

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

EMMANUEL RISLER

Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 77 (1999)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1999_2_77__R3_0

© Mémoires de la S. M. F., 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LINÉARISATION DES PERTURBATIONS HOLOMORPHES DES ROTATIONS ET APPLICATIONS

Emmanuel Risler

Résumé. — Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des applications holomorphes proches d'une rotation dans un anneau, et en particulier au problème de la linéarisation de ces applications, c'est-à-dire la possibilité ou non de les conjuguer holomorphiquement à des rotations.

Soit F une application holomorphe sur un anneau ouvert A de \mathbf{C} , et holomorphiquement conjuguée sur A à une rotation irrationnelle $R_{\alpha_0} : z \mapsto e^{2i\pi\alpha_0}z$, $\alpha_0 \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z}$. Supposons que F soit plongée dans une famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications holomorphes sur A , dépendant holomorphiquement d'un paramètre λ qui varie dans un ouvert Λ de \mathbf{C}^n , avec $F = F_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, notons Λ_α l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que l'application F_λ soit holomorphiquement conjuguée à l'application $R_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ sur un sous-anneau de A .

Si α_0 vérifie une certaine condition arithmétique de non-résonance (la condition de Bruno), on montre les résultats suivants :

1) L'ensemble Λ_{α_0} (qui contient λ_0) définit au voisinage de λ_0 une sous-variété analytique complexe de codimension 1 de Λ (autrement dit, la condition d'être holomorphiquement conjuguée à R_{α_0} est une condition de codimension 1). La condition de Bruno est optimale pour ce résultat.

2) Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ (non nécessairement réel) assez proche de α_0 , et satisfaisant à une condition de non-résonance analogue à la condition de Bruno (pour les α réels, il s'agit d'une condition de Bruno uniforme), on a la même propriété : l'ensemble Λ_α définit, au voisinage de λ_0 , une sous-variété analytique complexe (non vide) de codimension 1 de Λ .

On obtient ainsi un feuilletage partiel d'un voisinage de λ_0 dans Λ par des sous-variétés analytiques de codimension 1. On montre que la correspondance $\lambda \mapsto \alpha$, définie sur ce feuilletage partiel, est régulière (C^∞) au sens de Whitney.

Les résultats relatifs aux α réels sont principalement basés sur une construction de renormalisation de la dynamique des applications considérées, formellement analogue à celle introduite par J.-C. Yoccoz pour étudier le problème de Siegel ([18]), mais techniquement plus délicate ; en effet, on a besoin ici de renormaliser simultanément toute une famille analytiquement paramétrée d'applications, ce qui rend nécessaire

l'utilisation de techniques d'analyse de plusieurs variables complexes (en particulier la résolution d'un problème $\bar{\partial}$, par la méthode des estimées L^2 de Hörmander).

L'extension aux α complexes est une conséquence géométrique des résultats relatifs aux α réels, et la propriété de régularité au sens de Whitney se déduit de cette extension par des estimées de fonctions analytiques.

À la fin de l'article, on décrit certaines conséquences de ces résultats pour les domaines singuliers de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman) des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann. Si R est une fraction rationnelle qui admet un anneau de Herman (ou un disque de Siegel) dont le nombre de rotation vérifie la condition de Bruno, alors on retrouve le feuilletage partiel décrit ci-dessus au voisinage de R dans l'espace des fractions rationnelles de même degré (dans le cas d'un disque de Siegel, ce feuilletage correspond simplement aux ensembles de niveau du multiplicateur du point fixe ou périodique correspondant au centre du disque). On définit globalement les feuilles correspondant aux disques de Siegel et aux anneaux de Herman, et on montre (toujours sous la condition de Bruno) que disques et anneaux dépendent continûment (pour une topologie adéquate) de la fraction rationnelle sur ces feuilles.

Abstract (Linearization of holomorphic perturbations of rotations and applications)

This work is devoted to the study of the dynamics of holomorphic maps which are close to a rotation in an annulus, and in particular the linearization problem, i.e. the problem of holomorphically conjugating these maps to rotations.

Take a holomorphic map F on an open annulus A of \mathbf{C} , F being holomorphically conjugated on A to an irrational rotation $R_{\alpha_0} : z \mapsto e^{2i\pi\alpha_0}z$, $\alpha_0 \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})\mathbf{Z}$. Suppose that F is embedded in a family $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ of holomorphic maps on A , depending holomorphically on a parameter λ which varies in an open set Λ of \mathbf{C}^n , with $F = F_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

For $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, denote by Λ_α the set of $\lambda \in \Lambda$ for which the map F_λ is holomorphically conjugated to the map $R_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ on a sub-annulus of A .

If α_0 satisfies a certain arithmetic non-resonance condition (the Bruno condition), we prove the following results :

1) In a neighborhood of λ_0 , the set Λ_{α_0} (which contains α_0) defines a one-codimensional complex analytic submanifold of Λ (roughly speaking, the condition of being holomorphically conjugated to R_{α_0} is a one-codimensional condition). The Bruno condition is optimal for this result.

2) More generally, for any α in \mathbf{C}/\mathbf{Z} sufficiently close to α_0 (α not necessarily real), and satisfying a non-resonance condition which is analogous to the Bruno condition (for real α , it is a uniform Bruno condition), we have the same property : in a neighborhood of λ_0 , the set Λ_α defines a one-codimensional (non-empty) complex-analytic submanifold of Λ .

This way we obtain a partial foliation of a neighborhood of λ_0 in Λ by one-codimensional complex-analytic submanifolds. We prove that the correspondence $\lambda \mapsto \alpha$, defined on this partial foliation, is regular (C^∞) in the sense of Whitney.

The results for real α are mainly based on a construction of renormalization of the dynamics of the considered maps, formally analogous to the one introduced by J.-C.

Yoccoz to study the Siegel problem ([18]), but technically more delicate ; indeed, here we have to simultaneously renormalize a whole analytically parametrized family of maps, which requires the use of several complex variables techniques (in particular the resolution of a $\bar{\partial}$ -problem, by Hörmander's method of L^2 -estimates).

The extension to complex α is a geometrical consequence of the results for real α , and the regularity property in the sense of Whitney follows from this extension through estimates for analytic functions.

At the end of the paper, we describe certain consequences of these results on singular rotation domains (Siegel discs and Herman rings) of rational maps on the Riemann sphere. If R is a rational map admitting a Herman ring (or a Siegel disc) whose rotation number satisfies the Bruno condition, then we again find the above described partial foliation in a neighborhood of R in the space of rational maps of fixed degree (in the case of a Siegel disc, this foliation simply corresponds to the level sets of the multiplier of the fixed or periodic point corresponding to the center of the disc). We globally define the sheets corresponding to Siegel discs and Herman rings, and we show (still under the Bruno condition) that discs and rings continuously depend (for a suitable topology) on the rational map on these sheets.

Table des matières

Introduction	1
0.1. Introduction	1
0.2. Notations	6
0.3. Énoncé des résultats	10
1. Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations	15
1.1. Description des démonstrations	15
1.2. Linéarisation dans le cas d'une grande hauteur de bande	18
1.3. Linéarisation dans le cas d'une petite hauteur de bande	28
1.4. Construction d'applications uniformisantes (cas d'une grande hauteur de bande)	33
1.5. Construction d'applications uniformisantes (cas d'une petite hauteur de bande)	54
1.6. Appendices	59
2. Complexification et régularité transverse	67
2.1. Nombre de rotation complexe et propriétés	67
2.2. Extension complexe du théorème de linéarisation	69
2.3. Régularité au sens de Whitney de l'application $(\alpha, F) \mapsto \lambda(\alpha, F)$	75
3. Compléments et applications	83
3.1. Propriétés d'unicité	83
3.2. Applications aux domaines singuliers de rotation des fractions rationnelles	86
3.3. Compléments arithmétiques	92
Bibliographie	101

INTRODUCTION

0.1. Introduction

On note \mathbf{C}/\mathbf{Z} le quotient de \mathbf{C} par les translations entières et $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ la projection canonique. Pour $\Delta > 0$, posons : $\mathbf{B}_\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \Delta\}$ et : $\mathbf{A}_\Delta = \pi(\mathbf{B}_\Delta)$. Notons $\mathcal{D}(\Delta)$ l'ensemble des applications : $\mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$, qui sont holomorphes sur \mathbf{B}_Δ et qui commutent avec les translations entières.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, notons T_α la translation : $z \mapsto z + \alpha$.

Au cours de cet article, le terme *analytique* signifiera toujours, sauf spécification contraire, analytique complexe.

DÉFINITION. — Soient $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On dira que F est *analytiquement conjuguée à la translation* T_α s'il existe $\Delta' > 0$ ($\Delta' < \Delta$) et une application $H \in \mathcal{D}(\Delta')$, injective sur $\mathbf{B}_{\Delta'}$, vérifiant : $H(\mathbf{B}_{\Delta'}) \subset \mathbf{B}_\Delta$, et telle qu'on ait :

$$F \circ H(z) = H(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta'}.$$

Le principal objectif de ce travail est d'étudier cette notion de conjugaison pour des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ proches de translations (donc relevées d'applications proches de rotations, d'où le terme « perturbations holomorphes de rotations »). Nous avons choisi par commodité de nous placer presque toujours dans le revêtement \mathbf{C} de \mathbf{C}/\mathbf{Z} plutôt que dans \mathbf{C}/\mathbf{Z} .

DÉFINITION. — On appellera *domaine de linéarisation* pour une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ tout ensemble $A \subset \mathbf{B}_\Delta$ ouvert, connexe, simplement connexe, \mathbf{Z} -périodique, et invariant par F , c'est-à-dire vérifiant : $F(A) \subset A$.

Si une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ admet un domaine de linéarisation A , et si f désigne l'application : $\mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$ dont F est un relevé par π , alors $\pi(A)$ est un anneau ouvert, séparant les deux bouts de \mathbf{C}/\mathbf{Z} , et $f(\pi(A)) \subset \pi(A)$. Toute représentation conforme de $\pi(A)$ dans un anneau standard conjugue alors f à une rotation pure. En particulier, $f(\pi(A)) = \pi(A)$, $F(A) = A$, et F est analytiquement conjuguée à une translation réelle (au sens de la définition ci-dessus). Il est donc équivalent, pour une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$, d'être analytiquement conjuguée à une translation réelle, ou d'admettre un domaine de linéarisation. On dira, lorsqu'on est dans ce cas, que F est *linéarisable*. Il existe alors un *domaine de linéarisation maximal* (pour l'inclusion), et le vecteur α (réel) de la translation à laquelle F est analytiquement conjuguée est défini de manière unique.

Posons : $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et notons $D^\omega(\mathbf{T}^1)$ l'ensemble des relevés à \mathbf{R} des difféomorphismes \mathbf{R} -analytiques du cercle préservant l'orientation (c'est-à-dire l'ensemble des difféomorphismes \mathbf{R} -analytiques de \mathbf{R} qui commutent avec les translations entières). Remarquons que toute application $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ s'étend en une application holomorphe sur un voisinage \mathbf{Z} -périodique de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , et définit donc un élément de $\mathcal{D}(\Delta)$, pour $\Delta > 0$ suffisamment petit (la classe des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$, $\Delta > 0$, est donc plus large que celle des relevés de difféomorphismes analytiques du cercle). À tout $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ est associé un « nombre de rotation » dans \mathbf{R} , que l'on note $\rho(F)$. Une application $F \in D^\omega(\mathbf{T}^1)$ est dite « analytiquement linéarisable » si F est conjuguée à la translation $T_{\rho(F)}$ par une application conjuguante \mathbf{R} -analytique (appartenant elle-même à $D^\omega(\mathbf{T}^1)$). La notion de linéarisabilité définie plus haut pour les applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ prolonge naturellement cette notion de linéarisabilité analytique pour les difféomorphismes analytiques du cercle.

L'objectif de ce travail est d'étudier, d'unifier, et d'appliquer un certain nombre de résultats connus sur la linéarisabilité analytique des difféomorphismes analytiques du cercle et des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. Tous les résultats seront de nature locale (c'est-à-dire que les applications considérées seront toujours proches de translations) et dépendront fortement des propriétés arithmétiques (petits diviseurs) du nombre de rotation. Dans les rappels historiques qui vont suivre, nous nous bornerons à ne mentionner que des résultats de nature locale.

Les premiers résultats concernant la linéarisabilité des difféomorphismes analytiques du cercle sont dus à Arnold ([2], 1965), qui a démontré que, si α satisfait à la condition diophantienne DC_1 (c'est-à-dire s'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, on ait : $|\alpha - p/q| \geq \gamma/|q|^3$) alors tout difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α et suffisamment proche de T_α est analytiquement conjugué à T_α (un résultat analogue en classe différentiable a été obtenu à la même époque par Moser). La démonstration d'Arnold est basée sur la méthode de Newton, c'est-à-dire sur une construction de la conjugaison par approximations successives, grâce à des solutions de l'équation linéarisée.

Un problème analogue à celui de la linéarisabilité analytique des difféomorphismes analytiques du cercle est celui de la linéarisabilité des germes d'applications holomorphes au voisinage d'un point fixe indifférent dans \mathbf{C} , le fameux problème de Siegel. C. L. Siegel a démontré ([16], 1942) que si α vérifie une condition diophantienne, alors tout germe d'application holomorphe au voisinage d'un point fixe de multiplicateur $e^{2i\pi\alpha}$ est linéarisable. A. D. Bruno a amélioré ([4], 1971) ce résultat en montrant qu'une condition suffisante pour avoir toujours linéarisabilité s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < \infty,$$

où $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ désigne la suite des réduites du développement en fraction continue de α . Cette condition, connue sous le nom de condition de Bruno, apparaît comme la condition arithmétique naturelle et optimale pour les problèmes locaux de linéarisabilité analytique en dimension 1 ; c'est sous cette condition que nous allons nous placer tout au long de cet article.

H. Rüssmann a généralisé ([14], 1972) le théorème local d'Arnold (énoncé ci-dessus) en affaiblissant la condition arithmétique portant sur α . Dans cet article, il établit que ce théorème est valable dès que α satisfait à une condition diophantienne très proche — mais néanmoins un peu plus restrictive — que la condition de Bruno. Sa démonstration repose à nouveau sur la méthode de Newton. Plus récemment ([15], 1995), Rüssmann a amélioré cette méthode grâce à un calcul nouveau et plus performant des estimées sur les approximations successives des solutions. Il en déduit une amélioration du théorème local de Kolmogorov-Arnold sur la linéarisation des mouvements quasi-périodiques pour les perturbations analytiques des systèmes hamiltoniens intégrables, en montrant la persistance de toutes les fréquences satisfaisant à la condition de Bruno. Il est possible que cette méthode permette de résoudre d'autres problèmes locaux de petits diviseurs en classe analytique, sous la condition de Bruno, en particulier certains résultats que nous allons établir ici par des méthodes complètement différentes.

Dans [7], 1985, M. Herman présente une démonstration simple du théorème local d'Arnold ainsi que de l'extension de ce résultat aux applications de $\mathcal{D}(\Delta)$, à savoir : si α est un réel qui satisfait à la condition diophantienne DC_1 , alors, pour tout $\Delta > 0$, et pour tout $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ suffisamment proche d'une translation, il existe (un unique) $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que l'application : $z \mapsto \lambda + F(z)$ soit analytiquement conjuguée à T_α . Cet énoncé généralise naturellement le théorème local d'Arnold en remplaçant la condition (de codimension 1) explicite consistant à fixer le nombre de rotation par une condition de codimension 1 implicite. La démonstration de Herman utilise la dérivée schwartzienne pour transformer astucieusement l'équation de conjugaison ; il se ramène ainsi à une équation résoluble sans outil sophistiqué d'analyse fonctionnelle : le théorème des fonctions implicites standard ou le théorème du point fixe de Schauder-Tychonov suffisent pour conclure. Ceci fournit, pour toute application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ proche d'une translation, une application $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$, définie sur un sous-ensemble de DC_1 (du type : $DC_{1,\gamma} = \{\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \mid \text{pour tout } p/q \in \mathbf{Q}, |\alpha - p/q| \geq \gamma/|q|^3\}$), à valeurs dans \mathbf{C} , telle que, pour chaque α appartenant à ce sous-ensemble, l'application $\lambda(\alpha) + F$ soit analytiquement conjuguée à T_α . Herman montre ensuite (par la même méthode) que le résultat de linéarisation ci-dessus et l'application $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ s'étendent pour des α appartenant à un sous-ensemble du plan complexe construit à partir de $DC_{1,\gamma}$. Comme le fait remarquer Herman, tous ces résultats sont en fait implicitement contenus dans l'article d'Arnold [2] (la démonstration d'Herman a l'avantage d'être considérablement plus simple). Cette extension complexe permet à Herman de montrer que l'application

$\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ est régulière (plus précisément C^1) au sens de Whitney sur $DC_{1,\gamma}$. Nous allons généraliser et préciser tous ces résultats.

Les méthodes développées par Arnold, Moser, Rüssmann, Herman (et par tous ceux qui ont contribué à ce qu'on appelle la « théorie KAM ») pour résoudre ces problèmes de conjugaison peuvent être qualifiées d'« analytiques » : il s'agit de résoudre l'équation de conjugaison grâce à des arguments d'analyse fonctionnelle, sans vraiment tenir compte du cadre géométrique d'où provient cette équation. J.-C. Yoccoz a introduit ([18], 1987) une méthode géométrique tout à fait différente pour étudier les problèmes de linéarisabilité analytique en dimension complexe 1 (c'est-à-dire pour les applications holomorphes au voisinage d'un point fixe indifférent — le fameux problème de Siegel — et les difféomorphismes analytiques du cercle). Le fondement en est une construction de renormalisation de la dynamique des applications considérées, avec un contrôle quantitatif de la distorsion des applications obtenues par cette construction. Lorsqu'on itère la renormalisation, on voit apparaître le lien entre l'arithmétique de α (le multiplicateur du point fixe ou le nombre de rotation) et la géométrie, la distorsion des applications renormalisées. Dans [19], Yoccoz montre, à partir de ce point de vue, que l'ensemble des réels α tels que tout difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α , suffisamment proche de la translation T_α , soit analytiquement linéarisable est exactement l'ensemble des nombres de Bruno ; dans l'article antérieur [18], Yoccoz établit le résultat correspondant pour le problème de Siegel (c'est-à-dire l'optimalité de la condition de Bruno pour avoir toujours linéarisabilité). Signalons que Yoccoz a également donné une caractérisation de l'ensemble des nombres α tels que tout difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α (non nécessairement proche de T_α) soit analytiquement linéarisable, voir [19].

Ce travail poursuit trois objectifs, qui correspondent grosso modo aux trois parties en lesquelles il se divise.

Le premier objectif est un théorème de linéarisation des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ proches des translations, sous la condition arithmétique de Bruno, qui est la condition optimale pour ce problème (théorème 1). La stratégie consiste à adapter la démonstration du théorème de Yoccoz de linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle proches des rotations. Le point clé est donc de mettre en place une construction de renormalisation de la dynamique des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. La différence principale avec le cas des difféomorphismes analytiques du cercle est qu'on a besoin ici d'une version « analytiquement paramétrée » de cette construction (on démarre avec une famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$, et non avec une seule application F). La mise en place de cet outil est assez lourde techniquement et nécessite en particulier la résolution d'un problème $\bar{\partial}$ par la méthode des estimées L^2 de Hörmander. Une description plus détaillée de la démonstration figure au début de la partie 1.

L'énoncé obtenu généralise le théorème d'Arnold-Herman de linéarisation des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ décrit plus haut, et on retrouve la correspondance $\alpha \mapsto \lambda$, mais définie sur un ensemble plus large (théorème 2). Le deuxième objectif est d'étendre cette correspondance à des nombres de rotation complexes et de démontrer qu'elle est C^∞ au sens de Whitney (théorèmes 3 et 4). À la différence de Herman dans [7], nous devons construire l'extension complexe « à la main », en partant du théorème 2, et en définissant géométriquement le nombre de rotation complexe à partir d'une courbe « ascendante » ou « descendante ». Pour démontrer ensuite la régularité au sens de Whitney, nous reprendrons la démarche de Herman dans [7] : l'application $\alpha \mapsto \lambda$ est holomorphe dans le complexe, et l'équation aux différences obtenue en linéarisant l'équation de conjugaison permet d'établir un contrôle sur la distorsion de cette application lorsqu'on converge vers des α réels, ce qui entraîne la régularité au sens de Whitney.

Le troisième objectif est d'appliquer ces résultats aux domaines de rotation des fractions rationnelles. Notons $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann et \mathcal{R}^d l'espace des fractions rationnelles de degré d . Soit $R \in \mathcal{R}^d$; un *domaine de rotation* pour R est un ouvert U de $\overline{\mathbf{C}}$, homéomorphe à un disque ou à un anneau, périodique (il existe $n \geq 1$, minimal, tel que $R^n(U) = U$), tel que $R|_U$ soit conjuguée à une rotation irrationnelle (ou éventuellement, dans le cas d'un anneau, à une rotation irrationnelle suivie d'une inversion), et maximal pour ces propriétés. On appellera *période de U* l'entier n et *nombre de rotation de U* l'angle de cette rotation irrationnelle. Un domaine de rotation homéomorphe à un disque est appelé un *disque de Siegel*, et un domaine de rotation homéomorphe à un anneau est appelé un *anneau de Herman*.

Supposons que R admette un domaine de rotation U de période n et de nombre de rotation θ . Supposons tout d'abord que U soit un disque de Siegel, et notons x son centre, c'est-à-dire l'unique point périodique (de période n) dans U ; on a : $(R^n)'(x) = e^{2i\pi\theta}$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V_R de R dans \mathcal{R}^d , un voisinage V_x de x dans $\overline{\mathbf{C}}$, et une application : $V_R \rightarrow V_x$, $Q \mapsto x_Q$ analytique, telle que, pour tout $Q \in V_R$, x_Q soit l'unique point fixe de Q^n dans V_x . L'application $M : Q \mapsto (Q^n)'(x_Q)$ (« multiplicateur ») est donc elle aussi analytique, et ne peut pas être constante (car sinon elle serait égale à $e^{2i\pi\theta}$, et on pourrait l'étendre par connexité à \mathcal{R}^d tout entier, ce qui est impossible). Les ensembles de niveau de cette fonction M définissent donc un feuilletage analytique (éventuellement singulier) de codimension un de V_R , et toutes les valeurs au voisinage de $e^{2i\pi\theta}$ sont atteintes.

Supposons au contraire que U soit un anneau de Herman. Dans ce cas, il n'existe plus de point périodique associé à U . Néanmoins, sous l'hypothèse supplémentaire que θ est un nombre de Bruno, nous montrerons que l'on peut encore définir une fonction \tilde{M} « multiplicateur », définie sur presque tout un voisinage de R dans \mathcal{R}^d , et qui est l'analogue de la fonction M définie plus haut ; on peut donc retrouver dans ce cas une description d'un voisinage de R grâce aux ensembles de niveau de cette fonction \tilde{M} .

(en particulier, nous montrerons que la propriété d'admettre un anneau de Herman proche de U de nombre de rotation θ définit un ensemble analytique de codimension un au voisinage de R dans \mathcal{R}^d). Le théorème de Mañé d'instabilité des anneaux ([11]) nous servira de manière essentielle.

Nous établirons également des propriétés de continuité des domaines de rotation (essentiellement la continuité de la capacité conforme dans le cas des disques, et la continuité du module dans le cas des anneaux) lorsqu'on fait varier la fraction rationnelle, à nombre de rotation fixé (Bruno), ou même à nombre de rotation variable mais restreint à certains sous-ensembles « compacts » de nombres de Bruno.

Malheureusement, nos résultats ne disent rien des domaines de rotation dont le nombre de rotation ne vérifierait pas la condition de Bruno. Cette restriction pourrait n'être qu'apparente, puisque l'on conjecture que de tels domaines de rotation n'existent pas (cette conjecture n'est démontrée que pour les polynômes de degré deux, voir [18]).

Remerciements. — Ce travail reprend une partie de ma thèse, soutenue en Octobre 1996 à l'École Polytechnique. Je remercie mon directeur de thèse Jean-Christophe Yoccoz pour toute l'aide qu'il m'a apportée; les résultats présentés ici lui doivent bien sûr beaucoup. Je tiens également à remercier Eduard Zehnder pour m'avoir accueilli dans le cadre exceptionnel de l'École Polytechnique Fédérale de Zürich, où une part importante de ce travail a été effectuée.

0.2. Notations

Posons $\kappa = 1/100$; nous utiliserons κ à chaque fois que nous aurons besoin d'introduire une constante universelle petite devant 1.

Notons $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann, \mathbf{C}/\mathbf{Z} le quotient de \mathbf{C} par les translations entières, et $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ la projection canonique.

Pour $z \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, notons $\mathbf{D}(z, r)$ le disque ouvert de centre z et de rayon r dans \mathbf{C} . Nous noterons souvent de manière plus concise \mathbf{D}_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r dans \mathbf{C} , et \mathbf{D} le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbf{C} .

Pour $\Delta > 0$, posons : $\mathbf{B}_\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \Delta\}$ et : $\mathbf{A}_\Delta = \pi(\mathbf{B}_\Delta)$.

Pour $\Delta > 0$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, posons :

$$\mathbf{B}_\Delta(\alpha) = \begin{cases} \{z \in \mathbf{C} \mid -\Delta < \operatorname{Im} z < \Delta + \operatorname{Im} \alpha\} & \text{si } \operatorname{Im} \alpha \geq 0 \\ \{z \in \mathbf{C} \mid -\Delta - \operatorname{Im} \alpha < \operatorname{Im} z < \Delta\} & \text{si } \operatorname{Im} \alpha \leq 0 \end{cases}$$

et posons : $\mathbf{A}_\Delta(\alpha) = \pi(\mathbf{B}_\Delta(\alpha))$.

Pour $\Delta > 0$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}$, et $\varepsilon > 0$, notons :

- $\mathcal{D}(\Delta)$ (resp. $\mathcal{D}(\Delta, \alpha)$) l'ensemble des applications $\mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{B}_\Delta(\alpha) \rightarrow \mathbf{C}$) qui sont analytiques et qui commutent avec les translations entières;
- $\mathcal{D}_\mu(\Delta) = \{F \in \mathcal{D}(\Delta) \mid \int_0^1 (F(z) - z)dz = \mu\}$;

- $\mathcal{D}_\mu^\varepsilon(\Delta) = \{F \in \mathcal{D}_\mu(\Delta) \mid \sup_{z \in \mathbf{B}_\Delta} |F(z) - z - \mu| < \varepsilon\};$
- $\mathcal{D}^\varepsilon(\Delta) = \bigcup_{\mu \in \mathbf{C}} \mathcal{D}_\mu^\varepsilon(\Delta).$

De même,

- $\mathcal{D}_\mu(\Delta, \alpha) = \{F \in \mathcal{D}(\Delta, \alpha) \mid \int_0^1 (F(z) - z) dz = \mu\};$
- $\mathcal{D}_\mu^\varepsilon(\Delta, \alpha) = \{F \in \mathcal{D}_\mu(\Delta, \alpha) \mid \sup_{z \in \mathbf{B}_\Delta(\alpha)} |F(z) - z - \mu| < \varepsilon\};$
- $\mathcal{D}^\varepsilon(\Delta, \alpha) = \bigcup_{\mu \in \mathbf{C}} \mathcal{D}_\mu^\varepsilon(\Delta, \alpha).$

Enfin, on ajoutera en exposant le symbole « inj » pour préciser que les applications sont injectives sur leur domaine de définition ; par exemple, $\mathcal{D}_\mu^{\varepsilon, \text{inj}}(\Delta, \alpha)$ désigne l'ensemble des applications appartenant à $\mathcal{D}_\mu^\varepsilon(\Delta, \alpha)$ et qui sont injectives sur $\mathbf{B}_\Delta(\alpha)$.

Si A est un anneau muni d'une structure complexe, nous noterons $\text{mod}(A)$ son module.

Notations arithmétiques. — Nous allons utiliser une variante du développement en fraction continue usuel qui a déjà été utilisée dans [18]. Soit α un nombre irrationnel. Notons $\langle \alpha \rangle$ l'entier le plus proche de α , et notons $\|\alpha\| = |\alpha - \langle \alpha \rangle|$ la distance de α à l'entier le plus proche.

Posons $\alpha_{-1} = \alpha^{-1}$, et définissons par récurrence les suites $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$, en posant :

$$a_k = \langle \alpha_{k-1}^{-1} \rangle \text{ et } \alpha_k = \|\alpha_{k-1}^{-1}\| = \varepsilon_k(\alpha_{k-1}^{-1} - a_k), \quad \varepsilon_k \in \{-1, 1\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, pour $k \geq 0$, $\alpha_k \in (0; 1/2)$ et pour $k \geq 1$, $a_k \geq 2$.

Posons $\beta_{-2} = \alpha$, $\beta_{-1} = 1$, et, pour $k \in \mathbf{N}$, $\beta_k = \prod_{j=0}^k \alpha_j$. Pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad \beta_k &= \varepsilon_k(\beta_{k-2} - a_k \beta_{k-1}) \\ &= \inf_{a \in \mathbf{N}} |\beta_{k-2} - a \beta_{k-1}|. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 1$. Pour tout $k \geq -2$ il existe deux entiers (uniques) p_k et q_k tels que :

$$(2) \quad \beta_k = (-1)^k \left(\prod_{j=-2}^k \varepsilon_j \right) (q_k \alpha - p_k)$$

(en particulier, $q_{-2} = p_{-1} = 1$, $p_{-2} = q_{-1} = 0$). Pour $k \geq 0$, on a donc :

$$\beta_k = \|q_k \alpha\|, \quad p_k = \langle q_k \alpha \rangle.$$

Par récurrence, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$q_{k+1} = \min\{q > q_k \mid \|q\alpha\| < 1/2\|q_k \alpha\|\}$$

(ce qui fournit une définition alternative des entiers q_k). L'équation (1) entraîne, pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} q_k &= a_k q_{k-1} + \varepsilon_{k-1} q_{k-2}, \\ p_k &= a_k p_{k-1} + \varepsilon_{k-1} p_{k-2}; \end{aligned}$$

donc,

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k \left(\prod_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j \right), \quad k \geq 0,$$

et $\beta_k = \alpha_k \beta_{k-1}$ entraîne :

$$\alpha = \frac{p_k + \varepsilon_k p_{k-1} \alpha_k}{q_k + \varepsilon_k q_{k-1} \alpha_k}, \quad k \geq -1.$$

La suite des rationnels $(p_k/q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une sous-suite de la suite usuelle des réduites de α , qui n'omet jamais deux termes consécutifs de cette suite. L'équation (2) entraîne :

$$(3) \quad q_{k+1} \beta_k + \varepsilon_{k+1} q_k \beta_{k+1} = 1.$$

En particulier, $\beta_k = (q_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \alpha_{k+1} q_k)^{-1}$ et on a les estimées suivantes :

$$(4) \quad \frac{1}{2q_{k+1}} \leq \beta_k \leq \frac{2}{q_{k+1}}$$

(en particulier, $q_{k+1} \geq 2^k$). D'après (3) et (4),

$$(5) \quad |q_{k+1} \beta_k - 1| < \alpha_{k+1}.$$

Nombres de Bruno. — (voir [18] pour plus de précisions).

Posons :

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k-1} \log \alpha_k^{-1}.$$

On dit que α *satisfait à la condition de Bruno* si $\Phi(\alpha) < +\infty$. Notons \mathcal{B} l'ensemble des nombres irrationnels qui vérifient cette condition. D'après (5), il existe une constante universelle C telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^n \beta_{k-1} \log \alpha_k^{-1} - \sum_{k=0}^n q_k^{-1} \log a_{k+1} \right| < C.$$

En particulier, $\alpha \in \mathcal{B}$ si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} q_k^{-1} \log a_{k+1}$ converge. La définition ci-dessus coïncide avec celle énoncée précédemment en introduction.

Pour $j \in \mathbf{N}$, posons :

$$\Psi_j(\alpha) = \sum_{k=j}^{\infty} q_k^{-1} \log a_{k+1}.$$

Sous-ensembles de \mathcal{B} . — Notons Σ l'ensemble des suites à termes strictements positifs, décroissantes, et qui convergent vers 0. Pour tout $s = (s_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \Sigma$, notons \mathcal{B}_s le sous-ensemble de \mathcal{B} constitué des nombres α irrationnels tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on ait :

$$\Psi_k(\alpha) \leq s_k.$$

L'ensemble \mathcal{B}_s est fermé et \mathbf{Z} -périodique. De plus, si la suite s vérifie :

$$s_k \geq 2^{-(k-1)} \log 2, \quad k \in \mathbf{N},$$

il est non vide (le nombre $\sqrt{2} - 1$, pour lequel tous les a_k valent 2, appartient à \mathcal{B}_s). Bien sûr, $\bigcup_{s \in \Sigma} \mathcal{B}_s = \mathcal{B}$.

REMARQUE. — À tout $\alpha \in \mathcal{B}$ correspond la suite $(q_k^{-1} \log a_{k+1})_{k \in \mathbf{N}}$ qui appartient à ℓ^1 . On peut donc munir l'ensemble \mathcal{B} de la topologie τ_{ℓ^1} induite par la distance de la norme ℓ^1 sur ces suites (cette topologie est plus fine que la topologie induite par la distance usuelle de \mathbf{R}). On remarque alors que, pour toute partie K de \mathcal{B} , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- l'ensemble K est relativement compact pour la topologie τ_{ℓ^1} ;
- il existe $s \in \Sigma$ tel que $K \subset \mathcal{B}_s$.

Autrement dit, les ensembles \mathcal{B}_s , $s \in \Sigma$, constituent une famille exhaustive (non dénombrable !) de parties compactes de \mathcal{B} pour la topologie τ_{ℓ^1} .

Pour tout $s \in \Sigma$, posons :

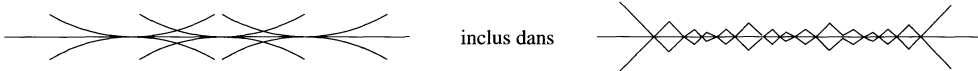
$$\Omega_s = \mathcal{B}_s \sqcup \bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{\alpha \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}(\alpha - \alpha_0)| > \kappa |\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_0)|\}.$$

La proposition suivante (qui sera démontrée en section 3.3) précise quelques propriétés des ensembles \mathcal{B}_s .

PROPOSITION 1

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s \in \Sigma$ tel que $m(\mathcal{B}_s \cap [0; 1]) > 1 - \varepsilon$ (m désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}).
2. Pour tout $s \in \Sigma$, il existe $s' \in \Sigma$ tel que tout point de \mathcal{B}_s soit un point de densité de $\mathcal{B}_{s'}$.
3. Pour tout $s \in \Sigma$, il existe $s' \in \Sigma$ et une fonction $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, vérifiant : $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-n} \varphi(x) = 0$ (toutes les dérivées de φ en 0 existent et sont nulles), telles que :

$$\bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{\alpha \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}(\alpha - \alpha_0)| \geq \varphi(|\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_0)|)\} \subset \Omega_{s'}.$$



0.3. Énoncé des résultats

Le théorème suivant généralise d'une part le théorème de Yoccoz de linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle proches des rotations ([19]) en l'étendant aux perturbations holomorphes de rotations, et d'autre part le théorème de linéarisation démontré par Herman ([7]) et implicitement par Arnold ([2]) en affaiblissant la condition arithmétique portant sur le nombre de rotation.

THÉORÈME 1. — *Pour tous $\alpha \in \mathcal{B}$, $\Delta > 0$, et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \Delta, \delta) > 0$ et une application analytique :*

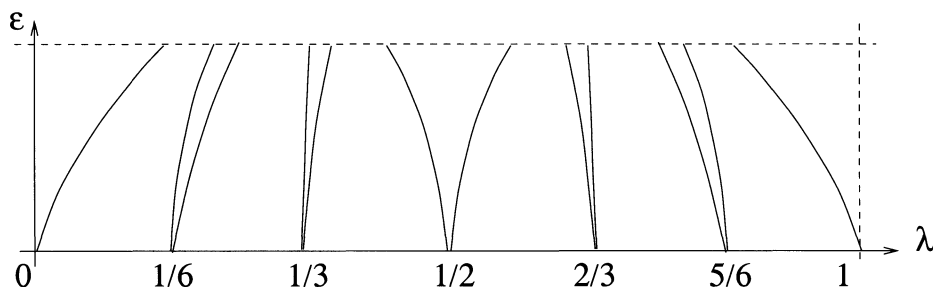
$$\mathcal{D}^\varepsilon(\Delta) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta), \quad F \mapsto (\lambda(F), h_F)$$

telle que, pour tout $F \in \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\lambda(F) + F(h_F(z)) = h_F(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \delta}.$$

REMARQUE. — Les contreexemples construits par J.-C. Yoccoz (pour tout α n'appartenant pas à \mathcal{B} , il existe un difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α , arbitrairement proche de la rotation d'angle α , et non analytiquement linéarisable, voir [19]), ou encore, le fait que, pour tout α n'appartenant pas à \mathcal{B} , le polynôme quadratique $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ soit non linéarisable en 0 (voir [18]) montrent que la condition de Bruno est optimale dans le théorème ci-dessus.

On peut trouver une illustration concrète de ce résultat sur le célèbre dessin des « langues d'Arnold » (voir par exemple [3], p. 108) : Considérons la famille $(F_{\lambda, \varepsilon})$ de (relevés de) difféomorphismes analytiques du cercle $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ définie par : $F_{\lambda, \varepsilon}(x) = x + \lambda + \varepsilon\varphi(x)$, où λ et ε sont réels, ε est petit, et φ est une fonction analytique \mathbf{Z} -périodique (l'exemple traditionnel étant : $\varphi(x) = \sin 2\pi x$). Notons $\rho(\lambda, \varepsilon)$ le nombre de rotation de $F_{\lambda, \varepsilon}$. On peut alors considérer, dans le plan (λ, ε) , les ensembles de niveau de ce nombre de rotation.



Si α est rationnel, alors $\rho^{-1}(\{\alpha\})$ est en général d'intérieur non vide (c'est une « langue d'Arnold », voir le dessin ci-dessus) ; en revanche, si α est irrationnel, $\rho^{-1}(\{\alpha\})$ est d'intérieur vide, plus précisément il s'agit d'un graphe au-dessus de l'axe des ε . Le

résultat ci-dessus entraîne que, lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$, ce graphe est (au-dessus d'un voisinage de $\varepsilon = 0$ dont la taille dépend de α) le graphe d'une fonction analytique réelle.

Donnons-nous $\alpha_0 \in \mathcal{B}$, un voisinage ouvert W de 0 dans \mathbf{C}^n , $n \geq 1$, et une famille $(F_p)_{p \in W}$ d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ dépendant analytiquement du paramètre p (l'application $(p, z) \mapsto F_p(z)$ est analytique), et supposons que $F_0 = T_{\alpha_0|_{\mathbf{B}_\Delta}}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, notons \mathcal{A}_α l'ensemble des $p \in W$ tels que F_p soit analytiquement conjuguée à la translation T_α et admette un domaine de linéarisation inclus dans $\mathbf{B}_{\Delta(1-\kappa)}$.

Nous déduirons du théorème 1 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soient α_0 et $(F_p)_{p \in W}$ comme ci-dessus. Il existe alors un voisinage V de 0 dans W tel que l'on soit dans un (et un seul) des deux cas suivants :*

1. $V \subset \mathcal{A}_{\alpha_0}$;
2. $\mathcal{A}_{\alpha_0} \cap V$ est une hypersurface analytique (éventuellement singulière) de V .

De plus, si, pour $p \in \mathcal{A}_{\alpha_0} \cap V$, $A(p)$ désigne le domaine de linéarisation maximal de F_p (et $A(p)/\mathbf{Z}$ l'anneau quotient) alors : $\text{mod}(A(p)/\mathbf{Z}) \rightarrow 2\Delta$ lorsque $p \rightarrow 0$ dans $\mathcal{A}_{\alpha_0} \cap V$.

Nous démontrerons le théorème suivant, qui est une version légèrement plus précise du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Pour tous $s \in \Sigma$, $\Delta > 0$, et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(s, \Delta, \delta) > 0$ et une application :*

$$\mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta), \quad (\alpha, F) \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$$

telle que, pour tout $(\alpha, F) \in \mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\lambda(\alpha, F) + F(h_{(\alpha, F)}(z)) = h_{(\alpha, F)}(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \delta}.$$

De plus, pour $\alpha \in \mathcal{B}_s$ fixé, l'application $F \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$ est analytique.

Ce résultat met en évidence, pour tout $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ suffisamment proche d'une translation, une correspondance $\alpha \mapsto \lambda(\alpha, F)$, définie sur l'ensemble \mathcal{B}_s , entre l'espace des nombres de rotations et l'espace des paramètres de la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$. Cette correspondance étend celle mise en évidence dans [7] (où elle n'est définie que pour α appartenant à un sous-ensemble de nombres diophantiens). Herman montre dans cet article que cette correspondance est C^1 au sens de Whitney. Nous allons préciser ce résultat.

THÉOREME 3. — *Donnons-nous $s, \Delta, \delta, \varepsilon$, et l'application :*

$$\mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta), \quad (\alpha, F) \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$$

comme dans le théorème 2 ci-dessus. Alors, quitte à diminuer ε (toujours dépendant de s, Δ , et δ), pour tout $F \in \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$, l'application :

$$\mathcal{B}_s \rightarrow \mathbf{C}, \quad \alpha \mapsto \lambda(\alpha, F)$$

est C^∞ au sens de Whitney (c'est-à-dire qu'elle s'étend en une application C^∞ de \mathbf{C} dans \mathbf{C}).

Comme dans [7], l'obtention de ce résultat passe par une complexification de la conjugaison donnée par le théorème 2, faisant intervenir un « nombre de rotation complexe ».

Nous montrerons le résultat suivant, plus précis que le théorème 3 ci-dessus.

THÉOREME 4. — *Pour tout $s \in \Sigma$, $\Delta > 0$, et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(s, \Delta, \delta) > 0$ et une application :*

$$(\alpha, F) \in \overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta) \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)}), \quad \lambda(\alpha, F) \in \mathbf{C}, \quad h_{(\alpha, F)} \in \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta, \alpha),$$

telle que, pour tout $(\alpha, F) \in \overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\lambda(\alpha, F) + F(h_{(\alpha, F)}(z)) = h_{(\alpha, F)}(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \delta}.$$

De plus,

- *l'application $(\alpha, F) \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$ est analytique sur $(\Omega_s \setminus \mathcal{B}_s) \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$ et continue sur $\overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$;*
- *pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s$, l'application $F \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$ est analytique sur $\mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$;*
- *Pour toute famille $(F_p)_{p \in W}$ d'applications de $\mathcal{D}^\varepsilon(\Delta)$ dépendant analytiquement de p (W étant un ouvert de \mathbf{C}^n), l'application :*

$$\overline{\Omega}_s \times W \rightarrow \mathbf{C}, \quad (\alpha, p) \mapsto \lambda(\alpha, F_p)$$

est C^∞ au sens de Whitney.

De plus, pour toute extension $\hat{\lambda} : \mathbf{C} \times W \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^∞ de cette application, le jet d'ordre infini de $\hat{\lambda}$ en tout point de $\overline{\Omega}_s \times W$ est analytique, ne dépend pas du choix de $\hat{\lambda}$, et on a :

$$\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha}(\alpha, p) = \left(\int_0^1 D h_{(\alpha, F_p)}(x)^{-1} dx \right)^{-1}.$$

REMARQUE. — En toute rigueur, il faudrait définir l'application : $(\alpha, F) \mapsto h_{(\alpha, F)}$ comme une section du fibré dont la fibre au-dessus de (α, F) est $\mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta, \alpha)$ (qui dépend de $\text{Im } \alpha$) ; l'analyticité de cette application signifie bien s ur que l'application : $(\alpha, F, z) \mapsto h_{(\alpha, F)}(z)$, définie pour $z \in \mathbf{B}_{\Delta}(\alpha)$, est analytique.

REMARQUE. — Le «nombre de rotation complexe» apparaît dans le théorème ci-avant comme le vecteur d'une translation non réelle à laquelle une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$ est conjuguée sur un certain domaine. Nous définirons précisément cette notion de nombre de rotation complexe au cours de la partie 2 (§2.1), d'un point de vue plus géométrique — et peut-être plus éclairant — que nous allons maintenant décrire brièvement. Considérons une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$, et supposons qu'il existe une courbe de Jordan $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, séparant les deux bouts de \mathbf{C}/\mathbf{Z} , telle que F soit définie et injective au voisinage de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$, et telle que l'on ait : $F(\pi^{-1}(\mathcal{C})) \cap \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \emptyset$ (π désigne la projection : $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$). On peut alors recoller le domaine délimité par $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ et $F(\pi^{-1}(\mathcal{C}))$ par l'action de F , et quotienter ce domaine recollé par les translations entières. On obtient ainsi un tore complexe, dont le module admet un représentant naturel dans \mathbf{C} ; ce représentant, qui ne dépend pas de la courbe \mathcal{C} choisie, sera le nombre de rotation complexe associé à F (voir §2.1 pour plus de précisions).

Comme pour le corollaire 1, donnons-nous $\alpha_0 \in \mathcal{B}$, un voisinage ouvert W de 0 dans \mathbf{C}^n , $n \geq 1$, et une famille $(F_p)_{p \in W}$ d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ dépendant analytiquement du paramètre p , vérifiant : $F_0 = T_{\alpha_0|_{\mathbf{B}_\Delta}}$. Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, notons \mathcal{A}_α l'ensemble des $p \in W$ tels qu'il existe $\Delta' > 0$ et $H \in \mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta', \alpha)$ vérifiant $H(\mathbf{B}_{\Delta'}) \subset \mathbf{B}_{\Delta(1-\kappa)}$ et tels que l'équation $F_p \circ H(z) = H(z + \alpha)$, $z \in \mathbf{B}_{\Delta'}$, soit vérifiée (pour $\alpha \in \mathbf{R}$, cette notation coïncide avec celle déjà utilisée pour le corollaire 1).

Nous déduirons du théorème 4 le corollaire suivant (qui généralise le corollaire 1) :

COROLLAIRE 2. — Soient $\alpha_0 \in \mathcal{B}$ et $(F_p)_{p \in W}$ comme ci-dessus. On est alors toujours dans un (et un seul) des deux cas suivants :

1. l'ensemble \mathcal{A}_{α_0} contient tout un voisinage de 0 dans W .
2. pour tout $s \in \Sigma$, il existe un voisinage V de 0 dans W et une application $\rho : V \rightarrow \mathbf{C}$ avec les propriétés suivantes :
 - ρ est de classe C^∞ sur V , vérifie $\rho(0) = \alpha_0$, son jet d'ordre infini en 0 est analytique et non nul (en particulier, $\rho(V)$ contient un voisinage de α_0 dans \mathbf{C}), et ρ est analytique sur $\rho^{-1}(\Omega_s \setminus \mathcal{B}_s)$.
 - pour tout $\alpha \in \Omega_s \cap \rho(V)$, $\rho^{-1}(\alpha) = \mathcal{A}_\alpha \cap V$, et $\mathcal{A}_\alpha \cap V$ est une hypersurface analytique (éventuellement singulière) de V . De plus, si, pour $\alpha \in \Omega_s \cap \rho(V)$ et $p \in \mathcal{A}_\alpha \cap V$, $\Delta'(p)$ désigne le réel Δ' maximal pour lequel il existe $H \in \mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta', \alpha)$ vérifiant : $H(\mathbf{B}_{\Delta'}) \subset \mathbf{B}_\Delta$ et tel que l'équation :

$$F \circ H(z) = H(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta'}$$

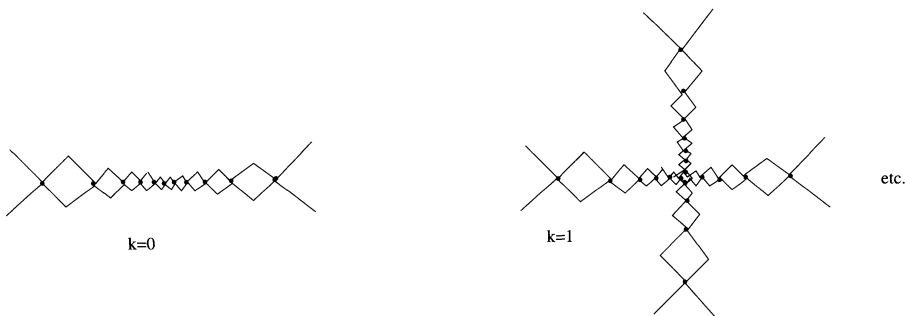
soit vérifiée, alors : $\Delta'(p) \rightarrow \Delta$ lorsque $p \rightarrow 0$ dans $\left(\bigsqcup_{\alpha \in \Omega_s} \mathcal{A}_\alpha\right) \cap V$.

Donnons-nous $\alpha_0 \in \mathcal{B}$ et $(F_p)_{p \in W}$ comme dans le corollaire ci-dessus, et supposons que l'on soit dans le deuxième des deux cas distingués par ce corollaire. Donnons-nous $s \in \Sigma$ quelconque, et considérons un voisinage V et une application $\rho : V \rightarrow \mathbf{C}$ donnés par ce corollaire. Soit k le plus petit entier tel que ρ admette une dérivée partielle

d'ordre $k + 1$ non nulle en 0 (un tel k existe puisque le jet d'ordre infini de ρ en 0 est non nul). Pour $u \in \mathbf{C}^n$, considérons l'application $\rho_u : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto \rho(zu)$. Alors,

$$\rho_u(z) = \alpha_0 + \frac{\partial^{k+1} \rho_u}{\partial z^{k+1}}(0) z^{k+1} + \mathcal{O}(|z|^{k+2}).$$

Donc, si $\partial^{k+1} \rho_u / \partial z^{k+1}(0) \neq 0$ (c'est-à-dire si u est transverse à \mathcal{A}_{α_0} en 0), alors ρ_u définit un revêtement d'ordre $k + 1$ d'un voisinage de α_0 dans \mathbf{C} (ramifié au-dessus de α_0) par un voisinage de 0 dans \mathbf{C} ; l'ensemble $\rho_u^{-1}(\Omega_s)$ a l'un des aspects suivants :



En particulier, \mathcal{A}_{α_0} est accumulée par d'autres hypersurfaces \mathcal{A}_α , $\alpha \in \overline{\Omega}_s$, α proche de α_0 .

Organisation des démonstrations. — Le corps de cet article est composé de trois parties.

La première partie est consacrée à la démonstration du théorème 2 (qui contient le théorème 1).

La seconde partie est consacrée à la démonstration du théorème 4 (qui contient le théorème 3).

La troisième partie est consacrée à des compléments et aux applications. En section 3.1, on précise et on démontre les corollaires 1 et 2. La section 3.2 est consacrée aux applications aux domaines de rotation des fractions rationnelles. La section 3.3 est consacrée à la démonstration de la proposition 1 sur les propriétés des ensembles \mathcal{B}_s .

CHAPITRE 1

LINÉARISATION DES PERTURBATIONS HOLOMORPHES DES ROTATIONS

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème 2 (qui contient le théorème 1). Pour ce faire, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant, qui est assez analogue au théorème 2, mais dans lequel la proximité aux translations des applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ considérées est donnée en termes de la taille Δ de la demi-hauteur de bande.

THÉORÈME 5. — *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que, pour tous $\alpha \in \mathcal{B}$ et $\Delta > 0$ satisfaisant :*

$$\Delta > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + C,$$

il existe une application analytique :

$$\mathcal{D}^1(\Delta) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{1,\text{inj}}(\Delta - \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) - C), \quad F \mapsto (\lambda(F), h_F)$$

telle que, pour tout $F \in \mathcal{D}^1(\Delta)$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\lambda(F) + F(h_F(z)) = h_F(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) - C}.$$

Les démonstrations du théorème 5, puis du théorème 2 à partir du théorème 5, étant assez techniques, nous allons commencer par en décrire les grandes lignes.

1.1. Description des démonstrations

Plaçons-nous dans le cadre du théorème 5. Considérons une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$, et la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$ définie par : $F_\lambda(z) = \lambda + F(z)$. Il s'agit de montrer qu'une des applications de cette famille est analytiquement conjuguée à la translation T_α .

Nous allons reprendre le point de vue géométrique et la démarche de [18] et [19]. Le point de départ est que, comme nous l'avons dit en introduction, une condition suffisante pour qu'une application $G \in \mathcal{D}(\Delta)$ soit linéarisable est qu'il existe un voisinage

de \mathbf{R} stable au sens de Lyapunov pour la dynamique. La méthode pour montrer l'existence d'un tel voisinage consiste à renormaliser (une infinité de fois) la dynamique de l'application G , tout en contrôlant après chaque renormalisation la distorsion de l'application obtenue. La différence dans le cas qui nous occupe est que l'on démarre non pas avec une application, mais avec toute une famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$ d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. Nous allons donc avoir besoin d'une construction de renormalisation adaptée à ce type de famille. Cette construction, d'énoncé assez technique si on veut l'exprimer de façon précise (comme nous le verrons plus loin), affirme grosso modo la chose suivante :

À toute famille analytique $(F_\lambda)_{\lambda \in U}$, où U est un ouvert de \mathbf{C} localisé au voisinage d'un réel $\alpha \in]0; 1/2[$ et telle que, pour tout $\lambda \in U$, F_λ appartienne à $\mathcal{D}_\lambda^1(\Delta)$, on peut associer naturellement une famille analytique $(G_\lambda)_{\lambda \in U}$, chaque application G_λ étant obtenue en renormalisant F_λ , c'est-à-dire comme application de premier retour de F_λ dans un domaine fondamental. Chaque application G_λ appartient à $\mathcal{D}^1(\Delta_1)$, où Δ_1 satisfait à une minoration similaire à celle que l'on obtient lorsqu'on effectue la construction pour une seule application (voir [18], [19]), c'est-à-dire :

$$\Delta_1 > \alpha^{-1} \left(\Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - C \right)$$

où C désigne une constante universelle (en fait, l'estimée que l'on obtiendra sera légèrement moins bonne, mais néanmoins suffisante pour les applications). Ainsi, pour que la construction ait un sens, on a besoin que Δ vérifie : $\Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C$.

Cette construction repose sur un lemme d'existence d'« applications uniformisantes » dépendant analytiquement d'un paramètre pour une famille analytique de surfaces de Riemann proches d'un sous-anneau de \mathbf{C}/\mathbf{Z} . La démonstration - technique - de ce lemme occupe toute la section 1.4. On trouvera au début de la section 1.4 une description heuristique de cette démonstration. Mentionnons simplement ici qu'elle fait intervenir des techniques de résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec estimées L^2 , introduites par Hörmander ([8]), et que ces techniques ont déjà été utilisées par R. Pérez-Marco et J.-C. Yoccoz pour étudier l'holonomie des germes de feuilletages holomorphes de \mathbf{C}^2 au voisinage d'un point singulier ([12]).

Revenons à la famille $(G_\lambda)_{\lambda \in U}$, et, pour tout $\lambda \in U$, notons $\mu(\lambda)$ le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto G_\lambda(z) - z$. Puisque F_λ est proche de la translation de vecteur λ (Δ est grand), $\mu(\lambda)$ vaut approximativement $-1/\lambda$. On peut reparamétriser la famille $(G_\lambda)_{\lambda \in U}$ en posant : $H_{\mu(\lambda)} = G_\lambda$. On obtient alors une famille $(H_\mu)_{\mu \in U'}$, où $U' = \mu(U)$, et, pour tout $\mu \in U'$, H_μ appartient à $\mathcal{D}_\mu^1(\Delta')$. Remarquons que puisque les points de U sont proches de α , ceux de U' sont proches de $-1/\alpha$ et l'application $U \rightarrow U'$, $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$ est dilatante (l'espace des paramètres a été dilaté).

Posons : $\alpha_1 = |\alpha^{-1} - \langle \alpha^{-1} \rangle|$ où $\langle \alpha^{-1} \rangle$ désigne l'entier le plus proche de α^{-1} . Composons les applications H_μ par la translation entière : $T_{\langle \alpha^{-1} \rangle}$, et, si $\langle \alpha^{-1} \rangle - \alpha^{-1}$

est négatif, conjuguons-les par l'application : $z \mapsto -z$; enfin, reparamétrisons (encore une fois) la famille ainsi obtenue par le terme constant du développement en série de Fourier ; on obtient une famille $(F_{1,\lambda})_{\lambda \in U_1}$, où U_1 est un ouvert localisé au voisinage de α_1 , vérifiant, pour tout $\lambda \in U_1$, $F_{1,\lambda} \in \mathcal{D}_\lambda(\Delta_1)$. L'ouvert de paramètres U_1 est de la taille de U' , donc plus grand que l'ouvert U initial ; on restreint donc pour finir l'ouvert U_1 autour de α_1 .

Si $\Delta_1 > \frac{1}{2\pi} \log \alpha_1^{-1} + C$, on peut recommencer cette construction à partir de la famille $(F_{1,\lambda})_{\lambda \in U_1}$, et ainsi de suite. Si $\alpha \in \mathcal{B}$ et si la demi-largeur initiale de bande Δ est suffisamment grande, on peut ré-itérer une infinité de fois cette construction. On construit ainsi une suite $((F_{k,\lambda})_{\lambda \in U_k})_{k \in \mathbf{N}}$ de telles familles ; chaque famille est paramétrée par le terme constant du développement en série de Fourier, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, U_k est un ouvert de \mathbf{C} localisé au voisinage de α_k (les réels α_k sont définis par récurrence à partir de $\alpha_0 = \alpha$ en posant : $\alpha_{k+1} = |\alpha_k^{-1} - \langle \alpha_k^{-1} \rangle|$). À chaque renormalisation, l'espace des paramètres est dilaté puis tronqué. La quantité de paramètres λ pour lesquels on peut renormaliser n fois les applications F_λ initiales diminue donc rapidement (géométriquement) avec n . Il n'y a à la fin qu'un seul $\lambda \in U$ pour lequel on puisse renormaliser F_λ une infinité de fois. On montre alors facilement que l'application F_λ admet un voisinage de \mathbf{R} stable, autrement dit qu'elle est conjuguée à une translation réelle qui se trouve être nécessairement T_α . On établit ainsi le théorème 5.

La démonstration du théorème 2, qui occupe la section 1.2, nécessite une deuxième version de la construction de renormalisation à paramètres. Cette deuxième version est adaptée aux faits que les applications F_λ sont cette fois-ci arbitrairement proches des translations T_λ , mais qu'elles sont, en revanche, définies seulement sur des bandes de hauteurs a priori petites. Heuristiquement, cette deuxième version ressemble fort à la première, à ceci près que les hauteurs de bandes Δ et Δ_1 peuvent être petites, que les F_λ et les $F_{1,\lambda}$ sont arbitrairement proches de leurs parties linéaires, définis sur des domaines petits dans l'espace des paramètres, et que l'estimée sur Δ_1 est :

$$\Delta_1 > \alpha^{-1}(\Delta - \varepsilon_\Delta)$$

(ε_Δ étant arbitrairement petit). Ici encore, établir cette deuxième construction nécessite un lemme technique d'existence d'applications uniformisantes légèrement différent du premier, dont la démonstration figure en section 1.5.

Lorsqu'on itère cette construction, les demi-hauteurs de bande croissent très vite (pratiquement d'un facteur α_k^{-1} à chaque étape), si bien qu'après un nombre fini d'étapes, on se retrouve avec une famille définie sur une bande de hauteur suffisamment grande pour pouvoir appliquer le théorème 5. Un simple argument de fonctions implicites permet alors de conclure.

1.2. Linéarisation dans le cas d'une grande hauteur de bande

Dans cette section, C_1, C_2, \dots représentent des constantes universelles.

1.2.1. Renormalisation d'une famille analytiquement paramétrée. — Dans ce paragraphe, nous présentons une construction de renormalisation d'une famille analytiquement paramétrée d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. L'itération de cette construction permettra ensuite de démontrer le théorème 5.

a) Existence d'applications uniformisantes. — Rappelons que, pour $z \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, $\mathbf{D}(z, r)$ désigne le disque ouvert de centre z et de rayon r dans \mathbf{C} , et que \mathbf{D}_r désigne plus concisément le disque ouvert de centre 0 et de rayon r dans \mathbf{C} .

Donnons-nous quatre réels α, τ, r , et δ satisfaisant à l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_1(\alpha, \tau, r, \delta) \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad 0 < \tau < \alpha/2, \quad 0 < \delta < r \leq 1,$$

et une famille

$$(F_{(\lambda, p)})_{(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times \mathbf{D}_r}$$

d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta)$, $\Delta > 0$, dépendant analytiquement des paramètres λ et p , telle que, pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times \mathbf{D}_r$, $F_{(\lambda, p)}$ appartienne à $\mathcal{D}_\lambda^1(\Delta)$ (λ représente donc le terme constant du développement en série de Fourier de $F_{(\lambda, p)} - \text{Id}$).

L'objectif de cette section est de construire une famille «renormalisée» de la famille F . Pour cela, l'ingrédient technique principal est le lemme ci-dessous (qui sera démontré, sous une forme légèrement plus générale, en section 1.4), qui donne l'existence d'une application uniformisante d'une partie d'un domaine fondamental pour la dynamique des applications $F_{(\lambda, p)}$ (voir la figure 1.2.1).

Posons : $U = \mathbf{D}(\alpha, \tau)$, $V = \mathbf{D}(\alpha, (1 - \kappa)\tau)$, $\alpha^+ = \alpha + \tau$.

LEMME 1. — *Il existe une constante universelle $C_1 > 0$ telle que, si*

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-2} + C_1$$

(posons $\Delta' = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-2} - C_1$), alors il existe une application «uniformisante» K pour F , définie et analytique sur le domaine :

$$\mathcal{W} = \{(\lambda, p, z) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{C} \mid \\ |\text{Im } z| < \text{Re}(\lambda/\alpha^+) \Delta' \text{ et } \text{Re}(-1/\lambda) < \text{Re}(z/\lambda) < \text{Re}(1/\lambda)\}$$

telle que, pour tout $(\lambda, p, z) \in \mathcal{W}$, on ait :

- *si $(\lambda, p, F_{(\lambda, p)}(z)) \in \mathcal{W}$, alors : $K(\lambda, p, F_{(\lambda, p)}(z)) = K(\lambda, p, z) + 1$;*
- *$|K(\lambda, p, z) - z/\lambda| < \alpha^{-1} \exp\left(-2\pi((\text{Re } \lambda/\alpha^+) \Delta' - |\text{Im } z|)\right)$.*

Soit c un paramètre réel strictement positif à déterminer par la suite. Supposons que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

$$\mathcal{H}_2(\alpha, \delta, \Delta) \quad \Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-2} + C_1 + c \Leftrightarrow \Delta' > c$$

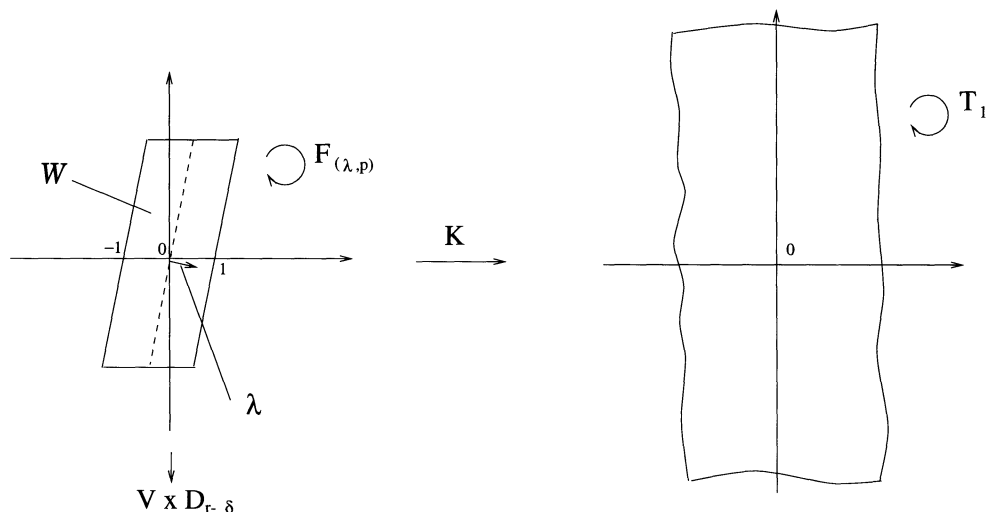


FIGURE 1.2.1

où C_1 est la constante universelle du lemme précédent. Alors, toutes les conclusions de ce lemme sont valables, et on en reprend dans la suite les notations.

Pour pouvoir définir une famille d'applications renormalisées de manière satisfaisante, il va falloir attribuer à la constante τ une valeur bien choisie; en effet, on veut que la hauteur de bande associée à la famille renormalisée soit de l'ordre de $\alpha^{-1}(\Delta' - \text{constante})$; or, la hauteur de bande garantie par le lemme précédent est $(\alpha^+)^{-1}\Delta'$; il faut donc que τ/α soit petit, suffisamment petit pour qu'on ait : $\frac{\tau}{\alpha}\Delta' < \text{constante}$. Mais d'autre part, nous aurons besoin, pour reparamétriser la famille renormalisée (par le terme constant du développement en série de Fourier associé à cette nouvelle famille), d'une estimée de Cauchy dans l'espace des paramètres (dans la direction du paramètre λ). Cette estimée de Cauchy sera obtenue en passant du disque V au disque $W = \mathbf{D}(\alpha, (1 - 2\kappa)\tau)$, c'est-à-dire en « perdant » $\kappa\tau$; cette fois-ci, nous aurons besoin d'avoir : $\tau/\alpha \gg e^{-2\pi\Delta'}$.

Ces considérations nous conduisent à fixer :

$$\tau = \alpha e^{-2\pi(\Delta' - c/2)}$$

(ce choix va s'avérer convenable). On déduit de l'inégalité $\tau \leq \alpha e^{-2\pi(\Delta' - c/2)}$ que

$$(\operatorname{Re} \lambda / \alpha^+) \Delta' > \Delta' - C_2,$$

et de l'estimée du lemme précédent que, pour tout $(\lambda, p, z) \in \mathcal{W}$,

$$(6) \quad |K(\lambda, p, z) - z/\lambda| < \alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta' - C_2 - |\operatorname{Im} z|));$$

$$(7) \quad |K(\lambda, p, z) - z/\alpha| < \alpha^{-1} C_3.$$

b) *Construction de la famille d'applications de premier retour.* — Considérons les applications :

$$\begin{aligned}\hat{F} : U \times \mathbf{D}_r \times \mathbf{B}_\Delta &\rightarrow U \times \mathbf{D}_r \times \mathbf{C}; & (\lambda, p, z) &\mapsto (\lambda, p, F_{(\lambda, p)}(z)) \\ \hat{K} : \mathcal{W} &\rightarrow V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{C}; & (\lambda, p, z) &\mapsto (\lambda, p, K(\lambda, p, z)) \\ \hat{T}_1 : \mathbf{C}^3 &\rightarrow \mathbf{C}^3; & (\lambda, p, z) &\mapsto (\lambda, p, z + 1).\end{aligned}$$

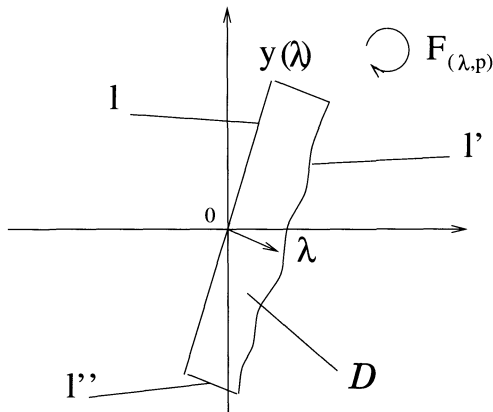
Soit C_4 une constante universelle vérifiant : $C_4 > C_2$, à choisir par la suite. Notons $y(\lambda)$ le point de \mathbf{C} défini par : $\operatorname{Re}(y(\lambda)/\lambda) = 0$ et $\operatorname{Im}(y(\lambda)) = \Delta' - C_4$. Posons :

$$l = \{(\lambda, p, z) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z/\lambda) = 0 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \Delta' - C_4\}$$

$$l' = \hat{F}(l)$$

$$l'' = \{(\lambda, p, z) \in \mathcal{W} \mid z \text{ appartient au segment reliant } y(\lambda) \text{ à } F_{(\lambda, p)}(y(\lambda)) \\ \text{ou au segment reliant } -y(\lambda) \text{ à } F_{(\lambda, p)}(-y(\lambda))\}.$$

Les ensembles l , l' , et l'' délimitent un ouvert connexe \mathcal{D} . Posons : $\mathcal{U} = \mathcal{D} \cup l \cup l'$.



Fixons la constante C_4 (suffisamment grande) pour que l'on ait : $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ et pour que l'estimée (6) entraîne (grâce à une inégalité de Cauchy) :

$$\left| \frac{\partial K}{\partial z}(\lambda, p, z) - 1/\lambda \right| < \kappa/\alpha.$$

L'application \hat{K} est alors injective sur \mathcal{U} . D'après (7), il existe une constante C_5 telle que, pour tout $(\lambda, p, z) \in l''$, on ait :

$$|\operatorname{Im} K(\lambda, p, z)| > \alpha^{-1}(\Delta' - C_5).$$

Posons : $\Delta'' = \alpha^{-1}(\Delta' - C_5)$; l'estimée précédente montre que l'ensemble : $\hat{K}(\mathcal{U}) \cap (V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''})$ est un domaine fondamental de $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$ pour l'action de la translation \hat{T}_1 . Puisque \hat{K} est injective sur \mathcal{U} , on peut définir une application $G : \hat{K}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{C}$ en posant :

$$G(\hat{K}(\lambda, p, z)) = K(\lambda, p, z - 1).$$

Nous allons montrer que l'on peut prolonger G en une application holomorphe sur $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$. Posons : $\mathcal{L} = \hat{K}(l) \cap (V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''})$. Soit $(\lambda, p, \zeta) \in \mathcal{L}$ quelconque ; notons (λ, p, z) l'élément (unique) de l tel que : $K(\lambda, p, z) = \zeta$. Alors,

$$\begin{aligned} G(\lambda, p, \zeta + 1) &= G \circ \hat{T}_1 \circ \hat{K}(\lambda, p, z) \\ &= G \circ \hat{K} \circ \hat{F}(\lambda, p, z) \\ &= K \circ \hat{T}_1^{-1} \circ \hat{F}(\lambda, p, z) \\ &= K \circ \hat{F}(\lambda, p, z - 1) \\ &= K(\lambda, p, z - 1) + 1 \\ &= G(\lambda, p, \zeta) + 1. \end{aligned}$$

Ceci permet de prolonger G en une application (notée encore G) définie et continue sur $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$, et vérifiant en tout point l'équation : $G \circ \hat{T}_1 = T_1 \circ G$. De plus, G est holomorphe sur $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$ sauf éventuellement aux points appartenant à un translaté entier de \mathcal{L} . On en déduit que G est holomorphe sur $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$.

Pour $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, posons :

$$q(\lambda, p) = \int_0^1 (G(\lambda, p, x) - x) dx,$$

et notons $G_{(\lambda, p)}$ l'application : $\mathbf{B}_{\Delta''} \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto G(\lambda, p, z)$. D'après (6), pour tout $(\lambda, p, z) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''} \cap \hat{K}(\mathcal{U})$ (posons $(\lambda, p, z) = \hat{K}(\lambda, p, z')$), on a

$$|G_{(\lambda, p)}(z) - z + \frac{1}{\lambda}| < 2\alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta' - C_2 - |\operatorname{Im} z'|)).$$

On en déduit, d'une part, que

$$(8) \quad |q(\lambda, p) + 1/\lambda| < \alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta' - C_6)),$$

et d'autre part que, quitte à augmenter la constante C_4 , et si $c > C_6 + 1$,

$$|G_{(\lambda, p)}(z) - z - q(\lambda, p)| < \alpha^{-1}, \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta''}.$$

Puisque $\Delta'' = \alpha^{-1}(\Delta' - C_5)$, on déduit de cette estimée et de l'appendice 1.6.3 que, quitte à augmenter C_5 (ce qui revient à diminuer Δ''), on a, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta''}$,

$$|G(\lambda, p, z) - z - q(\lambda, p)| < 1,$$

autrement dit, $G_{(\lambda, p)} \in \mathcal{D}_{q(\lambda, p)}^1(\Delta'')$.

c) *Lien entre les dynamiques de F et G .* — Fixons $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$ quelconque, et posons :

$$\mathcal{V}_\lambda = \{z \in \mathbf{B}_\Delta \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z/\lambda) < \operatorname{Re}(1/\lambda) \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \Delta' - C_4\}.$$

Quitte à augmenter la constante universelle C_5 , on peut supposer que :

$$(9) \quad K_{(\lambda, p)}(\mathcal{V}_\lambda \setminus \mathbf{B}_{\Delta' - C_4 - 1}) \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{B}_{\Delta''}.$$

On a le :

LEMME 2. — Soit $z \in \mathcal{V}_\lambda$ quelconque.

1) Supposons que l'orbite positive de z sous l'action de $F_{(\lambda,p)}$ s'échappe de \mathbf{B}_Δ après j_0 itérations (c'est-à-dire : pour tout $j \in \mathbf{N}$, $j < j_0$, $F_{(\lambda,p)}^j(z) \in \mathbf{B}_\Delta$, et $F_{(\lambda,p)}^{j_0}(z) \notin \mathbf{B}_\Delta$). Alors, l'orbite positive de $K(\lambda, p, z)$ sous l'action de $G_{(\lambda,p)}$ s'échappe de $\mathbf{B}_{\Delta''}$ après un nombre d'itérations strictement inférieur.

2) Supposons au contraire que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on ait : $F_{(\lambda,p)}^j(z) \in \mathbf{B}_\Delta$ et que la limite :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F_{(\lambda,p)}^j(z)/j$$

existe ; notons ρ cette limite (qui ne peut pas être nulle). Supposons en outre que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on ait : $G_{(\lambda,p)}^j(K(\lambda, p, z)) \in \mathbf{B}_{\Delta''}$. Alors, la limite :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} G_{(\lambda,p)}^j(K(\lambda, p, z))/j$$

existe et vaut $-1/\rho$.

Démonstration. — Soit $z \in \mathcal{V}_\lambda$ quelconque. Définissons par récurrence une suite finie ou infinie de points de \mathcal{V}_λ de la manière suivante : posons : $x_0 = z$; supposons que x_0, \dots, x_j aient déjà été définis, et qu'ils appartiennent à \mathcal{V}_λ . Alors, si $|\operatorname{Im} F_{(\lambda,p)}(x_j)| \geq \Delta' - C_4$, la suite s'arrête. Si, en revanche, $|\operatorname{Im} F_{(\lambda,p)}(x_j)| < \Delta' - C_4$ on pose :

$$x_{j+1} = \begin{cases} F_{(\lambda,p)}(x_j) & \text{si } \operatorname{Re}(\lambda^{-1}; F_{(\lambda,p)}(x_j)) < \operatorname{Re} \lambda^{-1}; \\ F_{(\lambda,p)}(x_j) - 1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On vérifie alors que x_{j+1} appartient bien à \mathcal{V}_λ s'il est défini.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$ tel que x_j soit défini, posons : $y_j = K(\lambda, p, x_j)$. Remarquons que, si $|\operatorname{Im} y_j| < \Delta''$, alors :

1. si $x_{j+1} = F_{(\lambda,p)}(x_j)$, alors $y_{j+1} = y_j + 1$;
2. si $x_{j+1} = F_{(\lambda,p)}(x_j) - 1$, alors $y_{j+1} = G_{(\lambda,p)}(y_j) + 1$.

Supposons que l'orbite positive de z sous l'action de $F_{(\lambda,p)}$ s'échappe de \mathbf{B}_Δ après j_0 itérations. Alors, la suite (x_j) n'est définie que jusqu'à un rang j'_0 strictement inférieur à j_0 , et $x_{j'_0}$ appartient à $\mathcal{V}_\lambda \setminus \mathbf{B}_{\Delta' - C_4 - 1}$. On déduit alors de (9) que $y'_{j'_0} \notin \mathbf{B}_{\Delta''}$, ce qui montre que l'orbite positive de y_0 sous l'action de $G_{(\lambda,p)}$ s'échappe de $\mathbf{B}_{\Delta''}$ après un nombre d'itérations j''_0 inférieur ou égal à j'_0 . Nous avons donc établi l'assertion 1 du lemme.

Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses de l'assertion 2. Alors, pour tout $j \in \mathbf{N}$, $x_j \in \mathcal{V}_\lambda$, et il existe un unique $l(j) \in \mathbf{Z}$ tel que : $x_j = F_{(\lambda,p)}^j(x_0) - l(j)$; on a donc : $y_j = G_{(\lambda,p)}^{l(j)}(y_0) + j$. De plus, $\lim_{j \rightarrow +\infty} l(j)/j = \rho$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} y_j/j = 0$. L'assertion 2 s'en déduit aisément. \square

d) *Reparamétrisation.* — Notons : $a = \langle \alpha^{-1} \rangle$ (l'entier le plus proche de α^{-1}), $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ le signe de $\alpha^{-1} - a$, et $\alpha' = \varepsilon(\alpha^{-1} - a)$. Notons s l'application :

$$V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \rightarrow \mathbf{C}, \quad (\lambda, p) \mapsto \varepsilon(-q(\lambda, p) - a),$$

et \hat{s} l'application :

$$V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{D}_{r-\delta}, \quad (\lambda, p) \mapsto (s(\lambda, p), p).$$

Considérons la famille $(H_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}}$ d'applications : $\mathbf{B}_{\Delta''} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par :

$$H_{(\lambda,p)}(z) = \begin{cases} G_{(\lambda,p)}(z) + a & \text{si } \varepsilon = -1; \\ -(G_{(\lambda,p)}(-z) + a) & \text{si } \varepsilon = +1. \end{cases}$$

Pour tout $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, l'application : $H_{(\lambda,p)} : z \mapsto H(\lambda, p, z)$ appartient à $\mathcal{D}_{s(\lambda,p)}^1(\Delta'')$.

L'estimée (8) entraîne que, pour tout $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$,

$$(10) \quad |s(\lambda, p) - \varepsilon(\lambda^{-1} - a)| < \alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta' - C_5)).$$

Notons : $W = \mathbf{D}(\alpha, (1 - 2\kappa)\tau)$ (voir dessin ci-après). On déduit du fait que $\tau \geq \alpha e^{-2\pi(\Delta' - c/2)}$ et de l'estimée ci-dessus, grâce à une inégalité de Cauchy, que, pour tout $(\lambda, p) \in W \times \mathbf{D}_{r-\delta}$,

$$\left| \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right| < \kappa^{-1} \alpha^{-2} \exp(-2\pi(\frac{c}{2} - C_6)).$$

Donc, si $c > 2(C_6 + \frac{1}{2\pi} \log \kappa^{-2})$,

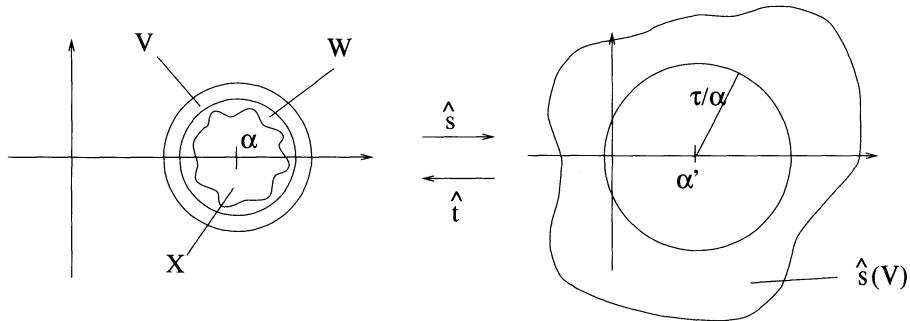
$$\left| \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right| < \kappa \alpha^{-2},$$

ce qui entraîne que l'application s est injective dans $W \times \mathbf{D}_{r-\delta}$. Soient $\lambda \in \partial W$ (c'est-à-dire que : $|\lambda - \alpha| = (1 - 2\kappa)\tau$) et $p \in \mathbf{D}_{r-\delta}$ quelconques. On déduit de (10) que :

$$|s(\lambda, p) - \alpha'| > |1/\lambda - 1/\alpha| - \alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta' - C_6)).$$

Donc, si $c \geq C_8$, $\mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}$ est inclus dans $\hat{s}(W \times \mathbf{D}_{r-\delta})$.

Posons : $X = \hat{s}^{-1}(\mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta})$ (l'application \hat{s} a été définie ci-dessus). Alors \hat{s} définit un difféomorphisme de X sur $\mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}$. Posons : $\hat{t} = (\hat{s}|_X)^{-1}$ et : $t = \pi_1 \circ \hat{t}$ où $\pi_1 : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ désigne la projection sur la première coordonnée.



Enfin, considérons la famille $(I_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in \mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}}$ d'applications : $\mathbf{B}_{\Delta''} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par : $I_{(\lambda,p)}(z) = H_{\hat{t}(\lambda,p)}(z)$.

Alors, pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, l'application $I_{(\lambda, p)}$ appartient à $\mathcal{D}_\lambda^1(\Delta'')$. La famille $I = (I_{(\lambda, p)})_{(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}}$ est une famille «renormalisée» de la famille F ; c'est la construction précédente d'une telle famille I à partir d'une famille F que nous allons itérer pour démontrer le théorème 5.

Fixons définitivement $c = C_9$, où C_9 est une constante universelle suffisamment grande pour que toutes les hypothèses faites au cours de ce paragraphe sur la taille de c soient vérifiées.

1.2.2. Itération de la construction. — Nous allons maintenant démontrer le théorème 5 à proprement parler.

Donnons-nous $\alpha \in \mathcal{B}$ et $F \in \mathcal{D}^1(\Delta)$, $\Delta > 0$. Il s'agit d'établir que, sous une hypothèse sur la taille minimale de Δ , il existe $\lambda(F) \in \mathbf{C}$ et une application conjuguante h_F tels que l'équation $\lambda(F) + F \circ h_F(z) = h_F(z + \alpha)$ soit satisfaite. Quitte à composer F par une translation entière et à conjuguer par $z \mapsto -z$, on peut supposer que $\alpha \in]0; 1/2[$, ce qu'on fera dans la suite.

De manière à établir l'analyticité de l'application $F \mapsto (\lambda(F), h_F)$, on suppose que F est plongée dans une famille $(F_p)_{p \in \mathbf{D}_1}$ d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta)$, dépendant analytiquement du paramètre p , avec $F_0 = F$. On rajoute enfin un paramètre supplémentaire, le terme constant du développement en série de Fourier des applications $F_p - \text{Id}$, c'est-à-dire qu'on pose, pour $(\lambda, p) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}_1$,

$$F_{(\lambda, p)}(z) = \lambda + F_p(z) - \left(\int_0^1 (F_p(t) - t) dt \right).$$

Ainsi, $F_{(\lambda, p)} \in \mathcal{D}_\lambda^1(\Delta)$.

Posons $\alpha_0 = \alpha$ (rappelons que $\alpha \in]0; 1/2[$), et définissons par récurrence la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}}$ en posant :

$$\alpha_{k+1} = |\alpha_k^{-1} - \langle \alpha_k^{-1} \rangle|.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons : $\delta_k = 2^{-(k+2)}$. Posons : $r_0 = 1$, et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $r_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j$.

Posons $\Delta_0 = \Delta$ et définissons par récurrence la suite de couples de réels (Δ_k, Δ'_k) , en posant, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta'_k &= \Delta_k - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_k^{-1} - \frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} - C_1, \\ \Delta_{k+1} &= \alpha_k^{-1} (\Delta'_k - C_5) \end{aligned}$$

(on reprend dans ce paragraphe les constantes c, C_1, \dots, C_9 introduites au paragraphe précédent). Enfin, pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons :

$$\tau_k = \alpha_k \exp(-2\pi(\Delta'_k - \frac{c}{2})), \quad U_k = \mathbf{D}(\alpha_k, \tau_k), \quad V_k = \mathbf{D}(\alpha_k, (1 - \kappa)\tau_k).$$

On vérifie facilement que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'hypothèse $\mathcal{H}_1(\alpha_k, \tau_k, r_k, \delta_k)$ du paragraphe précédent est vérifiée.

Soit c' un paramètre réel strictement positif à choisir par la suite. Considérons l'hypothèse :

$$(H_k) \quad \Delta_k > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_k) + \frac{1}{2\pi} \log \delta_k^{-2} + c'.$$

LEMME 3. — *Il existe une constante universelle C_{10} telle que, si $c' > c + C_{10}$, alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

- (i) (H_k) entraîne (H_{k+1}) ;
- (ii) (H_k) entraîne $\mathcal{H}_2(\alpha_k, \delta_k, \Delta_k)$;
- (iii) (H_k) entraîne l'inégalité : $\alpha_k^{-1} \tau_k > \tau_{k+1}$.

Démonstration. — L'hypothèse (H_k) entraîne, par définition de Δ_{k+1} , que :

$$\Delta_{k+1} > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_{k+1}) + \alpha_k^{-1} \left(\frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} + c' - C_1 - C_5 \right).$$

Si $c'/2 > C_1 + C_5 + \frac{1}{2\pi} \log 2$, cette estimée entraîne (H_{k+1}) . Si en outre $c' > c + C_1$, alors (H_k) entraîne $\mathcal{H}_2(\alpha_k, \delta_k, \Delta_k)$. Enfin, l'inégalité $\alpha_k^{-1} \tau_k > \tau_{k+1}$ est équivalente à :

$$\Delta_{k+1} - \frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} - C_1 < \Delta'_k$$

ou encore à :

$$(1 - \alpha_k) \Delta'_k > \alpha_k \left(\frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} + C_1 \right) + C_5$$

ce qui est entraîné par :

$$\Delta'_k > \frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} + C_1 + 2C_5.$$

On en déduit que, si $c' > 2C_1 + 2C_5$, (H_k) entraîne : $\alpha_k^{-1} \tau_k > \tau_{k+1}$. Ceci termine la démonstration. \square

Nous supposons dorénavant que : $c' > c + C_{10}$, et que l'hypothèse (H_0) est vérifiée. Alors, le lemme précédent montre que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, (H_k) est vérifiée, ainsi que $\mathcal{H}_2(\alpha_k, \delta_k, \Delta_k)$.

Soit F_0 la famille $(F_{0,(\lambda,p)})(\lambda,p) \in U_0 \times \mathbf{D}_{r_0}$ d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta_0)$ définie comme la restriction de la famille $(F_{(\lambda,p)})(\lambda,p) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}_1$ aux paramètres (λ, p) appartenant à $U_0 \times \mathbf{D}_{r_0}$. Nous allons définir, par récurrence à partir de cette famille F_0 , une suite $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de familles d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta_k)$.

On procède de la manière suivante : supposons que les familles F_0, \dots, F_k aient déjà été définies, et supposons que F_k soit une famille $(F_{k,(\lambda,p)})(\lambda,p) \in U_k \times \mathbf{D}_{r_k}$ d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta_k)$, dépendant analytiquement des paramètres (λ, p) , et telle que, pour tout $(\lambda, p) \in U_k \times \mathbf{D}_{r_k}$, $F_{k,(\lambda,p)}$ appartienne à $\mathcal{D}_\lambda^1(\Delta_k)$.

Alors, puisque les hypothèses $\mathcal{H}_1(\alpha_k, \tau_k, r_k, \delta_k)$ et $\mathcal{H}_2(\alpha_k, \delta_k, \Delta_k)$ sont satisfaites, on peut effectuer à partir de la famille F_k la construction de renormalisation détaillée lors du paragraphe précédent. On construit ainsi, avec des notations évidentes, des applications $K_k : \mathcal{W}_k \rightarrow \mathbf{C}$, G_k , q_k , s_k , \hat{s}_k , t_k , \hat{t}_k , et finalement une famille

$(I_{k,(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in \mathbf{D}(\alpha_{k+1}, \alpha_k^{-1}\tau_k) \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}}$ d'applications de $\mathcal{D}^1(\Delta_{k+1})$, dépendant analytiquement des paramètres (λ, p) , et telle que, pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha_{k+1}, \alpha_k^{-1}\tau_k) \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}$, $I_{k,(\lambda,p)}$ appartienne à $\mathcal{D}_\lambda^1(\Delta_{k+1})$.

Définissons la famille $(F_{k+1,(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in U_{k+1} \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}}$ comme la restriction de la famille I_k aux paramètres (λ, p) appartenant à $U_{k+1} \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}$ (cela a un sens puisque, d'après le lemme précédent, $\alpha_k^{-1}\tau_k > \tau_{k+1}$). On peut alors poursuivre la récurrence.

Ce procédé permet donc de construire une suite $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de telles familles applications. Cette construction n'est pas univoque ; on fixe donc, pour toute la suite de cette partie, une suite $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ainsi que tous les objets intermédiaires obtenus par cette construction.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons :

$$\Delta_k''' = \Delta_k - \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_k) - \frac{1}{4\pi} \log \delta_k^{-2} - \frac{c'}{2}.$$

Alors, (H_k) entraîne : $\Delta_k''' > c'/2$; d'autre part, on vérifie, grâce à l'estimée (7), que, si $c' > C_{11}$, alors, pour tout $(\lambda, p, z) \in \mathcal{W}_k$,

$$(11) \quad |\operatorname{Im} z| < \Delta_k''' \Rightarrow |\operatorname{Im} K_k(\lambda, p, z)| < \Delta_{k+1}'''.$$

1.2.3. Fin de la démonstration du théorème 5. — Fixons $p \in \mathbf{D}_{1/2}$ quelconque et notons :

$$\Lambda = \bigcap_{k=0}^{\infty} t_0 \circ \hat{t}_1 \circ \cdots \circ \hat{t}_k (U_{k+1} \times \{p\}).$$

C'est un ensemble non vide car il contient une intersection décroissante de fermés. C'est un singleton car les applications \hat{t}_k sont contractantes dans la direction de p_0 ; notons $l_0(p)$ son unique élément. Alors,

$$l_0(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} t_0 \circ \hat{t}_1 \circ \cdots \circ \hat{t}_k (\alpha_{k+1}, p_1).$$

L'application : $p \mapsto l_0(p)$ est holomorphe sur $\mathbf{D}_{1/2}$ (en effet, c'est une limite uniforme d'applications holomorphes). Pour tout $p \in \mathbf{D}_{1/2}$, notons $l_1(p) = s_0(l_0(p), p)$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

$$l_k(p) = s_{k-1} \circ \hat{s}_{k-2} \circ \cdots \circ \hat{s}_0(l_0(p), p).$$

LEMME 4. — Soient $k \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{D}_{1/2}$ quelconques. Alors, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_k}'''$, l'orbite positive de z sous l'action de $F_{k, (l_k(p), p)}$ est toute entière incluse dans \mathbf{B}_{Δ_k} .

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un triplet

$$(k, p, z) \in \mathbf{N} \times \mathbf{D}_{1/2} \times \mathbf{B}_{\Delta_k}'''$$

tel que l'orbite positive de z sous l'action de $F_{k, (l_k(p), p)}$ s'échappe de \mathbf{B}_{Δ_k} . Pour tout triplet (k, p, z) vérifiant cette propriété, notons $j(k, p, z)$ l'entier non nul égal au rang

du premier itéré de z qui n'appartient pas à \mathbf{B}_{Δ_k} . Soit (k, p, z) un triplet pour lequel cet entier est minimal. Posons :

$$\mathcal{V}_k = \{y \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(\lambda^{-1}y) \leq \operatorname{Re}(\lambda^{-1}) \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \Delta'_k - C_4\}.$$

Alors, quitte à translater z d'un entier, on peut supposer que $z \in \mathcal{V}_k$. Or, nous avons montré dans ce cas (voir lemme 2), que l'orbite positive de $K_k(l_k(p), p, z)$ sous l'action de $G_{k, (l_k(p), p)}$ s'échappe de $\mathbf{B}_{\Delta_{k+1}}$, et ce après un nombre d'itérations strictement inférieur à $j(k, p, z)$. Puisque, d'après (11),

$$|\operatorname{Im} K_k(l_k(p), p, z)| < \Delta'''_{k+1},$$

ceci contredit la minimalité de $j(k, p, z)$. □

Soient $k \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{D}_{1/2}$ quelconques. Alors, d'après le lemme précédent, pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$F_{k, (l_k(p), p)}^j(\mathbf{B}_{\Delta'''_k}) \subset \mathbf{B}_{\Delta_k}.$$

Donc $F_{k, (l_k(p), p)}$ est analytiquement conjuguée, sur un domaine simplement connexe, \mathbf{Z} -périodique contenant $\mathbf{B}_{\Delta'''_k}$, à une translation $T_{\alpha'_k}$, où α'_k est un réel ; de plus, puisque $\Delta'''_k > c'$, il existe (voir appendice 1.6.3), une constante universelle C_{12} telle que, si $c' > C_{12}$, alors : $|l_k(p) - \alpha'_k| < 1/2$. Donc,

$$(12) \quad |\alpha'_k - \alpha_k| < 1.$$

D'autre part, on déduit de l'assertion 2 du lemme 2 que :

$$\alpha'_{k+1} = \varepsilon_{k+1}(\alpha'^{-1}_k - a_k).$$

Les formules récurrentes définissant les α_j à partir de α_0 et les α'_j à partir de α'_0 sont donc les mêmes, c'est-à-dire que :

$$\alpha_0 = \frac{p_k + \varepsilon_k p_{k-1} \alpha_k}{q_k + \varepsilon_k q_{k-1} \alpha_k} \quad \text{et} \quad \alpha'_0 = \frac{p_k + \varepsilon_k p_{k-1} \alpha'_k}{q_k + \varepsilon_k q_{k-1} \alpha'_k}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

On déduit alors de l'estimée (12) que : $\alpha'_0 = \alpha_0$ (et donc que : $\alpha'_k = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$).

Fixons définitivement : $c' = C_{13}$, où C_{13} est une constante universelle suffisamment grande pour que toutes les hypothèses faites au cours de ce paragraphe et du précédent sur la taille de c' soient valides. Nous avons alors montré que, sous l'hypothèse (H_0) , pour tout $p \in \mathbf{D}_{1/2}$, l'application $F_{0, (l_0(p), p)}$ est conjuguée à T_{α_0} sur un domaine de linéarisation contenant $\mathbf{B}_{\Delta'''_0}$.

Pour terminer la démonstration du théorème 5, il reste simplement à établir que les applications conjuguantes dépendent analytiquement de p . Ce point, qui repose sur un simple argument de limite uniforme de série de Birkhoff, est établi en appendice 1.6.2.

1.3. Linéarisation dans le cas d'une petite hauteur de bande

Cette partie présente beaucoup d'analogies avec la section précédente, à laquelle on renvoie pour plus de détails ou pour certaines démonstrations.

1.3.1. Renormalisation d'une famille analytiquement paramétrée

Donnons-nous quatre réels α , τ , r , et δ satisfaisant à l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_1(\alpha, \tau, r, \delta) \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad 0 < \tau < \alpha/2, \quad 0 < \delta < r \leq 1,$$

un paramètre $\varepsilon_0 > 0$, et une famille

$$(F_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in \mathbf{D}(\alpha,\tau) \times \mathbf{D}_r}$$

d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$, $\Delta > 0$, dépendant analytiquement des paramètres λ et p , telle que, pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times \mathbf{D}_r$, $F_{(\lambda,p)}$ appartienne à $\mathcal{D}^{\varepsilon_0}(\Delta, \lambda)$.

L'objectif de cette section est de construire une famille « renormalisée » de la famille F . Pour cela, l'ingrédient technique principal est le lemme ci-dessous, qui sera démontré en section 1.5 (ce lemme est illustré par la figure 1.3.1).

Donnons-nous $\varepsilon_\Delta > 0$ et $\tilde{\alpha} > 0$ vérifiant : $\alpha > \tilde{\alpha}$. Posons : $U = \mathbf{D}(\alpha, \tau)$, $V = \mathbf{D}(\alpha, (1 - \kappa)\tau)$, et

$$\mathcal{W} = V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \{z \in \mathbf{B}_{\Delta-\varepsilon_\Delta} \mid -1 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous noterons $\varepsilon(\varepsilon_0)$ toute constante ne dépendant que de ε_0 , $\tilde{\alpha}$, Δ , δ , ε_Δ , et qui converge vers 0 lorsque ε_0 tend vers 0 et $\tilde{\alpha}$, Δ , δ , ε_Δ sont fixés.

LEMME 5. — *Il existe $\varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta) > 0$ et $\varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta) > 0$ tels que, si*

$$\tau/\alpha \leq \varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta) \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta),$$

alors il existe une application « uniformisante » K pour F , définie et analytique sur \mathcal{W} , telle que, pour tout $(\lambda, p, z) \in \mathcal{W}$, on ait :

- si $(\lambda, p, F_{(\lambda,p)}(z)) \in \mathcal{W}$, alors : $K(\lambda, p, F_{(\lambda,p)}(z)) = K(\lambda, p, z) + 1$.
- $|K(\lambda, p, z) - z/\lambda| < \varepsilon(\varepsilon_0)$.

Faisons les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_2(\tau, \alpha, \Delta, \varepsilon_\Delta) \quad \tau/\alpha \leq \varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta),$$

$$\mathcal{H}_3(\varepsilon_0, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta) \quad \varepsilon_0 < \varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta).$$

Alors, toutes les conclusions du lemme ci-dessus sont valables, et on en reprend dans la suite les notations.

Notons \tilde{K} l'application $(\lambda, p, z) \mapsto (\lambda, p, K(\lambda, p, z))$; posons :

$$\mathcal{W}' = V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \{z \in \mathbf{B}_{\Delta-3\varepsilon_\Delta/2} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z < \frac{9}{10}\}$$

et :

$$\Delta'' = \alpha^{-1}(\Delta - 2\varepsilon_\Delta).$$

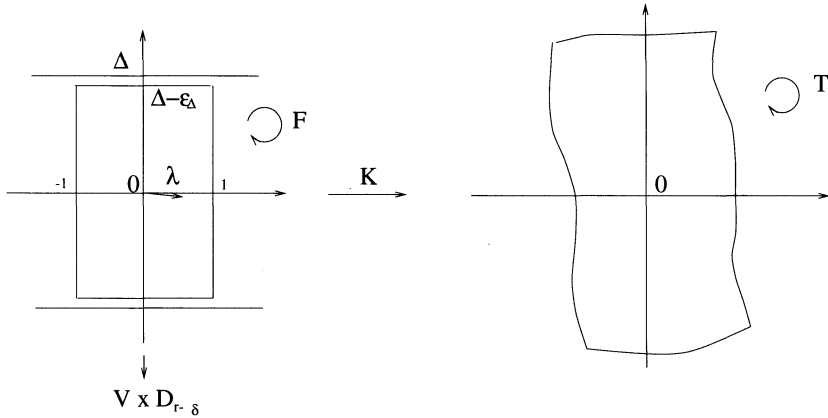


FIGURE 1.3.1

Alors, quitte à diminuer $\varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta)$ et $\varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta)$, on peut supposer que \hat{K} est injective sur \mathcal{W}' et que l'application :

$$G : \hat{K}(\mathcal{W}') \rightarrow \mathbf{C}, \quad \hat{K}(\lambda, p, z) \mapsto K(\lambda, p, z - 1)$$

se prolonge en une application analytique sur $V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta''}$ (encore notée G) telle que, pour tout $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, l'application : $G_{(\lambda, p)} : z \mapsto G(\lambda, p, z)$ appartienne à $\mathcal{D}^{\varepsilon(\varepsilon_0)}(\Delta'')$ (voir la section précédente pour plus de détails).

L'estimée du lemme entraîne (quitte à diminuer $\varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta)$ et $\varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta)$) :

$$(13) \quad |K(\lambda, p, z) - z/\alpha| < \varepsilon_\Delta/\alpha, \quad (\lambda, p, z) \in \mathcal{W}.$$

Pour tout $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, notons $q(\lambda, p)$ le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto G_{(\lambda, p)}(z) - z$. Alors,

$$(14) \quad |q(\lambda, p) + 1/\lambda| < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

D'autre part, comme nous l'avons détaillé dans la section précédente, les dynamiques des applications $F_{(\lambda, p)}$ dans \mathbf{B}_Δ et $G_{(\lambda, p)}$ dans $\mathbf{B}_{\Delta''}$ sont reliées (on pourrait énoncer un lemme analogue au lemme 2).

Posons : $a = \langle \alpha^{-1} \rangle$, notons $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ le signe de $\alpha^{-1} - a$, et posons : $\alpha' = \varepsilon(\alpha^{-1} - a)$. Notons s l'application :

$$V \times \mathbf{D}_{r-\delta} \rightarrow \mathbf{C}, \quad (\lambda, p) \mapsto \varepsilon(-q(\lambda, p) - a)$$

et \hat{s} l'application : $(\lambda, p) \mapsto (s(\lambda, p), p)$. Considérons la famille $(H_{(\lambda, p)})_{(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}}$ d'applications : $\mathbf{B}_{\Delta''} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par :

$$H_{(\lambda, p)}(z) = \begin{cases} G_{(\lambda, p)}(z) + a & \text{si } \varepsilon = -1; \\ -(G_{(\lambda, p)}(-z) + a) & \text{si } \varepsilon = +1. \end{cases}$$

Pour tout $(\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, l'application $H_{(\lambda,p)}$ appartient à $\mathcal{D}_{s(\lambda,p)}^{\varepsilon(\varepsilon_0)}(\Delta'')$. D'autre part, d'après (14),

$$|s(\lambda, p) - \varepsilon(1/\lambda - a)| < \varepsilon(\varepsilon_0), \quad (\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta}.$$

Notons : $W = \mathbf{D}(\alpha, (1 - 2\kappa)\tau)$; l'estimée précédente entraîne :

$$(15) \quad \left| \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right| < (\kappa\tau)^{-1}\varepsilon(\varepsilon_0), \quad (\lambda, p) \in V \times \mathbf{D}_{r-\delta},$$

$$(16) \quad |s(\lambda, p) - \alpha'| > |1/\lambda - 1/\alpha| - \varepsilon(\varepsilon_0), \quad (\lambda, p) \in \partial W \times \mathbf{D}_{r-\delta}.$$

Soit $\varepsilon'''(\tau, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta)$ une constante suffisamment petite pour que, sous l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_4(\varepsilon_0, \tau, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta) \quad \varepsilon_0 < \varepsilon'''(\tau, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta),$$

l'estimée (15) entraîne :

$$\left| \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right| < \lambda^{-2}$$

et l'estimée (16) entraîne : $|s(\lambda, p) - \alpha'| > \tau/\alpha$.

Plaçons-nous dorénavant sous l'hypothèse $\mathcal{H}_4(\varepsilon_0, \tau, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta)$. Alors, s est injective dans $W \times \mathbf{D}_{r-\delta}$ et $\mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}$ est inclus dans $\hat{s}(W \times \mathbf{D}_{r-\delta})$.

Notons : $\hat{t} = (\hat{s}|_{\hat{s}^{-1}(\mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta})})^{-1}$ et : $t = \pi_1 \circ \hat{t}$ où $\pi_1 : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ désigne la projection sur la première coordonnée.

Enfin, considérons la famille $(I_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in \mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}}$ d'applications : $\mathbf{B}_{\Delta''} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par : $I_{(\lambda,p)}(z) = H_{\hat{t}(\lambda,p)}(z)$.

Alors, pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha', \tau/\alpha) \times \mathbf{D}_{r-\delta}$, l'application $I_{(\lambda,p)}$ appartient à $\mathcal{D}_\lambda^{\varepsilon(\varepsilon_0)}(\Delta'')$.

1.3.2. Itération de la construction. — Nous allons maintenant démontrer le théorème 2 à proprement parler.

Fixons $\Delta > \delta > 0$ et $s \in \Sigma$.

Donnons-nous $\alpha \in \mathcal{B}_s$ et $F \in \mathcal{D}^{\varepsilon_0}(\Delta)$, où $\varepsilon_0 > 0$ est un paramètre que nous allons chercher à déterminer (suffisamment petit) pour que les conclusions du théorème 2 soient satisfaites.

On suppose que $\alpha \in]0; 1/2[$ et que F est plongée dans une famille $(F_p)_{p \in \mathbf{D}_1}$ d'applications de $\mathcal{D}^{\varepsilon_0}(\Delta)$, dépendant analytiquement du paramètre p , avec $F_0 = F$. On pose, pour $(\lambda, p) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}_1$,

$$F_{(\lambda,p)}(z) = \lambda + F_p(z) - \left(\int_0^1 (F_p(t) - t) dt \right).$$

Notre stratégie va être d'appliquer un certain nombre de fois à cette famille la construction de renormalisation du paragraphe précédent, de manière à faire croître les hauteurs de bande, pour se retrouver finalement sous les hypothèses du théorème 5.

Fixons un entier k_0 quelconque vérifiant :

$$s_{k_0} + 2^{-(k_0-1)}C < \delta/2$$

où C est la constante universelle qui apparaît dans le théorème 5. L'entier k_0 représente le nombre de renormalisations que nous allons effectuer. La justification du choix de k_0 (remarquons qu'il ne dépend que de δ et s) apparaîtra clairement à la fin de cette section.

Posons $\alpha_0 = \alpha$ ($\alpha \in]0; 1/2[$), et définissons par récurrence la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}}$ en posant :

$$\alpha_{k+1} = |\alpha_k^{-1} - \langle \alpha_k^{-1} \rangle|.$$

Remarquons que, d'après la définition de \mathcal{B}_s , il existe un réel $\tilde{\alpha}$, ne dépendant que de δ et de s , tel que, pour $0 \leq k \leq k_0$, on ait : $\alpha_k \geq \tilde{\alpha}$. Posons $\Delta_0 = \Delta$ et définissons les réels Δ_k , $k \in \{0, \dots, k_0\}$ par récurrence en posant :

$$\Delta_{k+1} = \alpha_k^{-1}(\Delta_k - 2\kappa\delta).$$

Posons :

$$\varepsilon_\tau = \min_{k \in \{0, \dots, k_0-1\}} \varepsilon'(\Delta_k, \kappa\delta)$$

(la fonction $\varepsilon'(\cdot, \cdot)$ est celle du lemme 5). Pour tout $k \in \{0, \dots, k_0\}$, posons :

$$\tau_k = \varepsilon_\tau \alpha_k, \quad U_k = \mathbf{D}(\alpha_k, \tau_k), \quad V_k = \mathbf{D}(\alpha_k, (1 - \kappa)\tau_k), \quad \delta_k = 2^{-(k+2)}.$$

Posons : $r_0 = 1$, et, pour tout $k \in \{1, \dots, k_0\}$, $r_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j$.

Pour $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$, les hypothèses $\mathcal{H}_1(\alpha_k, \tau_k, r_k, \delta_k)$ et $\mathcal{H}_2(\tau_k, \alpha_k, \Delta_k, \varepsilon_\Delta)$ sont alors toujours vérifiées.

Dans la suite de cette section, nous noterons $\varepsilon(\varepsilon_0)$ toute constante ne dépendant que de s , Δ , δ , et ε_0 , et qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ et s , Δ , et δ sont fixés.

Pour $(\lambda, p) \in U_0 \times \mathbf{D}_{r_0}$, posons : $F_{0,(\lambda,p)} = F_{(\lambda,p)}$; rappelons que $F_{(\lambda,p)} \in \mathcal{D}_\lambda^{\varepsilon_0}(\Delta)$.

Pour ε_0 assez petit, nous allons construire, par récurrence à partir de cette famille F_0 , des familles F_1, F_2, \dots, F_{k_0} d'applications. On procède comme dans la section précédente : supposons que les familles F_0, \dots, F_k , $k < k_0$, aient déjà été définies, et supposons que F_k soit une famille $(F_{k,(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in U_k \times \mathbf{D}_{r_k}}$ d'applications de $\mathcal{D}(\Delta_k)$, dépendant analytiquement des paramètres (λ, p) , et telle que, pour tout $(\lambda, p) \in U_k \times \mathbf{D}_{r_k}$, $F_{k,(\lambda,p)}$ appartienne à $\mathcal{D}_\lambda^{\varepsilon_k}(\Delta_k)$, avec $\varepsilon_k = \varepsilon(\varepsilon_0)$.

Alors, si ε_0 est suffisamment petit (plus précisément, inférieur à une constante qui ne dépend que de Δ , δ , et s), les hypothèses

$$\mathcal{H}_3(\varepsilon_k, \tilde{\alpha}, \Delta_k, \delta_k, \varepsilon_\Delta) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_4(\varepsilon_k, \tau_k, \tilde{\alpha}, \Delta_k, \delta_k, \varepsilon_\Delta)$$

sont toutes deux vérifiées. On peut donc effectuer à partir de F_k toutes les constructions du paragraphe précédent. On construit ainsi, avec des notations évidentes, des applications $K_k : \mathcal{W}_k \rightarrow \mathbf{C}$, G_k , q_k , s_k , \hat{s}_k , t_k , \hat{t}_k , et finalement une famille

$$(I_{k,(\lambda,p)})_{(\lambda,p) \in \mathbf{D}(\alpha_{k+1}, \alpha_k^{-1}\tau_k) \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}}$$

d'applications de $\mathcal{D}(\Delta_{k+1})$. Pour tout $(\lambda, p) \in \mathbf{D}(\alpha_{k+1}, \alpha_k^{-1}\tau_k) \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}$, $I_{k,(\lambda,p)}$ appartient à $\mathcal{D}_\lambda^{\varepsilon_{k+1}}(\Delta_{k+1})$, avec à nouveau $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon(\varepsilon_0)$.

Définissons la famille $(F_{k+1,(\lambda,p)})(\lambda,p) \in U_{k+1} \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}$ comme la restriction de la famille I_k aux paramètres (λ,p) appartenant à $U_{k+1} \times \mathbf{D}_{r_{k+1}}$ (cela a un sens puisque $\alpha_k^{-1}\tau_k > \tau_{k+1}$). Quitte à diminuer encore ε_0 , on peut donc poursuivre la récurrence, et ce jusqu'au rang $k_0 - 1$, c'est-à-dire jusqu'à la construction de l'application F_{k_0} . Ce procédé n'étant pas univoque, on fixe dorénavant une suite (F_0, \dots, F_{k_0}) ainsi que tous les objets intermédiaires obtenus par cette construction.

1.3.3. Fin de la démonstration du théorème 2. — Posons $d_0 = \delta$, et définissons les réels $d_k, k \in \{0, \dots, k_0\}$, par récurrence en posant :

$$d_{k+1} = \alpha_k^{-1}(d_k - 3\kappa\delta).$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, k_0\}$, on a $d_k < \Delta_k$; d'autre part,

$$d_{k_0} > \beta_{k_0-1}^{-1}(d_0 - 6\kappa\delta).$$

D'après la définition de k_0 , ceci entraîne

$$\begin{aligned} d_{k_0} &> \beta_{k_0-1}^{-1}(s_{k_0} + 2^{(k_0-1)}C) \\ &> \beta_{k_0-1}^{-1}\Phi_{k_0}(\alpha) + C, \end{aligned}$$

et finalement,

$$(17) \quad d_{k_0} > \Phi(\alpha_{k_0}) + C.$$

En outre, l'estimée (13) montre que, pour tous $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$ et $(\lambda, p, z) \in \mathcal{W}_k$,

$$(18) \quad |\operatorname{Im} z| < \Delta_k - d_k \Rightarrow |\operatorname{Im} K_k(\lambda, p, z)| < \Delta_{k+1} - d_{k+1}.$$

L'estimée (17) montre que l'on peut appliquer le théorème 5 aux applications $F_{k_0,(\lambda,p)}$, $(\lambda, p) \in U_{k_0} \times \mathbf{D}_{r_{k_0}}$. On en déduit que, pour tout $(\lambda, p) \in U_{k_0} \times \mathbf{D}_{r_{k_0}}$, il existe un unique $\mu \in \mathbf{C}$, noté $\mu(\lambda, p)$, tel que l'application : $z \mapsto \mu(\lambda, p) + F_{k_0,(\lambda,p)}(z)$ soit conjuguée à la translation $T_{\alpha_{k_0}}$ sur un ouvert contenant $\mathbf{B}_{\Delta_{k_0}-d_{k_0}}$. De plus, l'application : $(\lambda, p) \mapsto \mu(\lambda, p)$ est analytique.

Pour tout $(\lambda, p) \in U_{k_0} \times \mathbf{D}_{r_{k_0}}$, on a :

$$|\lambda + \mu(\lambda, p) - \alpha_{k_0}| < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

On en déduit, grâce à un argument d'indice, que, si ε_0 est suffisamment petit (inférieur à une constante qui ne dépend que de Δ, δ , et s), alors, pour tout $p \in \mathbf{D}_{r_{k_0}}$, il existe un unique $\lambda \in U_{k_0}$, noté $\lambda_{k_0}(p)$, tel que : $\mu(\lambda_{k_0}(p), p) = 0$. De plus, l'application : $p \mapsto \lambda_{k_0}(p)$ est analytique.

Pour tous $p \in \mathbf{D}_{r_{k_0}}$ et $k \in \mathbf{N}_{k_0-1}$, posons :

$$\lambda_k(p) = t_k \circ \hat{t}_{k+1} \circ \dots \circ \hat{t}_{k_0-1}(\lambda_{k_0}(p), p).$$

L'application : $p \mapsto \lambda_0(p)$ est également analytique. Pour tout $p \in \mathbf{D}_{r_{k_0}}$, l'application $F_{0,(\lambda_0(p),p)}$ est conjuguée à la translation T_{α_0} sur un domaine qui, d'après l'estimée (18), contient $\mathbf{B}_{\Delta_0-d_0}$.

Ceci termine la démonstration du théorème 2 (et donc aussi du théorème 1).

1.4. Construction d'applications uniformisantes (cas d'une grande hauteur de bande)

Donnons-nous quatre réels α , τ , r , et δ satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$0 < \alpha \leq 1/2, \quad 0 < \tau < \alpha/2, \quad 0 < \delta < r \leq 1.$$

Donnons-nous un entier $n > 0$, et notons D_r le polydisque de centre 0 et de rayon r dans \mathbf{C}^n ; donnons-nous un réel $\Delta > 0$, et une application analytique :

$$F : \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times D_r \times \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$$

telle que, pour tout $p = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times D_r$, l'application

$$F_p : \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}, \quad z \mapsto F(p, z)$$

appartienne à $\mathcal{D}_{p_0}^1(\Delta)$. Posons : $U = \mathbf{D}(\alpha, \tau)$, $V = \mathbf{D}(\alpha, (1 - \kappa)\tau)$, $\alpha^- = \alpha - \tau$, $\alpha^+ = \alpha + \tau$ et $\tilde{n} = \max(n, 2)$.

L'objet de cette section est d'établir le lemme suivant (il s'agit d'une version, légèrement plus générale, du lemme 1).

LEMME 6. — *Il existe une constante $C_0 > 0$, qui ne dépend que de n , telle que, si*

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}} + C_0$$

(posons : $\Delta' = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}} - C_0$), alors il existe une application « uniformisante » K pour F , définie et analytique sur le domaine :

$$\mathcal{W} = \left\{ (p, z) \in V \times D_{r-\delta} \times \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re}(p_0/\alpha^+) \Delta' \text{ et } \operatorname{Re}(-1/p_0) < \operatorname{Re}(z/p_0) < \operatorname{Re}(1/p_0) \end{array} \right\}$$

telle que, pour tout $(p, z) \in \mathcal{W}$, on ait :

- *si $(p, F(p, z)) \in \mathcal{W}$, alors : $K(p, F(p, z)) = K(p, z) + 1$;*
- *$|K(p, z) - z/p_0| < \alpha^{-1} \exp\left(-2\pi((\operatorname{Re} p_0/\alpha^+) \Delta' - |\operatorname{Im} z|)\right)$.*

La démonstration étant assez technique, nous commençons par en décrire les étapes principales.

Dans toute cette section, nous utiliserons la lettre C pour désigner des constantes qui ne dépendent que de n .

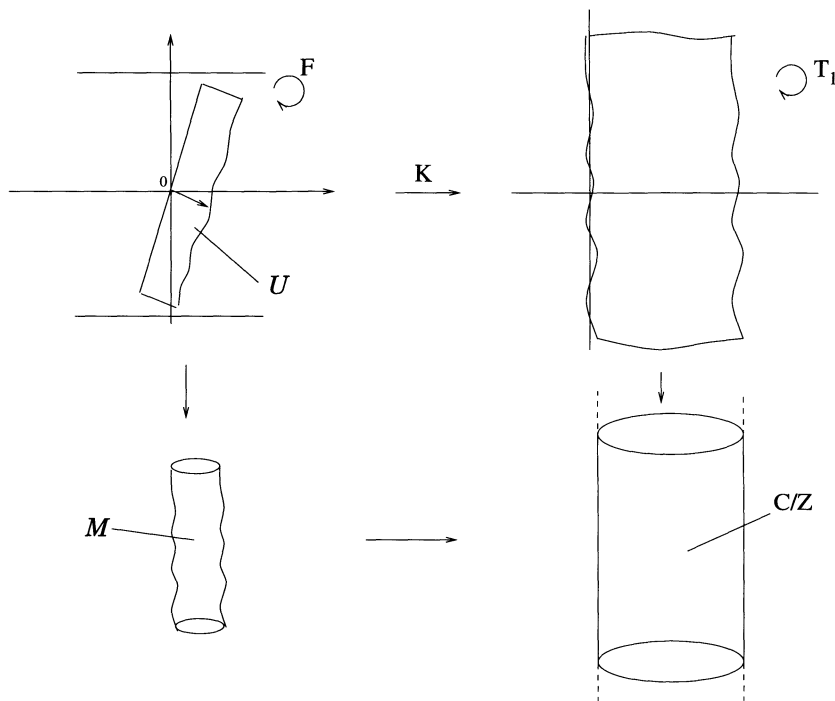
1.4.1. Description de la démonstration. — L'objet du lemme ci-dessus est la construction d'une application K vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$(19) \quad K(p, F(p, z)) = K(p, z) + 1.$$

Dans le cas où F est la famille linéaire (c'est-à-dire : $F(p, z) = z + p_0$), on dispose d'une solution évidente à savoir : $K(p, z) = z/p_0$.

Dans le cas général, posons : $F(p, z) = z + p_0 + \varphi(p, z)$.

On dispose alors de l'estimée : $|\varphi(p, z)| \leq C \exp(-2\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|))$ (voir l'appendice 1.6.3). L'application F est donc très proche de sa partie linéaire lorsque $|\operatorname{Im} z|$ n'est pas trop grande. Heuristiquement, ce lemme signifie donc que, dans une zone où $|\operatorname{Im} z|$ est suffisamment petite par rapport à Δ , autrement dit où F est suffisamment proche de la famille linéaire, on peut trouver une solution K à l'équation (19) qui soit de plus proche de la solution du cas linéaire.



Considérons tout d'abord le problème sans tenir compte des paramètres ; on considère donc une seule application $F : \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$. Dans ce cas, une construction analogue a été effectuée par J.-C. Yoccoz pour étudier la renormalisation des difféomorphismes analytiques du cercle (voir [19]). Décrivons rapidement sa construction. On considère un « domaine fondamental » \mathcal{U} pour F (voir la figure), en se limitant à des points z de partie imaginaire bornée par : $\Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - C$. Soit \mathcal{M} la surface de Riemann obtenue en recollant les deux bords de \mathcal{U} par l'action de F . L'application K est alors obtenue comme relèvement d'une application uniformisante de \mathcal{M} dans un sous-anneau de \mathbf{C}/\mathbf{Z} , et K satisfait à des estimées que l'on déduit d'inégalités de modules d'anneaux.

Cette étape est cruciale dans la démonstration de la linéarisabilité locale des difféomorphismes analytiques du cercle dont le nombre de rotation vérifie la condition de

Bruno ([19]) ; en particulier, la perte de hauteur de bande limitée à : $\frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C$ est intimement liée à la condition de Bruno.

Dans le cas qui nous occupe (avec paramètres), on cherche à résoudre le même problème, sans perdre plus (ou presque pas plus) que $\frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C$ dans la hauteur de bande. C'est ce qu'affirme le lemme 6 et c'est ce qui permet, lorsqu'on applique cette construction, d'obtenir tous les nombres de Bruno.

La démonstration est grosso modo fondée sur la même idée qu'en l'absence de paramètres : obtenir K comme relèvement d'une application uniformisante entre variétés complexes. Mais la présence des paramètres rend cette démonstration techniquement beaucoup plus lourde. Il s'agit en effet de mettre en place, dans ce cas particulier, une sorte de théorème d'uniformisation de Riemann analytiquement paramétré. Pour cela, on devra résoudre un problème $\bar{\partial}$.

Décrivons maintenant les constructions intervenant dans notre démonstration. Tout d'abord, on se restreint à des points z vérifiant :

$$|\operatorname{Im} z| < \Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - C.$$

On effectue ensuite un changement d'échelle en posant :

$$F_1(p, z) = \frac{1}{p_0} F(p, p_0, z).$$

Le problème considéré se ramène alors à la recherche d'une application K_1 , proche de $(p, z) \mapsto z$, et vérifiant :

$$(20) \quad K_1(p, F_1(p, z)) = K_1(p, z) + 1.$$

Posons : $F_1(p, z) = z + 1 + \varphi_1(p, z)$. La restriction sur la partie imaginaire des points considérés entraîne l'estimée : $|\varphi_1(p, z)| \leq C^{-1}$.

Soit ℓ_1 l'ensemble constitué des points (p, z) où F_1 est définie et tels que $\operatorname{Re} z = 0$; soit $\ell'_1 = \{(p, F_1(p, z)) \mid z \in \ell_1\}$. Les ensembles ℓ_1 et ℓ'_1 délimitent un ouvert \mathcal{U}_1 , une sorte de « domaine fondamental » pour F_1 (voir la figure 1.4.1).

Remarquons qu'il suffit, pour résoudre notre problème, de construire une application K_1 holomorphe sur \mathcal{U}_1 , continue sur $\mathcal{U}_1 \cup \ell_1 \cup \ell'_1$, et vérifiant l'équation (20) pour tout $(p, z) \in \ell_1$; en effet, cette équation permet ensuite de prolonger analytiquement l'application K_1 à un domaine plus large.

Soit \mathcal{M}_1 la variété complexe obtenue en recollant ℓ_1 et ℓ'_1 par l'action de F_1 . Le problème considéré est encore équivalent à celui de la recherche d'une application uniformisante analytique de \mathcal{M}_1 dans un ouvert de $U \times D_r \times \mathbf{C}$, qui commute avec la projection sur $U \times D_r$. Or, il est très facile de résoudre ce problème d'uniformisation en classe C^∞ : soit $\eta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application C^∞ vérifiant :

$$\eta(x) = 1 \text{ pour } x \leq 1/3 \text{ et } \eta(x) = 0 \text{ pour } x \geq 2/3.$$

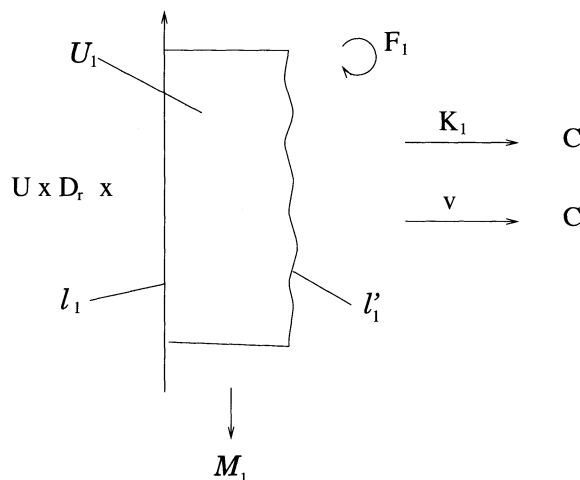


FIGURE 1.4.1

Posons : $v(p, z) = z + \eta(\operatorname{Re} z)\varphi_1(p, z)$. Alors, l'application v vérifie, pour tout $(p, z) \in \ell_1$,

$$v(p, F_1(p, z)) = v(p, z) + 1.$$

Il suffit donc, pour obtenir l'application uniformisante recherchée, de corriger le défaut d'holomorphic de v tout en préservant l'équation fonctionnelle vérifiée par v sur ℓ_1 , autrement dit de corriger ce défaut d'holomorphic au niveau de la variété quotient \mathcal{M}_1 . Or, $\bar{\partial}v$ définit encore une $(0, 1)$ forme de classe C^∞ sur le quotient \mathcal{M}_1 . Le point clé de la démonstration est ainsi la résolution, avec estimées, d'un problème $\bar{\partial}$ sur la variété \mathcal{M}_1 .

Pour cela, on utilisera un théorème de résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec estimées L^2 , essentiellement dû à Hörmander, et adapté par R. Perez-Marco et J.-C. Yoccoz au cas des variétés de Stein pour lesquelles la structure complexe est suffisamment proche d'une structure plate (voir [12]).

Pour faire fonctionner cet outil technique, certaines estimées sont nécessaires, tant sur la structure complexe de la variété \mathcal{M}_1 (c'est-à-dire sur φ_1) que sur la $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}v$. Plus précisément, on aura besoin des estimées suivantes :

$$(21) \quad |\varphi_1| \leq \alpha^2/C$$

$$(22) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dots} \right| \leq \alpha^2/C$$

$$(23) \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \dots \partial \dots} \right| \leq \alpha^2/C$$

$$(24) \quad |\bar{\partial}v| \leq \alpha^2 \delta^n/C$$

(les notations $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \dots}$ et $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \dots \partial \dots}$ signifient que ces estimées sont valables pour toutes les dérivées partielles à l'ordre un ou deux de φ_1).

La première partie de la démonstration (§ 3.2) est donc consacrée à la construction de φ_1 , de \mathcal{M}_1 , et de v , avec pour objectif d'obtenir les estimées ci-dessus. Elles se déduisent toutes d'une seule estimée sur φ_1 , à savoir :

$$(25) \quad |\varphi_1| \leq \alpha^2 \delta^{\tilde{n}}/C$$

(où $\tilde{n} = \max(n, 2)$). En effet, (21) et (24) s'en déduisent directement, et (22) et (23) par estimées de Cauchy (voir §1.4.2, c).

Une difficulté inattendue vient du fait que l'estimée dont on dispose a priori pour φ_1 est seulement : $|\varphi_1| \leq 1/C$. Il faut donc profiter plus astucieusement de la perte à laquelle on a droit au tout début dans les hauteurs de bandes (à savoir : $\frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C$). Pour cela, on utilise un lemme de forme normale (voir appendice 1.6.1) qui permet de conjuguer F à une application F_0 dont la partie non linéaire est bornée par α^3/C (en fait α^k/C pour tout $k \in \mathbb{N}$ si on veut) avec une conjugaison définie sur $\mathbf{B}_{\Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - C}$. Ainsi, au tout début de la démonstration, au lieu de simplement se limiter à des points de partie imaginaire bornée par $\Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - C$, on conjugue F grâce à ce lemme, et on travaille ensuite avec l'application F_0 conjuguée. Il faut consentir une perte supplémentaire de $\frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}}$ dans la hauteur de bande de manière à faire apparaître le facteur $\delta^{\tilde{n}}$ dans les estimées. On obtient alors l'estimée (25) voulue pour φ_1 .

La suite de la démonstration consiste à résoudre le problème $\bar{\partial}$ associé à la $(0, 1)$ -forme $\bar{\partial}v$ (§1.4.3). On obtient une solution $u \in C^\infty(\mathcal{M}_1)$ qui vérifie une estimée L^2 , et donc l'application K recherchée. Il reste (§1.4.4) à prolonger K et à établir sur K les estimées L^∞ du lemme 6.

1.4.2. Construction d'une variété complexe avec estimées. — Dans toute la suite de la section 1.4, nous utiliserons la lettre C pour désigner des constantes universelles ou qui ne dépendent que de n ; lorsque nous aurons besoin d'être plus précises pour désigner de telles constantes, nous les noterons C_1, C_2, \dots

Reprenons les définitions et notations introduites au début de la section 1.4, et considérons l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}_t) \quad \Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}} + t$$

où t désigne un paramètre réel strictement positif (rappelons que $\tilde{n} = \max(n, 2)$). Notre objectif est de déterminer une constante C_0 ne dépendant que de n , telle que, sous l'hypothèse (\mathcal{H}_{C_0}) , les conclusions du lemme 6 soient vérifiées.

a) *Mise sous forme normale*

LEMME 7. — *Il existe une constante universelle d_2 telle que, si :*

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + d_2$$

(notons : $\Delta_2 = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - d_2$), alors, pour tout $p = (p_0, \dots, p_n) \in U \times D_r$, il existe une application $F_{0,p} \in \mathcal{D}^1(\Delta_2)$, satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (i) Notons $a_0(p)$ le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto F_{0,p}(z) - z$, et posons, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$, $F_{0,p}(z) = z + a_0(p) + \varphi_{0,p}(z)$. Alors,

$$(26) \quad |a_0(p) - p_0| < |p_0| \exp(-4\pi\Delta_2),$$

et, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$,

$$(27) \quad |\varphi_{0,p}(z)| < |p_0|^3 \exp(-4\pi(\Delta_2 - |\operatorname{Im} z|)).$$

- (ii) Les applications $F_{0,p}$ et F_p sont conjuguées. Plus précisément, il existe une application $H_p : \mathbf{B}_{\Delta_2} \rightarrow \mathbf{C}$ univalente, commutant avec les translations entières, telle que :

- (a) pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$,

$$(28) \quad |H_p(z) - z| < \exp(-2\pi(\Delta_2 - |\operatorname{Im} z|));$$

- (b) pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$ tel que $F(z) \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$,

$$F_{0,p} \circ H_p(z) = H_p \circ F_p(z).$$

De plus, $a_0(p)$, $F_{0,p}$, et H_p dépendent analytiquement de p .

Ce lemme est démontré, sous une forme légèrement plus générale, dans l'appendice 1.6.1.

Supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}_{d_2}) soit vérifiée; alors, toutes les conclusions du lemme précédent sont valables. Reprenons-en les notations, et posons, pour tout $(p, z) \in U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_2}$,

$$\begin{aligned} H(p, z) &= h_p(z) \\ F_0(p, z) &= F_{0,p}(z) \\ \varphi_0(p, z) &= \varphi_{0,p}(z). \end{aligned}$$

Les fonctions H , F_0 , et φ_0 , ainsi définies sont analytiques sur $U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_2}$. Posons :

$$\Delta_0 = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}} - d_2 = \Delta_2 - \frac{1}{4\pi} \log \delta^{-\tilde{n}}.$$

On déduit alors de l'estimée (27) que, pour tout $(p, z) \in U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_0}$,

$$(29) \quad |\varphi_0(p, z)| < C \delta^{\tilde{n}} \alpha^3 \exp(-4\pi(\Delta_0 - |\operatorname{Im} z|)).$$

b) *Un changement de variable.* — Considérons le difféomorphisme holomorphe :

$$\begin{aligned}\sigma : U \times D_r &\longrightarrow \mathbf{D} \times D_1 \\ (p_0, p_1, \dots, p_n) &\longmapsto ((p_0 - \alpha)/\tau, p_1/r, \dots, p_n/r).\end{aligned}$$

Notons \hat{F}_0 l'application : $\mathbf{D} \times D_1 \times \mathbf{B}_{\Delta_0} \rightarrow \mathbf{C}$, $(q, z) \mapsto F_0(\sigma^{-1}(q), z)$, et pour tout $q \in \mathbf{D} \times D_1$, posons :

$$\hat{a}_0(q) = a_0(\sigma^{-1}(q)).$$

Ce changement de variable permet de se ramener à un espace des paramètres de taille universelle, ce qui nous permettra, au paragraphe suivant d'effectuer des estimées de Cauchy « sans trop de perte » dans la direction des paramètres.

Notons $\bar{\sigma}$ l'application :

$$U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_0} \rightarrow \mathbf{D} \times D_1 \times \mathbf{C}, \quad (p, z) \mapsto (\sigma(p), z/a_0(p))$$

(cette application définit un difféomorphisme de $U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_0}$ sur son image).

Considérons l'application $F_1 : \bar{\sigma}(U \times D_r \times \mathbf{B}_{\Delta_0}) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par :

$$F_1(q, z) = \hat{a}_0(q)^{-1} F_0(\bar{\sigma}^{-1}(q, z)) = \hat{a}_0(q)^{-1} \hat{F}_0(q, \hat{a}_0(q)z).$$

L'intérêt de ce second changement de variable est que le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto F_1(q, z) - z$ vaut 1, ce qui simplifiera la géométrie des constructions menées dans la suite. Posons :

$$F_1(q, z) = z + 1 + \varphi_1(q, z).$$

Alors,

$$\varphi_1(q, z) = \hat{a}_0(q)^{-1} \varphi_0(\bar{\sigma}^{-1}(q, z))$$

(l'application φ_1 n'est bien sûr plus \mathbf{Z} -périodique par rapport à la coordonnée z).

Fixons $(q, z) \in \mathbf{D} \times D_1 \times \mathbf{C}$ quelconque, et posons : $p = (p_0, \dots, p_n) = \sigma^{-1}(q)$ et : $\zeta = \hat{a}_0(q)z$; alors,

$$|\operatorname{Im} \zeta - \operatorname{Re} p_0 \operatorname{Im} z| \leq |(\operatorname{Re} \hat{a}_0(q) - \operatorname{Re} p_0) \operatorname{Im} z| + |\operatorname{Re} z \operatorname{Im} \hat{a}_0(q)|.$$

Supposons que l'on ait : $|\operatorname{Re} z| \leq 2$ et $|\operatorname{Im} z| < \Delta_0/\alpha^+$; alors, puisque $|\hat{a}_0(q) - p_0| < |p_0| \exp(-4\pi\Delta_2)$ (estimée (26)), on a :

$$(30) \quad |\operatorname{Im} \zeta - \operatorname{Re} p_0 \operatorname{Im} z| < C_1$$

(C_1 est une constante universelle). En particulier, si $|\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - C_1)/\alpha^+$, cette estimée entraîne : $|\operatorname{Im} \zeta| < \Delta_0$, et F_1 est définie en (q, z) . Dans ce cas, on déduit de (29) et (30) que :

$$(31) \quad |\varphi_1(q, z)| < C\delta^{\bar{n}}\alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+|\operatorname{Im} z|)\right).$$

Cette dernière estimée est à rapprocher de l'estimée (25) du paragraphe 1.4.1. Elle est à l'origine de toutes les estimées que l'on va établir lors de la suite de la démonstration.

c) *Inégalités de Cauchy.* — On veut établir, à partir de (31), des estimées sur toutes les dérivées partielles de φ_1 à l'ordre un ou deux, grâce à des inégalités de Cauchy. Soit $(q, z) \in \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \mathbf{C}$ vérifiant :

$$|\operatorname{Re} z| < 3/2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - C_1 - 1)/\alpha^+.$$

Alors, le polydisque de centre (q, z) et de rayons : $\kappa/2, \delta/2, \dots, \delta/2, 1/2$, respectivement dans les directions des variables q_0, q_1, \dots, q_n, z , est inclus dans le domaine de définition de l'application F_1 et donc dans le domaine de validité de l'estimée (31). On en déduit, grâce à des inégalités de Cauchy, que :

$$(32) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dots} (q, z) \right| \leq C \delta^{\tilde{n}-1} \alpha^2 \exp \left(-4\pi (\Delta_0 - \alpha^+ |\operatorname{Im} z|) \right)$$

$$(33) \quad \left| \frac{\partial_1 \varphi_1}{\partial \dots \partial \dots} (q, z) \right| \leq C \delta^{\tilde{n}-2} \alpha^2 \exp \left(-4\pi (\Delta_0 - \alpha^+ |\operatorname{Im} z|) \right)$$

(les $\partial \dots$ signifient que ces inégalités sont valables pour toutes les dérivées partielles de φ_1 à l'ordre un ou deux).

d) *Construction d'une variété complexe.* — Posons :

$$\begin{aligned} l_1 &= \left\{ (q, z) \in \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - C_2)/\alpha^+ \right\} \\ l'_1 &= \left\{ (q, F_1(q, z)) \mid (q, z) \in l_1 \right\} \\ l''_1 &= \left\{ (q, z) \in \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \mathbf{C} \text{ tel que } z \text{ appartienne} \right. \\ &\quad \text{au segment reliant } i(\Delta_0 - C_2)/\alpha^+ \text{ et } F_1 \left(q, i(\Delta_0 - C_2)/\alpha^+ \right) \text{ ou} \\ &\quad \left. \text{au segment reliant } -i(\Delta_0 - C_2)/\alpha^+ \text{ et } F_1 \left(q, -i(\Delta_0 - C_2)/\alpha^+ \right) \text{ dans } \mathbf{C} \right\} \end{aligned}$$

où C_2 est une constante universelle telle que, pour tout $(q, z) \in l_1$, on ait :

$$(34) \quad |\varphi_1(q, z)| < 1/4,$$

$$(35) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} (q, z) \right| < 1/4.$$

Les ensembles l_1 , l'_1 , et l''_1 délimitent alors un ouvert connexe \mathcal{D}_1 (un domaine « fondamental » pour F_1) au dessus de $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$ (voir figure §1.4.1). Posons :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{D}_1 \cup l_1 \cup l''_1.$$

Quitte à augmenter la constante C_2 , on peut supposer que F_1 est définie dans un voisinage de \mathcal{U}_1 .

Pour tout q dans $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$, les points de \mathcal{U}_1 dont les $n+1$ premières coordonnées sont données par q définissent une bande de largeur approximative 1 dans le plan de variation de z . En identifiant dans \mathcal{U}_1 les bords l_1 et l'_1 par l'action de F_1 au dessus de $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$, on obtient une variété complexe (sans bord) notée

\mathcal{M}_1 (si Δ est suffisamment grande, \mathcal{M}_1 est non vide). Notons : $\pi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ la projection canonique.

Soit $\eta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant : $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(t) = 0$ pour $t \geq 2/3$, et $\eta(t) = 1$ pour $t \leq 1/3$. On fixe pour toute la démonstration une telle fonction η .

Considérons l'application v , définie sur un voisinage de \mathcal{U}_1 par l'expression :

$$v(q, z) = z + \eta(\operatorname{Re} z) \varphi_1(q, z).$$

Pour tout $(q, z) \in l_1$, on a, grâce à (34) :

$$v(q, F_1(q, z)) = v(q, z) + 1.$$

L'application v induit donc une application de classe C^∞ , notée \bar{v} , de \mathcal{M}_1 sur \mathbf{C}/\mathbf{Z} . La $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}v$, définie au voisinage de \mathcal{U}_1 , est nulle au voisinage de l_1 et de l'_1 (en effet, dans un tel voisinage, η est constante et v est donc holomorphe). Elle passe au quotient et définit une $(0, 1)$ forme de classe C^∞ sur \mathcal{M}_1 , que l'on notera de façon naturelle $\bar{\partial}\bar{v}$. C'est cette $(0, 1)$ forme qui sera le second membre du problème $\bar{\partial}$ que l'on cherchera à résoudre au cours des prochains paragraphes.

Avant de terminer ce paragraphe, introduisons pour F_0 des objets correspondant à ceux définis plus haut pour F_1 ; posons :

$$l_0 = \bar{\sigma}^{-1}(l_1), \quad l'_0 = \bar{\sigma}^{-1}(l'_1), \quad \mathcal{U}_0 = \bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{U}_1).$$

e) *Reformulation des estimées.* — Considérons l'application :

$$h : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (q, z) \longmapsto \operatorname{Im} v(q, z).$$

Cette fonction passe au quotient et définit une fonction de classe C^∞ sur \mathcal{M}_1 , que l'on notera également h .

Dans la suite, on commettra l'abus de notation consistant à utiliser, sur la variété \mathcal{M}_1 , les coordonnées globales (q, z) : la coordonnée q est bien définie, mais pas la coordonnée z (il y a ambiguïté le long du recollement). Néanmoins, cette ambiguïté ne sera pas gênante, car elle n'influence pas la valeur de h .

Fixons $(q, z) \in \mathcal{U}_1$. D'après (34), on a : $\operatorname{Im} z \geq h(q, z) - 1/4$. On déduit alors immédiatement de (31) (32), et (33) que :

$$(36) \quad \left| \varphi_1(q, z) \right| \leq C \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right)$$

$$(37) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dots}(q, z) \right| \leq C \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right)$$

$$(38) \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \dots \partial \dots}(q, z) \right| \leq C \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right)$$

$$(39) \quad \|\bar{\partial}v(q, z)\| \leq C \alpha^2 \delta^n \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right)$$

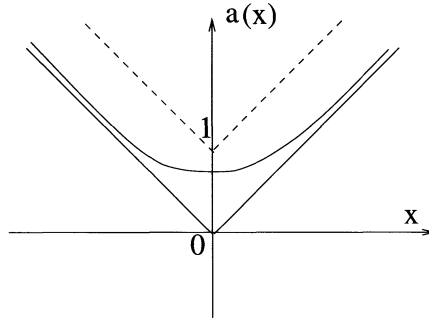
où $\|\bar{\partial}v(q, z)\|$ désigne la norme de la $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}v$ dans la base $(dq_0, dq_1, \dots, dq_n, dz)$ (les estimées (37) et (38) sont liées au fait que $\tilde{n} \geq 2$, et l'estimée (39) au fait que $\tilde{n} \geq n$).

Ces quatre dernières estimées sont à rapprocher des estimées (21) à (24) du paragraphe 1.4.1. On dispose maintenant de toutes les estimées nécessaires pour pouvoir résoudre le problème $\bar{\partial}$ associé au défaut d'holomorphic de l'application v (l'estimée (39) ne sera utilisée qu'à la toute fin du paragraphe 1.4.3, à partir du lemme 11, et permettra de « perdre » le facteur δ^n dans une estimée de Cauchy, voir lemme 13).

1.4.3. Résolution d'un problème $\bar{\partial}$

a) *Estimées sur la structure complexe de \mathcal{M}_1 .* — Soit $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|x| \leq a(x) \leq |x| + 1, \quad |a'(x)| \leq 1, \quad |a'(x)| + a''(x) \geq 1.$$



Si Λ représente un paramètre réel, on notera dans toute la suite de la démonstration :

- h_Λ l'application : $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \rightarrow \mathbf{R}$, $q \mapsto (\Delta_0 - \Lambda)/\alpha^+ - \sum_{j=0}^n |q_j|^2$;
- $\mathcal{U}_{1,\Lambda} = \left\{ (q, z) \in \mathcal{U}_1 \mid a(h(q, z)) < h_\Lambda(q) \right\}$;
- $\mathcal{U}_{0,\Lambda} = \bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{U}_{1,\Lambda})$;
- $\mathcal{M}_{1,\Lambda} = \pi_1(\mathcal{U}_{1,\Lambda})$.

Soit c un paramètre réel positif. Nous allons travailler dans la suite sur les variétés $\mathcal{M}_{1,c}$. Remarquons que l'application : $c \mapsto \mathcal{M}_{1,c}$ est décroissante pour l'inclusion et que, si c est suffisamment grand (supérieur à une constante universelle), $\mathcal{M}_{1,c}$ est incluse dans \mathcal{M}_1 .

L'objet de ce paragraphe, et du lemme ci-après, est d'exprimer le fait que, pour c suffisamment grand, la structure complexe de $\mathcal{M}_{1,c}$ est proche de celle du produit de $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$ par un ouvert de \mathbf{C}/\mathbf{Z} . La fonction h_c représente une hauteur de coupure, voisine de c/α . L'introduction d'une forme quadratique dans l'expression de h_c permet de rendre cette coupure convexe par rapport aux paramètres q_0, \dots, q_n .

Cette convexité de la frontière de $\mathcal{M}_{1,c}$ sera utile, au paragraphe suivant, pour montrer que $\mathcal{M}_{1,c}$ est une variété de Stein.

En tout point de $\mathcal{M}_{1,c}$, posons :

$$\begin{aligned}\omega_i &= dq_i \quad (i = 0, \dots, n) \\ \omega_{n+1} &= \partial h.\end{aligned}$$

Alors, $\partial\omega_{n+1} = 0$ et, pour $i = 0, \dots, n$, $\partial\omega_i = 0$ et $\bar{\partial}\omega_i = 0$.

Suivant les notations de [12] (voir aussi §1.4.3, c)), posons :

$$\bar{\partial}\omega_{n+1} = \sum_{j,k} c_{j,k}^{n+1} \bar{\omega}_j \wedge \omega_k$$

(les fonctions $c_{j,k}^{n+1} \in C^\infty(\mathcal{M}_{1,c})$) et :

$$dc_{j,k}^{n+1} = \sum_l \partial_l c_{j,k}^{n+1} \omega_l + \sum_l \bar{\partial}_l c_{j,k}^{n+1} \bar{\omega}_l.$$

LEMME 8. — *Il existe deux constantes C_3 et C_4 , ne dépendant que de n , telles que, si $c \geq C_3$, $\mathcal{M}_{1,c}$ jouisse des propriétés suivantes :*

(i) *Les $(1, 0)$ formes $\omega_0, \dots, \omega_{n+1}$ constituent, en tout point de $\mathcal{M}_{1,c}$, une base de l'espace cotangent holomorphe à $\mathcal{M}_{1,c}$.*

(ii) *Posons $d\tau = (i/2)^{n+2} \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0 \wedge \dots \wedge \omega_{n+1} \wedge \bar{\omega}_{n+1}$, et notons $d\tau_0$ l'élément de volume canonique dans \mathbb{C}^{n+2} . Dans $\mathcal{U}_{1,c}$, on a :*

$$C^{-1}d\tau_0 \leq \pi_1^* d\tau \leq C d\tau_0.$$

(iii) *En tout point de $\mathcal{U}_{1,c}$, on a :*

$$\begin{aligned}|c_{j,k}^{n+1}| &\leq C_4 \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right) \\ |\partial_l c_{j,k}^{n+1}| &\leq C_4 \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right) \\ |\bar{\partial}_l c_{j,k}^{n+1}| &\leq C_4 \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right).\end{aligned}$$

Démonstration. — D'après (36), (37), et (38), φ_1 et toutes les dérivées partielles de φ_1 à l'ordre un ou deux convergent vers 0, uniformément sur $\mathcal{M}_{1,c}$, et uniformément par rapport à α , lorsque $c \rightarrow \infty$; (i) et (ii) sont une conséquence de cette remarque.

Il reste à établir (iii); pour tout $(q, z) \in \mathcal{M}_{1,c}$, on a :

$$\begin{aligned}h(q, z) &= \operatorname{Im} z + \eta(\operatorname{Re} z) \operatorname{Im} \varphi_1(q, z) \\ \omega_{n+1} = \partial h &= \frac{1}{2i} dz + \left(\frac{1}{2} \eta'(\operatorname{Re} z) \operatorname{Im} \varphi_1 dz + \eta(\operatorname{Re} z) \partial \operatorname{Im} \varphi_1 \right) \\ \bar{\partial} \omega_{n+1} = \bar{\partial} \partial h &= \frac{1}{4} \eta''(\operatorname{Re} z) \operatorname{Im} \varphi_1 d\bar{z} \wedge dz + \frac{1}{2} \eta'(\operatorname{Re} z) \left(\bar{\partial} \operatorname{Im} \varphi_1 \wedge dz + d\bar{z} \wedge \partial \operatorname{Im} \varphi_1 \right) \\ \partial \operatorname{Im} \varphi_1 &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz \right)\end{aligned}$$

donc,

$$dz = \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \eta' \operatorname{Im} \varphi_1 + \frac{1}{2i} \eta \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^{-1} \left(\omega_{n+1} - \frac{1}{2i} \eta \sum_{i=0}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_j} \omega_j \right).$$

Ces expressions montrent que, pour $c \geq C$, dz a des coordonnées dans la base $(\omega_0, \dots, \omega_{n+1})$ uniformément bornées sur $\mathcal{M}_{1,c}$, et dont les dérivées sont uniformément bornées sur $\mathcal{M}_{1,c}$.

Or, les $c_{j,k}^{n+1}$, d'après l'expression de $\bar{\partial} \omega_{n+1}$, sont de la forme suivante : une somme de termes (en nombre borné), chaque terme comprenant un facteur donné par φ_1 ou une dérivée d'ordre un de φ_1 , et d'autres facteurs qui sont soit des constantes, soit des dérivées de η , soit des coordonnées de dz dans la base $(\omega_0, \dots, \omega_{n+1})$.

Les estimées proposées en (iii) sont donc une conséquence directe des inégalités (36), (37), et (38). \square

b) *Obtention d'une variété de Stein.* — Soit ψ une fonction de classe C^2 sur $\mathcal{M}_{1,c}$. D'après le lemme 8, on peut écrire :

$$\partial \bar{\partial} \psi = \sum_{j,k=0}^{n+1} \psi_{j,k} \omega_j \wedge \bar{\omega}_k.$$

À cette $(1,1)$ -forme extérieure on peut associer la forme hermitienne :

$$\sum_{j,k=0}^{n+1} \psi_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \psi(\zeta, i\zeta)$$

prise sur le vecteur ζ de coordonnées $(\zeta_0, \dots, \zeta_{n+1})$ dans la base duale de $(\omega_0, \dots, \omega_{n+1})$.

Si Λ représente un paramètre réel vérifiant : $0 \leq \Lambda \leq c$, on notera, dans toute la suite de la démonstration,

$$\psi_\Lambda : \mathcal{M}_{1,c} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (q, z) \longmapsto -\log(h_\Lambda(q) - a(h(q, z))).$$

Soit $c' \geq 0$ un paramètre réel. Remarquons que :

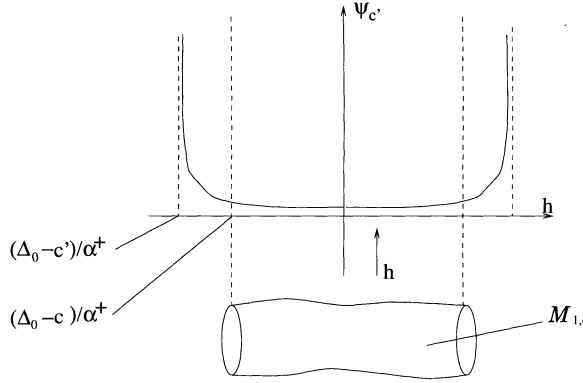
$$\partial h_{c'} = - \sum_{j=0}^n \bar{q}_j \omega_j, \quad \partial \bar{\partial} h_{c'} = - \sum_{j=0}^n \omega_j \wedge \bar{\omega}_j,$$

donc,

$$\sum_{j,k} (h_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k = - \sum_{j=0}^n |\zeta_j|^2.$$

LEMME 9. — *Il existe deux constantes C_5 et C_6 , ne dépendant que de n ($C_5 > C_3$), telles que, si c, c' vérifient : $c > C_5$ et $c \geq c' \geq 0$, alors la fonction $\psi_{c'}$ est strictement plurisousharmonique sur $\mathcal{M}_{1,c}$; plus précisément, en tout point $(q, z) \in \mathcal{M}_{1,c}$, on a :*

$$(40) \quad \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq \frac{1}{C_6} \min \left(1, \left(h_{c'}(q) - a(h(q, z)) \right)^{-2} \right) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$



REMARQUE. — Ce lemme technique sera appliqué à deux reprises : tout d'abord pour montrer que, lorsque c est assez grand, $\mathcal{M}_{1,c}$ est une variété de Stein ; on aura besoin pour cela d'une fonction plurisousharmonique et propre sur $\mathcal{M}_{1,c}$; on utilisera donc la fonction $\psi_{c'}$ avec $c' = c$. Plus loin on aura besoin au contraire d'une fonction plurisousharmonique bornée sur $\mathcal{M}_{1,c}$; on utilisera alors la fonction $\psi_{c'}$ avec $c' = 0$.

Démonstration. — On se place en un point (q, z) quelconque de $\mathcal{M}_{1,c}$ et on fixe un vecteur ζ quelconque appartenant à l'espace tangent holomorphe à $\mathcal{M}_{1,c}$ en (q, z) et de coordonnées $(\zeta_0, \dots, \zeta_{n+1})$ dans la base duale de $(\omega_0, \dots, \omega_{n+1})$; on a :

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\psi_{c'} &= \frac{1}{(h_{c'} - a(h))^2} \partial(h_{c'} - a(h)) \wedge \bar{\partial}(h_{c'} - a(h)) \\ &\quad + \frac{1}{h_{c'} - a(h)} (-\partial\bar{\partial}h_{c'} + a''(h)\partial h \wedge \bar{\partial}h) + \frac{a'(h)}{h_{c'} - a(h)} \partial\bar{\partial}h. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k &= \frac{1}{(h_{c'} - a(h))^2} |(\partial h_{c'} - a'(h)\partial h)(\zeta)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{h_{c'} - a(h)} \left(-\sum_{j,k} (h_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k + a''(h)|\partial h(\zeta)|^2 \right) + \frac{a'(h)}{h_{c'} - a(h)} \left(\sum_{j,k} h_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \right). \end{aligned}$$

Le seul terme éventuellement négatif est le troisième terme (celui qui fait intervenir $\partial\bar{\partial}h$) ; or, d'après l'estimée (iii) du lemme 8, on a :

$$(41) \quad \left| \sum_{j,k} h_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \right| \leq C\alpha^2 \exp(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+|h(q, z)|)) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$

(La fonction h est presque harmonique). Pour contrôler ce terme gênant en $\partial\bar{\partial}h$, on est alors conduit à distinguer deux cas : si $|\zeta_{n+1}|$ est grand par rapport à $|\zeta_0|, \dots, |\zeta_n|$, on domine ce terme avec ceux en $\partial(h_{c'} - a(h)) \wedge \bar{\partial}(h_{c'} - a(h))$ et en $\partial h \wedge \bar{\partial}h$; sinon, on

le domine avec le terme en $\partial\bar{\partial}h_{c'}$. Dans les deux cas, on minorera par zéro les autres termes positifs.

Premier cas : $|\zeta_{n+1}| \geq 4(n+1) \max(|\zeta_0|, \dots, |\zeta_n|)$.

Puisque $|a'(h)| + a''(h) \geq 1$, on a toujours : $|a'(h)| \geq 1/2$ ou (et) $a''(h) \geq 1/2$.

Supposons $|a'(h)| \geq 1/2$. Alors,

$$\begin{aligned} |(\partial h_{c'} - a'(h)\partial h)(\zeta)|^2 &\geq \left(\frac{1}{2}|\partial h(\zeta)| - |\partial h_{c'}(\zeta)|\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2}|\zeta_{n+1}| - \sum_{j=0}^n |\zeta_j|\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{16} |\zeta_{n+1}|^2 \\ &\geq \frac{1}{32} \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2. \end{aligned}$$

Supposons $a''(h) \geq 1/2$. Alors,

$$\begin{aligned} a''(h)|\partial h(\zeta)|^2 &\geq \frac{1}{2}|\zeta_{n+1}|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant (41),

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k &\geq \frac{1}{h_{c'} - a(h)} \left(\min\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{h_{c'} - a(h)}, \frac{1}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. - C \alpha^2 \exp(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)) \right) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2. \end{aligned}$$

Donc, pour $c' \geq C$, on a :

$$(42) \quad \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq \frac{1}{33} \min\left(\frac{1}{h_{c'} - a(h)}, \frac{1}{(h_{c'} - a(h))^2}\right) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$

Deuxième cas : $|\zeta_{n+1}| \leq 4(n+1) \max(|\zeta_0|, \dots, |\zeta_n|)$.

Alors,

$$\sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2 < (1 + 16(n+1)^2) \sum_{j=0}^n |\zeta_j|^2,$$

donc

$$-\sum_{j,k} (h_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq \frac{1}{1 + 16(n+1)^2} \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2,$$

et donc, en utilisant (41),

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k &\geq \frac{1}{h_{c'} - a(h)} \left(- \sum_{j,k} (h_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k - \sum_{j,k} h_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \right) \\ &\geq \frac{1}{h_{c'} - a(h)} \times \left(\frac{1}{(1 + 16(n+1)^2)} - C\alpha^2 \exp(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)) \right) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $c \geq C$, on a :

$$(43) \quad \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq \frac{1}{C} \frac{1}{h_{c'} - a(h)} \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$

Au vu de (42) et (43), l'estimée (40) du lemme est démontrée dans tous les cas. \square

COROLLAIRE 3. — *Pour tout $c > C_5$, $\mathcal{M}_{1,c}$ est une variété de Stein.*

Démonstration. — En tant que produit d'ouverts de \mathbf{C} , $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$ est une variété de Stein. Il existe donc une fonction χ strictement plurisousharmonique, minorée, et propre sur $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2}$. La fonction :

$$\psi : \mathcal{M}_{1,c} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (q, z) \longmapsto \psi_c(q, z) + \chi(q)$$

est alors strictement plurisousharmonique, minorée et propre sur $\mathcal{M}_{1,c}$, qui est donc une variété de Stein. \square

c) Un résultat de résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec estimées L^2 dans les variétés de Stein. — L'objet de ce paragraphe est d'introduire quelques notations et de reproduire, ipso facto, un théorème énoncé en appendice de [12]. Il s'agit d'un résultat de résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec estimées L^2 , essentiellement dû à Hörmander, et adapté par J.-C. Yoccoz et R. Pérez-Marco au cas des variétés de Stein pour lesquelles la structure complexe est suffisamment proche d'une structure plate. On ne traite, pour simplifier les notations, que le cas des fonctions, qui est le seul dont on ait besoin.

Soit \mathcal{M} une variété de Stein de dimension $n+2$, munie d'une métrique hermitienne. On suppose qu'il existe des formes $\omega_0, \dots, \omega_{n+1}$ de classe C^∞ sur \mathcal{M} , de type $(1, 0)$, formant en tout point de \mathcal{M} une base orthonormée de l'espace cotangent holomorphe à \mathcal{M} . On note $d\tau = \left(\frac{i}{2}\right)^{n+2} \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0, \dots, \omega_{n+1} \wedge \bar{\omega}_{n+1}$ l'élément de volume associé à la métrique hermitienne.

Pour une $(0, 1)$ forme $f = \sum f_i \bar{\omega}_i$, notons :

$$\|f\|^2 = \sum |f_i|^2.$$

Pour une fonction $w \in C^\infty(\mathcal{M})$, posons :

$$\begin{aligned} dw &= \partial w + \bar{\partial} w = \sum_i \partial_i w \, \omega_i + \sum_i \bar{\partial}_i w \, \bar{\omega}_i \\ \partial \bar{\partial} w &= \sum_{j,k} w_{j,k} \, \omega_j \wedge \bar{\omega}_k. \end{aligned}$$

Introduisons des fonctions $a_{j,k}^i, c_{j,k}^i \in C^\infty(\mathcal{M})$ par les formules :

$$\begin{aligned} \partial \omega_i &= \sum_{j < k} a_{j,k}^i \, \omega_j \wedge \omega_k \\ \bar{\partial} \omega_i &= \sum_{j,k} c_{j,k}^i \, \bar{\omega}_j \wedge \omega_k. \end{aligned}$$

Finalement, donnons-nous deux fonctions réelles $\theta_0, \theta_1 \in C_0(\mathcal{M})$ vérifiant :

$$\begin{aligned} |c_{j,k}^i| &\leq \theta_0 & |a_{j,k}^i| &\leq \theta_0 \\ |\partial_l c_{j,k}^i| &\leq \theta_1 & |\partial_l a_{j,k}^i| &\leq \theta_1 \\ |\bar{\partial}_l c_{j,k}^i| &\leq \theta_1 & |\bar{\partial}_l a_{j,k}^i| &\leq \theta_1. \end{aligned}$$

THÉORÈME 6 (reproduit de [12]). — *Il existe une constante A ne dépendant que de la dimension de \mathcal{M} , possédant la propriété suivante : étant données une fonction $\theta \in C_0(\mathcal{M})$ strictement positive sur \mathcal{M} , une fonction $\phi \in C^2(\mathcal{M})$ strictement plurisousharmonique sur \mathcal{M} , et une $(0,1)$ -forme f de classe C^∞ sur \mathcal{M} vérifiant :*

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \phi_{j,k} \, z_j \bar{z}_k &\geq (\theta + A(\theta_0^2 + \theta_1)) \left(\sum_{j=0}^{n+1} |z_j|^2 \right), \\ \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{\theta} \|f\|^2 e^{-\phi} d\tau &< +\infty, \quad \bar{\partial} f = 0, \end{aligned}$$

il existe $u \in C^\infty(\mathcal{M})$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \bar{\partial} u &= f, \\ \int_{\mathcal{M}} |u|^2 e^{-\phi} d\tau &\leq \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{\theta} \|f\|^2 e^{-\phi} d\tau. \end{aligned}$$

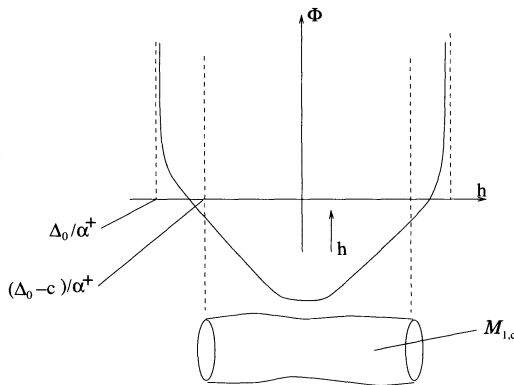
d) Application de ce résultat. — On supposera, dans toute la suite de la démonstration, que l'on a $c > C_5$; d'après le corollaire 3, $\mathcal{M}_{1,c}$ est alors une variété de Stein, et on pourra appliquer les estimées des lemmes 8 et 9.

L'objet de ce paragraphe est d'appliquer le théorème 6 à la $(0,1)$ -forme $\bar{\partial} \bar{v}$ sur la variété $\mathcal{M}_{1,c}$ munie des formes $\omega_0, \dots, \omega_{n+1}$ et de la forme volume $d\tau$ définies au paragraphe 1.4.3.a). Pour cela, il faut construire des fonctions $\theta, \theta_0, \theta_1$ et ϕ satisfaisant aux hypothèses de ce théorème.

Dans notre cas, toutes les fonctions $a_{j,k}^i$ et $c_{j,k}^i$, à l'exception de $c_{j,k}^{n+1}$, sont nulles, et on dispose sur $c_{j,k}^{n+1}$ des estimées du lemme 8, (iii). Pour tout $(q, z) \in \mathcal{M}_{1,c}$, posons :

$$\begin{aligned}\theta_0(q, z) &= \theta_1(q, z) = C_4 \alpha^2 \exp\left(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+ |h(q, z)|)\right) \\ \theta(q, z) &= \frac{1}{4} \frac{1}{C_6} \left(h_0(q) - a(h(q, z))\right)^{-2} \\ \phi(q, z) &= -\log\left(h_0(q) - a(h(q, z))\right) - 8\pi(1 - \kappa)(\Delta_0 - \alpha^+ a(h(q, z)))\end{aligned}$$

(C_4 est la constante qui intervient dans les estimées (iii) du lemme 8, C_6 est la constante qui intervient dans l'estimée (40) du lemme 9, et h_0 représente la fonction h_Λ , définie au §1.4.3, a), lorsque $\Lambda = 0$).



LEMME 10. — Il existe une constante C_7 (ne dépendant que de n), $C_7 > C_5$ telle que, si $c > C_7$, alors, en tout point de $\mathcal{M}_{1,c}$, on a :

$$\sum_{j,k} \phi_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq (\theta + A(\theta_0^2 + \theta_1)) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$

Démonstration. — Plaçons-nous en un point (q, z) quelconque de $\mathcal{M}_{1,c}$. Par définition de θ , θ_0 , et θ_1 , pour $c \geq C$, on a :

$$(44) \quad \theta + A(\theta_0^2 + \theta_1) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{C_6} (h_0 - a(h))^{-2}.$$

D'autre part, d'après (41) et l'estimée (40) du lemme 9, pour $c \geq C$, on a :

$$(45) \quad \sum_{j,k} \phi_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq \frac{1}{2} \frac{1}{C_6} (h_0 - a(h))^{-2} \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2.$$

L'inégalité du lemme se déduit immédiatement de (44) et (45). □

LEMME 11. — *Quitte à augmenter la constante C_7 , on a, pour tout $c > C_7$,*

$$\int_{\mathcal{M}_{1,c}} \frac{1}{\theta} \|\bar{\partial}\bar{v}\|^2 e^{-\phi} d\tau \leq \delta^{2n}.$$

Démonstration. — On vérifie, par définition de $\omega_0, \dots, \omega_{n+1}$, que la norme de $\bar{\partial}\bar{v}$ dans la base $(\omega_0, \dots, \omega_{n+1})$ vérifie une estimée analogue à l'estimée (39) sur la norme de $\bar{\partial}v$ dans la base (dq_0, \dots, dq_n, dz) , à savoir que, pour tout $(q, z) \in \mathcal{M}_{1,c}$, on a :

$$\|\bar{\partial}\bar{v}(q, z)\| \leq C\alpha^2\delta^n \exp(-4\pi(\Delta_0 - \alpha^+|h(q, z)|)).$$

D'où, par définition de θ et de ϕ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_{1,c}} \frac{1}{\theta} \|\bar{\partial}\bar{v}\|^2 e^{-\phi} d\tau &\leq \\ &C\delta^{2n} \int_{\mathcal{M}_{1,c}} (\Delta_0/\alpha^+ - |h(q, z)|)^3 \alpha^4 \exp(-8\pi\kappa(\Delta_0 - \alpha^+|h(q, z)|)) d\tau. \end{aligned}$$

Finalement, grâce au lemme 8 (ii),

$$\int_{\mathcal{M}_{1,c}} \frac{1}{\theta} \|\bar{\partial}\bar{v}\|^2 e^{-\phi} d\tau \leq C\delta^{2n} \int_{-(\Delta_0-c)/\alpha^+}^{(\Delta_0-c)/\alpha^+} (\Delta_0 - \alpha^+|x|)^3 \exp(-8\pi\kappa(\Delta_0/\alpha^+|x|)) \alpha dx.$$

Un changement de variable dans l'intégrale permet de conclure. \square

Puisque $\bar{\partial}\bar{v}$ est $\bar{\partial}$ -fermée, on vérifie, d'après le corollaire 3 et les deux lemmes ci-dessus, que toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème 6 à la résolution du problème $\bar{\partial}$ pour la $(0, 1)$ -forme $\bar{\partial}\bar{v}$ sur la variété \mathcal{M}_{1,C_7} . Il existe donc $u \in C^\infty(\mathcal{M}_{1,C_7})$ vérifiant :

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}\bar{v},$$

$$(46) \quad \int_{\mathcal{M}_{1,C_7}} |u|^2 e^{-\phi} d\tau \leq \delta^{2n}.$$

Pour tout $(q, z) \in \mathcal{U}_{1,C_7}$, posons :

$$\begin{aligned} K_1(q, z) &= v(q, z) - u \circ \pi_1(q, z), \\ w_1(q, z) &= K_1(q, z) - z. \end{aligned}$$

Les fonctions K_1 et w_1 sont holomorphes sur $\text{int}(\mathcal{U}_{1,C_7})$, et K_1 conserve la propriété fondamentale de v à savoir que : Pour tout $(q, z) \in \mathcal{U}_{1,C_7} \cap l_1$,

$$(47) \quad K_1(q, F_1(q, z)) = K_1(q, z) + 1.$$

1.4.4. Fin de la construction

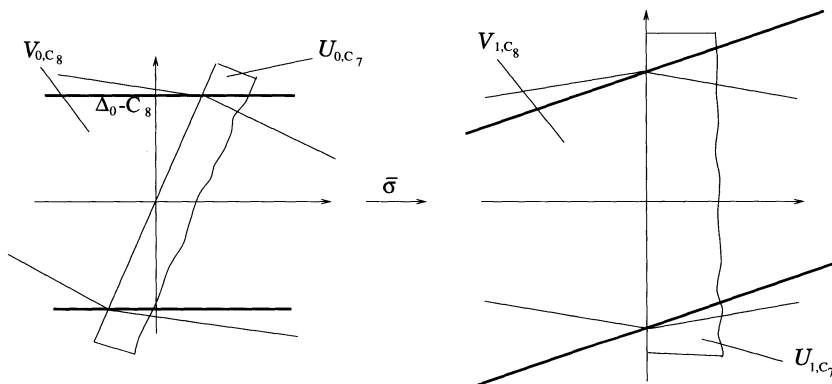
a) *Prolongement des applications uniformisantes.* — Pour tout $(p, \zeta) \in \mathcal{U}_{0, C_7}$ (rap-
pelons que $\mathcal{U}_{0, C_7} = \bar{\sigma}(\mathcal{U}_{1, C_7})$), posons :

$$K_0(p, \zeta) = K_1(\bar{\sigma}(p, \zeta)) \text{ et } w_0(p, \zeta) = K_0(p, \zeta) - \zeta/p_0.$$

Si Λ représente un paramètre réel, on notera dans la suite de la section 1.4 :

$$\mathcal{V}_{1, \Lambda} = \left\{ (q, z) \in \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \mathbf{C} \mid \right. \\ \left. |\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - \Lambda)/\alpha^+ - \kappa |\operatorname{Re} z| \text{ et } |\operatorname{Im}(\hat{a}_0(q)z)| < \Delta_0 - \Lambda \right\},$$

$$\mathcal{V}_{0, \Lambda} = \bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{V}_{1, \Lambda}).$$



LEMME 12. — *Il existe une constante C_8 ne dépendant que de n , $C_8 > C_7$, telle que K_1 (resp. K_0) se prolonge en une application \bar{K}_1 (resp. \bar{K}_0) sur \mathcal{V}_{1, C_8} (resp. \mathcal{V}_{0, C_8}) et qui vérifie, pour tout $(q, z) \in \mathcal{V}_{1, C_8}$ tel que $(q, F_1(q, z)) \in \mathcal{V}_{1, C_8}$,*

$$\bar{K}_1(q, F_1(q, z)) = \bar{K}_1(q, z) + 1$$

(resp., en posant $(p, \zeta) = \sigma^{-1}(q, z)$, $\bar{K}_0(p, F_0(p, \zeta)) = \bar{K}_0(p, \zeta) + 1$).

Démonstration. — Fixons $(q, z) \in \mathcal{V}_{1, c}$ et posons : $(p, \zeta) = \sigma^{-1}(q, z)$. D'après l'esti-
mée (36), pour $c \geq C$, on a : $|\varphi_1(q, z)| \leq \kappa/2$. Alors,

- (i) si $(q, z) \in \mathcal{V}_{1, c}$ et $\operatorname{Re}(F_1(q, z)) \leq 0$, alors $(q, F_1(q, z)) \in \mathcal{V}_{1, c}$;
- (ii) si $\operatorname{Re} z \geq 0$ et $(q, F_1(q, z)) \in \mathcal{V}_{1, c}$; alors $(q, z) \in \mathcal{V}_{1, c}$.

Posons : $F_{1, q}(z) = F_1(q, z)$. D'après les remarques ci-dessus, il existe un (unique)
 $k(p, \zeta) \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$F_{1, q}^{k(p, \zeta)}(z) \in \mathcal{U}_1 \setminus l'_1.$$

De plus, pour $c \geq C$, on a en fait :

$$F_{1, q}^{k(p, \zeta)}(z) \in \mathcal{U}_{1, C_7}.$$

Posons alors :

$$\overline{K}_1(q, z) = K_1\left(F_{1,q}^{k(p,\zeta)}(z)\right) - k(p, \zeta).$$

D'après (47), l'application \overline{K}_1 est continue sur $\mathcal{V}_{1,c}$, et holomorphe sur $\mathcal{V}_{1,c}$ privé des itérés par $F_{1,q}$ des points de l_1 , donc holomorphe sur $\mathcal{V}_{1,c}$ tout entier ; de plus, si $(q, F_1(q, z)) \in \mathcal{V}_{1,c}$, on a, par construction :

$$\overline{K}_1(q, F_1(q, z)) = \overline{K}_1(q, z) + 1.$$

On peut construire \overline{K}_0 de manière analogue, ou bien poser : $\overline{K}_0(p, \zeta) = \overline{K}_1(\sigma(p, \zeta))$ et les assertions du lemme sur \overline{K}_0 se déduisent facilement de celles sur \overline{K}_1 . Le lemme est donc démontré. \square

b) Estimées L^∞ pour les applications uniformisantes. — On veut maintenant obtenir des estimations L^∞ sur w_0 et w_1 à partir de l'estimée (46) sur la norme L^2 de u , à l'aide d'une inégalité de Cauchy. Pour cela, on est conduit à restreindre, une fois encore, les domaines dans les directions des paramètres.

Si Λ représente un paramètre réel, on notera dans la suite de la démonstration :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_{0,\Lambda} &= \mathcal{V}_{0,\Lambda} \cap (V \times D_{r-\delta} \times \mathbf{C}), \\ \tilde{\mathcal{V}}_{1,\Lambda} &= \bar{\sigma}(\tilde{\mathcal{V}}_{0,\Lambda}), \\ \tilde{\mathcal{U}}_{1,\Lambda} &= \mathcal{U}_1 \cap \left(\mathbf{D}_{1-\kappa} \times D_{1-\delta} \times \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - \Lambda)/\alpha^+\}\right), \\ \tilde{\mathcal{U}}_{0,\Lambda} &= \bar{\sigma}^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}_{1,\Lambda})\end{aligned}$$

(rappelons que $V = \mathbf{D}(\alpha, (1 - \kappa)\tau)$). D'autre part, pour $(q, z) \in \mathcal{V}_{1,C_8}$ (resp. pour $(p, \zeta) \in \mathcal{V}_{0,C_8}$), on note :

$$\overline{w}_1(q, z) = \overline{K}_1(q, z) - z \quad (\text{resp. : } \overline{w}_0(p, \zeta) = \overline{K}_0(p, \zeta) - \zeta/p_0).$$

LEMME 13. — *Posons : $C_9 = C_8 + 2$. Alors, pour tout $(q, z) \in \tilde{\mathcal{U}}_{1,C_9}$ (resp. pour tout $(p, \zeta) \in \tilde{\mathcal{U}}_{0,C_9}$), on a :*

$$\begin{aligned}|w_1(q, z)| &\leq C \exp\left(-4\pi(1 - \kappa)(\Delta_0 - \alpha^+|\operatorname{Im} z|)\right) \\ (\text{resp. } |w_0(p, \zeta)| &\leq C \exp\left(-4\pi(1 - \kappa)(\Delta_0 - (\alpha^+/\operatorname{Re} p_0)|\operatorname{Im} \zeta|)\right).\end{aligned}$$

Démonstration. — Posons :

$$\chi_1 = \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \left\{z \in \mathbf{C} \mid -1/4 < \operatorname{Re} z < 3/2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < (\Delta_0 - C_8 - 3/2)/\alpha^+\right\}.$$

On vérifie que $\chi_1 \subset \mathcal{V}_{1,C_8}$. On veut tout d'abord établir une estimée L^2 analogue à (46) pour \overline{w}_1 dans χ_1 , pour se ramener ensuite à une estimée L^∞ dans $\tilde{\mathcal{U}}_{1,C_9}$ grâce à une formule de Cauchy.

Soit $(q, z) \in \chi_1$; on vérifie que trois cas seulement peuvent se présenter :

- (i) $(q, z) \in \mathcal{U}_{1,C_8}$;
- (ii) $(q, F_1(q, z)) \in \mathcal{U}_{1,C_8}$;
- (iii) Il existe $(q, z') \in \mathcal{U}_{1,C_8}$ tel que $z = F_1(q, z')$.

On peut calculer explicitement l'expression de \bar{w}_1 dans ces trois cas. Tous les termes font intervenir φ_1 ou u . On déduit donc de l'estimée (46) sur u , de l'estimée (36) sur φ_1 , et du (ii) du lemme 8 que :

$$(48) \quad \int_{\chi_1} |\bar{w}_1(q, z)|^2 e^{-\phi} d\tau_0 < C\delta^{2n}.$$

Soit $(q, z) \in \tilde{\mathcal{U}}_{1, C_8+2}$. On vérifie par définition de χ_1 , que le polydisque ouvert de centre (q, z) et de rayons : $\kappa/2, \delta/2, \dots, \delta/2, 1/4$, respectivement dans les directions des variables q_0, q_1, \dots, q_n, z , est tout entier inclu dans χ_1 .

Une inégalité de Cauchy (voir appendice 1.6.3) appliquée à l'estimée L^2 (48) restreinte à ce polydisque montre alors que :

$$|w_1(q, z)| e^{-\phi/2} \leq C.$$

L'estimée sur $|w_1(q, z)|$ provient alors directement de la définition de ϕ , et celle sur $|w_0(p, \zeta)|$ s'en déduit immédiatement. \square

c) *Obtention de l'application K .* — Il existe une constante C_{10} telle que, pour tout $(p, \zeta) \in \tilde{\mathcal{V}}_{0, C_{10}}$, il existe un unique $k(p, \zeta) \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$(49) \quad F_{0,p}^{k(p,\zeta)}(\zeta) \in \tilde{\mathcal{U}}_{0, C_9} \setminus l'_0$$

(une assertion analogue a déjà été établie lors de la démonstration du lemme 12). Posons :

$$\mathcal{V}_{-1} = \left\{ (p, z) \in V \times D_{1-\delta} \times \mathbf{C} \mid H \text{ est définie en } (p, z) \text{ et } (p, H(p, z)) \in \tilde{\mathcal{V}}_{0, C_{10}} \right\}$$

(l'application H a été définie au §1.4.2, a)).

Si Λ représente un paramètre réel positif quelconque, on note :

$$\mathcal{W}_\Lambda = \left\{ (p, z) \in V \times D_{1-\delta} \times \mathbf{C} \mid \begin{aligned} &|\operatorname{Im} z| < (\operatorname{Re} p_0 / \alpha^+) (\Delta_0 - \Lambda) \text{ et } \operatorname{Re}(-1/p_0) < \operatorname{Re}(z/p_0) < \operatorname{Re}(1/p_0) \end{aligned} \right\}.$$

LEMME 14. — *Il existe une constante C_{11} telle que : $\mathcal{W}_{C_{11}} \subset \mathcal{V}_{-1}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de l'estimée (28) sur H . \square

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'application uniformisante K pour F . Plaçons-nous sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_{d_2+C_{11}})$; alors $\Delta_0 > C_{11}$ et $\mathcal{W}_{C_{11}}$ est non vide. Considérons l'application :

$$K : \mathcal{W}_{C_{11}} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad (p, z) \longmapsto \bar{K}_0(p, H(p, z)).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $(p, z) \in \mathcal{W}_{C_{11}}$ tel que $(p, F(p, z)) \in \mathcal{W}_{C_{11}}$, on a :

$$K(p, F(p, z)) = K(p, z) + 1.$$

LEMME 15. — Pour tout $(p, z) \in \mathcal{W}_{C_{11}}$, on a :

$$\left| K(p, z) - z/p_0 \right| \leq C\alpha^{-1} \exp \left(-2\pi \left((\operatorname{Re} p_0 / \alpha^+) \Delta_0 - |\operatorname{Im} z| \right) \right).$$

Démonstration. — Fixons $(p, z) \in \mathcal{W}_{C_{11}}$. Par définition de K , on a :

$$\left| K(p, z) - z/p_0 \right| \leq \left| \overline{K}_0(p, H(p, z)) - H(p, z)/p_0 \right| + \left| H(p, z)/p_0 - z/p_0 \right|.$$

Notons : $\zeta = H(p, z)$. Puisque $\zeta \in \tilde{\mathcal{V}}_{0, C_{10}}$, il existe, d'après (49), un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que : $(F_{0,p})^k(\zeta) \in \tilde{\mathcal{U}}_{0, C_9}$.

On déduit des estimées (29) sur φ_0 et (28) sur H que le produit $k\alpha$ est borné (par une constante de l'ordre de 1). Alors, par définition de \overline{K}_0 ,

$$\left| \overline{K}_0(p, \zeta) - \zeta/p_0 \right| \leq \left| K_0(p, (F_{0,p})^k(\zeta)) - F_{0,p}^k(\zeta)/p_0 \right| + \left| (F_{0,p}^k(\zeta) - k - \zeta)/p_0 \right|.$$

On déduit alors du lemme 13 et de l'estimée (29) sur φ_0 que :

$$\left| \overline{K}_0(p, \zeta) - \zeta/p_0 \right| \leq C \exp(-4\pi(1 - \kappa)(\Delta_0 - (\alpha^+ / \operatorname{Re} p_0) |\operatorname{Im} z|)).$$

D'autre part, d'après (28), on a :

$$\left| H(p, \zeta)/p_0 - \zeta/p_0 \right| \leq C\alpha^{-1} \exp(-2\pi(\Delta_0 - |\operatorname{Im} z|)).$$

Le lemme se déduit aisément de ces deux dernières estimées. \square

L'application uniformisante K vérifie donc bien les propriétés recherchées. Ceci termine la démonstration du lemme 6.

1.5. Construction d'applications uniformisantes (cas d'une petite hauteur de bande)

Donnons-nous quatre réels α , τ , r , et δ satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$0 < \alpha \leq 1/2, \quad 0 < \tau < \alpha/2, \quad 0 < \delta < r \leq 1,$$

un entier n , un paramètre $\varepsilon_0 > 0$, et une application analytique

$$F : \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times D_r \times \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$$

(D_r désigne le polydisque de centre 0 et de rayon r dans \mathbf{C}^n) telle que, pour tout $p = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbf{D}(\alpha, \tau) \times D_r$, l'application

$$F_{(p)} : \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}, \quad z \mapsto F(p, z)$$

appartienne à $\mathcal{D}_{p_0}^{\varepsilon_0}(\Delta)$.

Posons : $U = \mathbf{D}(\alpha, \tau)$, $V = \mathbf{D}(\alpha, (1 - \kappa)\tau)$, $\alpha^- = \alpha - \tau$ et : $\alpha^+ = \alpha + \tau$.

Donnons-nous un réel $\varepsilon_\Delta > 0$, un réel $\tilde{\alpha} > 0$ vérifiant $\alpha > \tilde{\alpha}$, et posons :

$$\mathcal{W} = V \times D_{r-\delta} \times \{z \in \mathbf{B}_{\Delta-\varepsilon_\Delta} \mid -1 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Dans toute cette section, on notera $\varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta)$ (resp. $\varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$) toute constante réelle qui ne dépend que de Δ et de ε_Δ (resp. que de $\tilde{\alpha}$, Δ , δ , ε_Δ , et n). On notera

$\varepsilon(\varepsilon_0)$ toute constante qui ne dépend que de $\varepsilon_0, \tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta$, et n , et qui converge vers 0 lorsque ε_0 converge vers 0 et que $\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta$, et n sont fixés (uniformément par rapport à α vérifiant $\alpha > \tilde{\alpha}$).

L'objectif de cette section est de démontrer le lemme suivant :

LEMME 16. — *Il existe $\varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta) > 0$ et $\varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n) > 0$ tels que, si*

$$\tau/\alpha < \varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta) \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n),$$

alors il existe une application « uniformisante » K pour F , définie et analytique sur le domaine \mathcal{W} , telle que, pour tout $(p, z) \in \mathcal{W}$, on ait :

- (i) *si $(p, F(p, z)) \in \mathcal{W}$, alors : $K(p, F(p, z)) = K(p, z) + 1$;*
- (ii) *$|K(p, z) - z/p_0| < \varepsilon(\varepsilon_0)$.*

Tout comme au cours de la section 1.4, il s'agit donc de construire une famille K d'applications uniformisantes associée à la famille F . En fait, on va tout simplement effectuer la même construction qu'au cours de la section 1.4, en l'adaptant aux hypothèses légèrement différentes du lemme ci-dessus.

La démarche générale sera donc très similaire à celle de la section 1.4. Les calculs seront plus simples, et les estimées souvent moins lourdes : en effet, on travaillera avec une famille arbitrairement proche de la famille des rotations, et toutes les estimées sur la taille des parties non linéaires des applications, sur la structure complexe de la variété de Stein, etc. seront de ce fait « gratuites » (en particulier, on n'aura pas besoin de « lemme de forme normale », comme au cours de la section 1.4, pour faire diminuer la taille des parties non linéaires). En revanche, il faudra être soigneux pour estimer les pertes dans les hauteurs de bandes : en effet, la perte totale permise n'est plus définie à une constante universelle additive près.

On renvoie au paragraphe 1.4.1 pour une description heuristique de la démonstration (aux différences près évoquées ci-dessus). On renverra également souvent, au cours de la démonstration, à la section 1.4 pour plus de détails.

1.5.1. Construction d'une variété complexe avec estimées

a) *Changement d'échelle et inégalité de Cauchy.* — Notons \hat{F} l'application $(p, z) \mapsto F(p, p_0 z)/p_0$, et posons : $F(p, z) = z + p_0 + \varphi(p, z)$ et : $\hat{F}(p, z) = z + 1 + \hat{\varphi}(p, z)$; alors, $\hat{\varphi}(p, z) = \varphi(p, p_0 z)/p_0$.

Un calcul élémentaire montre que, si $\tau/\alpha < \varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta)$, alors \hat{F} est définie sur l'ensemble :

$$U \times D_r \times \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z| < 2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - \kappa \varepsilon_\Delta)\}.$$

Clairement, pour tout (p, z) appartenant à cet ensemble, on a : $|\hat{\varphi}(p, z)| < \varepsilon_0/\alpha^-$. Considérons le difféomorphisme holomorphe :

$$\sigma : U \times D_r \longrightarrow \mathbf{D} \times D_1, \quad (p_0, p_1, \dots, p_n) \longmapsto ((p_0 - \alpha)/\tau, p_1/r, \dots, p_n/r).$$

et notons F_1 l'application : $(q, z) \mapsto \hat{F}(\sigma^{-1}(q), z)$; cette application est définie sur $\mathbf{D} \times D_1 \times \{z/|\operatorname{Re} z| < 2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - \kappa\varepsilon_\Delta)\}$; pour tout (q, z) appartenant à cet ensemble, posons : $F_1(q, z) = z + 1 + \varphi_1(q, z)$; alors, $\varphi_1(q, z) = \hat{\varphi}(\sigma^{-1}(q), z)$ et :

$$(50) \quad |\varphi_1(q, z)| < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

Des inégalités de Cauchy montrent que, pour tout

$$(q, z) \in \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \{z/|\operatorname{Re} z| < 3/2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - 2\kappa\varepsilon_\Delta)\},$$

on a :

$$(51) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dots}(q, z) \right| < \varepsilon(\varepsilon_0)$$

$$(52) \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \dots \partial \dots}(q, z) \right| < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

(voir §1.4.2, c) pour plus de détails).

b) *Construction d'une variété complexe.* — Posons :

$$l_1 = \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - 3\kappa\varepsilon_\Delta)\},$$

$$l'_1 = \{(p, F_1(p, z)) \mid (p, z) \in l_1\},$$

et définissons l''_1 comme au §1.4.2, d) (voir le dessin). Notons \mathcal{D}_1 le domaine ouvert connexe délimité par l_1, l'_1 et l''_1 , et posons : $\mathcal{U}_1 = \mathcal{D}_1 \cup l_1 \cup l'_1$. Si $\varepsilon_0 < \varepsilon''(\bar{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$, alors F_1 est définie dans un voisinage de \mathcal{U}_1 et y vérifie encore les estimées (50), (51) et (52).

Notons \mathcal{M}_1 la variété obtenue en recollant les bords de \mathcal{M}_1 par l'action de F_1 , et $\pi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$ la projection canonique.

Soit $\eta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant : $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(t) = 0$ pour $t \geq 2/3$ et $\eta(t) = 1$ pour $t \leq 1/3$, et soit $v : (p, z) \mapsto z + \eta(\operatorname{Re} z)\varphi_1(p, z)$ défini sur un voisinage de \mathcal{U}_1 . Pour tout $(p, z) \in l_1$, on a :

$$v(p, F_1(p, z)) = v(p, z) + 1,$$

et la $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}v$ sur \mathcal{U}_1 passe au quotient et définit une $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}v$ de classe C^∞ sur \mathcal{M}_1 .

On définit enfin :

$$\mathcal{U}_0 = \{(p, z) \in U \times D_r \times \mathbf{C} \mid (\sigma(p), z/p_0) \in \mathcal{U}_1\},$$

$$\mathcal{U}_0 = \{(p, z) \in U \times D_r \times \mathbf{C} \mid (\sigma(p), z/p_0) \in l_1\}.$$

c) *Estimées sur la structure complexe.* — Considérons l'application :

$$h : \mathcal{U}_1 \text{ ou } \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbf{R}, \quad (p, z) \mapsto \operatorname{Im} v(p, z).$$

En tout point de \mathcal{M}_1 , posons :

$$w_i = dp_i \quad (i = 0, \dots, n),$$

$$w_{n+1} = \bar{\partial}h.$$

et définissons comme au paragraphe 1.4.3, a) les fonctions $c_{j,k}^{n+1}$. Alors, on retrouve pour la variété \mathcal{M}_1 munie des formes w_0, \dots, w_{n+1} des propriétés analogues à celles énoncées au cours du lemme 8 ; en particulier :

$$|c_{j,k}^{n+1}| \leq \varepsilon(\varepsilon_0), \quad |\partial_\ell c_{j,k}^{n+1}| \leq \varepsilon(\varepsilon_0), \quad |\bar{\partial}_\ell c_{j,k}^{n+1}| \leq \varepsilon(\varepsilon_0).$$

1.5.2. Résolution d'un problème $\bar{\partial}$

a) *Obtention d'une variété de Stein.* — Soit $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant :

$$|x| \leq a(x) \leq |x| + \kappa \varepsilon_\Delta, \quad |a'(x)| \leq 1, \quad |a'(x)| + a''(x) \geq 1.$$

Considérons l'application :

$$\tilde{h} : \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \rightarrow \mathbf{R}, \quad p \mapsto \alpha^{-1}(\Delta - 4\kappa\varepsilon_\Delta) - \frac{\kappa\varepsilon_\Delta}{n+1} \sum_{j=0}^n |p_j|^2.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &= \{(p, z) \in \mathcal{U}_1 \mid a(h(p, z)) < \tilde{h}(p) - \kappa\varepsilon_\Delta\}, \\ \mathcal{M}_2 &= \pi_1(\mathcal{U}_2). \end{aligned}$$

On vérifie que, si $\varepsilon_0 < \varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$, alors l'adhérence de \mathcal{U}_2 dans $\mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \mathbf{C}$ est incluse dans \mathcal{U}_1 .

Pour $c' = 0$ ou $c' = \kappa\varepsilon_\Delta$, considérons l'application :

$$\psi_{c'} : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad (p, z) \mapsto -\log(\tilde{h}(p) - c' - a(h(p, z))).$$

LEMME 17. — *Pour ε_0 assez petit (c'est-à-dire $\varepsilon_0 < \varepsilon''(\tilde{\alpha}, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$), $\psi_{c'}$ est strictement plurisousharmonique sur \mathcal{M}_2 et vérifie en tout point de \mathcal{M}_2 :*

$$\begin{aligned} (53) \quad & \sum_{j,k} (\psi_{c'})_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \\ & \geq \varepsilon''(\alpha, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n) \min \left(1, (\tilde{h}(p) - c' - a(h(p, z)))^{-2} \right) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2. \end{aligned}$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 9.

COROLLAIRE 4. — *Pour ε_0 assez petit, \mathcal{M}_2 est une variété de Stein.*

La démonstration est analogue à celle du corollaire 3. Il faut utiliser la fonction $\psi_{c'}$ avec $c' = \kappa\varepsilon_\Delta$.

b) *Résolution du problème $\bar{\partial}$.* — Soit ν un paramètre réel, strictement positif à déterminer.

Posons $\theta = \theta_0 = \theta_1 = \nu$ et $\phi = \psi_0$ (c'est-à-dire la fonction $\psi_{c'}$ lorsque $c' = 0$).

D'après l'estimée (53), pour $\nu = \varepsilon''(\alpha, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$, on a, en tout point de \mathcal{M}_2 :

$$\sum_{j,k} \phi_{j,k} \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq (\theta + A(\theta_0^2 + \theta_1)) \sum_{j=0}^{n+1} |\zeta_j|^2$$

(A désigne toujours la constante, ne dépendant que de n , qui intervient dans le théorème 6). On fixe dorénavant une telle valeur pour ν .

D'autre part, puisque la fonction $e^{-\phi}$ est majorée par $\alpha^{-1}\Delta$ sur \mathcal{M}_2 , on a l'estimée :

$$\int_{\mathcal{M}_2} \frac{1}{\theta} \|\bar{\partial}\bar{v}\|^2 e^{-\phi} d\tau \leq \varepsilon(\varepsilon_0).$$

Toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer le théorème 6 à la $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}\bar{v}$ sur la variété \mathcal{M}_2 . Il existe donc $u \in C^\infty(\mathcal{M}_2)$ vérifiant :

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}\bar{v}$$

$$\int_{\mathcal{M}_2} |u|^2 e^{-\phi} d\tau < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

En tout point de \mathcal{U}_2 , posons :

$$K_1(p, z) = v(p, z) - u \circ \pi_1(p, z).$$

L'application K_1 est holomorphe sur \mathcal{U}_2 , et pour tout $(p, z) \in \ell_1 \cap \mathcal{U}_2$, on a :

$$(54) \quad K_1(p, F_1(p, z)) = K_1(p, z) + 1.$$

1.5.3. Fin de la démonstration

a) *Estimées L^∞ .* — Un calcul élémentaire montre que, si $\varepsilon_0 < \varepsilon''(\alpha, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$, alors l'ensemble : $\{(p, z) \in \mathcal{U}_1 \mid |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - 6\kappa\varepsilon_\Delta)\}$ est inclus dans \mathcal{U}_2 . Alors grâce à l'équation (54), on peut, si $\varepsilon_0 < \varepsilon''(\alpha, \Delta, \delta, \varepsilon_\Delta, n)$, prolonger l'application K_1 sur le domaine suivant :

$$\chi_1 = \mathbf{D}_{1-\kappa/2} \times D_{1-\delta/2} \times \{z \in \mathbf{C} \mid -1 < \operatorname{Re} z < 2 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \alpha^{-1}(\Delta - 7\kappa\varepsilon_\Delta)\}$$

(voir §1.4.4, a) pour plus de détails). Notons encore K_1 l'application ainsi prolongée et posons : $K_1(p, z) = z + w_1(p, z)$. On vérifie alors que :

$$\int_{\chi_1} |w_1(p, z)|^2 e^{-\phi} d\tau < \varepsilon(\varepsilon_0).$$

Posons :

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 = \mathcal{U}_1 \cap (\mathbf{D}_{1-\kappa} \times D_{1-\delta} \times \mathbf{B}_{\alpha^{-1}(\Delta - 8\kappa\varepsilon_\Delta)}).$$

Alors $\tilde{\mathcal{U}}_1$ est relativement compact dans \mathcal{U}_1 , et on déduit de l'estimée L^2 ci-dessus, grâce à une inégalité de Cauchy, que, pour tout $(p, z) \in \tilde{\mathcal{U}}_1$, on a :

$$|w_1(p, z)| \leq \varepsilon(\varepsilon_0)$$

(voir §1.4.4, b) pour plus de détails).

b) *Obtention de l'application K .* — Posons :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_0 = \mathcal{U}_0 \cap (V \times D_{r-\delta} \times \mathbf{B}_{\Delta-9\kappa\varepsilon_\Delta}).$$

On vérifie que, si $\tau/\alpha < \varepsilon'(\Delta, \varepsilon_\Delta)$, alors, pour tout $(p, z) \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$, $(\sigma(p), z/p_0) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$; pour tout $(p, z) \in \widetilde{\mathcal{U}}_0$, on pose donc : $K(p, z) = K_1(\sigma(p), z/p_0)$. Pour tout $(p, z) \in \widetilde{\mathcal{U}}_0 \cap l_0$, on a :

$$(55) \quad K(p, F(p, z)) = K(p, z) + 1.$$

Posons :

$$\mathcal{W} = V \times D_{r-\delta} \times \{z \in \mathbf{C} \mid -1 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \Delta - 10\kappa\varepsilon_\Delta\}.$$

On vérifie que, si grâce à l'équation (55), prolonger K en une application holomorphe sur \mathcal{W} (notée encore K) et qui vérifie, pour tout point (p, z) de \mathcal{W} ,

$$|K(p, z) - z/p_0| \leq \varepsilon(\varepsilon_0).$$

Puisque $\Delta - 10\kappa\varepsilon_\Delta > \Delta - \varepsilon_\Delta$, le lemme 16 est donc démontré.

1.6. Appendices

1.6.1. Un lemme de forme normale. — Soient $\Delta > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, et $F \in \mathcal{D}_\lambda^1(\Delta)$. Supposons que λ vérifie : $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1 - \kappa$ et : $|\operatorname{Im} \lambda| < 1/\kappa$, et posons :

$$F(z) = z + \lambda + \varphi(z).$$

L'objet de cet appendice est de démontrer le lemme de forme normale suivant :

LEMME 18. — *Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, il existe une (grande) constante positive d_m , qui ne dépend que de m , telle que, si Δ vérifie :*

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1} + d_m$$

(posons : $\Delta_m = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1} - d_m$), alors il existe une application $F_m \in \mathcal{D}^1(\Delta_m)$, satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (i) Notons λ_m le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto F_m(z) - z$, et posons, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$, $F_m(z) = z + \lambda_m + \varphi_m(z)$. Alors,

$$|\lambda_m - \lambda| \leq |\lambda| \exp(-4\pi\Delta_m),$$

et pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$,

$$|\varphi_m(z)| \leq |\lambda|^{m+1} \exp(-4\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

- (ii) Les applications F_m et F sont conjuguées. Plus précisément, il existe une application $H_m \in \mathcal{S}(\Delta_m)$ telle que :

(a) pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$,

$$|H_m(z) - z| \leq \exp\left(-2\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)\right);$$

(b) pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$ tel que $F(z) \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$,

$$F_m \circ H_m(z) = H_m \circ F(z).$$

De plus, si $F \in D^\omega(T^1)$, alors $H_m \in D^\omega(T^1)$ et $F_m \in D^\omega(T^1)$. Enfin, la dépendance de la conjugaison H_m (et donc de F_m) par rapport à λ et aux coefficients du développement en série de Fourier de φ est analytique.

Démonstration. — Nous aurons besoin, au cours de la démonstration, d'introduire des constantes universelles ou ne dépendant que de m . De manière à alléger les notations, ces constantes seront toutes notées : C .

Soit c un paramètre réel positif. On fait l'hypothèse :

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1} + c,$$

et on cherche à déterminer une valeur de c suffisamment grande pour que, sous cette hypothèse, les conclusions du lemme soient satisfaites. Posons : $\Delta' = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1}$.

Nous allons démontrer le lemme en deux étapes. Tout d'abord, dans le cas particulier : $m = 1$, puis, dans le cas général, en raisonnant par récurrence sur m .

1) *Démonstration dans le cas : $m = 1$.* — Posons $\mu = E(\lambda)$ (E désigne l'application : $z \mapsto \exp(2i\pi z)$). D'après les hypothèse sur λ ,

$$C^{-1}|\lambda| \leq |1 - \mu| \leq C|\lambda|.$$

Posons :

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} a_k e^{2i\pi k z} = a_1 e^{2i\pi z} + a_{-1} e^{-2i\pi z} + \Delta \varphi(z).$$

Une estimée de Cauchy montre que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$,

$$(56) \quad |a_k| \leq \exp(-2\pi|k|\Delta),$$

donc, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-1}$,

$$(57) \quad |\Delta \varphi(z)| \leq 4 \exp\left(-4\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|)\right).$$

Pour $\delta > 0$, notons : $\mathcal{A}_\delta = E(\mathbf{B}_\delta)$, et notons f l'application :

$$\mathcal{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}^*, \quad u \mapsto E \circ F \circ E^{-1}(u).$$

Considérons, pour $u \in \mathcal{A}_\Delta$, les fonctions $\Delta f(u)$ et $\tilde{\Delta} f(u)$ définies par :

$$f(u) = \mu u (1 + 2i\pi a_1 u + 2i\pi a_{-1} u^{-1} + \Delta f(u)) = \mu u \left(\frac{1 + 2i\pi a_{-1} u^{-1}}{1 - 2i\pi a_1 u} + \tilde{\Delta} f(u) \right).$$

Soit $u \in \mathcal{A}_\Delta$ quelconque, et soit $z \in \mathbf{C}$ tel que : $E(z) = u$. Alors, d'après (56) et (57), Δf et $\widetilde{\Delta f}$ vérifient :

$$(58) \quad \begin{aligned} |\Delta f(u)| &\leq C \exp(-4\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|)) \\ |\widetilde{\Delta f}(u)| &\leq C \exp(-4\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|)). \end{aligned}$$

Notons f_0 la transformation de Möbius :

$$u \mapsto \mu u \frac{1 + 2i\pi a_{-1} u^{-1}}{1 - 2i\pi a_1 u}.$$

Supposons : $c > C$. Alors, d'après l'hypothèse faite plus haut sur Δ , f_0 admet deux points fixes, l'un proche de 0 (notons-le x_0) et l'autre proche de ∞ (notons-le x_∞). De plus, les formules explicites qui donnent ces points fixes montrent que :

$$(59) \quad |x_0| < C|\lambda|^{-1} \exp(-2\pi\Delta),$$

$$(60) \quad |x_\infty|^{-1} < C|\lambda|^{-1} \exp(-2\pi\Delta),$$

et aussi que, si $a_1 = \overline{a_{-1}}$, alors $x_\infty = (\overline{x_0})^{-1}$.

Notons M la transformation de Möbius :

$$z \mapsto \frac{z - x_0}{1 - \frac{z}{x_0}}.$$

Alors l'application $M \circ f_0 \circ M^{-1}$ est une homothétie ; notons ν son coefficient. Un calcul simple montre que :

$$\nu = \mu \frac{1 + \frac{x_0}{\mu}}{1 + \mu \frac{x_0}{x_\infty}}.$$

On en déduit que :

$$(61) \quad |\nu - \mu| < C|\lambda|^{-1} \exp(-4\pi\Delta)$$

et aussi que, si $a_1 = \overline{a_{-1}}$, et si $|\mu| = 1$, alors $|\nu| = 1$.

D'après les estimées (59), (60), et (61), pour tout $u \in \mathcal{A}_{\Delta' - C}$ (en notant z un point de \mathbf{C} tel que $E(z) = u$), on a les estimées suivantes :

$$(62) \quad |u|/2 < |M(u)| < 2|u|$$

$$(63) \quad |M(u)/u - 1| < C \exp(-2\pi(\Delta' - |\operatorname{Im} z|))$$

$$(64) \quad 1/2 < |M'(u)| < 2.$$

Soit $H_1 : \mathbf{B}_{\Delta' - C} \rightarrow \mathbf{C}$ un relevé de M par le revêtement E . Posons : $H_1(z) = z + h_1(z)$. On déduit alors de (63) que l'on peut choisir le relevé H_1 de manière à avoir, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta' - C}$,

$$(65) \quad |h_1(z)| < C \exp(-2\pi(\Delta' - |\operatorname{Im} z|)).$$

Soit $f_1 : M(\mathcal{A}_\Delta) \rightarrow \mathbf{C}$, $v \mapsto M \circ f \circ M^{-1}(v)$. On a :

$$f_1(v) - \nu v = M \circ f \circ M^{-1}(v) - M \circ f_0 \circ M^{-1}(v).$$

On déduit alors de (58), (62), et (64) que, pour tout $v \in \mathcal{A}_{\Delta'-C}$ (en notant z un point de \mathbf{C} tel que : $E(z) = v$),

$$(66) \quad |f_1(v) - \nu v| < C|v| \exp(-4\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|)).$$

Notons F_1 l'application : $\mathbf{B}_{\Delta'-C} \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto H_1 \circ F \circ H_1^{-1}(z)$. Pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta'-C}$, on a :

$$E \circ F_1(z) = f_1 \circ E(z).$$

Notons λ_1 le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto F_1(z) - z$, et posons : $F_1(z) = z + \lambda_1 + \varphi_1(z)$. Alors on déduit de (61) et (66) que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta'-C}$,

$$|\varphi_1(z)| < C \exp(-4\pi(\Delta - |\operatorname{Im} z|))$$

et que :

$$(67) \quad |\lambda_1 - \lambda| < C|\lambda|^{-1} \exp(-4\pi\Delta).$$

On déduit de (65), (66), et (67) toutes les estimées du lemme dans le cas : $m = 1$. De plus, si $F \in D^\omega(T^1)$, alors $\lambda \in \mathbf{R}$ et $a_{-1} = \overline{a_1}$, donc $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ et $x_\infty = (\overline{x_0})^{-1}$, ce qui montre que H_1 , et donc F_1 , appartiennent également à $D^\omega(T^1)$. Enfin, puisque M dépend analytiquement de λ , a_1 , et a_{-1} , il en est de même pour H_1 . Ceci termine la démonstration du cas $m = 1$.

2) *Démonstration dans le cas $m > 1$.* — Supposons que le lemme soit vérifié pour un certain entier $m \geq 1$, et montrons qu'il est encore vrai pour $m + 1$. On fait toujours l'hypothèse que :

$$\Delta > \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1} + c$$

où c est un paramètre réel strictement positif, et on cherche à déterminer une valeur de c suffisamment grande pour que, sous cette hypothèse, les conclusions du lemme soient vérifiées.

Supposons : $c > d_m$ (notons : $\Delta_m = \Delta - \frac{1}{2\pi} \log |\lambda|^{-1} - d_m$). On peut alors appliquer le lemme pour l'entier m : il existe une application $F_m \in \mathcal{D}(\Delta_m)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. Notons λ_m le terme constant du développement en série de Fourier de F_m , et posons : $F_m(z) = z + \lambda_m + \varphi_m(z)$. Alors,

$$(68) \quad |\lambda - \lambda_m| < |\lambda| \exp(-4\pi\Delta_m)$$

et, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$,

$$(69) \quad |\varphi_m(z)| \leq |\lambda|^{m+1} \exp(-4\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

2. Les applications F_m et F sont conjuguées par une application univalente $H_m : \mathbf{B}_{\Delta_m} \rightarrow \mathbf{C}$ qui vérifie, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$,

$$(70) \quad |H_m(z) - z| < \exp(-2\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

On cherche un difféomorphisme G_m dont on veut qu'il conjugue F_m à une fonction F_{m+1} plus proche que F_m de sa partie linéaire, c'est-à-dire que l'on cherche à obtenir une formule du type :

$$G_m(F_m(z)) = G_m(z) + \lambda_m + \dots$$

Cherchons G_m sous la forme : $G_m(z) = z + \Delta G_m(z)$; l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\Delta G_m(F_m(z)) - \Delta G_m(z) = -\varphi_m(z) + \dots$$

On est donc conduit à choisir pour ΔG_m une fonction dont la dérivée est proche de : $z \mapsto -\varphi_m(z)/(F_m(z) - z)$. Définissons ΔG_m comme la primitive s'annulant en zéro de la fonction : $z \mapsto -\varphi_m(z)/\lambda_m$, dans \mathbf{B}_{Δ_m} . Puisque $\int_x^{x+1} \varphi_m(t)dt = 0$, ΔG_m est \mathbf{Z} -périodique. Donc, l'application : $G_m : z \mapsto z + \Delta G_m(z)$ appartient à $\mathcal{D}(\Delta_m)$.

Pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m}$, on a, d'après (69),

$$(71) \quad |\Delta G_m(z)| < C|\lambda|^m \exp(-4\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

On peut alors définir une application $F_{m+1} \in \mathcal{D}(\Delta_m - C)$ en posant :

$$F_{m+1}(z) = G_m \circ F_m \circ G_m^{-1}(z).$$

Soit $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m - C}$ quelconque ; posons $y = G_m^{-1}(z)$. Alors,

$$\begin{aligned} |F_{m+1}(z) - z - \lambda_m| &= |G_m \circ F_m(y) - G_m(y) - \lambda_m| \\ &= |\varphi_m(y) + \Delta G_m(F_m(y)) - \Delta G_m(y)| \\ &\leq \int_0^1 |\Delta G'_m(y + t(F_m(y) - y))(F_m(y) - y) + \varphi_m(y)| dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda_m} \varphi_m(y + t(F_m(y) - y))(\lambda_m + \varphi_m(y)) - \varphi_m(y) \right| dt \\ &\leq \int_0^1 |\varphi_m(y + t(F_m(y) - y)) - \varphi_m(y)| dt \\ &\quad + \left| \frac{\varphi_m(y)}{\lambda_m} \right| \int_0^1 |\varphi_m(y + t(F_m(y) - y))| dt. \end{aligned}$$

Or, on déduit immédiatement de (69), grâce à une formule de Cauchy, que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m - 1}$,

$$|\varphi'_m(z)| < |\lambda|^{m+1} \exp(-4\pi(\Delta_m - 1 - |\operatorname{Im} z|)).$$

On déduit de (68), de (69), de cette dernière inégalité, et du fait que $m \geq 1$, que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m - C}$,

$$|F_{m+1}(z) - z - \lambda_m| < C|\lambda|^{m+2} \exp(-4\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

Notons λ_{m+1} le terme constant du développement en série de Fourier de l'application : $z \mapsto F_{m+1}(z) - z$ et posons : $F_{m+1}(z) = z + \lambda_{m+1} + \varphi_{m+1}(z)$. Alors on déduit de (68) et de l'inégalité ci-dessus que :

$$(72) \quad |\lambda_{m+1} - \lambda| < C|\lambda| \exp(-4\pi\Delta_m),$$

et que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta_m - C}$,

$$(73) \quad |\varphi_{m+1}(z)| < C|\lambda|^{m+2} \exp(-4\pi(\Delta_m - |\operatorname{Im} z|)).$$

Posons finalement : $H_{m+1} = G_m \circ H_m$. On déduit de (70), (71), (72), et (73) toutes les estimées du lemme pour l'entier $m+1$. On vérifie aussi que, si H_m et F_m appartiennent à $D^\omega(T^1)$, alors il en est de même pour G_m , donc également pour H_{m+1} et pour F_{m+1} . Enfin, par définition de ΔG_m , la dépendance de G_m (et donc de H_{m+1} et F_{m+1}) par rapport à F_m où à F est analytique. Ceci termine la démonstration. \square

1.6.2. Dépendance analytique des applications conjuguantes. — L'objet de cet appendice est de montrer que, à toute famille analytique d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ conjuguées à une translation T_α fixée, on peut associer une famille analytique d'applications conjuguantes (ceci complète les démonstrations des théorèmes 1 et 5 en justifiant la dépendance analytique des applications conjuguantes).

Donnons-nous deux réels Δ et Δ_0 vérifiant : $\Delta > \Delta_0 > 0$, W un ouvert de \mathbf{C}^n , et $(F_p)_{p \in W}$ une famille analytique d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$. Donnons-nous $\alpha \in \mathbf{R}$, et supposons que, pour tout $p \in W$, F_p soit analytiquement conjuguée à la translation T_α sur un ouvert connexe, simplement connexe, \mathbf{Z} -périodique, contenant \mathbf{B}_{Δ_0} .

Pour tout $p \in W$, notons \mathcal{A}_p l'ouvert connexe, simplement connexe, \mathbf{Z} -périodique, contenant \mathbf{B}_{Δ_0} , invariant par F_p , et maximal pour ces propriétés. Posons : $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in W} \{p\} \times \mathcal{A}_p$.

REMARQUE. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}$, \mathcal{A} est ouvert ; si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, \mathcal{A} n'est en général pas ouvert (si $\alpha \in \mathbf{B}$, il découle de l'ensemble des résultats de ce travail que \mathcal{A} est ouvert, mais nous n'allons pas utiliser ce fait ici) ; on vérifie néanmoins que si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, pour tout $p \in W$, l'ensemble $\mathcal{A}'_p = \{z \in \mathcal{A}_p \mid (p, z) \in \operatorname{int} \mathcal{A}\}$ est ouvert, connexe, simplement connexe, \mathbf{Z} -périodique, et invariant par F_p .

Pour $(p, z) \in \mathcal{A}$ et $m \in \mathbf{N}$, posons :

$$\begin{aligned} h_m(p, z) &= 1/m \sum_{k=0}^{m-1} (F_p^k(z) - k\alpha - z) \\ H_{m,p}(z) &= z + h_m(p, z). \end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$(74) \quad H_{m,p}(F_p(z)) = H_{m,p}(z) + (F_p^m(z) - z)/m.$$

La propriété de conjugaison montre que les applications h_m sont uniformément bornées sur tout compact de $\operatorname{int} \mathcal{A}$, elles forment donc une famille normale sur $\operatorname{int} \mathcal{A}$; la

suite $(h_m)_{m \in \mathbf{N}}$ admet donc (au moins) une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\text{int}\mathcal{A}$; notons h_∞ une telle valeur d'adhérence (c'est une fonction analytique sur $\text{int}\mathcal{A}$), et posons : $H_{\infty,p}(z) = z + h_\infty(p, z)$. Alors, d'après 74, pour tout $(p, z) \in \text{int}\mathcal{A}$, on a :

$$H_{\infty,p}(F_p(z)) = H_{\infty,p}(z) + \alpha.$$

La famille $(H_{\infty,p})_{p \in W}$ est donc une famille analytique d'applications conjuguantes associée à la famille $(F_p)_{p \in W}$.

1.6.3. Estimées de fonctions analytiques. — Les trois lemmes suivants sont classiques.

LEMME 19. — *Pour tout $\Delta > 0$, l'ensemble $\mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\Delta)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de \mathbf{B}_Δ .*

Démonstration. — Donnons-nous $F \in \mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\Delta)$ et $\rho > 0$ quelconque satisfaisant $\rho < 1$ et $\rho < \Delta$; soit $z_0 \in \mathbf{C}$ satisfaisant : $|\text{Im } z_0| = \Delta - \rho$. Alors $\mathbf{D}(z_0, \rho) \subset \mathbf{B}_\Delta$. Posons : $G(z) = F(z_0 + \rho z)$ et $H(z) = (G(z) - F(z_0))/(\rho F'(z_0))$; alors les applications G et H sont définies et injectives sur \mathbf{D} , et H vérifie : $H(0) = 0$ et $H'(0) = 1$. D'après le théorème du 1/4 de Koebe (voir par exemple [5], théorème 1.3), $H(\mathbf{D}) \supset \mathbf{D}(0, 1/4)$ et donc $G(\mathbf{D}) \supset \mathbf{D}(F(z_0), |\rho F'(z_0)|/4)$; enfin, puisque $\rho < 1$ et que F est injective sur \mathbf{B}_Δ , on a : $F(z_0 + 1) = F(z_0) + 1 \notin G(\mathbf{D})$, et finalement : $|F'(z_0)| \leq 4/\rho$.

On en déduit par le principe du maximum que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\rho}$, $|F'(z)| \leq 4/\rho$. Posons : $\varphi(z) = F(z) - z$; alors, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\rho}$, $|\varphi'(z)| \leq 1 + 4\rho$, et puisque $\int_z^{z+1} \varphi(t) dt = 0$ (en effet $F \in \mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\Delta)$), ceci entraîne que, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\rho}$, $|\varphi(z)| \leq (1 + 4/\rho)/2$.

L'ensemble des fonctions φ définies par : $\varphi(z) = F(z) - z$ forme donc, lorsque F parcourt $\mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\Delta)$, une famille bornée et équicontinue sur tout compact de \mathbf{B}_Δ . On en déduit que, de toute suite $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\Delta)$, on peut, par extraction diagonale, extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de \mathbf{B}_Δ ; la limite est holomorphe, et, par un argument classique, soit injective, soit constante; dans notre cas, cette limite ne peut être constante car les F_n commutent aux translations entières, ce qui termine la démonstration. \square

LEMME 20. — *Donnons-nous $\Delta > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, et $F \in \mathcal{D}_\lambda(\Delta)$. Posons : $F(z) = z + \lambda + \varphi(z)$.*

1) *Si $\sup_{z \in \mathbf{B}_\Delta} |\varphi(z)| < M$ ($M > 0$), alors, pour tout δ vérifiant : $\Delta > \delta > 0$, et pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\delta}$,*

$$|\varphi(z)| < 2M(1 - e^{-2\pi\delta})^{-1}e^{-2\pi(\Delta - |\text{Im } z|)}.$$

2) *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que, si F est univalente (injective) dans \mathbf{B}_Δ , alors, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta-1}$,*

$$|\varphi(z)| < Ce^{-2\pi(\Delta - |\text{Im } z|)}.$$

Démonstration. — L'assertion 1) provient directement d'une majoration des coefficients du développement en série de Fourier de φ . L'assertion 2 est une conséquence immédiate de l'assertion 1 et du lemme précédent. \square

LEMME 21. — Soit $D = \prod_{i=0}^n D(0, r_i)$ le polydisque de centre 0 et de rayons r_i dans \mathbf{C}^n . Soit ψ une fonction holomorphe sur D , de carré sommable sur D . Alors il existe une constante universelle C telle que :

$$|\psi(0)| \leq \frac{C}{\prod_{i=0}^n r_i} \left(\int_D |\psi|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Ce résultat découle directement d'une formule de Cauchy.

CHAPITRE 2

COMPLEXIFICATION ET RÉGULARITÉ TRANSVERSE

L'objectif de cette partie est, en partant du théorème 2, de démontrer le théorème 4. Cette démonstration occupe les sections 2.2 et 2.3, la section 2.1 étant consacrée à la définition et à quelques propriétés du nombre de rotation complexe.

2.1. Nombre de rotation complexe et propriétés

Donnons-nous une application $F \in \mathcal{D}(\Delta)$, et notons f l'application : $\mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ dont F est un relevé par la projection $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

DÉFINITION. — On appellera *courbe ascendante pour f* toute courbe de Jordan J , séparant les deux bouts de \mathbf{C}/\mathbf{Z} , telle que f soit injective au voisinage de J , et telle que l'image de J par f soit disjointe de J et située au-dessus de J . On appellera *courbe ascendante relevée pour F* toute courbe \mathcal{C} \mathbf{Z} -périodique incluse dans \mathbf{B}_Δ telle que $\pi(\mathcal{C})$ soit une courbe ascendante pour f . On définit de la même manière les notions de *courbe descendante pour f* et de *courbe descendante relevée pour F* .

La propriété d'admettre une courbe ascendante (ou descendante) relevée est bien sûr ouverte dans $\mathcal{D}(\Delta)$ (par exemple pour la topologie de la convergence uniforme sur \mathbf{B}_Δ).

Supposons que F admette une courbe ascendante relevée \mathcal{C} (tout ce qui suit se transpose de manière évidente au cas d'une courbe descendante). Notons U le domaine ouvert compris entre \mathcal{C} et $F(\mathcal{C})$. On peut recoller les deux bords de l'anneau $\pi(U)$ en identifiant chaque point de $\pi(\mathcal{C})$ avec son image par f . La variété obtenue est un tore complexe, que l'on note \mathcal{T} . Tout point de $\text{adh } U$ se projette naturellement sur \mathcal{T} ; notons $p : \text{adh } U \rightarrow \mathcal{T}$ cette projection.

Soit $z \in \mathcal{C}$, γ_1 et γ_2 deux lacets dans $\text{adh } U$ qui relient z respectivement à $z + 1$ et à $F(z)$. Notons : $\mu_1 = p \circ \gamma_1$ et $\mu_2 = p \circ \gamma_2$; μ_1 et μ_2 définissent un système de deux générateurs du groupe fondamental de \mathcal{T} .

Soit ω une 1-forme holomorphe sur \mathcal{T} (unique à un coefficient multiplicatif complexe près) ; posons :

$$\tau = \frac{\int_{\mu_2} \omega}{\int_{\mu_1} \omega}.$$

Il s'agit d'un relevé dans \mathbf{C} du module du tore \mathcal{T} , qui est défini modulo $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ (remarquons que la partie imaginaire de τ est strictement positive). C'est ce nombre τ que nous appellerons nombre de rotation complexe. Soit ψ un difféomorphisme holomorphe entre \mathcal{T} et $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$, et Ψ un relevé de ψ par la projection p . Ce relevé définit une application univalente sur U et continue sur $\mathrm{adh} U$ (cette application est définie de manière unique modulo composition à droite par une translation de \mathbf{C} , et on peut la normaliser pour la définir de manière vraiment unique). Par définition de τ , pour tout $z \in \mathcal{C}$, on a :

$$\Psi \circ F(z) = \Psi(z) + \tau.$$

Cette équation fonctionnelle permet de prolonger Ψ en une application univalente sur un voisinage de $\mathrm{adh} U$.

PROPOSITION 2. — *Le nombre complexe τ et l'application conjuguante Ψ dépendent analytiquement de F .*

Démonstration. — Supposons que F soit plongée dans une famille $(F_\lambda)_{\lambda \in V}$ d'applications de $\mathcal{D}(\Delta)$ dépendant analytiquement du paramètre λ , V étant un voisinage de 0 dans \mathbf{C} , avec $F_0 = F$. Quitte à restreindre V autour de 0, on peut supposer que, pour tout $\lambda \in V$, la courbe \mathcal{C} est encore une courbe ascendante relevée pour F_λ ; on note τ_λ le nombre complexe et Ψ_λ l'application conjuguante construits à partir de F_λ comme précédemment ; quitte à restreindre encore V , on peut supposer qu'il existe un voisinage U_1 (\mathbf{Z} -périodique) de $\mathrm{adh} U$ dans \mathbf{C} tel que, pour tout $\lambda \in V$, d'une part on ait : $F_\lambda(\mathcal{C}) \subset U_1$, et d'autre part l'application Ψ_λ se prolonge en une application univalente (encore notée Ψ_λ) sur U_1 .

Considérons le quotient obtenu à partir de l'ensemble $V \times U_1$ en identifiant d'une part les points (λ, z) et $(\lambda, z + 1)$, et d'autre part les points (λ, z) et $(\lambda, F_\lambda(z))$; il s'agit d'une variété complexe, que l'on note X , fibrée en tores au-dessus de V . Soit $p : X \rightarrow V$ la projection canonique ; cette application est une submersion analytique propre. Notons $\mathcal{T}_0 = p^{-1}(\{0\})$ le tore au-dessus de 0. D'après un résultat de J.H. Hubbard ([9], prop.6 p.16), X admet au voisinage de $\lambda = 0$ une trivialisatıon locale horizontalement analytique. Ceci signifie que, quitte à restreindre à nouveau l'ouvert V autour de 0, un difféomorphisme $\phi : V \times \mathcal{T}_0 \rightarrow X$ de classe C^1 (ou même $C^r, r \geq 1$, si on veut) qui preserve les fibres au-dessus de V , qui vaut l'identité sur la fibre au-dessus de 0, et qui est analytique par rapport à la variable base, c'est-à-dire que, pour tout $z_0 \in \mathcal{T}_0$, l'application : $V \rightarrow X, \lambda \mapsto \phi(\lambda, z)$ est analytique.

Posons : $\eta = \phi^{-1}$, et considérons un relevé $\hat{\eta} : V \times U_1 \rightarrow V \times \mathbf{C}$ de η . Pour $\lambda \in V$, notons $\hat{\eta}_\lambda$ l'application : $U_1 \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto p_2(\hat{\eta}(\lambda, z))$ (où p_2 désigne la projection sur la

deuxième coordonnée), et posons : $\hat{\phi}_\lambda = \hat{\eta}_\lambda^{-1}$. Pour tout $z \in \hat{\eta}_\lambda(U_1)$, posons :

$$\mu_\lambda(z) = \left(\frac{\partial \hat{\phi}_\lambda}{\partial \bar{z}} \middle/ \frac{\partial \hat{\phi}_\lambda}{\partial z} \right)(z).$$

L'équation fonctionnelle :

$$\hat{\phi}_\lambda(z + \tau_0) = F_\lambda(\hat{\phi}_\lambda(z))$$

montre que l'application μ_λ se prolonge, par invariance par la translation $z \mapsto z + \tau_0$ en une application continue sur \mathbf{C} , qui vérifie : $\mu_\lambda(z + 1) = \mu_\lambda(z)$ et $\mu_\lambda(z + \tau_0) = \mu_\lambda(z)$; de plus, $\|\mu_\lambda\|_{L^\infty} < 1$, et μ_λ dépend analytiquement de λ .

Soit g_λ l'homéomorphisme $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}$ qui résout l'équation de Beltrami d'excentricité μ_λ , et qui fixe 0, 1, et l'infini. Ahlfors et Bers (voir [1]) ont démontré que g_λ dépend analytiquement de μ_λ , c'est-à-dire de λ . L'application : $z \mapsto g_\lambda(g_\lambda^{-1}(z) + 1)$ définit un difféomorphisme holomorphe de \mathbf{C} sans point fixe, c'est-à-dire une translation. Puisque 0 et 1 sont laissés fixes par g_λ , il s'agit de la translation : $z \mapsto z + 1$. De même, $z \mapsto g_\lambda(g_\lambda^{-1}(z) + \tau_0)$ définit une translation, dont on note $\rho(\lambda)$ le vecteur.

Pour tout $\lambda \in V$, l'application $g_\lambda \circ \hat{\eta}_\lambda : U_1 \rightarrow \mathbf{C}$ est univalente et commute aux translations entières. De plus, pour tout $z \in \mathcal{C}$, on a : $F_\lambda(z) \in U_1$, et :

$$g_\lambda \circ \hat{\eta}_\lambda(F_\lambda(z)) = g_\lambda \circ \hat{\eta}_\lambda(z) + \rho(\lambda).$$

On en déduit que $\tau_\lambda = \rho(\lambda)$ et que l'application conjugante Ψ_λ coïncide (à composition à droite par une translation près) avec $g_\lambda \circ \hat{\eta}_\lambda$. Pour finir, on vérifie par le calcul que le vecteur $\rho(\lambda) = g_\lambda(g_\lambda^{-1}(z) + \tau_0) - z$ et que l'application $g_\lambda \circ \hat{\eta}_\lambda$ dépendent analytiquement de λ . \square

REMARQUE. — La même démonstration montre que, lorsque la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{D}}$ ci-dessus varie continûment ou différenciablement avec le paramètre λ , le nombre de rotation complexe τ_λ varie avec la même régularité par rapport à λ (on utilise encore le résultat d'Ahlfors et Bers, relatif à la dépendance continue ou différenciable de la solution de l'équation de Beltrami par rapport à l'excentricité, voir [1]).

Je remercie Adrien Douady qui m'a suggéré l'idée principale de cette démonstration.

2.2. Extension complexe du théorème de linéarisation

Nous allons maintenant démontrer le théorème 4. Fixons pour toute la suite de cette partie $s \in \Sigma$, et $\Delta > \delta > 0$ quelconques.

2.2.1. Extension complexe. — D'après le théorème 2 appliqué à s , Δ , et $\kappa\delta$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(s, \Delta, \delta)$ et une application :

$$\mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon_0}(\Delta) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\kappa\delta, \text{inj}}(\Delta - \kappa\delta), \quad (\alpha, F) \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)}),$$

telle que, pour tout $(\alpha, F) \in \mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon_0}(\Delta)$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\lambda(\alpha, F) + F(h_{(\alpha, F)}(z)) = h_{(\alpha, F)}(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \kappa\delta}.$$

De plus, pour $\alpha \in \mathcal{B}_s$ fixé, l'application $F \mapsto (\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$ est analytique.

Ceci montre que, quitte à diminuer ε_0 , on peut obtenir des estimées arbitraires sur la proximité à l'identité des applications $h_{(\alpha, F)}$ (qui sont définies de manière unique), sur une bande de demi-hauteur arbitrairement proche de Δ . En particulier, il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(s, \Delta, \delta) < \varepsilon_0(s, \Delta, \delta)$ tel que, pour tout $(\alpha, F) \in \mathcal{B}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon_1}(\Delta)$, l'application définie ci-dessus vérifie :

$$(75) \quad \|Dh_{(\alpha, F)} - 1\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta - \kappa\delta})} < \kappa^2.$$

Donnons-nous $F \in \mathcal{D}_0^{\varepsilon_1}(\Delta)$, considérons la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$ définie par :

$$F_\lambda(z) = \lambda + F(z).$$

et posons :

$$\begin{aligned} \Lambda_s(F) &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}_s} \{\lambda(\alpha, F)\} \\ \Lambda_{s, \uparrow}(F) &= \bigcup_{\lambda_0 \in \Lambda_s(F)} \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(\lambda - \lambda_0) > \kappa/3 \mid \operatorname{Re}(\lambda - \lambda_0) \mid\} \\ \Lambda_{s, \downarrow}(F) &= \bigcup_{\lambda_0 \in \Lambda_s(F)} \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(\lambda - \lambda_0) < -\kappa/3 \mid \operatorname{Re}(\lambda - \lambda_0) \mid\}. \end{aligned}$$

Donnons-nous $\lambda \in \Lambda_{s, \uparrow}(F)$; pour ce λ , il existe $\lambda_0 \in \Lambda_s(F)$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_0) > \kappa/3 \mid \operatorname{Re}(\lambda - \lambda_0) \mid$. Pour tout $s \in (-(\Delta - \kappa\delta); (\Delta - \kappa\delta))$, la courbe

$$\mathcal{C}_s = h_{(\lambda_0, F)}(\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z = s\})$$

est invariante par F_{λ_0} , et d'après (75), cette courbe est une courbe ascendante pour F_λ . En procédant comme au paragraphe précédent, on associe à cette courbe ascendante un nombre complexe $\alpha(\lambda, F)$ (avec $\operatorname{Im} \alpha(\lambda, F) > 0$) et une application conjugante $g_{(\lambda, F)}$ vérifiant, pour tout $z \in \mathcal{C}_s$,

$$g_{(\lambda, F)}(F_\lambda(z)) = g_{(\lambda, F)}(z) + \alpha(\lambda, F).$$

Cette équation permet (quitte à supposer $\varepsilon_1(s, \Delta, \delta) < \kappa\delta$) de prolonger $g_{(\lambda, F)}$ en une application de $\mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta - 3\kappa\delta, \lambda)$ (encore notée $g_{(\lambda, F)}$). On vérifie aisément que le nombre complexe $\alpha(\lambda, F)$ et l'application $g_{(\lambda, F)}$ sont définis de manière unique ($g_{(\lambda, F)}$ est unique modulo composition à droite par une translation) et ne dépendent pas de s (mais seulement de λ et F). En outre, comme on l'a vu au paragraphe précédent, leur dépendance par rapport à λ et F est analytique. Pour définir $g_{(\lambda, F)}$ de manière parfaitement unique, il faut imposer une condition de normalisation supplémentaire ; on choisit la condition suivante, qui correspond à la condition de normalisation imposée

sur les applications $h_{(\alpha,F)}$ pour les nombres de rotation réels :

$$(76) \quad \int_0^1 (g_{(\lambda,F)}(z) - z) g'_{(\lambda,F)}(z) dz = 0.$$

Toutes ces assertions et ces notations s'étendent bien sûr de manière symétrique à tout $\lambda \in \Lambda_{s,\downarrow}(F)$. Finalement, on étend ces notations aux nombres de rotation réels : pour tout $\lambda \in \Lambda_s(F)$, notons $\alpha(\lambda, F)$ l'unique $\alpha \in \mathcal{B}_s$ tel que $\lambda = \lambda(\alpha, F)$, et posons : $g_{(\lambda,F)} = h_{(\alpha(\lambda,F),F)|\mathbf{B}_{\Delta-3\kappa\delta}(\lambda)}^{-1}$ (on a encore : $\int_0^1 (g_{(\lambda,F)}(z) - z) g'_{(\lambda,F)}(z) dz = 0$). Posons :

$$\hat{\Lambda}_s(F) = \Lambda_s(F) \sqcup \Lambda_{s,\uparrow}(F) \sqcup \Lambda_{s,\downarrow}(F)$$

et pour $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, posons :

$$\mathcal{L}_{\Delta,s}^\varepsilon = \{(\lambda, F) \in \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^\varepsilon(\Delta) \mid \lambda \in \hat{\Lambda}_s(F)\}.$$

On munit dans la suite l'ensemble $\mathcal{D}_0^\varepsilon(\Delta)$ de la topologie de la convergence uniforme sur \mathbf{B}_Δ . Remarquons que l'intérieur de $\mathcal{L}_{\Delta,s}^\varepsilon$ (noté $\text{int } \mathcal{L}_{\Delta,s}^\varepsilon$) est égal à

$$\{(\lambda, F) \in \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^\varepsilon(\Delta) \mid \lambda \in \Lambda_{s,\uparrow}(F) \sqcup \Lambda_{s,\downarrow}(F)\}.$$

La proposition suivante résume les notations et assertions précédentes.

PROPOSITION 3. — *Pour tout $(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta,s}^{\varepsilon_1}$, il existe*

$$(\alpha(\lambda, F), g_{(\lambda,F)}) \in \mathbf{C} \times \mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta - 3\kappa\delta, \lambda),$$

unique (en imposant à $g_{(\lambda,F)}$ la condition de normalisation (76)), tel que l'équation suivante soit vérifiée :

$$g_{(\lambda,F)}(F_\lambda(z)) = g_{(\lambda,F)}(z) + \alpha(\lambda, F), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}.$$

De plus, l'application : $(\lambda, F) \mapsto (\alpha(\lambda, F), g_{(\lambda,F)})$ est :

- *analytique sur $\text{int } \mathcal{L}_{\Delta,s}^{\varepsilon_1}$;*
- *continue sur $\mathcal{L}_{\Delta,s}^{\varepsilon_1}$.*

Démonstration. — Le seul point qu'il reste à montrer est que l'application $(\lambda, F) \mapsto (\alpha(\lambda, F), g_{(\lambda,F)})$ est continue en tout point $(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta,s}^{\varepsilon_1}$ tel que $\lambda \in \Lambda_s(F)$. Fixons un tel (λ, F) et raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $((\lambda_n, F_n))_{n \in \mathbf{N}}$ de couples de $\mathcal{L}_{\Delta,s}^{\varepsilon_1}$ qui converge vers (λ, F) et telle que les couples $(\alpha(\lambda_n, F_n), g_{(\lambda_n, F_n)})$ restent en dehors d'un voisinage de $(\alpha(\lambda, F), g_{(\lambda,F)})$. Quitte à extraire une sous-suite (voir lemme 19 dans l'appendice C à la première partie), on peut supposer que les applications $g_{(\lambda_n, F_n)}$ convergent, uniformément sur tout compact de $\mathbf{B}_{\Delta-3\kappa\delta}$, vers une application $g_\infty \in \mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta - 3\kappa\delta)$, et que les $\alpha(\lambda_n, F_n)$ convergent vers un nombre complexe α_∞ . Par passage à la limite dans l'équation de conjugaison, on obtient :

$$g_\infty(F_\lambda(z)) = g_\infty(z) + \alpha_\infty, \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}.$$

On en déduit que $\alpha_\infty \in \mathbf{R}$, puis que $\alpha_\infty = \alpha(\lambda, F)$, et enfin, puisque $\alpha(\lambda, F) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, que $g_\infty = g_{(\lambda,F)}$, ce qui est impossible. \square

2.2.2. Estimées. — Notre prochain objectif est de démontrer, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, des estimées uniformes pour $|\alpha(\lambda, F) - \lambda|$ et $\|g_{(\lambda, F)} - \text{Id}\|_{C^1}$ sur l'ensemble $\mathcal{L}_{\Delta, s}^\varepsilon$. Pour $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, posons :

$$\mathcal{L}_{\Delta, s}^{\varepsilon, \text{res}} = \{(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta, s}^\varepsilon \mid |\text{Im } \lambda| \leq 1\}.$$

LEMME 22. — *Il existe $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tel que, pour tout $(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta, s}^{\varepsilon_2, \text{res}}$,*

$$\begin{aligned} |\alpha(\lambda, F) - \lambda| &< \kappa\delta \\ \|g_{(\lambda, F)} - \text{Id}\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta-5\kappa\delta})} &< \kappa\delta \\ \|Dg_{(\lambda, F)} - 1\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta-5\kappa\delta})} &< \kappa^2. \end{aligned}$$

Démonstration. — Supposons au contraire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ satisfaisant $1/n < \varepsilon_1$, il existe $(\lambda_n, F_n) \in \mathcal{L}_{\Delta, s}^{1/n, \text{res}}$ tel que l'une au moins des trois estimées ci-dessus ne soit pas satisfaite. L'équation de conjugaison montre que les α_n ont une partie imaginaire bornée. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les suites (λ_n) et $(\alpha(\lambda_n, F_n))$ convergent (notons λ_∞ et α_∞ leurs limites respectives) et que les applications $g_{(\lambda_n, F_n)}$ (qui, pour n assez grand, sont définies sur un voisinage de $\mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}(\lambda_\infty)$) convergent uniformément sur $\mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}(\lambda_\infty)$ vers une application $g_\infty \in \mathcal{D}^{\text{inj}}(\Delta - 4\kappa\delta, \lambda_\infty)$ vérifiant la condition (76). Par passage à la limite, on obtient :

$$(77) \quad g_\infty(\lambda_\infty + z) = g_\infty(z) + \alpha_\infty, \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}.$$

Distinguons deux cas.

Premier cas : $\lambda_\infty \notin \mathbf{R}$. — Dans ce cas, (77) entraîne $\lambda_\infty = \alpha_\infty$ et $g_\infty = \text{Id}$, d'où une contradiction.

Second cas : $\lambda_\infty \in \mathbf{R}$.

ASSERTION. — $\lambda_\infty \in \mathcal{B}_s$.

En effet, pour tout n , puisque $\lambda_n \in \hat{\Lambda}_s(F_n)$, il existe $\lambda_{0,n} \in \Lambda_s(F_n)$ tel que

$$(78) \quad |\text{Im}(\lambda_n - \lambda_{0,n})| > \kappa/2 |\text{Re}(\lambda_n - \lambda_{0,n})|.$$

Notons $\alpha_{0,n}$ l'élément de \mathcal{B}_s tel que $\lambda_{0,n} = \lambda(\alpha_{0,n}, F_n)$, et notons $g_{0,n}$ l'application conjuguante associée. Quitte à extraire à nouveau une sous-suite, on peut supposer que les suites $(\lambda_{0,n})$ et $(\alpha_{0,n})$ convergent (notons $\lambda_{0,\infty}$ et $\alpha_{0,\infty}$ leurs limites), et que les applications $g_{0,n}$ convergent uniformément sur tout compact de $\mathbf{B}_{\Delta-3\kappa\delta}$ vers une application $g_{0,\infty}$. Puisque \mathcal{B}_s est fermé, $\alpha_{0,\infty} \in \mathcal{B}_s$, et on déduit de l'équation de conjugaison après passage à la limite que $\lambda_{0,\infty} = \alpha_{0,\infty}$. En passant à la limite dans l'inégalité (78), on voit que $\lambda_\infty = \lambda_{0,\infty}$, ce qui démontre l'assertion.

À présent, puisque $\lambda_\infty \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, l'équation (77) montre que $\alpha_\infty \in \mathbf{R}$, que $\alpha_\infty = \lambda_\infty$, et que $g_\infty = \text{Id}$, d'où une contradiction. \square

LEMME 23. — *Les trois estimées du lemme précédent restent valables pour tout $(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta, s}^{\varepsilon_2}$.*

Démonstration. — Fixons $F \in \mathcal{D}_0^{\varepsilon_2}(\Delta)$ et $z \in \mathbf{B}_{\Delta-5\kappa\delta}$. Considérons les trois applications suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda &\mapsto \alpha(\lambda, F) - \lambda \\ \lambda &\mapsto g_{(\lambda, F)}(z) - z \\ \lambda &\mapsto Dg_{(\lambda, F)}(z) - 1.\end{aligned}$$

Ces trois applications, qui sont \mathbf{Z} -périodiques, sont encore définies sur le quotient $\hat{\Lambda}_s(F)/\mathbf{Z}$ de $\hat{\Lambda}_s(F)$ par les translations entières. Elles sont holomorphes sur $\text{int}(\hat{\Lambda}_s(F)/\mathbf{Z})$ qui contient $(\mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{B}}_\kappa)/\mathbf{Z}$ (si $\mathcal{B}_s \neq \emptyset$). En outre, elles sont uniformément bornées sur $\hat{\Lambda}_s(F)/\mathbf{Z}$ (cela découle, pour les deux dernières applications, d'estimées de fonctions univalentes, et pour la première, de l'équation de conjugaison). Elles s'étendent donc analytiquement en $+i\infty$ et en $-i\infty$; par ailleurs, les estimées du lemme précédent sont valables pour $\lambda \in \mathbf{B}_1 \setminus \overline{\mathbf{B}}_\kappa$; on conclut en appliquant le principe du maximum. \square

Posons : $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, 5\kappa^3\delta)$.

LEMME 24. — Pour tout $(\lambda, F) \in \mathcal{L}_{\Delta, s}^{\varepsilon_3}$,

$$(79) \quad |\alpha(\lambda, F) - \lambda| < \kappa\delta$$

$$(80) \quad \|g_{(\lambda, F)} - \text{Id}\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta-6\kappa\delta}(\lambda))} < 3\kappa\delta$$

$$(81) \quad \|Dg_{(\lambda, F)} - 1\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta-6\kappa\delta}(\lambda))} < 3\kappa^2.$$

Démonstration. — La première estimée a déjà été établie (lemme 23). Démontrons les deux autres. Supposons par exemple que $\text{Im } \lambda \geq 0$, et fixons $z \in \mathbf{C}$ avec $\text{Im } z = \text{Im } \lambda + \Delta - 6\kappa\delta$. Il existe $\zeta \in \mathbf{B}_{\Delta-5\kappa\delta}$ tel que $z = \lambda + F(\zeta)$. Donc,

$$g_{(\lambda, F)}(z) = g_{(\lambda, F)}(\zeta) + \alpha(\lambda, F).$$

Ceci entraîne, d'une part, d'après le lemme 23,

$$|g_{(\lambda, F)}(z) - z| < 3\kappa\delta.$$

D'autre part,

$$Dg_{(\lambda, F)}(z) = Dg_{(\lambda, F)}(\zeta)/DF(\zeta),$$

et, par une estimée de Cauchy, $|DF(\zeta) - 1| < \kappa^2$ (puisque $\varepsilon_3 \leq 5\kappa^3\delta$); finalement, en utilisant le lemme 23,

$$|Dg_{(\lambda, F)}(z) - 1| < 3\kappa^2.$$

Les estimées (80) et (81) découlent du lemme 23, des deux estimées ci-dessus, et du principe du maximum. \square

2.2.3. Inversion de l'application $\lambda \mapsto \alpha(\lambda, F)$. — Considérons l'équation de conjugaison

$$\lambda + F(h(z)) = h(z + \alpha), \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad \alpha \in \mathbf{C}.$$

Différencions formellement cette équation par rapport à λ , α , et F ; on obtient

$$\Delta\lambda + \Delta F(h(z)) + DF(h(z))\Delta h(z) = \Delta h(z + \alpha) + Dh(z + \alpha)\Delta\alpha.$$

Puisque $DF(h(z))Dh(z) = Dh(z + \alpha)$, ceci entraîne

(82)

$$Dh(z + \alpha)^{-1}(\Delta\lambda + \Delta F(h(z))) = \Delta\alpha + \left(Dh(z + \alpha)^{-1}\Delta h(z + \alpha) - Dh(z)^{-1}\Delta h(z) \right)$$

et donc, pour F fixée,

$$\Delta\lambda \int_0^1 Dh(s)^{-1} ds = \Delta\alpha.$$

Ainsi, pour tout $(\lambda, F) \in \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\varepsilon_3}(\Delta)$ tel que $\lambda \in \text{int}(\hat{\Lambda}_s(F))$,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}(\lambda, F) = \int_0^1 Dg_{(\lambda, F)}(g_{(\lambda, F)}^{-1}(s)) ds$$

et l'estimée (81) entraîne

(83)

$$\left| \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}(\lambda, F) - 1 \right| < 3\kappa^2.$$

Pour $F \in \mathcal{D}_0^{\varepsilon_3}(\Delta)$, notons α_F l'application : $\hat{\Lambda}_s(F) \rightarrow \mathbf{C}$, $\lambda \mapsto \alpha(\lambda, F)$.

Posons :

$$\begin{aligned} \Omega'_{s,\uparrow} &= \bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{ \alpha \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(\alpha - \alpha_0) > \frac{\kappa}{2} |\text{Re}(\alpha - \alpha_0)| \} \\ \Omega'_{s,\downarrow} &= \bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{ \alpha \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(\alpha - \alpha_0) < -\frac{\kappa}{2} |\text{Re}(\alpha - \alpha_0)| \} \\ \Omega'_s &= \mathcal{B}_s \sqcup \Omega'_{s,\uparrow} \sqcup \Omega'_{s,\downarrow}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\bar{\Omega}_s \subset \Omega'_s$.

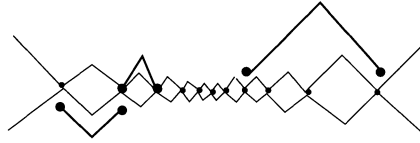
LEMME 25. — *L'application α_F est continue et injective sur $\hat{\Lambda}_s(F)$ et on a :*

$$\Omega'_s \subset \alpha_F(\hat{\Lambda}_s(F)).$$

Démonstration. — La continuité a déjà été énoncée. L'inclusion ci-dessus découle de l'estimée (83). Démontrons l'injectivité. Remarquons qu'il suffit de démontrer l'injectivité sur chacun des trois ensembles $\Lambda_s(F)$, $\Lambda_{s,\uparrow}(F)$, et $\Lambda_{s,\downarrow}(F)$. Soient λ_0 et λ_1 deux nombres complexes appartenant tous deux à l'un de ces trois ensembles; il existe toujours un point $\lambda_{0,1} \in \mathbf{C}$ tel que les morceaux de droites $(\lambda_0; \lambda_{0,1}]$ et $[\lambda_{0,1}; \lambda_1)$ soient inclus dans $\Lambda_{s,\uparrow}(F)$ ou dans $\Lambda_{s,\downarrow}(F)$, et tels que :

$$|\lambda_{0,1} - \lambda_0| + |\lambda_1 - \lambda_{0,1}| \leq \sqrt{1 + \kappa^2} |\lambda_1 - \lambda_0|$$

(voir la figure ci-dessous). Donc, d'après (83), si $\lambda_1 \neq \lambda_0$, alors $\alpha_F(\lambda_1) \neq \alpha_F(\lambda_0)$. \square



Pour $(\alpha, F) \in \Omega'_s \times \mathcal{D}_0^{\varepsilon_3}(\Delta)$, posons :

$$\lambda(\alpha, F) = \alpha_F^{-1}(\alpha) \quad \text{et} \quad h_{(\alpha, F)} = g_{(\lambda(\alpha, F), F)}^{-1}.$$

(ces définitions sont compatibles, lorsque $\alpha \in \mathcal{B}_s$, avec celles du paragraphe 2.2.1). D'après (80), l'application $h_{(\alpha, F)}$ est définie sur $\mathbf{B}_{\Delta - 9\kappa\delta}(\lambda(\alpha, F)) \supset \mathbf{B}_{\Delta - \delta/2}(\alpha)$; la restriction de cette application à $\mathbf{B}_{\Delta - \delta/2}(\alpha)$ (que l'on note encore $h_{(\alpha, F)}$) appartient à $\mathcal{D}^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta/2, \alpha)$ et même, d'après (76), à $\mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta/2, \alpha)$.

L'application $(\alpha, F) \mapsto \lambda(\alpha, F)$ est continue sur $\Omega'_s \times \mathcal{D}_0^{\varepsilon_3}(\Delta)$ et analytique sur $(\Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s) \times \mathcal{D}_0^{\varepsilon_3}(\Delta)$; il en est donc de même pour l'application $(\alpha, F) \mapsto h_{(\alpha, F)}$. Nous avons donc établi toutes les assertions du théorème 4 à l'exception de l'assertion relative à la régularité au sens de Whitney.

2.3. Régularité au sens de Whitney de l'application $(\alpha, F) \mapsto \lambda(\alpha, F)$

Gardons les mêmes notations pour les objets $s \in \Sigma$, $\Delta > \delta > 0$, et $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(s, \Delta, \delta)$ introduits lors de la section précédente, et donnons-nous un ouvert W de \mathbf{C}^n et une famille $(F_p)_{p \in W}$ d'applications de $\mathcal{D}^{\varepsilon_3}(\Delta)$ dépendant analytiquement du paramètre p . Pour tout $(\alpha, p) \in \Omega'_s \times W$, notons $(\lambda(\alpha, p), h_{(\alpha, p)}) \in \mathbf{C} \times \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta/2, \alpha)$ le couple associé à (α, p) construit lors de la section précédente.

2.3.1. Estimées uniformes sur les dérivées. — Pour $m \in \mathbf{N}$, posons $\Delta_m = \Delta - \delta(\sum_{j=0}^m 2^{-(j+1)})$ (ainsi, $\Delta_0 = \Delta - \delta/2$, et pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\Delta_m > \Delta - \delta > 0$). Pour $p \in W$, notons $p = (p_1, \dots, p_n)$, et pour $k = (k_0, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$, notons

$$\frac{\partial^k \dots}{\partial(\alpha, p)^k} \quad \text{pour} \quad \frac{\partial^{k_0 + \dots + k_n}}{\partial \alpha^{k_0} \partial p_1^{k_1} \dots \partial p_n^{k_n}}$$

et notons $\sigma_k = k_0 + \dots + k_n$.

Nous supposons par commodité dans la suite que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m de $F - \text{Id}$ par rapport à p sont uniformément bornées sur W par une constante K_m (c'est le cas par exemple si la famille $(F_p)_{p \in W}$ est la restriction à W d'une famille analytique définie sur un voisinage de \overline{W}).

PROPOSITION 4. — *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_{s,\delta,m}$ (qui ne dépend que de s, δ, m , et de K_m), telle que :*

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha,p) \in \text{int } \Omega'_s \times W}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial(\alpha,p)^k} (h_{(\alpha,p)} - \text{Id}) \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta_m}(\alpha))} < C_{s,\delta,m}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons partir des équations suivantes, que l'on dérive de l'équation formelle (82).

Pour tout $\alpha \in \Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s$ et $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\delta}$, on a :

$$(84) \quad Dh(z + \alpha)^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} - 1 = Dh(z + \alpha)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(z + \alpha) - Dh(z)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(z),$$

et, pour tout $\alpha \in \Omega'_s$, $z \in \mathbf{B}_{\Delta-\delta}$, et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$(85) \quad Dh(z + \alpha)^{-1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}(h(z)) \right) = Dh(z + \alpha)^{-1} \frac{\partial h}{\partial p_i}(z + \alpha) - Dh(z)^{-1} \frac{\partial h}{\partial p_i}(z).$$

La première de ces deux équations entraîne :

$$(86) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \left(\int_0^1 Dh(z)^{-1} dz \right)^{-1}, \quad \alpha \in \Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s,$$

et la deuxième entraîne :

$$(87) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = - \left(\int_0^1 Dh(z)^{-1} dz \right)^{-1} \int_0^1 Dh(z + \alpha)^{-1} \frac{\partial F}{\partial p_i}(h(z)) dz, \quad \alpha \in \Omega'_s, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pour $\Delta' > 0$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, soit $\mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$ (resp. $\mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha))$) l'ensemble des applications : $\mathbf{B}_{\Delta'} \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha) \rightarrow \mathbf{C}$) qui sont holomorphes et \mathbf{Z} -périodiques. Pour $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$, nous noterons $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})} = \sup_{z \in \mathbf{B}_{\Delta'}} |\varphi(z)|$ (que ce supremum soit fini ou infini) et nous adopterons la même notation pour les applications de $\mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha))$.

LEMME 26. — *Fixons $\Delta' > 0$.*

1) *Pour tout $(\alpha, \phi) \in (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$, il existe un unique $\psi \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha))$ tel que $\psi(0) = 0$ et*

$$(88) \quad \psi(z + \alpha) - \psi(z) = \phi(z), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta'}.$$

Posons : $\psi = D_\alpha^{-1} \phi$.

2) *L'application $(\alpha, \phi) \mapsto D_\alpha^{-1} \phi$ est analytique sur $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$.*

3) *Pour tout $\delta' > 0$, il existe une constante $C_{s,\delta'}$ (ne dépendant que de s et δ') telle que, pour $\phi \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$,*

$$\sup_{\alpha \in \text{int}(\Omega'_s)} \|D_\alpha^{-1} \phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'-\delta'}(\alpha))} < C_{s,\delta'} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})}.$$

Démonstration. — Donnons-nous $(\alpha, \phi) \in (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$, supposons qu'il existe une solution $\psi \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha))$ à l'équation (88), et considérons les développements en série de Fourier de ϕ et ψ :

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\phi}(k) e^{2i\pi k z}, \\ \psi(z) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\psi}(k) e^{2i\pi k z}.\end{aligned}$$

On a nécessairement, pour $k \in \mathbf{Z}^*$,

$$\hat{\psi}(k) = (e^{2i\pi k \alpha} - 1)^{-1} \hat{\phi}(k).$$

Par ailleurs, puisque $\alpha \notin \mathbf{R}$, la série

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^*} (e^{2i\pi k \alpha} - 1)^{-1} \hat{\phi}(k) e^{2i\pi k z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha)$; la somme définit donc une application $\psi_0 \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'}(\alpha))$. La condition $\psi(0) = 0$ montre que l'application ψ définie par

$$\psi(z) = - \int_0^1 \psi_0(x) dx + \psi_0(z)$$

est l'unique solution. Ceci montre également que ψ dépend analytiquement de α et ϕ .

Il reste à démontrer l'assertion 3. Donnons-nous $\delta' > 0$, $\phi \in \mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$, et $\alpha \in \text{int}(\Omega'_s)$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$(89) \quad |\hat{\phi}(k)| \leq e^{-2\pi k \Delta'} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})}.$$

Distinguons deux cas.

Premier cas : $|\text{Im } \alpha| \geq \delta'/2$. — Supposons par exemple que : $\text{Im } \alpha \geq \delta'/2$. Il existe alors une constante $C_{\delta'}$ (ne dépendant que de δ') telle que :

$$\begin{aligned}|e^{2i\pi k \alpha} - 1|^{-1} &\leq C_{\delta'} \quad \text{si } k \geq 0; \\ |e^{2i\pi k \alpha} - 1|^{-1} &\leq C_{\delta'} e^{-2\pi |k| \text{Im } \alpha} \quad \text{si } k < 0.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z \in \mathbf{B}_{\Delta' - \delta'}(\alpha)$ et $k \in \mathbf{Z}$,

$$|e^{2i\pi k \alpha} - 1|^{-1} |e^{2i\pi k z}| \leq C_{\delta'} e^{2\pi(\Delta - \delta')},$$

ce qui, au vu de (89), entraîne l'estimée voulue sur $\|D_\alpha^{-1} \phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta' - \delta'}(\alpha))}$.

Second cas : $0 < |\text{Im } \alpha| < \delta'/2$. — Dans ce cas, $\mathbf{B}_{\Delta' - \delta'}(\alpha) \subset \mathbf{B}_{\Delta' - \delta'/2}$; il suffit donc d'estimer $|D_\alpha^{-1} \phi|$ sur $\mathbf{B}_{\Delta' - \delta'/2}$. Donnons-nous $\alpha_0 \in \mathcal{B}_s$ tel que $|\text{Im}(\alpha - \alpha_0)| > \frac{\kappa}{2} |\text{Re}(\alpha - \alpha_0)|$. Il existe une constante C_s (ne dépendant que de s) telle que

$$(90) \quad |e^{2i\pi k \alpha} - 1|^{-1} \leq C_s |e^{2i\pi k \alpha_0} - 1|^{-1} \leq C C_s \|k \alpha_0\|^{-1}, \quad k \in \mathbf{Z}^*$$

(C est une constante universelle et $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche). Fixons $k \in \mathbf{Z}^*$. Soient $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ et $(q_j)_{j \in \mathbf{N}}$ les suites d'entiers définies par α_0 , comme

en 0.2. Il existe un unique $j \in \mathbf{N}$ tel que $q_j \leq |k| < q_{j+1}$. Donc $\|k\alpha_0\| > \|q_j\alpha_0\| > 1/(2q_{j+1})$ (voir 0.2). Ceci entraîne, pour $z \in \mathbf{B}_{\Delta'} - \delta'/2$,

$$(91) \quad |(e^{2i\pi k\alpha} - 1)^{-1} \hat{\phi}(k) e^{2i\pi k z}| < 2CC_s \|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})} (q_{j+1} e^{-2\pi q_j \delta'/4}) e^{-2\pi |k| \delta'/4}.$$

Puisque $\alpha_0 \in \mathcal{B}_s$, il existe un entier $j_1 = j_1(s, \delta')$ (ne dépendant que de s et δ') tel que, si $j \geq j_1$,

$$(92) \quad \frac{\log q_{j+1}}{q_j} \leq 2\pi\delta'/4.$$

Remarquons que l'entier q_{j_1} , considéré comme une fonction de $\alpha_0 \in \mathcal{B}_s$, est borné sur \mathcal{B}_s ; notons k_1 une borne pour cette fonction (k_1 ne dépend que de s et δ'). Donc, si $|k| \geq k_1$, alors $j \geq j_1$. Par ailleurs,

$$(93) \quad \sup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s, |k| < k_1} \|k\alpha_0\|^{-1} < +\infty$$

et ce supremum ne dépend que de s et δ' (en effet, $\|k\alpha_0\|^{-1} < 2q_{j+1} < 3e^{s_j q_j} q_j$). Finalement, les estimées (91), (92) d'une part, et (90) et (93) d'autre part entraînent l'estimée recherchée sur $\|D_\alpha^{-1} \phi\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'} - \delta'(\alpha))}$. \square

LEMME 27. — *Donnons-nous $\Delta' > 0$ et une famille $(\phi_{(\alpha,p)})_{(\alpha,p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}$ d'applications de $\mathcal{O}(\mathbf{B}_{\Delta'})$, dépendant analytiquement de (α, p) (W étant un ouvert de \mathbf{C}^n). Considérons la famille $(\psi_{(\alpha,p)})_{(\alpha,p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}$ définie par : $\psi_{(\alpha,p)} = D_\alpha^{-1} \phi_{(\alpha,p)}$. Alors, pour tout $\delta' > 0$ et $m \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_{s,\delta',m}$ (ne dépendant que de s , δ' , et m) telle que :*

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha,p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k \psi_{(\alpha,p)}}{\partial(\alpha,p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'} - \delta'(\alpha))} \leq C_{s,\delta',m} \sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha,p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k \phi_{(\alpha,p)}}{\partial(\alpha,p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})}.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur m . Pour $m = 0$, l'estimée ci-dessus découle du lemme 26. Supposons que cette estimée soit démontrée pour $m \in \mathbf{N}$, et essayons de l'établir pour $m + 1$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. L'équation aux différences entraîne :

$$(94) \quad \frac{\partial \psi_{(\alpha,p)}}{\partial p_i}(z + \alpha) - \frac{\partial \psi_{(\alpha,p)}}{\partial p_i}(z) = \frac{\partial \phi_{(\alpha,p)}}{\partial p_i}(z)$$

$$(95) \quad \frac{\partial \psi_{(\alpha,p)}}{\partial \alpha}(z + \alpha) - \frac{\partial \psi_{(\alpha,p)}}{\partial \alpha}(z) = \frac{\partial \phi_{(\alpha,p)}}{\partial \alpha}(z) - D\psi_{(\alpha,p)}(z + \alpha).$$

Posons :

$$S = \sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m+1 \\ (\alpha,p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k \phi_{(\alpha,p)}}{\partial(\alpha,p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta'})}.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k \psi_{(\alpha, p)}}{\partial(\alpha, p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta' - \delta'/3}(\alpha))} < C_{s, \delta'/3, m} S.$$

Donc, par une estimée de Cauchy,

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k (D\psi_{(\alpha, p)}(z + \alpha))}{\partial(\alpha, p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta' - 2\delta'/3}(\alpha))} < 3/\delta' C_{s, \delta'/3, m} S,$$

et l'hypothèse de récurrence appliquée (à l'ordre m) aux équations aux différences (94) et (95) entraîne l'estimée recherchée sur ψ . \square

Démonstration de la proposition 4. — On procède par récurrence sur m .

Pour $m = 0$, l'assertion de la proposition 4 est vraie. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $m \in \mathbf{N}$. L'équation (84) montre que

$$(96) \quad Dh(z)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(z) = D_\alpha^{-1} \left(Dh(z + \alpha)^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} - 1 \right).$$

D'autre part, (86) et l'hypothèse de récurrence entraînent

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left| \frac{\partial^k (\partial \lambda / \partial \alpha)}{\partial(\alpha, p)^k} \right| < C'_{s, \delta, m}.$$

Donc, en appliquant le lemme 27 à (96), on obtient

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left\| \frac{\partial^k (\partial h / \partial \alpha)_{(\alpha, p)}}{\partial(\alpha, p)^k} \right\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta_{m+1}}(\alpha))} < C'''_{s, \delta, m}.$$

On obtient la même estimée pour $\partial h / \partial p_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, en utilisant (87) pour contrôler $\partial \lambda / \partial p_i$, et en appliquant ensuite le lemme 27 à (85) (la seule différence dans ce cas est que l'on utilise les bornes sur les dérivées partielles de F_p par rapport à p). Finalement, on obtient l'estimée recherchée sur h au rang $m + 1$, ce qui termine la démonstration. \square

La proposition 4 (appliquée en donnant à δ une valeur dépendant de Δ , par exemple : $\delta = \Delta/2$) et les équations (86) et (87) entraînent le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. — *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_{s, m}$ (qui ne dépend que de s , m , et K_m , telle que*

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}^{n+1} \\ \sigma_k \leq m \\ (\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W}} \left| \frac{\partial^k \lambda}{\partial(\alpha, p)^k} \right| < C_{s, m}.$$

2.3.2. Démonstration de la régularité au sens de Whitney. — Nous commençons par rappeler la définition de la régularité « C^∞ -holomorphe» au sens de Whitney (qui correspond à la régularité C^∞ au sens de Whitney usuelle, voir [17], avec des dérivées prises au sens complexe).

Pour $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, notons $k! = k_1! \cdots k_n!$.

DÉFINITION. — Considérons une application $f : A \rightarrow \mathbf{C}$, où A est un sous-ensemble de \mathbf{C}^n , $n \in \mathbf{N}$. On dit que f est C^∞ -holomorphe sur A s'il existe une famille $(f_k)_{k \in \mathbf{N}^n}$ d'applications : $A \rightarrow \mathbf{C}$ avec les propriétés suivantes.

- $f_0 = f$.
- Pour tout $k \in \mathbf{N}^n$ et $m \in \mathbf{N}$ satisfaisant $m \geq \sigma_k$, et $x, x' \in A$,

$$(97) \quad f_k(x') = f_k(x) + \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{f_{k+l}(x)}{l!} (x' - x)^l + R_{k,m}(x', x)$$

où $R_{k,m}$ possède la propriété suivante : pour tout $x_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si x et x' sont deux points quelconques de A avec $|x - x_0| < \delta$ et $|x' - x_0| < \delta$, alors

$$|R_{k,m}(x', x)| \leq \varepsilon |x - x'|^{m - \sigma_k}.$$

Les applications f_k peuvent être vues comme des «dérivées partielles au sens faible» pour f . Par exemple, si de telles applications existent, alors f est nécessairement analytique dans $\text{int } A$, et pour tout $x \in \text{int } A$, et $k = (k_1, \dots, k_n)$,

$$f_k(x) = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Le théorème d'extension de Whitney (voir [17]) affirme que, si A est fermé et si de telles applications f_k existent, alors il existe une application $\hat{f} : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$, C^∞ sur \mathbf{C}^n et qui coïncide avec f sur A . En outre, cette extension peut être (ou parfois doit être)

choisie pour que, pour tout $x \in A$ et $k = (k_1, \dots, k_n)$, $f_k(x) = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} \hat{f}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

PROPOSITION 5. — *L'application $(\alpha, p) \mapsto \lambda(\alpha, p)$ est C^∞ -holomorphe sur $\Omega'_s \times W$.*

Démonstration. — Il nous faut tout d'abord définir une famille $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}^{n+1}}$ de «dérivées partielles au sens faible» pour λ sur $\Omega'_s \times W$. Lorsque $\alpha \in \text{int } \Omega'_s = \Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s$, nous n'avons pas le choix ; pour tout $(\alpha, p) \in \text{int}(\Omega'_s) \times W$ et $k \in \mathbf{N}^{n+1}$, posons :

$$\lambda_k(\alpha, p) = \frac{\partial^k \lambda}{\partial (\alpha, p)^k}(\alpha, p).$$

À présent, donnons-nous $(\alpha_0, p) \in \mathcal{B}_s \times W$ et $k \in \mathbf{N}^{n+1}$. D'après le corollaire 5, les limites

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0, \alpha \in \Omega'_{s, \uparrow}} \lambda_k(\alpha, p) \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0, \alpha \in \Omega'_{s, \downarrow}} \lambda_k(\alpha, p)$$

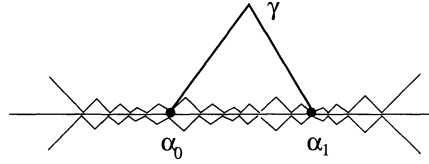
existent ; notons-les respectivement $\lambda_{k,\uparrow}(\alpha_0, p)$ et $\lambda_{k,\downarrow}(\alpha_0, p)$.

ASSERTION 1. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $(\alpha_0, p) \in \mathcal{B}_s \times W$, $\lambda_{k,\uparrow}(\alpha_0, p) = \lambda_{k,\downarrow}(\alpha_0, p)$.*

La démonstration s'effectue par récurrence sur σ_k . Pour $\sigma_k = 0$, l'assertion est valable puisque l'application λ est continue. Donnons-nous $m \geq 1$ et supposons que cette assertion soit valable pour tout k tel que $\sigma_k < m$ (pour de tels k , posons : $\lambda_k(\alpha_0, p) = \lambda_{k,\uparrow}(\alpha_0, p) = \lambda_{k,\downarrow}(\alpha_0, p)$).

Donnons-nous $k = (k_0, \dots, k_n)$ tel que $\sigma_k = m$ et $(\alpha_0, p) \in \mathcal{B}_s \times W$. Donnons-nous $s' \in \Sigma$ tel que tout point de \mathcal{B}_s soit un point d'accumulation de $\mathcal{B}_{s'}$ (un tel s' existe d'après la proposition 1) et remarquons que, quitte à diminuer le paramètre $\varepsilon_3(s, \Delta, \delta)$, on peut remplacer s par s' dans tout ce qui précède et supposer que l'application $(\alpha, p) \mapsto \lambda(\alpha, p)$ est définie sur $\Omega'_{s'} \times W$. Le fait que l'application $\lambda_{(k_0+2, k_1, \dots, k_n)}$ soit uniformément bornée sur $\Omega'_{s', \uparrow}$ (corollaire 5) montre (en écrivant une formule de Taylor le long d'un chemin γ comme indiqué dans la figure ci-dessous) que :

$$\lambda_{(k_0+1, k_1, \dots, k_n), \uparrow}(\alpha_0, p) = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{B}_{s'}} \frac{\lambda_k(\alpha_1, p) - \lambda_k(\alpha_0, p)}{\alpha_1 - \alpha_0}.$$



Le même argument montre que $\lambda_{(k_0+1, k_1, \dots, k_n), \downarrow}(\alpha_0, p)$ est égal à la même limite.

Par ailleurs, le fait que les quantités $\lambda_{(k_0+1, k_1, \dots, k_n)}$, et pour tout $i \in 1, \dots, n$, $\lambda_{(k_0, k_1, \dots, k_i+2, \dots, k_n)}$ soient uniformément bornées sur $\Omega'_{s', \uparrow}$ montre que

$$\begin{aligned} & \lambda_{(k_0, k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n), \uparrow}(\alpha_0, p) \\ &= \lim_{q_i \rightarrow p_i} \frac{\lambda_k(\alpha_0, p_1, \dots, q_i, \dots, p_n) - \lambda_k(\alpha_0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{q_i - p_i} \end{aligned}$$

(en écrivant une formule de Taylor entre

$$(\alpha, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \quad \text{et} \quad (\alpha, p_1, \dots, q_i, \dots, p_n)$$

et en passant à la limite lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha \in \Omega'_{s', \uparrow}$); de nouveau,

$$\lambda_{(k_0, k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n), \downarrow}(\alpha_0, p)$$

est égal à la même limite. Ceci établit l'assertion pour $\sigma_k \leq m+1$ et, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Nous pouvons donc définir de cette manière des applications $\lambda_k(\alpha, p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $(\alpha, p) \in \Omega'_s \times W$. Il faut maintenant montrer que ces applications satisfont à la formule de Taylor (97), avec les propriétés désirées pour les restes. Donnons-nous

$k \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $m \geq \sigma_k$; notons $R_{k,m}$ le reste qui apparaît dans l'équation (97) lorsqu'on l'écrit pour l'application $\lambda - \text{Id}$.

ASSERTION 2. — $|R_{k,m}((\alpha', p'), (\alpha, p))| \leq C_{s,m} \|(\alpha', p') - (\alpha, p)\|^{m-\sigma_k+1}$, où $\|\dots\|$ désigne la norme usuelle sur \mathbb{C}^{n+1} , et $C_{s,m}$ est une constante qui ne dépend que de n et de la constante $C_{s,m}$ du corollaire 5.

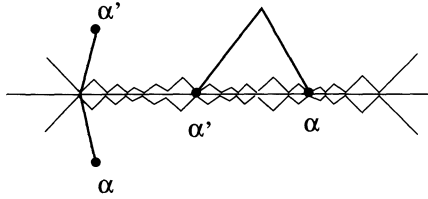
REMARQUE 1. — Il suffit de démontrer cette estimée localement.

REMARQUE 2. — Pour (α, p) et (α', p') appartenant tous deux à $\Omega'_{s,\uparrow} \times W$ ou à $\Omega'_{s,\downarrow} \times W$, cette estimée est une conséquence immédiate de la formule de Taylor usuelle.

REMARQUE 3. — Il suffit de démontrer cette estimée lorsque (α, p) et (α', p') ont toutes leurs coordonnées identiques sauf une.

On se ramène donc à deux cas.

Premier cas : $p = p'$ mais $\alpha \neq \alpha'$. — Dans ce cas, l'estimée découle d'une formule de Taylor le long d'un chemin entre α et α' dont l'image (privée éventuellement des deux extrémités) est incluse dans $\Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s$ (voir la figure).



Second cas : $\alpha = \alpha'$ et $p_i = p'_i$ pour $i \neq j$, mais $p_j \neq p'_j$. — Dans ce cas, si $\alpha \notin \mathcal{B}_s$, il n'y a rien à démontrer (remarque 2 ci-dessus). Si $\alpha \in \mathcal{B}_s$, la limite de la formule de Taylor usuelle entre (α'', p) et (α'', p') , lorsque $\alpha'' \rightarrow \alpha$, $\alpha'' \in \Omega'_s \setminus \mathcal{B}_s$, entraîne l'estimée recherchée.

Ceci démontre l'assertion 2 et la proposition en découle. \square

Puisque $\overline{\Omega}_s \subset \Omega'_s$, la démonstration du théorème 4 est maintenant complète.

REMARQUE. — Pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s$, nous savions (d'après le théorème 2) que l'application $\lambda_\alpha : W \rightarrow \mathbb{C}$, $p \mapsto \lambda(\alpha, p)$, était analytique. Pour tout $k = (k_0, \dots, k_n) \in \{0\} \times \mathbb{N}^n$, l'application λ_k définie plus haut vérifie :

$$\lambda_k(\alpha, p) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} \lambda_\alpha}{\partial p_1^{k_1} \dots \partial p_n^{k_n}}(p), \quad p \in W$$

(la raison est la même que pour justifier : $\lambda_{k,\uparrow} \equiv \lambda_{k,\downarrow}$).

CHAPITRE 3

COMPLÉMENTS ET APPLICATIONS

3.1. Propriétés d'unicité

Nous allons dans cette section démontrer et préciser les corollaires 1 et 2.

DÉFINITIONS. — Donnons-nous $\Delta > \delta > 0$ et $F \in \mathcal{D}(\Delta)$.

1) Nous appellerons *courbe invariante relevée* pour F toute courbe \mathcal{C} incluse dans \mathbf{B}_Δ , \mathbf{Z} -périodique, telle que l'on ait $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et que $F|_{\mathcal{C}}$ soit injective. Si une telle courbe existe, on peut naturellement lui associer un nombre de rotation (le nombre de rotation de l'homéomorphisme du cercle défini par $F|_{\mathcal{C}}$).

2) Supposons que F admette une courbe ascendante relevée \mathcal{C}' . Dans ce cas, nous avons vu au chapitre précédent qu'on pouvait associer à \mathcal{C}' un nombre de rotation complexe α , et une application conjuguante g (unique modulo composition à droite par une translation) définie sur un anneau ouvert contenant \mathcal{C}' et $F(\mathcal{C}')$, et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$g \circ F(z) = g(z) + \alpha, \quad z \in \mathcal{C}'.$$

Nous dirons que la courbe ascendante relevée \mathcal{C}' est *canonique* si $g(\mathcal{C}')$ est une courbe horizontale (c'est-à-dire si tous les points de $g(\mathcal{C}')$ ont la même partie imaginaire). On définit de même la notion de *courbe descendante canonique relevée*.

3) Nous appellerons *courbe canonique relevée* pour F toute courbe qui est soit une courbe invariante relevée, soit une courbe ascendante ou descendante canonique relevée pour F .

4) Soit α un nombre complexe. Nous dirons que la propriété $\mathcal{L}_{\alpha, \delta, \text{faible}}(F)$ a lieu s'il existe une courbe canonique relevée pour F , incluse dans $\mathbf{B}_{\Delta - \delta}$, et telle que le nombre de rotation associé soit α . Nous dirons que la propriété $\mathcal{L}_{\alpha, \delta, \text{forte}}(F)$ a lieu s'il existe $h \in \mathcal{D}_0^{\delta, \text{inj}}(\Delta - \delta, \alpha)$ telle que l'équation :

$$F \circ h(z) = h(z + \alpha), \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta - \delta}$$

soit vérifiée.

REMARQUE. — Si $\Delta \geq 2\delta$, alors $\mathcal{L}_{\alpha,\delta,\text{forte}}(F) \Rightarrow \mathcal{L}_{\alpha,\delta,\text{faible}}(F)$.

Pour tout $s \in \Sigma$ et $\Delta > \delta > 0$, notons $\varepsilon(s, \Delta, \delta)$ le paramètre donné par le théorème 4 et pour tout $(\alpha, F) \in \overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon(s, \Delta, \delta)}(\Delta)$, notons $(\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)})$ le couple associé à (α, F) par ce théorème (c'est-à-dire tel que l'application $\lambda(\alpha, F) + F$ soit conjuguée à la translation T_α par l'application $h_{(\alpha, F)}$).

PROPOSITION 6. — *Pour tout $s \in \Sigma$ et $\Delta > 2\delta > 0$, il existe $\varepsilon_1(s, \Delta, \delta) \leq \varepsilon(s, \Delta, \delta)$ tel que, pour tout $(\alpha, F) \in \overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon_1(s, \Delta, \delta)}(\Delta)$, les trois assertions suivantes soient équivalentes.*

1. La propriété $\mathcal{L}_{\alpha,\delta,\text{faible}}(F)$ a lieu ;
2. La propriété $\mathcal{L}_{\alpha,\delta,\text{forte}}(F)$ a lieu ;
3. $\lambda(\alpha, F) = 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 4 et la remarque ci-dessus, la seule implication non triviale est : 1 \Rightarrow 3.

Donnons-nous $\varepsilon_1(s, \Delta, \delta) \leq \varepsilon(s, \Delta, \delta)$ à choisir au cours de la démonstration, et raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe $(\alpha, F) \in \overline{\Omega}_s \times \mathcal{D}^{\varepsilon_1(s, \Delta, \delta)}(\Delta)$ quelconque, tel que la propriété $\mathcal{L}_{\alpha,\delta,\text{faible}}(F)$ ait lieu, et tel que l'on ait : $\lambda(\alpha, F) \neq 0$. Posons : $(\lambda_0, h_0) = ((\lambda(\alpha, F), h_{(\alpha, F)}))$, $\lambda_1 = \int_0^1 (F(x) - x)dx$, et notons \mathcal{C} une courbe canonique relevée incluse dans $\mathbf{B}_{\Delta-\delta}$ de nombre de rotation α pour F .

ASSERTION. — $|\lambda_1 - \alpha| < \varepsilon_1(s, \Delta, \delta)$.

Si $\alpha \in \mathbf{R}$, cette assertion découle aisément de la définition du nombre de rotation de $F|_{\mathcal{C}}$. Si $\alpha \notin \mathbf{R}$, il existe $\gamma > 0$ et une application $h_1 \in \mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\gamma, \alpha)$ vérifiant $h_1(\mathbf{R}) = \mathcal{C}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F(h_1(x)) = h_1(x + \alpha).$$

Puisque d'autre part $\int_0^1 (h_1(x + \alpha) - h_1(x))dx = \alpha$, on en déduit l'assertion.

On montre de la même manière que : $|\lambda_0 + \lambda_1 - \alpha| < \varepsilon_1(s, \Delta, \delta)$, ce qui entraîne finalement :

$$(98) \quad |\lambda_0| < 2\varepsilon_1(s, \Delta, \delta).$$

Pour $t \in [0, 1]$, posons :

$$\begin{aligned} G_t(z) &= h_0^{-1}((1-t)\lambda_0 + F(h_0(z))) \\ &= h_0^{-1}(-t\lambda_0 + h_0(z + \alpha)). \end{aligned}$$

On peut supposer que $\varepsilon_1(s, \Delta, \delta) < \kappa\delta/2$ et, d'après les estimées données par le théorème 4, quitte à diminuer $\varepsilon_1(s, \Delta, \delta)$, on peut supposer que l'application h_0 est définie sur $\mathbf{B}_{\Delta-\kappa\delta}(\alpha)$ et vérifie :

$$\|Dh_0 - 1\|_{L^\infty(\mathbf{B}_{\Delta-\kappa\delta}(\alpha))} < \kappa.$$

Pour tout $t \in [0; 1]$, l'application G_t est alors (d'après 98) définie et univalente sur $\mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}$ et vérifie :

$$\left| \frac{\partial G_t}{\partial t}(z) + \lambda_0 \right| < 2\kappa|\lambda_0|, \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}.$$

On en déduit (puisque $G_0(z) = z + \alpha$) que :

$$(99) \quad |(G_1(z) - (z + \alpha)) + \lambda_0| \leq 2\kappa|\lambda_0|, \quad z \in \mathbf{B}_{\Delta-4\kappa\delta}.$$

Remarquons que la courbe $\mathcal{C}' = h_0^{-1}(\mathcal{C})$ est une courbe canonique relevée pour G_1 , de nombre de rotation α . Si $\alpha \in \mathbf{R}$, l'estimée 99 entraîne immédiatement une contradiction (si $|\operatorname{Re} \lambda_0| > 2\kappa|\lambda_0|$, le nombre de rotation de $G_1|_{\mathcal{C}'}$ ne peut pas valoir α , et si $|\operatorname{Im} \lambda_0| > 2\kappa|\lambda_0|$, \mathcal{C}' ne peut pas être invariante par G_1). Supposons $\alpha \notin \mathbf{R}$, considérons à nouveau l'application $h_1 \in \mathcal{D}_0^{\text{inj}}(\gamma, \alpha)$ introduite plus haut, et posons : $h_2(z) = h_0^{-1} \circ h_1(z)$, $z \in \mathbf{B}_\gamma(\alpha)$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 (h_2(x + \alpha) - h_2(x)) dx \\ &= \int_0^1 (G_1(h_2(x)) - h_2(x)) dx \\ &= (\alpha - \lambda_0) + \int_0^1 (G_1(h_2(x)) - (h_2(x) + \alpha) + \lambda_0) dx, \end{aligned}$$

ce qui, d'après (99), est impossible. On aboutit donc là encore à une contradiction. \square

Nous allons maintenant déduire les corollaires 1 et 2 du théorème 4 et de la proposition précédente. Pour ce qui est du corollaire 1, c'est immédiat (remarque : on aurait pu déduire ce corollaire uniquement du théorème 1, puisqu'il ne fait pas intervenir de nombre de rotation complexe).

Démontrons le corollaire 2. Donnons-nous $(F_p)_{p \in \mathbf{D}}$ et $\alpha_0 \in \mathcal{B}$ comme dans ce corollaire. Pour tout $s \in \Sigma$, il existe un petit voisinage V de 0 dans \mathbf{D} et une application $\lambda : \overline{\Omega}_s \times V \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par le théorème 4. Considérons une extension $\hat{\lambda} : \mathbf{C} \times V \rightarrow \mathbf{C}$, C^∞ , de λ . Alors $\hat{\lambda}(\alpha_0, 0) = 0$, et, d'après le théorème 4, $\partial \hat{\lambda} / \partial \alpha(\alpha_0, 0) = 1$. L'équation $\hat{\lambda}(\alpha, p) = 0$ définit donc une fonction implicite ρ sur un voisinage V' de 0 dans V , vérifiant $\rho(0) = \alpha_0$, et, pour tout $p \in V'$, $\hat{\lambda}(\rho(p), p) = 0$. Si l'application $p \mapsto \lambda(\alpha_0, p)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0 (c'est-à-dire si on ne se trouve pas dans le cas 1 du corollaire), alors son jet d'ordre infini en 0 ne s'annule pas (en effet, cette application est vraiment analytique!). Dans ce cas, on déduit de l'équation $\hat{\lambda}(\rho(p), p) = 0$ que le jet d'ordre infini de ρ en 0 est également analytique, et n'est pas identiquement nul. Les autres assertions du corollaire 2 ne posent aucune difficulté.

3.2. Applications aux domaines singuliers de rotation des fractions rationnelles

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, notons \mathcal{R}^d l'ensemble des fractions rationnelles de degré d , vu comme un sous-ensemble ouvert de \mathbf{CP}^{2d+1} .

Notons $d_{\overline{\mathbf{C}}}$ la métrique sphérique de $\overline{\mathbf{C}}$, et notons $d_{\mathcal{R}}$ la distance sur \mathcal{R}^d donnée par la norme L^∞ sur les applications : $\overline{\mathbf{C}} \rightarrow (\overline{\mathbf{C}}, d_{\overline{\mathbf{C}}})$. La topologie induite sur \mathcal{R}^d par cette distance est la même que la « topologie des coefficients », c'est-à-dire la topologie induite sur \mathcal{R}^d par la topologie usuelle de \mathbf{CP}^{2d+1} .

3.2.1. Définitions. — Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$\mathcal{PP}^{d,n} = \{(R, x) \mid R \in \mathcal{R}^d, x \in \overline{\mathbf{C}}, R^n(x) = x \text{ et } n \text{ est la plus petite période de } x\}$
(\mathcal{PP} comme « point périodique ») et notons $\pi_{\mathcal{P}}$ la projection canonique : $\mathcal{PP}^{d,n} \rightarrow \mathcal{R}^d$, $(R, x) \mapsto R$.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, posons

$$\mathcal{PP}_\alpha^{d,n} = \{(R, x) \in \mathcal{PP}^{d,n} \mid (R^n)'(x) = e^{2i\pi\alpha}\}$$

et posons

$$\mathcal{PP}_*^{d,n} = \mathcal{PP}^{d,n} \setminus \mathcal{PP}_0^{d,n}.$$

L'équation $R^n(x) = x$ différenciée montre que $\mathcal{PP}_*^{d,n}$ est une hypersurface analytique non singulière de $\mathcal{R}^d \times \overline{\mathbf{C}}$, et que la restriction de la projection $\pi_{\mathcal{P}}$ à $\mathcal{PP}_*^{d,n}$ est un difféomorphisme analytique local.

Pour $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{PP}_\alpha^{d,n}$ est une hypersurface analytique (singulière) de $\mathcal{PP}_*^{d,n}$ et on a le diagramme commutatif (trivial) suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PP}_\alpha^{d,n} & \xrightarrow{i} & \mathcal{PP}_*^{d,n} \\ \pi_{\mathcal{P}} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{P}} \\ & \mathcal{R}^d & \end{array}$$

Nous allons définir des objets correspondants avec des propriétés analogues pour les anneaux de Herman.

Notons \mathcal{A} l'ensemble de tous les anneaux ouverts de $\overline{\mathbf{C}}$, et \mathcal{D} l'ensemble des paires (D, x) telles que D est un disque ouvert de $\overline{\mathbf{C}}$ et $x \in D$. Nous allons définir deux topologies sur \mathcal{A} et une topologie sur \mathcal{D} .

a) *Topologies sur \mathcal{A} .* — Pour $A \in \mathcal{A}$, rappelons que $\text{mod } A$ représente le module de A ; nous noterons h_A toute représentation conforme : $\mathbf{A}_{\text{mod } A/2} \rightarrow A$.

Notons $d_{\mathcal{A}}$ la distance sur \mathcal{A} définie par :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{A}}(A, A') &= 0 && \text{si } h_A(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \subset h_{A'}(\mathbf{A}_{\text{mod } A'/4}) \text{ et } h_{A'}(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \subset h_A(\mathbf{A}_{\text{mod } A/4}), \\ d_{\mathcal{A}}(A, A') &= 1 && \text{sinon,} \end{aligned}$$

et notons $\tau_{\mathcal{A},\text{faible}}$ la topologie sur \mathcal{A} engendrée par cette distance. Pour $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, posons :

$$V_\varepsilon(A) = \{A' \in \mathcal{A} \mid h_A(\mathbf{A}_{(\bmod A - \varepsilon)/2}) \subset A' \text{ et } h_{A'}(\mathbf{A}_{(\bmod A' - \varepsilon)/2}) \subset A\}.$$

(par convention, $\mathbf{A}_\Delta = \emptyset$ si $\Delta \leq 0$) et notons $\tau_{\mathcal{A},\text{forte}}$ la topologie sur \mathcal{A} pour laquelle les ensembles $V_\varepsilon(A)$, $\varepsilon > 0$, définissent un système fondamental de voisinages d'un anneau $A \in \mathcal{A}$ (nous aurions pu définir cette topologie à partir d'une distance sur \mathcal{A}).

REMARQUE

- $A' \in V_\varepsilon(A) \Leftrightarrow A \in V_\varepsilon(A')$
- $A' \in V_\varepsilon(A) \Rightarrow |\bmod A' - \bmod A| < \varepsilon$
- si $\varepsilon < 3/16 \bmod A$, alors $A' \in V_\varepsilon(A) \Rightarrow d_{\mathcal{A}}(A, A') = 0$ (la topologie $\tau_{\mathcal{A},\text{forte}}$ est plus fine que la topologie $\tau_{\mathcal{A},\text{faible}}$).

b) *Topologie sur \mathcal{D} .* — Posons $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$ si $r > 0$ et $\mathbf{D}_r = \emptyset$ si $r \leq 0$.

Donnons-nous $(D, x) \in \mathcal{D}$, et considérons une représentation conforme $h : \mathbf{D}_1 \rightarrow D$ vérifiant $h(0) = 0$. La *capacité conforme* de (D, x) est par définition le module du nombre complexe $h'(0)$ (nous noterons $c(D, x)$ cette capacité conforme). Il existe une unique représentation conforme $h : \mathbf{D}_{c(D, x)} \rightarrow D$, vérifiant $h(0) = x$ et $h'(0) = 1$, et nous noterons $h_{(D, x)}$ cette application.

Pour $\varepsilon > 0$, posons :

$$V_\varepsilon(D, x) = \{(D', x') \in \mathcal{D} \mid h_{(D, x)}(\mathbf{D}_{c(D, x) - \varepsilon}) \subset D' \text{ et } h_{(D', x')}(\mathbf{D}_{c(D', x') - \varepsilon}) \subset D \text{ et } d_{\overline{\mathbf{C}}}(x, x') < \varepsilon\},$$

et notons $\tau_{\mathcal{D},\text{forte}}$ la topologie sur \mathcal{D} pour laquelle les ensembles $V_\varepsilon(D, x)$, $\varepsilon > 0$, définissent un système fondamental de voisinages de la paire (D, x) de \mathcal{D} (remarquons que $c(D, x)$ tend vers $c(D', x')$ lorsque (D, x) tend vers (D', x') pour cette topologie).

Considérons une fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}^d$ et un anneau de Herman A pour R . Nous appellerons ici *période de A* le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $R^n(A) = A$ et $R^n|_A$ préserve l'orientation de A . L'application $R^n|_A$ est conjuguée, via une représentation conforme h de A , à une rotation irrationnelle dont l'angle est, au signe près, indépendant du choix de h . Nous appellerons *nombre de rotation de A* cet angle au signe près (nous noterons $\mathbf{Z} \times \{+, -\}$ le groupe qui agit sur \mathbf{R} par translations entières et changement de signe ; le nombre de rotation de A appartient donc à $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$).

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$\mathcal{AH}^{d,n} = \{(R, A) \mid R \in \mathcal{R}^d, A \in \mathcal{A},$$

et A est un anneau de Herman de période n pour $R\}$.

et notons $\pi_{\mathcal{A}}$ la projection canonique : $\mathcal{AH}^{d,n} \rightarrow \mathcal{R}^d$, $(R, A) \mapsto R$.

Pour $\alpha \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, posons

$$\mathcal{AH}_\alpha^{d,n} = \{(R, A) \in \mathcal{AH}^{d,n} \mid \text{le nombre de rotation de } A \text{ vaut } \alpha\}.$$

Munissons les ensembles $\mathcal{AH}^{d,n}$ et $\mathcal{AH}_\alpha^{d,n}$ de la topologie produit de la topologie usuelle sur \mathcal{R}^d et de la topologie $\tau_{\mathcal{A},\text{faible}}$ sur \mathcal{A} .

REMARQUE. — Si A et A' sont deux anneaux ouverts orientés de $\overline{\mathbf{C}}$, avec $d_{\mathcal{A}}(A, A') = 0$, les orientations de A et A' induisent chacune une orientation sur la courbe $h_A(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ (en effet, $h_A(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \subset h_{A'}(\mathbf{A}_{\text{mod } A'/4})$) et de même sur la courbe $h_{A'}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Nous dirons que les orientations de A et A' sont compatibles si, pour chacune de ces deux courbes (il suffit que ce soit vrai pour une des deux), les orientations induites par A et A' coïncident.

Pour tout $(R, A) \in \mathcal{AH}^{d,n}$, aux deux orientations possibles de A correspondent deux nombres de rotation avec des signes opposés. On peut choisir pour A l'orientation pour laquelle le nombre de rotation appartient à $(0; 1/2) \bmod \mathbf{Z}$. Ce choix est compatible avec la topologie dont nous avons muni $\mathcal{AH}^{d,n}$ au sens suivant. Pour toute paire $(R, A) \in \mathcal{AH}^{d,n}$, il existe un voisinage $V_{(R,A)}$ de (R, A) dans $\mathcal{AH}^{d,n}$ tel que, pour toute paire $(R', A') \in V_{(R,A)}$, on a : $d_{\mathcal{A}}(A, A') = 0$ et les orientations de A et A' sont compatibles au sens de la définition ci-dessus (ceci découle facilement de la dynamique de R^n dans A). Cette remarque permet, si on le désire, d'éliminer l'ambiguïté sur les signes des nombres de rotation associés aux anneaux de Herman de manière cohérente (dans la suite, nous maintiendrons cette ambiguïté sur les signes).

3.2.2. Conséquences du corollaire 1

PROPOSITION 7. — Pour tout $d \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $\alpha \in \mathcal{B}/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, il existe une variété complexe U de dimension $2d + 1$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AH}_\alpha^{d,n} & \xrightarrow{i_U} & U \\ \pi_{\mathcal{A}} \searrow & & \swarrow \pi_U \\ & \mathcal{R}^d & \end{array}$$

où i_U est continue et injective, et π_U est un difféomorphisme analytique local. De plus, $i_U(\mathcal{AH}_\alpha^{d,n})$ est une hypersurface analytique (éventuellement singulière) de U , c'est-à-dire qu'elle est localement définie comme l'ensemble des zéros d'une fonction analytique.

Démonstration. — Donnons-nous un couple (R, A) appartenant à $\mathcal{AH}_\alpha^{d,n}$. Soit $\varepsilon(A) > 0$ suffisamment petit pour que, pour tout $A' \in V_{\varepsilon(A)}(A)$ et $A'' \in V_{\varepsilon(A)}(A')$, on ait $d_{\mathcal{A}}(A', A'') = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, notons $B(R, \varepsilon)$ la boule de centre R et de rayon ε pour la distance $d_{\mathcal{R}}$ dans \mathcal{R}^d , et posons

$$\mathcal{AH}_\varepsilon(R, A) = \{(R', A') \in \mathcal{AH}_\alpha^{d,n} \mid d_{\mathcal{R}}(R, R') < \varepsilon \text{ et } d_{\mathcal{A}}(A, A') = 0\}.$$

D'après le corollaire 1, il existe $\varepsilon > 0$ (petit), dépendant de (R, A) , tel que l'ensemble $\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{AH}_\varepsilon(R, A))$ soit une hypersurface analytique (éventuellement singulière)

de $B(R, \varepsilon)$ et tel que, pour tout $(R', A') \in \mathcal{AH}_\varepsilon(R, A)$, on ait : $A' \in V_{\varepsilon(A)}(A)$. Fixons et notons $\varepsilon(R, A)$ un tel ε . Posons

$$U_{(R,A)} = B(R, \varepsilon(R, A)/2)$$

et notons \hat{U} la somme connexe de tous les ouverts $U_{(R,A)}$:

$$\hat{U} = \bigsqcup_{(R,A) \in \mathcal{AH}_\alpha^{d,n}} U_{(R,A)}.$$

Les éléments de \hat{U} sont les paires $(R_1, (R, A))$ telles que $(R, A) \in \mathcal{AH}_\alpha^{d,n}$ et $R_1 \in U_{(R,A)}$. Considérons la relation \sim sur \hat{U} définie par :

$$(R_1, (R, A)) \sim (R_2, (R', A')) \iff R_1 = R_2 \text{ et } d_{\mathcal{A}}(A, A') = 0.$$

ASSERTION. — *La relation \sim est une relation d'équivalence.*

Seule la transitivité est à justifier. Soient $(R_1, (R, A)), (R_2, (R', A')), (R_3, (R'', A''))$ appartenant à \hat{U} tels que

$$(R_1, (R, A)) \sim (R_2, (R', A')) \quad \text{et} \quad (R_2, (R', A')) \sim (R_3, (R'', A'')).$$

Il nous faut montrer que $d_{\mathcal{A}}(A, A'') = 0$. D'après le choix de $\varepsilon(R, A)$ et de $\varepsilon(R', A')$, on a $A' \in V_{\max(\varepsilon(A), \varepsilon(A'))}(A)$, et de même $A'' \in V_{\max(\varepsilon(A'), \varepsilon(A''))}(A')$. D'après le choix de $\varepsilon(A), \varepsilon(A'), \varepsilon(A'')$, ceci entraîne $d_{\mathcal{A}}(A, A'') = 0$ et l'assertion est démontrée.

Notons U le quotient de \hat{U} par la relation \sim , et munissons U de la topologie quotient. La projection canonique $\pi_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow U$ est ouverte, et U peut être muni d'une structure de variété complexe de dimension $2d + 1$, pour laquelle $\pi_{\hat{U}}$ est un difféomorphisme analytique local. Notons $i_{\hat{U}}$ l'injection canonique :

$$\mathcal{AH}_\alpha^{d,n} \hookrightarrow \hat{U}, \quad (R, A) \mapsto R \in U_{(R,A)}$$

et posons $i_U = \pi_{\hat{U}} \circ i_{\hat{U}}$. Les objets i_U, U , et π_U ont bien les propriétés énoncées. \square

REMARQUE. — On peut remarquer que i_U, U , et π_U sont uniques au sens suivant : si les triplets (i_U, U, π_U) et $(i_{U'}, U', \pi_{U'})$ ont tous deux les propriétés énoncées dans la proposition 7, alors il existe des voisinages V de $i_U(\mathcal{AH}_\alpha^{d,n})$ dans U et V' de $i_{U'}(\mathcal{AH}_\alpha^{d,n})$ dans U' et un difféomorphisme analytique $g : V \xrightarrow{\sim} V'$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{AH}_\alpha^{d,n} & \\ i_U \swarrow & & \searrow i_{U'} \\ V & \xrightarrow{g} & V' \\ \pi_U \searrow & & \swarrow \pi_{U'} \\ & \mathcal{R}^d & \end{array}$$

Ceci permet de définir une notion de « germe de voisinage analytique de $\mathcal{AH}_\alpha^{d,n}$ modulo difféomorphisme analytique » ; en particulier, les singularités de $i_U(\mathcal{AH}_\alpha^{d,n})$ sont

définies de manière canonique (indépendamment du choix de U, i_U). Ces singularités soulèvent des questions intéressantes ; par exemple, pour tout $\beta \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, on peut constater que l'ensemble $\mathcal{PP}_\beta^{d,1}$ (c'est-à-dire : point fixe de multiplicateur fixé, voir le début de cette section) ne présente pas de singularité. Pour $\alpha \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, l'ensemble $\mathcal{AH}_\alpha^{d,1}$ (c'est-à-dire : anneau de Herman de période 1 et de nombre de rotation fixé) peut-il présenter des singularités ?

D'après le théorème de Bruno (voir [4]), pour tout $\alpha \in \mathcal{B}/\mathbf{Z}$ et $(R, x) \in \mathcal{PP}_\alpha^{d,n}$, R possède un disque de Siegel (de période n , de nombre de rotation α) centré en x . Notons $D(R, x)$ ce disque de Siegel.

PROPOSITION 8

1) Pour tout $d \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $\alpha \in \mathcal{B}/\mathbf{Z}$, l'application

$$\mathcal{PP}_\alpha^{d,n} \rightarrow (\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}, \text{forte}}), \quad (R, x) \mapsto (D(R, x), x)$$

est continue (en particulier, la capacité conforme de $(D(R, x), x)$ dépend continûment de (R, x) dans $\mathcal{PP}_\alpha^{d,n}$).

2) Pour tout $d \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $\alpha \in \mathcal{B}/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, l'application

$$\mathcal{AH}_\alpha^{d,n} \rightarrow (\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}, \text{forte}}), \quad (R, A) \mapsto A$$

est continue (en particulier, le module de A dépend continûment de (R, A) dans $\mathcal{AH}_\alpha^{d,n}$).

Démonstration. — L'assertion 2 est une conséquence directe du corollaire 1. Démontrons l'assertion 1.

Soient $(R_0, x) \in \mathcal{PP}_\alpha^{d,n}$, $\alpha \in \mathcal{B}/\mathbf{Z}$. Notons h_0 l'unique représentation conforme : $\mathbf{D}_1 \rightarrow D(R_0, x_0)$ satisfaisant $h'_0(0) \in \mathbf{R}_+^*$. Pour R proche de R_0 , notons $x(R)$ l'unique point proche de x_0 fixe par R^n ($x(R)$ dépend analytiquement de R).

Choisissons une famille $(M_R)_{R \simeq R_0}$ de transformations de Möbius dépendant analytiquement de R , et vérifiant : $M_R(x_0) = x(R)$ (si $x_0 \neq \infty$, on peut poser : $M_R(z) = z + x(R) - x_0$).

Pour $R \simeq R_0$, posons $h_R = M_R \circ h_0$ et $F_R = h_R^{-1} \circ R^n \circ h_R$. Les applications F_R sont définies et analytiques dans les disques $\mathbf{D}_{1-\varepsilon(R)}$, où $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow R_0$, elles fixent 0 et elles convergent vers la rotation $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$ lorsque $R \rightarrow R_0$, uniformément sur tout compact de \mathbf{D}_1 .

Appliquons le théorème 1 à la famille $(F_R)_{R \simeq R_0}$ dans l'anneau $\mathbf{D}_{1-\delta} \setminus \mathbf{D}_{1-2\delta}$, où $\delta > 0$ est petit. D'après ce théorème, il existe un petit voisinage V_{R_0} de R_0 dans \mathcal{R}^d et une application analytique $\mu : V_{R_0} \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\mu(R_0) = 1$ telle que, pour tout $R \in V_{R_0}$, l'application $\mu(R)F_R : z \mapsto \mu(R)F_R(z)$ admette un anneau invariant A inclus dans $\mathbf{D}_{1-\delta} \setminus \mathbf{D}_{1-2\delta}$ et de nombre de rotation α . On en déduit que l'application $\mu(R)F_R$ est encore conjuguée à la rotation d'angle α sur la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus A$, et en particulier que $\mu(R)F'_R(0) = e^{2i\pi\alpha}$, ce qui entraîne $\mu(R) = e^{2i\pi\alpha}(R^{n'}(x(R)))^{-1}$.

Donc,

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(1) &= \{R \in V_{R_0} \mid R^{n'}(x(R)) = e^{2i\pi\alpha}\} \\ &= \pi_{\mathcal{P}}(\mathcal{PP}_{\alpha}^{d,n} \cap \{(R, x) \mid R \in V_{R_0} \text{ et } x \simeq x_0\}).\end{aligned}$$

Puisque δ peut être choisi arbitrairement petit, l'assertion 1 est établie. \square

3.2.3. Conséquences du corollaire 2. — Pour $s \in \Sigma$, posons

$$\mathcal{PP}_s^{d,n} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{B}_s/\mathbf{Z}} \mathcal{PP}_{\alpha}^{d,n}, \quad \mathcal{AH}_s^{d,n} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{B}_s/\mathbf{Z} \times \{+, -\}} \mathcal{AH}_{\alpha}^{d,n}.$$

Notons ρ l'application canonique :

$$\mathcal{AH}^{d,n} \rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})/\mathbf{Z} \times \{+, -\}, \quad (R, A) \mapsto \text{le nombre de rotation de } A.$$

PROPOSITION 9. — *Pour tout $d \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $s \in \Sigma$, il existe une variété complexe U de dimension $2d + 1$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AH}_s^{d,n} & \xrightarrow{i_U} & U \\ \pi_{\mathcal{A}} \searrow & & \swarrow \pi_U \\ & \mathcal{R}^d & \end{array}$$

où i_U est continue et injective et π_U est un difféomorphisme analytique local. Pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, $i_U(\mathcal{AH}_{\alpha}^{d,n})$ est une hypersurface analytique (éventuellement singulière) de U .

Notons ρ_U l'application : $i_U(\mathcal{AH}_s^{d,n}) \rightarrow \mathcal{B}_s/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$ définie par : $\rho_U \circ i_U = \rho$. L'application ρ_U est C^{∞} au sens de Whitney sur $i_U(\mathcal{AH}_s^{d,n})$; en outre, pour tout $z \in i_U(\mathcal{AH}_s^{d,n})$, ρ_U admet une extension C^{∞} locale $\hat{\rho}_U : V_z \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$ (V_z étant un voisinage de z dans U) telle que :

- pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s/\mathbf{Z} \times \{+, -\}$, $\hat{\rho}_U^{-1}(\alpha) = i_U(\mathcal{AH}_{\alpha}^{d,n}) \cap V_z$;
- le jet d'ordre infini de $\hat{\rho}_U$ en tout point de $i_U(\mathcal{AH}_s^{d,n}) \cap V_z$ est analytique et non identiquement nul.

PROPOSITION 10. — *Pour tout $d \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $s \in \Sigma$, les applications*

$$\mathcal{PP}_s^{d,n} \rightarrow (\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}, \text{forte}}), \quad (R, x) \mapsto (D(R, x), x)$$

et

$$\mathcal{AH}_s^{d,n} \rightarrow (\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}, \text{forte}}), \quad (R, A) \mapsto A$$

sont continues.

Les démonstrations de ces deux propositions sont très similaires à celles des propositions 7 et 8 (on utilise le corollaire 2 et le théorème 4 au lieu du corollaire 1 et du théorème 1).

3.3. Compléments arithmétiques

L'objectif de cette section est de démontrer la proposition 1, qui énonce quelques propriétés des ensembles \mathcal{B}_s .

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche ; on note m la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} , et si J désigne un intervalle de \mathbf{R} , on note indifféremment $|J|$ ou $m(J)$ la longueur de J ; dans la suite de cette section, les constantes universelles seront notées C .

À tout irrationnel α , on associe de la même manière qu'en 0.2 des suites $\alpha_k, a_k, \varepsilon_k, \beta_k, p_k, q_k, k \in \mathbf{N}$. Pour $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $k \in \mathbf{N}$, notons $T_{\alpha,k}$ l'application

$$x \mapsto \frac{p_k + \varepsilon_k p_{k-1} x}{q_k + \varepsilon_k q_{k-1} x} = a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k + \varepsilon_k x}}}.$$

En particulier, $T_{\alpha,k}(\alpha_k) = \alpha$ et $T_{\alpha,k}((0; 1/2))$ est égal à l'ensemble des nombres α'' satisfaisant, pour $0 \leq j \leq k$, $a_j'' = a_j$, $\varepsilon_j'' = \varepsilon_j$ (et donc $p_j'' = p_j$, $q_j'' = q_j$).

Puisque $|DT_{\alpha,k}(x)| = |q_k + \varepsilon_k q_{k-1} x|^{-2}$, on a :

$$(100) \quad \frac{1}{4q_k^2} \leq |DT_{\alpha,k}(x)| \leq \frac{4}{q_k^2}, \quad x \in (-1/2; 1).$$

Rappelons que Σ désigne l'ensemble des suites à termes strictement positifs, décroissantes, et qui convergent vers 0, et que, pour tout $s = (s_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \Sigma$, \mathcal{B}_s désigne le sous-ensemble de \mathcal{B} constitué des irrationnels tels que :

$$\Psi_k(\alpha) = \sum_{j=k}^{\infty} q_j^{-1} \log a_{j+1} \leq s_k.$$

Les trois propositions qui suivent entraînent les trois assertions de la proposition 1.

PROPOSITION 11. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s \in \Sigma$ tel que $m(\mathcal{B}_s \cap (0; 1)) > 1 - \varepsilon$.*

Démonstration. — Nous allons utiliser les nombres diophantiens. Rappelons qu'un irrationnel α satisfait une condition diophantienne d'ordre β , $\beta > 0$, s'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $q \in \mathbf{Z}$,

$$\|q\alpha\| > \frac{\gamma}{q^{1+\beta}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} DC_\beta(\gamma) &= \{\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \mid \text{pour tout } q \in \mathbf{Z}, \|q\alpha\| > \gamma/q^{1+\beta}\} \\ DC_\beta &= \bigcup_{\gamma>0} DC_\beta(\gamma). \end{aligned}$$

L'ensemble $\bigcap_{\beta>0} DC_\beta$ est de mesure pleine (voir [10]).

Donnons-nous $\alpha \in DC_\beta(\gamma)$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\|q_k \alpha\| = \beta_k > \frac{\gamma}{q_k^{1+\beta}};$$

donc, d'après (4),

$$\alpha_k > \frac{\gamma}{2q_k^\beta},$$

ce qui entraîne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(101) \quad \frac{\log a_{k+1}}{q_k} < C_{\beta, \gamma, \varepsilon} 2^{-(1-\varepsilon)k},$$

et donc, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\Psi_j(\alpha) < C'_{\beta, \gamma, \varepsilon} 2^{-(1-\varepsilon)j}.$$

En particulier, pour tout $\gamma > 0$, il existe $s \in \Sigma$ tel que $DC_1(\gamma) \subset \mathcal{B}_s$, ce qui termine la démonstration. \square

PROPOSITION 12. — *Pour tout $s \in \Sigma$, il existe $s' \in \Sigma$ tel que tout point de \mathcal{B}_s soit un point de densité de $\mathcal{B}_{s'}$. Plus précisément, considérons la suite s' définie par $s'_k = s_k + \sqrt{2}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$; alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s$,*

$$\frac{m((\alpha - u; \alpha + u) \cap \mathcal{B}_{s'})}{2\alpha} \rightarrow 1 \text{ lorsque } u \rightarrow 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{B}_s$.

Démonstration. — Donnons-nous $s \in \Sigma$ et considérons la suite s' définie par $s'_k = s_k + \sqrt{2}^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Donnons-nous $\alpha \in \mathcal{B}_s$, $u > 0$, et considérons l'intervalle $J = (\alpha - u, \alpha + u)$. Notons a_k, q_k, ε_k ($k \in \mathbb{N}$) les suites associées à α comme en 0.2. Soit $k(\alpha, u)$ l'unique entier k tel que

$$(102) \quad \frac{\delta}{q_{k+1}^2} \leq u < \frac{\delta}{q_k^2}$$

où δ est une constante universelle strictement positive qui sera choisie dans la suite. Remarquons que $k(\alpha, u) \rightarrow \infty$ lorsque $u \rightarrow 0$, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{B}_s$. Dans les calculs qui suivent, l'entier $k(\alpha, u)$ sera noté k .

Premier cas : $a_k \geq 3$. — (Le cas $a_k = 2$, bien qu'essentiellement identique, nécessitera des notations légèrement différentes, et nous le considérerons séparément). Supposons dans la suite que $\delta < 1/8$. Alors, d'après (100) et (102), $J \subset T_{\alpha, k}((-1/2; 1))$. Posons

$$\tilde{T} = T_{\alpha, k|(-1/2; 1)} \quad \text{et} \quad \tilde{J} = \tilde{T}^{-1}(J).$$

Notons $\{3, \dots\}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3 et posons : $\mathcal{I} = \{\{3, \dots\} \times \{-, +\}\} \sqcup \{(2, +)\}$. Pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathcal{I}$, posons

$$\begin{aligned} H_{0,n,\varepsilon}(x) &= -\frac{1}{n + \varepsilon x} \\ H_{1,n,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{n + \varepsilon x} \\ H_{2,n,\varepsilon}(x) &= 1 - \frac{1}{n + \varepsilon x} \end{aligned}$$

et pour $i \in \{0, 1, 2\}$, posons

$$K_{i,n,\varepsilon} = H_{i,n,\varepsilon}((0; 1/2)).$$

Pour tout $\alpha' \in \tilde{T}((-1/2; 1)) \setminus \mathbf{Q}$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha' \in \tilde{T}(K_{0,n,\varepsilon}) &\Leftrightarrow a'_k = a_k, \quad \varepsilon'_k = -\varepsilon_k, \quad a'_{k+1} = n, \quad \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon; \\ \alpha' \in \tilde{T}(K_{1,n,\varepsilon}) &\Leftrightarrow a'_k = a_k, \quad \varepsilon'_k = \varepsilon_k, \quad a'_{k+1} = n, \quad \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon; \\ \alpha' \in \tilde{T}(K_{2,n,\varepsilon}) &\Leftrightarrow a'_k = a_k + \varepsilon_k, \quad \varepsilon'_k = -\varepsilon_k, \quad a'_{k+1} = n, \quad \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

L'ensemble

$$\bigsqcup_{(i,n,\varepsilon) \in \{0,1,2\} \times \mathcal{I}} K_{i,n,\varepsilon}$$

est un ensemble de mesure totale de $(-1/2; 1)$. Supposons dans la suite que $\delta \leq 1/40$; alors, d'après (100), pour tout $n \geq 3$ et $\varepsilon \in \{-, +\}$, on a $\tilde{J} \cap K_{2,n,\varepsilon} = \emptyset$. Posons $\mathcal{J} = \{0, 1\} \times \mathcal{I} \sqcup (2, 2, +)$. On a

$$(103) \quad m(\tilde{J} \setminus \tilde{T}^{-1}(\mathcal{B}_{s'})) \leq \sum_{\substack{(i,n,\varepsilon) \in \mathcal{J} \\ K_{i,n,\varepsilon} \cap \tilde{J} \neq \emptyset}} m(K_{i,n,\varepsilon} \setminus \tilde{T}^{-1}(\mathcal{B}_{s'})).$$

LEMME 28. — Pour tout $(i, n, \varepsilon) \in \mathcal{J}$ vérifiant $n \leq a_{k+1} \exp(q_k \sqrt{2}^{-(k+1)})$, on a

$$m(K_{i,n,\varepsilon} \setminus \tilde{T}^{-1}(\mathcal{B}_{s'})) \leq \varepsilon_0(k) m(K_{i,n,\varepsilon})$$

avec $\varepsilon_0(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Démonstration. — Donnons-nous $\gamma > 0$ quelconque; nous allons montrer que, pour k assez grand (ne dépendant que de γ), on a :

$$\tilde{T} \circ H_{i,n,\varepsilon}((0; 1/2) \cap DC_1(\gamma)) \subset \mathcal{B}_{s'}.$$

Au vu de (100), ceci démontrera le lemme.

Donnons-nous $\alpha'' \in (0; 1/2) \cap DC_1(\gamma)$ et posons $\alpha' = \tilde{T} \circ H_{i,n,\varepsilon}(\alpha'')$. Il s'agit d'établir (si k est assez grand) que, pour tout $l \in \mathbf{N}$,

$$\Psi_l(\alpha') = \sum_{j=l}^{\infty} q_j'^{-1} \log a'_{j+1} \leq s'_l = s_l + \sqrt{2}^{-l}.$$

On vérifie (avec des notations évidentes) que :

- $a'_j = a_j$, $\varepsilon'_j = \varepsilon_j$, $q'_j = q_j$, pour $0 \leq j \leq k-1$;
- $a'_k = a_k + \varepsilon_k$ si $(i, n, \varepsilon) = (2, 2, +)$ et $a'_k = a_k$ sinon ;
- $a'_{k+1} = n$, $\varepsilon'_{k+1} = \varepsilon$;
- $a'_{k+1+j} = a''_j$, $\varepsilon'_{k+1+j} = \varepsilon''_j$, pour $j \geq 1$.

Supposons pour fixer les idées que (i, n, ε) soit différent de $(2, 2, +)$ et que l'on ait : $l \leq k-1$; dans ce cas,

$$\Psi_l(\alpha') = \sum_{j=l}^{k-1} q_j^{-1} \log a_{j+1} + q_k^{-1} \log n + \sum_{j=1}^{\infty} q'_{k+j}^{-1} \log a''_j.$$

Pour tout $j \geq 1$, on a

$$q'_{k+j}{}^{-1} \leq 2\beta'_{k+j-1};$$

or,

$$\beta'_{k+j-1} = \beta'_{k-1} \frac{1}{n + \varepsilon \alpha''} \beta''_{j-2} \leq 2^{-(k-1)} q''_{j-1}{}^{-1}.$$

On en déduit que

$$\Psi_l(\alpha') \leq s_l + q_k^{-1} \log \frac{n}{a_{k+1}} + 2^{-(k-2)} \Psi_0(\alpha'').$$

Donc, d'après les hypothèses,

$$\Psi_l(\alpha') \leq s_l + \sqrt{2}^{-(k+1)} + 2^{-(k-2)} C_\gamma$$

(où la constante C_γ ne dépend que de γ). Si k est assez grand, on a donc bien $\Psi_l(\alpha') \leq s'_l$.

Lorsque $l \geq k$, on obtient (plus simplement) le même résultat. Enfin, le cas particulier $(i, n, \varepsilon) = (2, 2, +)$ ne présente aucune difficulté. \square

Poursuivons la démonstration de la proposition 12.

ASSERTION. — Pour tout $(i, n, \varepsilon) \in \mathcal{J}$,

$$\tilde{J} \cap K_{i,n,\varepsilon} \neq \emptyset \Rightarrow m(K_{i,n,\varepsilon}) \leq C m(\tilde{J}).$$

Cette assertion découle facilement de l'estimée (102) (nous laissons le lecteur vérifier les détails). Au vu de cette assertion et du lemme précédent, l'estimée (103) entraîne

$$(104) \quad m(\tilde{J} \setminus \tilde{T}^{-1}(\mathcal{B}_{s'})) \leq C \varepsilon_0(k) m(\tilde{J}) + r$$

(la constante C n'est pas la même que celle de l'assertion précédente) avec

$$r = \sum_{\substack{(i,n,\varepsilon) \in \mathcal{J} \\ K_{i,n,\varepsilon} \cap \tilde{J} \neq \emptyset \\ n > a_{k+1} \exp(q_k \sqrt{2}^{-(k+1)})}} m(K_{i,n,\varepsilon}).$$

Remarquons que, d'une part, $r \leq \frac{C}{a_{k+1}} \exp(-q_k \sqrt{2}^{-(k+1)})$, et que, d'autre part, s'il existe $(i, n, \varepsilon) \in \mathcal{J}$ avec $n > a_{k+1} \exp(q_k \sqrt{2}^{-(k+1)})$ tel que $K_{i,n,\varepsilon} \cap \tilde{J} \neq \emptyset$, alors, pour k assez grand, on a $m(\tilde{J}) \geq 1/Ca_{k+1}$. On déduit donc de l'estimée (104) que

$$m(\tilde{J} \setminus \tilde{T}^{-1}(\mathcal{B}_{s'})) \leq \varepsilon_1(k)m(\tilde{J})$$

(où $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$) et d'après (100), ceci entraîne

$$(105) \quad m(J \setminus \mathcal{B}_{s'}) \leq 16 \varepsilon_1(k)m(J)$$

ce qui est l'estimée recherchée.

Second cas : $a_k = 2$. — Dans ce cas, posons :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_+(x) &= T_{\alpha,k}(x) = T_{\alpha,k-1}(1/(2+x)) \\ \tilde{T}_-(x) &= T_{\alpha,k-1}(1-1/(2-x)) \end{aligned}$$

et considérons l'application $\tilde{T} : (-1/2; 1) \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{T} \equiv \tilde{T}_- \text{ sur } (-1/2; 0] \text{ et } \tilde{T} \equiv \tilde{T}_+ \text{ sur } [0; 1).$$

Comme dans le cas $a_k \geq 3$, on vérifie que $J \subset \tilde{T}((-1/2; 1))$ et on pose $\tilde{J} = \tilde{T}^{-1}(J)$.

Définissons les applications $H_{(i,n,\varepsilon)}$ et les intervalles $K_{(i,n,\varepsilon)}$, $(i, n, \varepsilon) \in \mathcal{J}$, comme dans le cas $a_k \geq 3$. Alors, pour tout $\alpha' \in \tilde{T}((-1/2; 1) \setminus \mathbf{Q})$ et $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \alpha' \in \tilde{T}(K_{0,n,\varepsilon}) &\iff a'_{k-1} = a_{k-1} + \varepsilon_{k-1}, \varepsilon'_{k-1} = -\varepsilon_{k-1}, a'_k = 2, \varepsilon'_k = 1, \\ &\quad a'_{k+1} = n, \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon, \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon, \text{ (remarquons que } q'_k = q_k); \\ \alpha' \in \tilde{T}(K_{1,n,\varepsilon}) &\iff a'_{k-1} = a_{k-1}, \varepsilon'_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, a'_k = 2, \varepsilon'_k = 1, \\ &\quad a'_{k+1} = n, \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon; \\ \alpha' \in \tilde{T}(K_{2,n,\varepsilon}) &\iff a'_{k-1} = a_{k-1}, \varepsilon'_{k-1} = -\varepsilon_{k-1}, a'_k = 3, \varepsilon'_k = -1, \\ &\quad a'_{k+1} = n, \varepsilon'_{k+1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Avec ces notations, toutes les assertions qui ont été établies dans le cas $a_k \geq 3$ restent vraies, et on obtient, exactement de la même manière, l'estimée (105). La proposition 12 est donc démontrée. \square

PROPOSITION 13. — *Pour tout $s \in \Sigma$, on a les deux assertions suivantes.*

1) *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $s' \in \Sigma$ (dépendant de s et n) tel que*

$$\bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{\alpha \in \mathbf{H} \mid \operatorname{Im}(\alpha - \alpha_0) > |\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_0)|^n\} \subset \Omega_{\uparrow, s'}.$$

2) *Il existe $s' \in \Sigma$ et une fonction $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, nulle en 0, dont toutes les dérivées existent et s'annulent en 0 (s' et φ dépendent de s) telles que*

$$\bigcup_{\alpha_0 \in \mathcal{B}_s} \{\alpha \in \mathbf{H} \mid \operatorname{Im}(\alpha - \alpha_0) > \varphi(\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_0))\} \subset \Omega_{\uparrow, s'}.$$

Démonstration. — Fixons $s \in \Sigma$ et donnons-nous $s' \in \Sigma$ à choisir par la suite.

Notons $\tilde{\Sigma}$ l'ensemble des séries convergentes à termes strictement positifs. Pour tout $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, posons

$$\tilde{B}_\sigma = \{\alpha \in B \mid \text{pour tout } k \in \mathbf{N}, q_k^{-1} \log a_{k+1} \leq \sigma_k\}.$$

La stratégie consiste à déterminer, pour tout $\alpha \in B_s$, une série $\sigma(\alpha) \in \tilde{\Sigma}$ (dépendant de α) telle que l'ensemble $\tilde{B}_{\sigma(\alpha)}$ ait les propriétés de densité recherchées par rapport à α , puis à montrer que l'on peut choisir s' de manière à avoir $\bigcup_{\alpha \in B_s} \tilde{B}_{\sigma(\alpha)} \subset B_{s'}$.

Donnons-nous pour commencer $\sigma = (\sigma_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \tilde{\Sigma}$ satisfaisant à l'hypothèse

$$(106) \quad \sigma_k \geq 2^{-(k-1)} \log 2, \quad k \in \mathbf{N}$$

et donnons-nous une composante connexe J de $\mathbf{R} \setminus \tilde{B}_\sigma$, quelconque. Posons

$$k = \min\{l \in \mathbf{N} \mid \text{il existe } \alpha, \alpha' \text{ dans } J \text{ tels que } a_l(\alpha) \neq a_l(\alpha') \text{ ou } \varepsilon_l(\alpha) \neq \varepsilon_l(\alpha')\}.$$

Pour $0 \leq j \leq k-1$, posons $a_j = a_j(\alpha)$, $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\alpha)$, $p_j = p_j(\alpha)$, $q_j = q_j(\alpha)$ où α est un point quelconque de J . Nous allons définir des objets associés à J ; on distingue deux cas.

Premier cas : pour tous α et α' appartenant à J , $a_k(\alpha) = a_k(\alpha')$. — Posons $a_k = a_k(\alpha)$, où α est un point quelconque de J . Remarquons que $a_k \neq 2$ (autrement, pour tout $\alpha \in J$, on aurait $\varepsilon_k(\alpha) = 1$, ce qui serait en contradiction avec la définition de k). Posons

$$d = k \quad (d \text{ est la « profondeur » de } J);$$

$$c = a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k}}} \quad (c \text{ est le « centre » de } J);$$

$$T_d^+(x) = a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k + x}}};$$

$$T_d^-(x) = T_d^+(-x).$$

Second cas : il existe α et α' appartenant à J tels que $a_k(\alpha) \neq a_k(\alpha')$. — Remarquons que $\sup_{\alpha \in J} a_k(\alpha)$ est fini (notons a_k ce supremum) et que $q_{k-1}^{-1} \log a_k \leq s'_{k-1}$ (autrement, il existerait α, α' dans J tels que $\varepsilon_{k-1}(\alpha) \neq \varepsilon_{k-1}(\alpha')$, ce qui est impossible). On en déduit, du fait de l'hypothèse (106), que les réels

$$T_{k-1,\alpha}\left(\frac{1}{a_k - 1/(1 + \sqrt{2})}\right) \quad \text{et} \quad T_{k-1,\alpha}\left(\frac{1}{(a_k - 1) + 1/(1 + \sqrt{2})}\right)$$

n'appartiennent pas à J , et donc, par connexité de J , que

$$\inf_{\alpha \in J} a_k(\alpha) = a_k - 1,$$

et que, pour tout $\alpha \in J$,

- $a_{k+1}(\alpha) = 2$;
- si $a_k(\alpha) = a_k$, alors $\varepsilon_{k+1}(\alpha) = -1$, et si au contraire $a_k(\alpha) = a_k - 1$, alors $\varepsilon_{k+1}(\alpha) = 1$.

Dans ce cas, posons

$$\begin{aligned} d &= k+1; \\ c &= a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k - \frac{1}{2}}}}; \\ T_d^+(x) &= a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k - \frac{1}{2+x}}}}; \\ T_d^-(x) &= a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{\ddots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{a_k - 1 + \frac{1}{2+x}}}}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas examinés ci-dessus, il existe $\alpha^- \in [0; 1/2)$ et $\alpha^+ \in [0; 1/2)$ tels que

$$J = T_d^-([0; \alpha^-)) \cup T_d^+([0; \alpha^+)).$$

Notons q_d le dénominateur de c , et pour $\varepsilon \in \{+, -\}$, posons $a^\varepsilon = \langle (\alpha^\varepsilon)^{-1} \rangle + 1$ ($\langle x \rangle$ désigne la partie entière de x). On a

$$\frac{\log(a^\varepsilon)}{q_d} > \sigma_d$$

(en effet, dans le cas contraire, du fait de l'hypothèse (106), le point $T_d^\varepsilon(\frac{1}{a^\varepsilon + \sqrt{2}-1})$ n'appartiendrait pas à J , ce qui serait en contradiction avec la connexité de J). L'estimée précédente entraîne, d'après (100),

$$(107) \quad |J| < \frac{16}{q_d^2} \exp(-q_d \sigma_d).$$

Gardons les notations précédentes et donnons-nous $\alpha \in \mathcal{B}_s$ quelconque. On cherche à minorer $|\alpha - c|$. Distinguons deux cas.

Premier cas : $\alpha \in T_d^-([0; 1/2)) \cup T_d^+([0; 1/2))$. Alors, puisque $\alpha_d > (a_{d+1} + 1)^{-1}$, on a

$$(108) \quad |\alpha - c| > \frac{1}{6q_d^2 a_{d+1}}.$$

Second cas : $\alpha \notin T_d^-([0; 1/2)) \cup T_d^+([0; 1/2))$. Dans ce cas, $|\alpha - c| > 1/4q_d^2$ et l'estimée (108) ci-dessus est encore valable.

Faisons l'hypothèse supplémentaire :

$$(109) \quad \sigma_k \geq 96q_k^{-1} \log a_{k+1}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Ceci entraîne, au vu des estimées (107) et (108), que $|J| \leq |\alpha - c|/2$, ou encore que $\text{dist}(\alpha, J) \geq |\alpha - c|/2$. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 13 à proprement parler.

Démonstration de l'assertion 1. — Fixons $n \in \mathbf{N}$ et gardons les notations précédentes. L'estimée

$$(110) \quad |J| \leq \text{dist}(\alpha, J)^n$$

est entraînée, au vu des estimées précédentes, par

$$\sigma_d \geq nq_d^{-1} \log a_{d+1} + r_d^n$$

où $(r_k^n)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite ne dépendant que de n , à termes strictement positifs, vérifiant $\sum_{k \in \mathbf{N}} r_k^n < \infty$.

Ceci nous amène à choisir la suite $s' \in \Sigma$ comme suit :

$$s'_l = 2^{-(l-2)} \log 2 + 96s_l + ns_l + \sum_{k \geq l} r_k^n, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s$, si on associe à α la suite $\sigma(\alpha) \in \tilde{\Sigma}$ définie par

$$\sigma_k(\alpha) = \max(2^{-(k-1)} \log 2, 96q_k^{-1} \log a_{k+1}, nq_k^{-1} \log a_{k+1} + r_k^n), \quad k \in \mathbf{N},$$

on a $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma(\alpha)} \subset \mathcal{B}_{s'}$, les hypothèses (106) et (109) sont vérifiées, et pour toute composante connexe J de $\mathbf{R} \setminus \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma(\alpha)}$ (a fortiori pour toute composante connexe J de $\mathbf{R} \setminus \mathcal{B}_{s'}$), l'estimée (110) ci-dessus est valable, ce qui démontre l'assertion 1 de la proposition 13. \square

Démonstration de l'assertion 2. — Donnons-nous $\alpha \in \mathcal{B}_s$ et $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ comme plus haut, et posons, pour $u > 0$,

$$\mathcal{J}_\alpha(u) = \{ \text{composantes connexes } J \text{ de } \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathcal{B}}_\sigma \text{ telles que } J \cap (\alpha - u; \alpha + u) \neq \emptyset \};$$

$$d_\alpha(u) = \text{la plus petite profondeur des intervalles } J \text{ de } \mathcal{J}_\alpha(u).$$

On cherche à montrer que

$$(111) \quad \inf_{J \in \mathcal{J}_\alpha(u)} \frac{\log(|J|^{-1})}{\log(\text{dist}(\alpha, J)^{-1})} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad u \rightarrow 0.$$

Supposons que l'on ait :

$$(112) \quad \sigma_k \geq \sqrt{2}^{-k}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Alors on vérifie, au vu des estimées précédentes, que, pour tout $J \in \mathcal{J}_\alpha(u)$,

$$\frac{\log(|J|^{-1})}{\log(\text{dist}(\alpha, J)^{-1})} > C^{-1} \frac{\sigma_d}{q_d^{-1} \log a_{d+1}}.$$

Remarquons d'autre part que

$$\lim_{u \rightarrow 0} d_\alpha(u) = \infty$$

et que cette limite est uniforme par rapport à $\alpha \in \mathcal{B}_s$. La limite (111) est donc entraînée par

$$\frac{\sigma_k}{q_k^{-1} \log a_{k+1}} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow +\infty.$$

On choisit donc la suite $s' \in \Sigma$ comme suit : on fixe $s'' \in \Sigma$ quelconque vérifiant $s''_l / s_l \rightarrow +\infty$ lorsque $l \rightarrow +\infty$ et on pose :

$$s'_l = 2^{-(l-2)} \log 2 + 96s_l + \frac{\sqrt{2}^{-l}}{1 - \sqrt{2}} + s''_l, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Posons $k_0 = 0$ et définissons par récurrence une suite $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en posant, pour $n \geq 1$,

$$k_n = \min\{k \in \mathbf{N} \mid k > k_{n-1} \text{ et, pour tout } j \geq k, s'_j \geq 2^{2n+1} s_j\}.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_s$, si on associe à α la suite $\sigma(\alpha) \in \tilde{\Sigma}$ définie comme suit :

$$\sigma_k(\alpha) = \max(2^{-(k-1)} \log 2, 96q_k^{-1} \log a_{k+1}, \sqrt{2}^{-k}, 2^n q_k^{-1} \log a_{k+1}), \quad k_n \leq k < k_{n+1},$$

on a $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma(\alpha)} \subset \mathcal{B}_{s'}$, les hypothèses (106), (109), et (112) sont vérifiées, et l'assertion (111) (où l'ensemble $\mathcal{J}_\alpha(u)$ est défini à partir des intervalles du complémentaire de $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma(\alpha)}$, ou, a fortiori, du complémentaire de $\mathcal{B}_{s'}$) est valable, ce qui termine la démonstration de l'assertion 2. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. V. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math., 72 (1960), 385-404.
- [2] V. I. Arnold, *On the mappings of the circumference onto itself*, Translations A.M.S., vol. 46, 2nd series (1965), 213-284.
- [3] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 250, Springer-Verlag (1983).
- [4] A. D. Bruno, *Analytical form of differential equations*, Transactions Moscow Math. Soc. 25 (1971), 131-288 ; 26 (1972), 199-239.
- [5] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag (1991).
- [6] M. R. Herman, *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann*, Bull. Soc. Math. France, 112 (1984), 93-142.
- [7] M. R. Herman, *Simple proofs of local conjugacy theorems of diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number*, Bol. Soc. Bras. Mat. 16, 1 (1985), 45-53.
- [8] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland Mathematical Library, 2ème édition, (1973).
- [9] J. H. Hubbard, *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Memoirs of the A.M.S., vol. 4, No 166 (1976).
- [10] S. Lang, *Introduction to diophantine approximation*, Addison Wesley, New York (1966).
- [11] R. Mañé, *On the instability of Herman rings*, Inv. Math. 81 (1985), 459-471.
- [12] R. Pérez-Marco, J.-C. Yoccoz, *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*, Astérisque 222, (1994), 345-371.

- [13] E. Risler, *Dynamique des perturbations holomorphes des rotations*, Thèse de l'École Polytechnique (1996).
- [14] H. Rüßmann, *Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K1 (1972), 1-20.
- [15] H. Rüßmann, *On the frequencies of quasi-periodic solutions of analytic nearly integrable Hamiltonian systems*, Seminar on Dynamical Systems (St Pet. 91), S. Kuksin, V. Lazutkin, J. Pöschel eds., Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser (1994).
- [16] C. L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math., 43 (1942), 807-812.
- [17] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63-89.
- [18] J.-C. Yoccoz, *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynôme quadratique*, Astérisque 231 (1995), 3-88.
- [19] J.-C. Yoccoz, *Conjugaison des difféomorphismes analytiques du cercle*, manuscrit (1988).