *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 563–573.
- [HZ] H. HOFER, E. ZEHNDER. Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics, *Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin*, (1994).
- [K] B. DE KÉREKJÁRTÓ. The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *Acta Sci. Math. Szeged*, **4** (1928-29), 86–102.
- [L] P. LE CALVEZ. Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale, ce volume.
- [L1] P. LE CALVEZ. Propriétés dynamiques de l’anneau et du tore, *Astérisque, Soc. Math. France*, **204** (1991).
- [L2] P. LE CALVEZ. Une généralisation du théorème de Conley-Zehnder au tore de dimension 2, *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, **17** (1997), 71–80.
- [L3] P. LE CALVEZ. Construction d’orbites périodiques par perturbation d’un difféomorphisme de l’anneau déviant la verticale, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **321** (1995), 463–468.
- [LM] R. LUKE, W. MASON. The space of homeomorphisms on a compact 2-manifold is an A.N.R., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 275–285.
- [MS] R. MAC KAY, J. STARCK. Lectures on orbits of minimal action for area-preserving maps, *preprint, University of Warwick*, (1985).
- [Ma] J. N. MATHER. Amount of rotation about a point and the Morse index, *Commun. Math. Phys.*, **21** (1982), 457–467.
- [Mo] P. VAN MORBEKE. The spectrum of Jacobi Matrices, *Inventiones math.*, **37** (1976), 45–81.
- [PR] C. PUGH, C. ROBINSON. The closing lemma including Hamiltonians *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **3** (1983), 261–313
- [Ra] T. RADO. Sur la représentation conforme des domaines variables, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **1** (1923), 180–186.
- [Ru] D. RUELLLE. Analyticity properties of the characteristic exponents of random matrix products, *Adv. in Math.*, **32** (1979), 68–80.
- [S] S. SCHWARTZMAN. Asymptotic cycles. *Ann. of Maths*, **68** (1957), 270–284.
- [Sh] M. SHUB. Stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque, Soc. Math. France*, **56** (1978).

- [Si] J.-C. SIKORAV. Problème d'intersection et de points fixes en géométrie hamiltonienne, *Comm. Math. Helvet.*, **62** (1987), 62–73.
- [Sm] S. SMALE. Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 621–626.
- [T] W. P. THURSTON. On the geometry and dynamic of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19** (1988), 417–431.
- [V] C. VITERBO. Symplectic topology as the geometry of generating functions, *Math. Ann.*, **292** (1992), 685–710.
- [Wh] H. WHITNEY. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 63–89.
- [Wi] H. E. WINLELNKEMPER. Twist maps, covering and Brouwer's translation theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267** (1981), 585–593.

# INDEX

## Chapitre 1

• $\text{fix}(f)$ .....	(1.1)
• $\text{sing}(\theta)$ .....	(1.1)
• $x^t$ .....	(1.1)
• $\mathbf{T}^2$ .....	(1.1)
• $\Pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ .....	(1.1)
• Distance de Hausdorff .....	(1.2)
• $\text{Diff}(\mathbf{T}^2)$ .....	(1.3)
• $D^k(\mathbf{T}^2)$ .....	(1.3)
• $C^k$ -topologie .....	(1.3)
• $f + a$ .....	(1.3)
• $\text{Fix}(f)$ .....	(1.3)
• Nombre d'enlacement $I(z_0, z_1)$ ..	(1.4)
• Nombre d'enlacement $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$ ..	(1.4)
• Nombre d'enlacement $I(z_0, O)$ ...	(1.4)
• Nombre d'enlacement $\tilde{I}(\tilde{z}_0, \tilde{O})$ ...	(1.4)
• Ensemble non enlacé de points fixes .....	(1.5)
• Ensemble non enlacé maximal ...	(1.5)
• Ensemble $f$ -non enlacé .....	(1.5)
• Ensemble $f$ -non enlacé maximal .	(1.5)
• Difféomorphisme déviant la verticale .....	(1.6)
• Fonctions associées .....	(1.6)
• Fonction génératrice .....	(1.6)
• $f^*, F^*, g^*, g'^*, h^*$ .....	(1.6)
• $(f_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$ .....	(1.7)
• $\mathcal{D}_n$ .....	(1.7)
• $K_n : \mathcal{D}_n \rightarrow D^1(\mathbf{T}^2)$ .....	(1.7)
• $E$ .....	(1.8)
• $\xi$ .....	(1.8)

• $q_i, q'_i : E \rightarrow \mathbf{R}^2$ .....	(1.8)
• $\Phi^*, g_i^*, g_i'^*, \xi^*$ .....	(1.9)
• Fonction génératrice $H^* : E \rightarrow \mathbf{R}$	(1.9)
• $E_0, E_-, E_+$ .....	(1.9)
• $\tau_0, \tau_1$ .....	(1.9)
• $\tilde{E}$ .....	(1.9)
• $\pi : E \rightarrow \tilde{E}$ .....	(1.9)
• $\Lambda_0$ .....	(1.9)
• $D(\tilde{x}, \tilde{x}')$ .....	(1.9)
• $\tilde{q}_i, \tilde{q}'_i : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2$ .....	(1.9)
• $x = x_0 + x_- + x_+$ .....	(1.10)
• $B_R$ .....	(1.10)
• Indice de Conley .....	(1.10)
• $\xi_\Phi, \tilde{\xi}_\Phi, \Lambda_\Phi$ .....	(1.10)
• Fonction génératrice $H : E \rightarrow \mathbf{R}$	(1.11)

## Chapitre 2

• $\sigma$ .....	(2.1)
• Fonction d'enlacement $L$ .....	(2.1)
• $W$ .....	(2.1)
• $\gamma^x : [0, 2n] \rightarrow \mathbf{R}^2$ .....	(2.1)
• Fonction d'enlacement $L_1$ .....	(2.1)
• $W_j, W_j^-, W_j^+$ .....	(2.1)
• $r_0 : E \rightarrow \mathbf{R}^2$ .....	(2.1)
• $F_j$ .....	(2.2)
• $\mathcal{W}_j, \mathcal{W}_j^-, \mathcal{W}_j^+$ .....	(2.2)
• Fonction d'enlacement $\tilde{L}_1$ .....	(2.3)
• $\tilde{W}, \tilde{W}_j, \tilde{W}_j^-, \tilde{W}_j^+$ .....	(2.3)
• Espace projectif $P(E)$ .....	(2.4)
• $\delta$ .....	(2.4)

**Chapitre 3**

- $A^*$  ..... (3.1)
- $E_j(x), E_j^-(x), E_j^+(x)$  ..... (3.2)
- $P_j(x), P_j^-(x), P_j^+(x)$  ..... (3.2)
- $E_j, E_j^-, E_j^+$  ..... (3.2)
- $P_j, P_j^-, P_j^+$  ..... (3.2)
- $\mathcal{G}_j^-, \mathcal{G}_j^+$  ..... (3.3)
- Graphe d'orbite bornée ..... (3.3)
- $p_j^-, p_j^+$  ..... (3.3)
- $\hat{\mathcal{G}}_j^-, \hat{\mathcal{G}}_j^+$  ..... (3.3)
- $\mathcal{P}_j$  ..... (3.5)
- $\hat{\mathcal{P}}_j$  ..... (3.5)
- Plan d'enlacement  $j$  ..... (3.5)
- Plan d'orbite bornée ..... (3.5)
- $E_k', E_k''$  ..... (3.5)
- $r_i : E \rightarrow \mathbf{R}^2$  ..... (3.5)
- $\hat{\mathcal{T}}_0$  ..... (3.6)
- Tore d'enlacement 0 ..... (3.6)
- Tore d'orbite bornée ..... (3.6)
- $\mathcal{T}$  ..... (3.6)

**Chapitre 4**

- Ensemble bien enlacé ..... (4.1)
- $\gamma_s : E \rightarrow \mathbf{R}^2$  ..... (4.1)
- $\tilde{r}_i : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^2$  ..... (4.1)
- $O_t(x)$  ..... (4.2)
- Courbe de Jordan bien enlacée .. (4.3)
- Nombre d'enlacement  $L_1(x, C)$  .. (4.3)
- Nombre d'enlacement  $L_1(C)$  .... (4.3)
- Point à l'intérieur  
  (à l'extérieur) de  $C$  ..... (4.3)

**Chapitre 5**

- Ensemble non enlacé  
  de singularités ..... (5.1)
- Ensemble non enlacé maximal ... (5.1)
- $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}(\text{sing}(\tilde{\xi}))$  ..... (5.2)

**Chapitre 6**

- $Q_i, Q_i',$  ..... (6.1)
- $\tilde{\zeta}_i, \tilde{\zeta}_i'$  ..... (6.2)
- Droite de Brouwer ..... (6.3)
- $\tilde{\zeta}$  ..... (6.3)
- $\Theta$  ..... (6.4)

**Chapitre 7**

- Nombre de rotation réel  
  d'un point fixe ..... (7.1)

**Chapitre 8**

- $E'$  ..... (8.1)
- $\varphi : E \rightarrow E$  ..... (8.1)
- $\tilde{\varphi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$  ..... (8.1)
- $(x_i^*)_{i \in \mathbf{Z}}$  ..... (8.2)
- $\mathcal{T}'$  ..... (8.3)
- Ensemble  $\varphi$ -non enlacé ..... (8.3)
- Ensemble  $\varphi$ -non enlacé maximal . (8.3)

**Chapitre 9**

- $l, \tilde{l}$  ..... (9.1)
- $L_q, \tilde{L}_q$  ..... (9.2)

**Chapitre 10**

- Cercle fantôme ..... (10.3)
- Ensemble bien ordonné ..... (10.4)