MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS COURTÈS

Sur le transfert des intégrales orbitales pour les groupes linéaires (cas p-adique)

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 69 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1997_2_69__1_0>

SUR LE TRANSFERT DES INTÉGRALES ORBITALES POUR LES GROUPES LINÉAIRES (CAS p-ADIQUE)

François Courtès

Résumé. — Le but de cet article est de résoudre le problème du transfert des intégrales orbitales de $SL_n(F)$, où F est un corps local non archimédien de caractéristique 0, à ses groupes endoscopiques, dans le cas où la caractéristique résiduelle p de F est strictement supérieure à n. On démontre en fait le résultat suivant (qui l'implique) : si $G = GL_n(F)$ et $H = GL_m(E)$, où E est une extension de F modérément ramifiée de degré n/m, et si p est quelconque, le transfert de G à H marche pour les éléments semi-simples réguliers engendrant dans $M_n(F)$ une algèbre qui est produit d'extensions modérément ramifiées de F.

Au voisinage de l'unité, on peut développer les intégrales orbitales sur G et H en germes de Shalika ; il suffit donc de les comparer pour des fonctions appartenant à un certain espace bien choisi. Pour ces fonctions, on a un autre développement en germes, liés aux traces tordues d'induites de représentations de Steinberg. On calcule donc de telles traces, puis on établit des relations de récurrence (sur n) sur la valeur des intégrales orbitales, d'où l'on déduit des relations de récurrence sur la valeur de ces germes. On obtient également des relations de récurrence sur la valeur des facteurs de transfert ; toutes ces relations permettent de comparer la valeur des germes sur G et sur H ; le résultat cherché s'en déduit.

Abstract. — The purpose of this article is to solve the problem of the transfer of integral orbitals from $SL_n(F)$, where F is a local nonarchimedean field, to its endoscopic groups, when the residue characteristic p of F is strictly greater than n. In fact, one shows the following result (which implies the transfer) : with $G = GL_n(F)$ and $H = GL_m(E)$, E being a tamely ramified extension of F of degree n/m, and for any p, the transfer from G to H holds on the set of semisimple regular elements which generate in $M_n(F)$ an algebra which is the product of tamely ramified extensions of F.

In a neighborhood of unity, orbital integrals on G and H can be developed in Shalika germs; it is enough then to compare them for functions belonging to some well-chosen space. For these fonctions, one gets another development in germs, related to twisted traces of induced Steinberg representations. The computation of such traces, combined to recurrence relations (on n) on the value of orbital integrals, gives recurrence relations on the values of these germs. One gets recurrence relations on the value of transfer factors too; all these relations allow us to compare the value of germs on G and H, and the result follows.

Table des matières

INTRODUCTION

L'un des principaux problèmes de la théorie des formes automorphes est la comparaison de la formule des traces pour deux groupes réductifs différents, en particulier pour un groupe quasi-déployé et une de ses formes intérieures. Or on se rend rapidement compte que dans ce cas, il faut trouver une formule des traces stable, c'est-à-dire exprimée comme une somme sur les classes de conjugaison stable et non sur les classes de conjugaison sur F. Cela nécessite en particulier de vérifier le problème du transfert d'un groupe à ses groupes endoscopiques, ainsi que, dans le cas p-adique et non ramifié, le lemme fondamental. Or dans le cas p-adique, on n'a que des résultats partiels.

Le transfert pour SL_n a été vérifié pour la première fois par Labesse et Langlands, dans le cas $n = 2$ (cf. [**8**]). Il a ensuite été traité pour ε d'ordre n par Kazhdan (cf. [**7**]), puis dans le cas non ramifié par Waldspurger (cf. [**17**]).

Signalons que le problème traité ici a été également résolu par Waldspurger d'une manière entièrement différente. Ici, la méthode utilisée est purement locale ; de plus, le fait que le corps est de caractéristique 0 n'intervient que dans le lemme 4.1.2, qui utilise le théorème 0 de [**6**] (cf. [**17**, III.1]). Il devrait donc être possible d'adapter la démonstration à des corps de caractéristique non nulle.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique 0, de caractéristique résiduelle p ; soit ϖ une uniformisante de F, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p} = \varpi\mathcal{O}$ son idéal maximal.

Soit $G = GL_n(F)$, $G_1 = SL_n(F)$. D'après [**9**, III], les groupes endoscopiques de G_1 sont de la forme suivante : soit E une extension cyclique de F d'indice de ramification e et de degré résiduel f, telle que ef divise n ; soit $m = n/ef$, et soit des entiers strictement positifs $m_1, \dots, m_t$ dont la somme est m. Posons :

$$H = GL_{m_1}(E) \otimes \cdots \otimes GL_{m_t}(E) ;$$

soit H_1 le sous groupe des éléments h de H tels que $N_{E/F} \circ \text{dét}(h) = 1$. Alors H_1 est un groupe endoscopique de G_1, et on obtient tous les groupes endoscopiques de G_1 de cette façon. Dans ce qui suit, on s'intéressera uniquement aux groupes endoscopiques elliptiques (ie tels que $H = GL_m(E)$), le cas des autres groupes endoscopiques s'en déduisant facilement.

Soit ε un caractère de F^* de noyau $N_{E/F}(E^*)$. Comme l'extension E/F est cyclique de degré ef, ε est d'ordre ef ; de plus, sa restriction à $\mathcal{O}^*$ est d'ordre e.

Soit G^H l'ensemble des éléments g de G semi-simples réguliers tels qu'il existe $h \in H$ et un isomorphisme de F-algèbres entre $F[g]$ et $E[h]$ qui envoie g sur h ; on dit alors que h est une image de g dans H.

Soit $\gamma \in G^H$. Alors le centralisateur T_γ de γ dans G est un tore maximal de G, et pour tout $g \in T_\gamma$, on a $\varepsilon \circ \text{dét}(g) = 1$. On peut donc définir, pour tout f dans l'espace $C_c^\infty(G)$ des fonctions sur G localement constantes à support compact, l'intégrale orbitale (tordue par ε) de f en γ de la façon suivante :

$$I_G^\varepsilon(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} \varepsilon \circ \text{dét}(g)\, f\left(g^{-1}\gamma g\right) dg,$$

la mesure sur $T_\gamma \backslash G$ étant déduite des mesures de Haar sur T_γ et G.

On définit de la même façon pour $\gamma_H \in H$, $f' \in C_c^\infty(H)$, l'intégrale orbitale de f' en γ_H :

$$I_H(f', \gamma_H) = \int_{T_{\gamma_H} \backslash H} f'\left(g^{-1}\gamma_H g\right) dg.$$

Soit $\gamma \in G^H$, et soit γ_H une image de γ dans H. On définit le facteur de transfert $\Delta_\varepsilon(\gamma, \gamma_H)$ de G sur H de la façon suivante : soient $h, h' \in H$, et soient $h_1, \ldots, h_m$ (resp. $h'_1, \ldots, h'_m$) les valeurs propres de h (resp. h') dans une extension de E les contenant toutes. Posons :

$$r(h, h') = \prod_{i,j=1}^{m} \left(h_i - h'_j\right).$$

Alors on pose :

$$\Delta_{\varepsilon,1}(\gamma, \gamma_H) = \left| \prod_{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(E/F), \sigma \neq \tau} r(\sigma(\gamma_H), \tau(\gamma_H)) \right|_F^{1/2} \left|\text{dét}_G(\gamma)\right|_F^{(m-n)/2};$$

cette expression ne dépend en fait pas du choix de γ_H lorsque γ est elliptique. D'autre part, soit v un élément de F^n tel que les $\gamma^k(v)$, $0 \leq k \leq n-1$, engendrent F^n ; puisque γ est régulier, il en existe. Posons :

$$\Delta_{\varepsilon,2}(\gamma) = \varepsilon^{-1}\left(\text{dét}\left(v, \gamma(v), \ldots, \gamma^{n-1}(v)\right)\right),$$

le déterminant étant pris par rapport à la base canonique de F^n ; cette expression ne dépend pas du choix de v. On pose alors :

$$\Delta_\varepsilon(\gamma,\gamma_H) = \Delta_{\varepsilon,1}(\gamma,\gamma_H)\,\Delta_{\varepsilon,2}(\gamma)\,.$$

On vérifie aisément l'assertion suivante : si $g \in G$ et $h \in H$,

$$\Delta_\varepsilon\left(g^{-1}\gamma g, h^{-1}\gamma_H h\right) = \varepsilon \circ \text{dét}\,(g)\,\Delta_\varepsilon(\gamma,\gamma_H)\,.$$

Le problème du transfert consiste à montrer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, il existe $f_H \in C_c^\infty(H)$ telle que pour tout $\gamma \in G^H$ et pour toute image γ_H de γ dans H, on ait :*

$$I_H(f_H,\gamma_H) = \Delta_\varepsilon(\gamma,\gamma_H)\,I_G^\varepsilon(f,\gamma)\,.$$

Par restriction à G_1 et H_1, on obtient le transfert pour SL_n.

L'objet de cet article est de le démontrer dans le cas où p est strictement supérieur à n. Pour cela, on montre (théorème 5.2.1) l'égalité ci-dessus avec les deux restrictions suivantes :

- on suppose E/F modérément ramifiée (c'est-à-dire telle que e n'est pas multiple de p) ;
- on considère uniquement les γ tels que $F[\gamma]$ est un produit d'extensions modérément ramifiées de F.

Il est clair que ces deux conditions sont vraies quels que soient E et γ si $p > n$. La seconde est également vraie pour tout γ si $p > m$.

Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. On définit $\phi_\mathfrak{f}$ sur l'ensemble des éléments de H semi-simples G-réguliers par :

$$\phi_\mathfrak{f}(\gamma_H) = \Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H)\,I_G^\varepsilon(\mathfrak{f},\gamma)\,,$$

où γ est un élément de G^H tel que γ_H est une image de γ. L'égalité cherchée est équivalente à l'assertion suivante : il existe $\mathfrak{f}_H \in C_c^\infty(H)$ telle que $I_H(\mathfrak{f}_H,\gamma_H) = \phi_\mathfrak{f}(\gamma_H)$ pour tout $\gamma_H \in H$ semi-simple G-régulier. Voici une esquisse de la preuve, développée plus en détail dans la section 5.2.

En utilisant [**11**, lemme 2.2 A], on montre qu'il suffit de poser une condition locale au voisinage d'un point semi-simple quelconque $\gamma_{0,H}$ de H. On peut se ramener facilement au cas $\gamma_{0,H}$ elliptique, puis au cas $\gamma_{0,H} = 1$. Le problème se ramène alors à comparer les germes de Shalika sur H et les germes de Shalika tordus par ε sur G.

Pour cela, on va en fait comparer des germes d'un autre type. Avant de définir ceux-ci, nous aurons besoin de quelques préliminaires.

Soit $K = GL_n(\mathcal{O})$ le sous-groupe compact maximal standard de G, et soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de G : c'est le sous-groupe des éléments de K triangulaires supérieurs modulo $\mathfrak{p}$. Soit η un caractère de I de la forme suivante : si $h \in I$ et si $h_1, \ldots, h_n$ sont les termes diagonaux de h, on pose :

$$\eta(h) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon^{\epsilon(i)}(h_i),$$

où ϵ est une application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ dont toutes les fibres ont n/e éléments ; soit l'espace de fonctions :

$$\mathcal{F}^{\eta} = \left\{ \mathfrak{f} \in C_c^{\infty}(G) \mid \forall g \in G, \forall h, h' \in I, \mathfrak{f}\left(h'gh\right) = \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\left(h'\right) \eta\left(h'h\right) \mathfrak{f}(g) \right\}.$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères η de la forme ci-dessus ; on note $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ la somme directe des $\mathcal{F}^{\eta}$.

Pour tout entier $k > 0$, soit $\mathcal{P}(k)$ (resp. $\mathcal{P}^0(k)$) l'ensemble des partitions non ordonnées (resp. ordonnées) de k. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ de k et tout entier l, on note :

$$l\lambda = (l\lambda_1, \ldots, l\lambda_t);$$

$$\lambda^l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_t),$$

la séquence étant répétée l fois, et :

$$\lambda * l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_t),$$

chaque terme étant répété l fois ; ce sont des éléments de $\mathcal{P}(lk)$. On vérifie aisément que les trois opérations ci-dessus commutent entre elles.

Pour tout entier $k > 0$, soit St_k la représentation de Steinberg de $GL_k(F)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(k)$; on pose :

$$\mathrm{St}_{\lambda} = \mathrm{Ind}_{P(\lambda)}^{GL_k(F)}\left(\mathrm{St}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{St}_{\lambda_t}\right),$$

où $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur de Levi :

$$M(\lambda) = GL_{\lambda_1}(F) \times \cdots \times GL_{\lambda_t}(F).$$

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(m)$, posons :

$$\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon} = \mathrm{Ind}_{P\left((m)^{ef}\right)}^{G}\left(\mathrm{St}_{\lambda} \otimes (\varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t})\,\mathrm{St}_{\lambda} \otimes \cdots \otimes \left(\varepsilon^{ef-1} \circ \mathrm{d\acute{e}t}\right)\mathrm{St}_{\lambda}\right),$$

et notons $V_{\lambda}^{\varepsilon}$ son espace. $\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}$ est une induite de représentation irréductible de carré intégrable ; d'après **[19]**, elle est irréductible, de plus, elle vérifie la propriété suivante :

$$\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon} \simeq (\varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t})\,\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon};$$

il existe donc un opérateur d'entrelacement $A_{\lambda}^{\varepsilon} \in GL\left(V_{\lambda}^{\varepsilon}\right)$, unique à une constante multiplicative près, tel que l'on ait, pour tout $g \in G$:

$$A_{\lambda}^{\varepsilon} \circ \mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}(g) = \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}(g)^{-1}\,\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}(g) \circ A_{\lambda}^{\varepsilon}.$$

Fixons, pour tout λ, un tel opérateur. Pour tout $v \in \mathbb{Z}$, soit $G^H_{c,vf}$ l'ensemble des éléments de G^H compacts (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres dans la clôture algébrique de F ont même valuation) et dont la valuation du déterminant (dans G) est vf. Soit enfin pour tout $k \in \mathbb{Z}$, 1_k la fonction caractéristique des éléments de G dont la valuation du déterminant vaut k, et 1_c la fonction caractéristique des éléments compacts de G. On a la proposition suivante (4.1.1) :

PROPOSITION 1. — *Soit $v \in \mathbb{Z}$. Posons :*

$$l = \frac{m}{\operatorname{pgcd}(m, v)}.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, il existe une unique fonction :

$$s^\varepsilon_\lambda : G^H_{c,vf} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que pour tout $\gamma \in G^H_{c,vf}$, et tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^\mathcal{E}$, on ait :

$$I^\varepsilon_G(\mathfrak{f}, \gamma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} s^\varepsilon_\lambda(\gamma) \operatorname{tr} A^\varepsilon_{l\lambda} \circ \operatorname{St}^\varepsilon_{l\lambda}(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}).$$

On a un résultat analogue sur H, en considérant cette fois l'espace $\mathcal{H}_H$ des fonctions sur H biinvariantes par le sous-groupe d'Iwahori standard I_H de H ; on obtient donc des fonctions $s_{\lambda,H}$, $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$.

Pour $v = 0$, soit $S_{2,G}$ (resp. $S_{2,H}$) l'espace vectoriel engendré par les $\Delta_{\varepsilon,G} s^\varepsilon_{\lambda,G}$ (resp. les $s_{\lambda,H}$) ; $S_{2,G}$ ne dépend pas du choix des $A^\varepsilon_{l\lambda}$. En les normalisant convenablement (comme décrit dans 1.4), on obtient la proposition suivante (5.1.1) :

PROPOSITION 2. — *Soit $v \in \mathbb{Z}$, et soit $\gamma \in G^H_{c,vf}$ tel que $F[\gamma]/F$ est produit d'extensions modérément ramifiées de F, et γ_H une image de γ dans H. On a pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$:*

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H)\, s^\varepsilon_{\lambda,G}(\gamma) = \varepsilon_1 s_{\lambda,H}(\gamma_H),$$

où ε_1 vaut ± 1 et ne dépend pas de λ.

ε_1 sera défini plus précisément par la suite. Un corollaire immédiat de cette proposition est que $S_{2,G} = S_{2,H}$. On vérifie enfin que ces espaces sont bien égaux respectivement aux espaces $S_{1,G}$ et $S_{1,H}$ engendrés par les germes de Shalika sur G et sur H, ce qui permet de conclure.

Pour montrer la première proposition, on procède de la manière suivante : on déduit d'un théorème de Kazhdan que l'on peut écrire la distribution $I^\varepsilon_G(\cdot, \gamma)$ en fonction des $\operatorname{tr} A_\pi \circ \pi(1_{vf} 1_c \cdot)$, où π est une représentation irréductible tempérée de G telle que $\pi \simeq (\varepsilon \circ \text{dét})\, \pi$ et A_π est l'opérateur d'entrelacement correspondant, défini à une constante multiplicative près. Lorsque, pour $\eta \in \mathcal{E}$, l'espace $V(\pi)^\eta$ des vecteurs v de l'espace de π vérifiant pour tout $h \in I$:

$$\pi(h)\, v = \eta(h)^{-1}\, v$$

est trivial (cette condition ne dépend pas du choix de η), une telle trace est nulle; lorsque $V(\pi)^\eta$ est non trivial, elle est égale à une trace de la forme $\operatorname{tr} A^\varepsilon_{l\lambda} \circ \mathrm{St}^\varepsilon_{l\lambda}(1_{vf}1_{c\cdot})$ multipliée par une constante. Il suffit alors de vérifier que ces traces sont linéairement indépendantes pour en déduire la proposition.

On montre la deuxième proposition par récurrence sur n, le cas $n = m = 1$ étant trivial. Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

- on calcule les traces tordues des induites de représentations de Steinberg pour des éléments de $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ bien choisis (propositions 3.3.1, 3.4.2 et lemmes 2.4.1 et 2.4.3) ;
- on établit des relations de récurrence sur la valeur des intégrales orbitales de ces mêmes fonctions, pour γ elliptique régulier et $F[\gamma]/F$ modérément ramifiée (propositions 4.2.2 et 4.3.1) ;
- on déduit des deux étapes précédentes des relations de récurrence sur la valeurs des germes pour ces mêmes γ (propositions 4.2.18 et 4.3.2) ;
- on établit des relations de récurrence sur la valeur des facteurs de transfert, toujours pour γ elliptique régulier et $F[\gamma]/F$ modérément ramifiée (lemmes 4.2.20 et 4.3.3) ;
- on en déduit, toujours pour ces mêmes γ, l'égalité de la proposition par récurrence ;
- on traite enfin le cas γ non elliptique par passage à un Levi convenable.

La récurrence s'effectue de la manière suivante : lorsque γ est elliptique et $F[\gamma]/F$ est modérément ramifiée, il existe d'après **[5]** des éléments δ et γ' de $F[\gamma]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\gamma = \delta\gamma'$;
- γ' est un élément de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{F[\gamma]}$ de $F[\gamma]$ congru à 1 modulo l'idéal maximal ;
- si on pose $F' = F[\delta]$, δ est F'/F-cuspidal, c'est-à-dire :
  - la valuation a de δ dans F' et l'indice de ramification b de F'/F sont premiers entre eux ;
  - si ϖ est une uniformisante de F, l'image de $\varpi^{-a}\delta^b$ dans le corps résiduel de F' engendre celui-ci sur celui de F.

La décomposition n'est pas unique mais F' et a le sont. Soit c le degré résiduel de F'/F ; posons $n' = n/bc$, $G' = GL_{n'}(F')$. La proposition 4.2.2 établit une relation entre des intégrales orbitales sur G pour γ et des intégrales orbitales sur G' pour γ' ; la proposition 4.2.20 fait la même chose pour les facteurs de transfert.

La récurrence ci-dessus ne marche pas dans tous les cas : en effet, lorsque γ est lui-même un élément de $\mathcal{O}_{F[\gamma]}$ congru à 1 modulo l'idéal maximal, on a $F' = F$, et $\gamma = \gamma'$ à un élément de $1 + \mathfrak{p}$ près. Il est donc nécessaire de traiter séparément ce cas : on peut alors écrire $\gamma = \gamma_0 \, (1 + \delta\gamma')$, avec :

- γ_0 est un élément de $1 + \mathfrak{p} \subset F$;
- γ' est un élément de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{F[\gamma]}$ de $F\,[\gamma]$ congru à 1 modulo l'idéal maximal ;
- si $F' = F\,[\delta]$, δ est F'/F-cuspidal, et F' est strictement plus grand que F.

Posons $\gamma'' = \delta\gamma'$; la proposition 4.3.1 établit une relation entre des intégrales orbitales sur G pour γ et pour γ'' ; on obtient également la proposition 4.3.3 pour les facteurs de transfert. Les deux cas étudiés ci-dessus suffisent à faire marcher la récurrence dans tous les cas ; on en déduit la deuxième proposition.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1. Partitions

Soit pour tout entier k, $\mathcal{P}(k)$ l'ensemble des partitions non ordonnées de k, et $\mathcal{P}^0(k) \subset \mathcal{P}(k)$ l'ensemble des partitions ordonnées de k. Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(k)$, on notera $t(\lambda) = t$ le nombre de termes de λ.

A toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(k)$, on peut associer une décomposition de $\{1, \ldots, k\}$ en intervalles disjoints $J_1, \ldots, J_t$ de la manière suivante : pour tout i, on a :

$$J_i = \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \right\}.$$

On sait qu'il existe une bijection canonique entre $\mathcal{P}(n)$ et l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard (c'est-à-dire contenant le sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures) de G : pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, on notera donc $P(\lambda)$ le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures par blocs dont les blocs diagonaux sont de tailles respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$.

Enfin, soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, et soit, pour tout i,

$$\alpha_{(i)} = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,s_i}) \in \mathcal{P}(\lambda_i).$$

On note :

$$\left(\alpha_{(1)}, \ldots, \alpha_{(t)}\right) = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,s_1}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{t,s_t}) \in \mathcal{P}(n).$$

1.2. Groupe de Weyl, groupe Ω

Soit $W = W_n$ le groupe de Weyl de G, que l'on identifiera au sous-groupe de G composé des matrices de permutation. Soit également $\Omega = \Omega_n$ le sous-groupe des éléments de G de la forme $w\varpi^z$, avec $w \in W$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$

et :

$$\varpi^z = \begin{pmatrix} \varpi^{z_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{z_n} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\Omega = \Omega_0 \rtimes \zeta^{\mathbb{Z}}$, où Ω_0 est l'ensemble des éléments de Ω dont la valuation du déterminant est nulle, et où :

$$\zeta = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \varpi & & & \end{pmatrix}.$$

Ω_0 est engendré par $s_1, \ldots, s_n$, où $s_1, \ldots, s_{n-1}$ sont les matrices de transposition qui engendrent W, et où :

$$s_n = \begin{pmatrix} & & & & \varpi^{-1} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \varpi & & & & \end{pmatrix};$$

on vérifie que l'on a pour tous i, j (les indices étant pris modulo n) :

$$s_i^2 = 1;$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1};$$

$$s_i s_j = s_j s_i$$

si $j \neq i-1, i, i+1$; ζ agit sur Ω_0 par :

$$\zeta^{-1} s_i \zeta = s_{i+1}$$

pour tout i, les indices étant pris modulo n. On peut assimiler W au groupe de permutations S_n ; de plus, on démontre aisément le lemme suivant :

LEMME 1.2.1. — *Il existe un isomorphisme ψ entre Ω et le sous-groupe S' du groupe $S(\mathbb{Z})$ des permutations de $\mathbb{Z}$ constitué des éléments x tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$x(k+n) = x(k) + n.$$

ψ est défini de la manière suivante :

- *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\psi(s_i)$ est l'élément de $S(\mathbb{Z})$ qui permute $i + kn$ et $i + 1 + kn$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$;*
- *$\psi(\zeta)$ est l'application $i \mapsto i - 1$.*

On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $w \in W$:

$$(\psi(w\varpi^z))(i) = \psi(w)(i) - z_i n.$$

On utilisera ψ pour identifier Ω à S'.

Soit $x \in \Omega$; on note $l(x)$ la longueur de x. On a, en utilisant l'identification ci-dessus :

$$l(x) = \operatorname{card}\{(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{Z} \mid i < j, x(i) > x(j)\}.$$

Pour tout entier k, on notera Ω_k et W_k les sous-groupes de $GL_k(F)$ analogues à Ω et W. De plus, soit $M = M(\lambda)$ un sous-groupe de Levi standard de G ; on notera également Ω_M, W_M ou $\Omega_\lambda, W_\lambda$ les sous-groupes de M analogues. On notera également Ω_H et W_H les sous-groupes de H analogues.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, et $M = M(\lambda)$. Si $x \in \Omega_M$, on notera $l_M(x)$ la longueur de x en tant qu'élément de Ω_M : si on pose $x = (x_1, \ldots, x_t)$, on a :

$$l_M(x) = \sum_{i=1}^{t} l(x_i).$$

Si $x \in W_M$, on a $l_M(x) = l(x)$; ce n'est pas vrai pour $x \in \Omega_M$ quelconque, mais on calcule, si $x = w_x\varpi^z$, $w_x \in W_M$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$:

$$l(x) - l_M(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} |z_i - z_j|,$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des couples (i,j) tels que $i < j$ et que i et j ne sont pas dans le même intervalle pour la décomposition de $\{1, \ldots, n\}$ suivant λ.

On a enfin les égalités :

$$G = \bigsqcup_{x\in\Omega} IxI;$$

$$K = \bigsqcup_{w\in W} IwI.$$

1.3. Algèbre de Hecke

Soit η_0 le caractère de I défini par, si $g = (g_{ij})_{i,j} \in I$:

$$\eta_0(g) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon^{\epsilon_0(i)}(g_{ii}),$$

avec :

$$(\epsilon_0(1), \ldots, \epsilon_0(n)) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, \ldots, e-1, \ldots, e-1),$$

chaque terme étant répété n/e fois. C'est un élément de $\mathcal{E}$; de plus, pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, si ϵ est l'application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{0, \ldots, e-1\}$ associée à η, $(\epsilon(1), \ldots, \epsilon(n))$ est l'image de $(\epsilon_0(1), \ldots, \epsilon_0(n))$ par une permutation.

Soit $\eta \in \mathcal{E}$, et soit ϵ l'application de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{0,\ldots,e-1\}$ associée à η. Pour tout $w \in W$, on notera $w(\eta)$ l'élément de $\mathcal{E}$ associé à $\epsilon \circ w^{-1}$.

Soit $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, et soit I_λ le sous-groupe parahorique des éléments de K triangulaires par blocs modulo $\mathfrak{p}$, dont les blocs diagonaux sont de taille respective $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$. Soit $\eta \in \mathcal{E}$; on peut étendre η à I_λ à la condition suivante : si $J_1,\ldots,J_t$ est la décomposition de $\{1,\ldots,n\}$ en intervalles associée à λ, et si ϵ est l'application de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{0,\ldots,e-1\}$ associée à η, ϵ est constante sur chacun des J_i. On pose alors, pour $h \in I_\lambda$ dont les blocs diagonaux sont $h_1,\ldots,h_t$:

$$\eta(h) = \prod_{i=1}^{t} \varepsilon^{\epsilon(j_i)} \circ \text{dét}(h_i),$$

où pour tout i, j_i est un élément de J_i arbitraire.

Pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, soit $\mathcal{H}^\eta$ l'algèbre de Hecke des fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ telles que pour tout $g \in G$ et tous $h, h' \in I$, on ait :

$$f(h'gh) = \eta(hh')\, f(g).$$

Soit également $\mathcal{F}^\eta$ l'espace des fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ telles que pour tout $g \in G$ et tous $h, h' \in I$, on ait :

$$f(h'gh) = \varepsilon \circ \text{dét}(h')\, \eta(hh')\, f(g).$$

On posera $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^{\eta_0}$, $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^{\eta_0}$. Posons également :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{E}} = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{E}} \mathcal{F}^\eta.$$

Soit $\eta \in \mathcal{E}$, et soit W_η le sous-groupe des éléments w de W vérifiant $w(\eta) = \eta$. Il existe un isomorphisme canonique de W_η dans $W_{(n/e)^e}$ défini de la manière suivante : soit, pour tout $i \in \{0,\ldots,e-1\}$, $J_{\eta,i}$ l'ensemble des n/e éléments j de $\{1,\ldots,n\}$ tels que $\epsilon(j) = i$. Soit $w \in W_\eta$; alors w laisse stable les $J_{\eta,i}$, et on peut donc écrire $w = (w_0,\ldots,w_{e-1})$, où pour tout i, w_i est un élément du groupe de permutations de $J_{\eta,i}$, qui s'identifie canoniquement à $W_{n/e}$ au moyen de l'unique bijection croissante de $J_{\eta,i}$ dans $\{0,\ldots,e-1\}$.

On notera Ω_η le sous-groupe des éléments de Ω du type $w\varpi^z$, avec $w \in W_\eta$ et $z \in \mathbb{Z}^n$. On peut étendre l'isomorphisme canonique entre W_η et $W_{(n/e)^e}$ en un isomorphisme entre Ω_η et $\Omega_{(n/e)^e}$; pour $x \in \Omega_\eta$, on définit la longueur $l_\eta(x)$ de x dans Ω_η comme la longueur dans $\Omega_{(n/e)^e}$ de l'image de x par cet isomorphisme.

Soit $f \in \mathcal{H}^\eta$, $x \in \Omega$. Il est facile de voir que si $x \notin \Omega_\eta$, $f(x) = 0$. Soit donc, pour tout $x \in \Omega_\eta$, $T_{x,\eta}$ l'unique élément de $\mathcal{H}^\eta$ dont le support est IxI et tel que $T_{x,\eta}(x) = 1$; les $T_{x,\eta}$ constituent une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}^\eta$.

Plus précisément, soit, pour tout k, $\mathcal{H}_k$ l'algèbre de Hecke des fonctions sur $GL_k(F)$ biinvariantes par I_k ; d'après **[2]**, il existe un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}^\eta$ et $\left(\mathcal{H}_{n/e}\right)^{\otimes e}$ défini de la manière suivante : soit, pour tout $x' \in \Omega_{n/e}$, $T_{x'}$ la fonction caractéristique de $I_{n/e}x'I_{n/e}$. Pour tout $x \in \Omega_\eta$ dont l'image dans $\Omega_{(n/e)^e}$ par l'isomorphisme canonique défini plus haut est $(x_0, \ldots, x_{e-1})$, l'image de $T_{x,\eta}$ est :

$$q^{1/2\left(l(x)-\sum_{i=0}^{e-1} l(x_i)\right)} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon \circ \text{dét}\,(x_i)^{-i} \bigotimes_{i=0}^{e-1} T_{x_i}.$$

L'algèbre $\mathcal{H}_{n/e}$ est engendrée par des éléments $T_1, \ldots, T_{n/e-1}$ et $X_1, \ldots, X_{n/e}$; de plus, pour tout i, T_i est la fonction caractéristique de Is_iI, et les T_i engendrent la sous-algèbre $\mathcal{H}_{n/e,W}$ des éléments de $\mathcal{H}_{n/e}$ à support dans $K_{n/e}$. Alors $\mathcal{H}^\eta$ est engendrée par des éléments $X_{i,\eta}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et des éléments $T_{i,\eta}$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ non multiple de n/e tels que pour tout $i = jn/e + k$, $1 \leq k \leq n/e$, l'image de $X_{i,\eta}$ par l'isomorphisme défini plus haut est :

$$1 \otimes \cdots \otimes X_k \otimes \cdots \otimes 1,$$

le $j+1$-ème terme valant X_k, et si $k < \dfrac{n}{e}$, l'image de $T_{i,\eta}$ est :

$$1 \otimes \cdots \otimes T_k \otimes \cdots \otimes 1,$$

le $j+1$-ème terme valant T_k. En particulier, si $\eta = \eta_0$, pour tout i non multiple de n/e, en posant $i = i'n/e + i''$, $1 \leq i'' \leq n/e - 1$, T_{i,η_0} n'est autre que $\varepsilon\,(-1)^{i'}\,T_{s_i,\eta_0}$.

Soit $\mathcal{H}_W^\eta$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{H}^\eta$ à support dans K ; si $\eta = \eta_0$, on posera $\mathcal{H}_W^0 = \mathcal{H}_W^{\eta_0}$. La restriction à $\mathcal{H}_W^\eta$ de l'isomorphisme entre $\mathcal{H}^\eta$ et $\left(\mathcal{H}_{n/e}\right)^{\otimes e}$ défini plus haut envoie $\mathcal{H}_W^\eta$ sur $\left(\mathcal{H}_{n/e,W}\right)^{\otimes e}$: en effet, $\mathcal{H}_W^\eta$ contient tous les $T_{i,\eta}$, donc son image contient $\left(\mathcal{H}_{n/e,W}\right)^{\otimes e}$, et les deux sous-algèbres sont de même dimension $((n/e)!)^e$.

Montrons ensuite le lemme suivant :

LEMME 1.3.1. — *Soit G un groupe réductif connexe, P_0 un parabolique minimal de G, T un tore déployé maximal de G contenu dans P_0, et W le groupe de Weyl de G relativement à T ; soit M un sous-groupe de Levi de G (pas forcément standard) contenant T et W_M le groupe de Weyl de M relativement à T. Alors pour toute classe v de W/W_M, il existe un unique $w \in v$ de longueur minimale.*

Démonstration. — Soit $v \in W/W_M$, et soit w l'unique élément de v tel que pour toute racine simple α de M, $w\alpha > 0$ (le tout relativement à P_0). Alors w est l'unique élément de longueur minimale de v ; en effet, on le déduit par récurrence de l'assertion suivante : si $w' \in v$, et si α est une racine simple de M telle que $w'\alpha > 0$, alors $l\,(w's_\alpha) > l\,(w')$.

En effet, soit Σ l'ensemble des racines de G. Il existe un système Σ' de représentants des classes d'équivalence de Σ modulo $\mathbb{Z}\alpha$ tel que pour tout $\beta \in \Sigma'$, la classe contenant β est de la forme :

$$\{\beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + t_\beta \alpha\};$$

il est clair qu'un tel système est unique. On a donc :

$$l(w') = \sum_{\beta \in \Sigma'} \operatorname{card} \left\{ z \in \{0, \ldots, t_\beta\} \mid \beta + z\alpha > 0, w'(\beta + z\alpha) < 0 \right\}.$$

D'autre part, s_α préserve les classes d'équivalence de Σ modulo $\mathbb{Z}\alpha$, et, puisque $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, agit dessus de la manière suivante : pour tout $\beta \in \Sigma'$ et tout $t \in \{0, \ldots, t_\beta\}$, on a :

$$s_\alpha(\beta + t\alpha) = \beta + (t_\beta - t)\alpha.$$

On en déduit :

$$l(w's_\alpha) = \sum_{\beta \in \Sigma'} \operatorname{card} \left\{ z \in \{0, \ldots, t_\beta\} \mid \beta + z\alpha > 0, w'(\beta + (t_\beta - z)\alpha) < 0 \right\}.$$

Soit, pour tout β, a_β (resp. b_β) le terme correspondant de la première (resp. seconde) somme ci-dessus. Soit t'_β le plus petit élément de $\{0, \ldots, t_\beta\}$ tel qu'on ait $\beta + t'_\beta\alpha > 0$ (s'il n'en existe pas, on pose $t'_\beta = t_\beta + 1$), et t''_β le plus petit élément de $\{0, \ldots, t_\beta\}$ tel que l'on ait $w'\left(\beta + t''_\beta\alpha\right) > 0$ (s'il n'en existe pas, on pose $t''_\beta = t_\beta + 1$). On a toujours :

$$a_\beta = \sup\left(0, t''_\beta - t'_\beta\right).$$

Pour b_β, distinguons deux cas :

– si $t_\beta - t''_\beta < t'_\beta$, on a :

$$b_\beta = t_\beta - t'_\beta + 1,$$

et donc $a_\beta \leq b_\beta$ puisque $t''_\beta \leq t_\beta + 1$;

– si $t_\beta - t''_\beta \geq t'_\beta$, on a :

$$b_\beta = t_\beta - \left(t_\beta - t''_\beta + 1\right) + 1 = t''_\beta,$$

et donc là encore $a_\beta \leq b_\beta$.

On a donc dans tous les cas $a_\beta \leq b_\beta$. De plus, si β est dans la classe de α, puisque $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et $w'(\alpha) > 0$, on a $a_\beta = 0$ et $b_\beta > 0$; on en déduit :

$$l\left(w's_\alpha\right) > l\left(w'\right)$$

et l'assertion est démontrée. □

COROLLAIRE 1.3.2. — *Soit $\eta, \eta' \in \mathcal{E}$, et soit w l'unique élément de W tel que :*

– *pour tout* i, $w(J_{\eta,i}) = J_{\eta',i}$;

– w *est croissant sur chacun des* $J_{\eta,i}$.

Alors on a $w(\eta) = \eta'$, *et* w *est l'unique élément de longueur minimale parmi ceux vérifiant cette propriété.*

Démonstration. — Le fait que $w(\eta) = \eta'$ se déduit des définitions. De plus, on a : $w' \in W$ est tel que $w'(\eta) = \eta'$ si et seulement si il existe $w'' \in W_\eta$ tel que $w' = ww''$. La deuxième assertion se déduit donc du lemme précédent. □

Soit $\eta, \eta' \in \mathcal{E}$; alors il existe $f^{\eta',\eta} \in C_c^\infty(G)$ telle que, si $w = w_{\eta',\eta}$ est l'élément de W défini dans le corollaire précédent, le support de $f^{\eta',\eta}$ est IwI et telle que, pour tous $h, h' \in I$, on ait :

$$f^{\eta',\eta}(h'wh) = q^{-l(w)/2}\eta'(h')\,\eta(h).$$

On a le résultat suivant :

LEMME 1.3.3. — *Soit* $\eta, \eta', \eta'' \in \mathcal{E}$. *Alors on a :*

$$w_{\eta'',\eta} = w_{\eta'',\eta'}w_{\eta',\eta}.$$

$$f^{\eta'',\eta} = f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}.$$

Démonstration. — La première assertion résulte immédiatement des définitions. Montrons donc la seconde : la fonction $f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}$ est à support dans $Iw_{\eta'',\eta'}Iw_{\eta',\eta}I$, et on a le lemme suivant :

LEMME 1.3.4. — *Soit* $w \in \Omega_0$, $x \in \Omega$. *Alors* $IwIxI$ *est réunion disjointe de doubles classes de la forme* $Iw'xI$, *où* w' *est tel qu'il existe une décomposition de longueur minimale* $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ *de* w *telle que* w' *soit de la forme :*

$$w' = s_{i_{j_1}} \dots s_{i_{j_k}},$$

avec $j_1 < \dots < j_k$ *(on dit alors que* w' *est une sous-chaîne de* w*).*

Démonstration. — Montrons-le par récurrence sur $l(w)$: si $l(w) = 0$, c'est clair. Supposons donc $l(w) \geq 1$ et écrivons $w = s_i w_1$, avec $l(w_1) = l(w) - 1$. Alors on a, par hypothèse de récurrence :

$$Iw_1IxI = \bigsqcup_{w_1' \in \mathcal{W}} Iw_1'xI,$$

où $\mathcal{W}$ est un ensemble de sous-chaînes de w_1. On a donc :

$$IwIxI = Is_iIw_1IxI = \bigcup_{w_1' \in \mathcal{W}} Is_iIw_1'xI.$$

Or pour tout w_1', on a :

$$Is_iIw_1'xI \subset Is_iw_1'xI \sqcup Iw_1'xI,$$

et puisque w_1' est sous-chaîne de w_1, w_1' et $s_i w_1'$ sont tous deux sous-chaînes de w. Donc le lemme est démontré. □

Revenons à la démonstration du lemme 1.3.3. Soit w' une sous-chaîne de $w_{\eta'',\eta'}$. Pour que $f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}$ soit non nulle sur $Iw'w_{\eta',\eta}I$, il faut que l'on ait $w'(\eta') = \eta''$, ce qui implique $w' = w_{\eta'',\eta'}$ par minimalité de la longueur de ce dernier élément. Le support de $f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}$ est donc inclus dans $Iw_{\eta'',\eta'}w_{\eta',\eta}I = Iw_{\eta'',\eta}I$; de plus, on a pour tout $g \in G$ et tous $h, h' \in I$:

$$\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)(h'gh) = \eta''(h')\,\eta(h)\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)(g).$$

Les fonctions $f^{\eta'',\eta}$ et $f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}$ sont donc proportionnelles ; il suffit pour conclure de calculer $\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)(w_{\eta'',\eta})$. On va montrer que l'on a :

$$\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)(w_{\eta'',\eta}) = q^{-l(w_{\eta'',\eta})/2}$$

par récurrence sur la longueur l de $w_{\eta',\eta}$. Si $l = 0$, c'est clair. Si $l = 1$, on a :

$$\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)(w_{\eta'',\eta}) = \int_G f^{\eta'',\eta'}(g)\, f^{\eta',\eta}\left(g^{-1}w_{\eta'',\eta}\right) dg.$$

Le terme dans l'intégrale est nul si $g \notin Iw_{\eta'',\eta'}I \cap w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta,\eta'}I$. De plus, on a :

$$Iw_{\eta'',\eta'}I \cap w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta,\eta'}I = \left(I \cap w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta'',\eta}^{-1}\right) w_{\eta'',\eta'}I.$$

L'inclusion du membre de droite dans le membre de gauche est triviale : montrons donc l'autre inclusion. Soit $g' = h'w_{\eta'',\eta'}$, $h' \in I$. Supposons que $g' \in w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta,\eta'}I$. Soit i l'élément de $\{1, \ldots, n-1\}$ tel que $w_{\eta,\eta'} = s_i$. Alors on a :

$$w_{\eta'',\eta}^{-1}h'w_{\eta'',\eta} \in Is_iIs_i \subset I \cap Is_iI.$$

Si $w_{\eta'',\eta}^{-1}h'w_{\eta'',\eta} \in I$, on a $h' \in w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta'',\eta}^{-1}$, donc $g \in \left(I \cap w_{\eta'',\eta}Iw_{\eta'',\eta}^{-1}\right) w_{\eta'',\eta'}$. Si $w_{\eta'',\eta}^{-1}h'w_{\eta'',\eta} \in Is_iI$, on a $w_{\eta'',\eta}(i) > w_{\eta'',\eta}(i+1)$, d'où l'on déduit que $l\left(w_{\eta'',\eta}\right) = l\left(w_{\eta'',\eta'}\right) + 1$; en particulier, les matrices de la forme :

$$w_{\eta'',\eta'}\left(\mathrm{Id} + cE_{i,i+1}\right) w_{\eta'',\eta'}^{-1},$$

où $(E_{ij})_{i,j}$ est la base canonique de $M_n(F)$ et où $c \in \mathcal{O}$, sont dans I. De plus, soit Σ un système de représentants de $\mathcal{O}$ modulo $\mathfrak{p}$; on a :

$$Is_iIs_i = \bigsqcup_{c\in\Sigma} Is_i\left(\mathrm{Id} + cE_{i,i+1}\right)s_i;$$

Soit donc $c \in \Sigma$ tel que $w_{\eta'',\eta}^{-1}h'w_{\eta'',\eta} \in Is_i\left(\mathrm{Id} + cE_{i,i+1}\right)s_i$, et soit $h'' = \mathrm{Id} - cE_{i,i+1}$. Alors on a :

$$w_{\eta'',\eta}^{-1}\left(h'w_{\eta'',\eta'}h''w_{\eta'',\eta'}^{-1}\right) w_{\eta'',\eta} \in I.$$

On en déduit :

$$g' = h' w_{\eta'',\eta'} = \left(h' w_{\eta'',\eta'} h'' w_{\eta'',\eta'}^{-1}\right) w_{\eta'',\eta'} h''^{-1} \in \left(I \cap w_{\eta'',\eta} I w_{\eta'',\eta}^{-1}\right) w_{\eta'',\eta'} I,$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit donc $g = h' w_{\eta'',\eta'} h$, avec $h \in I$, $h' \in I \cap w_{\eta'',\eta} I w_{\eta'',\eta}^{-1}$; on a alors :

$$\begin{aligned} f^{\eta'',\eta'}(g) f^{\eta',\eta}\left(g^{-1} w_{\eta'',\eta}\right) &= f^{\eta'',\eta'}\left(h' w_{\eta'',\eta'} h\right) \\ &\quad \cdot f^{\eta',\eta}\left(h^{-1} w_{\eta',\eta}\left(w_{\eta'',\eta}^{-1} h'^{-1} w_{\eta'',\eta}\right)\right) \\ &= \eta''(h') \, \eta\left(w_{\eta'',\eta}^{-1} h'^{-1} w_{\eta'',\eta}\right) q^{-\left(l\left(w_{\eta'',\eta'}\right)+1\right)/2} \\ &= \eta''(h') \, \eta''\left(h'^{-1}\right) q^{-\left(l\left(w_{\eta'',\eta'}\right)+1\right)/2} \\ &= q^{-\left(l\left(w_{\eta'',\eta'}\right)+1\right)/2}. \end{aligned}$$

De plus, on a, si $l\left(w_{\eta'',\eta}\right) = l\left(w_{\eta'',\eta'}\right) + 1$:

$$\operatorname{vol}\left(I w_{\eta'',\eta'} I \cap w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I\right) = \frac{1}{q} \operatorname{vol}\left(w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I\right) = 1,$$

et si $l\left(w_{\eta'',\eta}\right) = l\left(w_{\eta'',\eta'}\right) - 1$:

$$w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I \subset I w_{\eta'',\eta'} I,$$

d'où :

$$\operatorname{vol}\left(I w_{\eta'',\eta'} I \cap w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I\right) = \operatorname{vol}\left(w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I\right) = q.$$

Donc dans tous les cas, on a :

$$\operatorname{vol}\left(I w_{\eta'',\eta'} I \cap w_{\eta'',\eta} I w_{\eta',\eta}^{-1} I\right) = q^{\left(l\left(w_{\eta'',\eta'}\right)+1-l\left(w_{\eta'',\eta}\right)\right)/2}.$$

On en déduit :

$$\left(f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta}\right)\left(w_{\eta'',\eta}\right) = q^{-l\left(w_{\eta'',\eta}\right)/2}.$$

Supposons maintenant l quelconque, et soit $s \in W$ tel que $l(s) = 1$ et $l\left(w_{\eta',\eta} s\right) = l\left(w_{\eta',\eta}\right) - 1$. Soit $\eta_s = s(\eta)$; alors on a $w_{\eta_s,\eta} = s$ et $w_{\eta',\eta_s} = w_{\eta',\eta} s$; en effet, si l'une de ces deux égalités était fausse, on obtiendrait un élément w' de W de longueur strictement inférieure à l et tel que $w'(\eta) = \eta'$, ce qui est exclu. On a donc, en utilisant le cas $l = 1$ et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta} &= f^{\eta'',\eta'} * f^{\eta',\eta_s} * f^{\eta_s,\eta} \\ &= f^{\eta'',\eta_s} * f^{\eta_s,\eta} = f^{\eta'',\eta}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

En particulier, si $w_{\eta',\eta} = w_1 w_2 \cdots w_l$ est une décomposition de longueur minimale de $w_{\eta',\eta}$, et si $\eta_1 = \eta', \eta_2, \ldots, \eta_{l+1} = \eta$ sont tels que pour tout i, $w_i(\eta_{i+1}) = \eta_i$, alors clairement $w_{\eta_i,\eta_{i+1}} = w_i$, et l'on a, par une récurrence triviale :

$$f^{\eta',\eta} = f^{\eta',\eta_1} * f^{\eta_1,\eta_2} * \cdots * f^{\eta_{l-1},\eta}.$$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 1.3.5. — *Soit $\eta, \eta' \in \mathcal{E}$. Alors on a :*

$$\mathcal{H}^{\eta'} = f^{\eta',\eta} * \mathcal{H}^{\eta} * f^{\eta,\eta'}.$$

Démonstration. — L'inclusion $f^{\eta',\eta} * \mathcal{H}^{\eta} * f^{\eta,\eta'} \subset \mathcal{H}^{\eta'}$ est claire. On a donc également :

$$f^{\eta,\eta'} * \mathcal{H}^{\eta'} * f^{\eta',\eta} \subset \mathcal{H}^{\eta},$$

d'où :

$$f^{\eta',\eta} * f^{\eta,\eta'} * \mathcal{H}^{\eta'} * f^{\eta',\eta} * f^{\eta,\eta'} \subset f^{\eta',\eta} * \mathcal{H}^{\eta} * f^{\eta,\eta'}.$$

Or d'après le lemme précédent, $f^{\eta',\eta} * f^{\eta,\eta'} = f^{\eta',\eta'}$, qui n'est autre que l'élément neutre de $\mathcal{H}^{\eta'}$; on a donc :

$$\mathcal{H}^{\eta'} \subset f^{\eta',\eta} * \mathcal{H}^{\eta} * f^{\eta,\eta'},$$

ce qui démontre le lemme. $\square$

Plus précisément, on a :

Lemme 1.3.6. — *Soit $\eta, \eta' \in \mathcal{E}$. Alors le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^{\eta} \arrow[r, "\iota_\eta"] \arrow[d, "f \mapsto f^{\eta',\eta} * f * f^{\eta,\eta'}"'] & (\mathcal{H}_{n/e})^{\otimes e} \\ \mathcal{H}^{\eta'} \arrow[ur, "\iota_{\eta'}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. — Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que l'on a, pour tout $x \in \Omega_\eta$, si $f = q^{-l(x)/2} T_{x,\eta}$:

$$(1) \qquad f^{\eta',\eta} * f * f^{\eta,\eta'} = q^{-l(w_{\eta',\eta} x w_{\eta,\eta'})/2} T_{w_{\eta',\eta} x w_{\eta,\eta'},\eta'}.$$

En effet, si $(x_0, \ldots, x_{e-1})$ est l'image de x par l'application canonique de Ω_η dans $\left(\Omega_{n/e}\right)^e$, l'image de $w_{\eta',\eta} x w_{\eta,\eta'}$ par l'application canonique de $\Omega_{\eta'}$ dans $\left(\Omega_{n/e}\right)^e$ est également $(x_0, \ldots, x_{e-1})$; on en déduit :

$$\begin{aligned} \iota_\eta\left(q^{-l(x)/2} T_{x,\eta}\right) &= q^{-\sum_{i=0}^{e-1} l(x_i)/2} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon \circ \text{dét}\,(x_i)^{-i} \bigotimes_{i=0}^{e-1} T_{x_i} \\ &= \iota_{\eta'}\left(q^{-l\left(w_{\eta',\eta} x w_{\eta,\eta'}\right)/2} T_{w_{\eta',\eta} x w_{\eta,\eta'},\eta'}\right), \end{aligned}$$

d'où l'assertion du lemme.

Par une récurrence évidente, il suffit de montrer (1) dans le cas où $l\left(w_{\eta,\eta'}\right) = 1$. Supposons donc que c'est le cas et posons $s = w_{\eta,\eta'} = w_{\eta',\eta}$; le support de $f^{\eta',\eta} * f$ est contenu dans :

$$IsIxI \subset IxI \cup IsxI.$$

Or le seul élément de $\{x, sx\}$ contenu dans $s\Omega_{\eta'}$ est sx, donc le support de $f^{\eta',\eta} * f$ est contenu dans $IsxI$; de plus, par le même raisonnement que celui effectué dans la démonstration du lemme 1.3.3, on calcule :

$$\left(f^{\eta',\eta} * f\right)(sx) = q^{-l(sx)/2}.$$

De même, le support de $f^{\eta',\eta} * f * f^{\eta,\eta'}$ est contenu dans :

$$IsxIsI \subset IsxI \cup IsxsI.$$

Par le même argument que précédemment, ce support est donc contenu dans $IsxsI$, et on a :

$$\left(f^{\eta',\eta} * f * f^{\eta,\eta'}\right)(sxs) = q^{-l(sxs)/2}.$$

On en déduit (1), et le lemme est démontré. □

Pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, posons $f^\eta = f^{(\varepsilon\circ\text{dét})\eta,\eta}$, $w_\eta = w_{(\varepsilon\circ\text{dét})\eta,\eta}$; posons également $f^0 = f^{\eta_0}$. On a les résultats suivants :

Lemme 1.3.7. — $\mathcal{F}^\eta = f^\eta * \mathcal{H}^\eta = \mathcal{H}^{(\varepsilon\circ\text{dét})\eta} * f^\eta$.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du lemme 1.3.5. □

Lemme 1.3.8. — *Soit $x \in \Omega_\eta$, et soit $f' \in \mathcal{H}^\eta$ à support dans IxI. Alors $f^\eta * f'$ est à support dans $Iw_\eta xI$.*

Démonstration. — En effet, d'après le lemme 1.3.4, le support de $f^\eta * f'$ est une réunion de doubles classes de la forme $Iw'xI$, où w' est une sous-chaîne de w_η, et par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 1.3.3, $f^\eta * f'$ ne peut être non nulle sur $Iw'xI$ que si $w' = w_\eta$, ce qui démontre le lemme. □

Soit π une représentation lisse de G, $f \in C_c^\infty(G)$. On pose :

$$\pi(f) = \int_G \pi(g) f(g)\, dg.$$

Soit $V(\pi)_I^\eta$ le sous-espace des éléments v de l'espace $V(\pi)$ de π vérifiant, pour tout $h \in I$:

$$\pi(h) v = \eta(h)^{-1} v.$$

On vérifie aisément le lemme suivant :

LEMME 1.3.9. — *Soit η un caractère de I quelconque, $f \in C_c^\infty(G)$. Supposons que f vérifie la condition suivante :*

$$\forall g \in G, \forall h \in I, f(hg) = \eta(h) f(g).$$

Soit π une représentation lisse de G. Alors l'image de $\pi(f)$ est contenue dans $V(\pi)_I^\eta$.

COROLLAIRE 1.3.10. — *Supposons $\eta \in \mathcal{E}$, et $f \in \mathcal{H}^\eta$ (resp. $f \in \mathcal{F}^\eta$). Alors l'image de $\pi(f)$ est contenue dans $V(\pi)_I^\eta$ (resp. $V(\pi)_I^{(\varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t})\eta}$).*

1.4. Représentation de Steinberg, représentations induites

Pour tout $\lambda \in \mathcal{P}(m)$, définissons $\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon$ comme dans l'introduction, et soit V_λ^ε l'espace de $\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon$. Soit également, pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, le sous-espace $V_{I,\lambda}^\eta$ des éléments v de V_λ^ε tels que pour tout $h \in I$, on ait :

$$\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon(h) v = \eta(h)^{-1} v.$$

Soit k un entier strictement positif, et soit $f \in \mathcal{H}_{k,W}$. Alors pour tout élément v de l'espace V_k de St_k, $\mathrm{St}_k(f) v$ est un élément du sous-espace $V_{k,I}$ des éléments de V_k invariants par I ; de plus, si 1_k est l'élément neutre de $\mathcal{H}_{k,W}$, $\mathrm{St}_k(1_k)$ est égal à l'identité sur $V_{k,I}$. On obtient ainsi une représentation st_k de $\mathcal{H}_{k,W}$, d'espace $V_{k,I}$. Cet espace est de dimension 1.

D'après ce qui précède, $\mathcal{H}_W^0$ est isomorphe à $\left(\mathcal{H}_{n/e,W}\right)^{\otimes e}$ par ι. Soit donc la représentation de $\mathcal{H}_W^0$ suivante :

$$\mathrm{st}^0 = \left(\mathrm{st}_{n/e} \otimes \cdots \otimes \mathrm{st}_{n/e}\right) \circ \iota.$$

Son espace est également de dimension 1.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}(m)$. On déduit du corollaire 1.3.10 que l'on a une représentation $\mathrm{st}_\lambda^\varepsilon$ de $\mathcal{H}_W^0$ sur $V_{I,\lambda}^{\eta_0}$ associée à $\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon$. De plus, st^0 intervient avec multiplicité un dans $\mathrm{st}_\lambda^\varepsilon$: en effet, si $P = MU = P\left((n/e)^e\right)$, avec des définitions évidentes,

$\mathcal{H}_W^0$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{M,W}^0$, et en utilisant [**2**, 5.8], $V_{I,\lambda}^{\eta_0}$ est isomorphe au sous-espace $V_{I_M,\lambda}^{\eta_0}$ de la représentation :

$$\mathrm{Ind}_{P((m)^{ef})\cap M}^{M}\Big(\mathrm{St}_\lambda\otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^e\,\mathrm{St}_\lambda\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^{(f-1)e}\,\mathrm{St}_\lambda \\ \otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\,\mathrm{St}_\lambda\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^{(f-1)e+e-1}\,\mathrm{St}_\lambda\Big).$$

Donc $\mathrm{st}_\lambda^\varepsilon$ est isomorphe à la représentation de $\mathcal{H}_{M,W}^0$ sur $V_{I_M,\lambda}^{\eta_0}$ associée à la représentation ci-dessus, qui est elle-même isomorphe au produit tensoriel de e copies de la représentation de $\mathcal{H}_{n/e,W}$ sur l'espace $V_{I_{n/e},\lambda}$ des vecteurs de l'espace de la représentation :

$$\mathrm{Ind}_{P((m)^f)}^{GL_{n/e}(F)}\Big(\mathrm{St}_\lambda\otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^e\,\mathrm{St}_\lambda\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^{(f-1)e}\,\mathrm{St}_\lambda\Big).$$

Or d'après [**17**, III.3], $\mathrm{st}_{n/e}$ intervient avec multiplicité un dans cette dernière représentation ; on en déduit l'assertion.

Soit donc D_λ la droite de $V_{I,\lambda}^{\eta_0}$ sur laquelle $\mathcal{H}_W^0$ agit par st^0. Sachant que l'on a un isomorphisme canonique entre $\mathcal{H}_W^0$ et $\mathcal{H}_W^{(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0}$ défini par $f\mapsto f'$ si $f^0*f=f'*f^0$, on en déduit que :

$$\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon\left(f^0\right)(D_\lambda)=D'_\lambda,$$

où D'_λ est la droite de $V_{I,\lambda}^{(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0}$ définie de façon similaire à D_λ.

Soit A_λ^ε l'opérateur d'entrelacement défini, à une constante multiplicative près, dans l'introduction. Un tel opérateur vérifie :

$$A_\lambda^\varepsilon\left(D'_\lambda\right)=D_\lambda;$$

on en déduit que $A_\lambda^\varepsilon\circ\mathrm{St}_\lambda^\varepsilon\left(f^0\right)$ conserve D_λ, donc y agit par multiplication par une constante c. On normalisera A_λ^ε en choisissant $c=(-1)^{n/e-m}$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS UTILISÉES

2.1. Les fonctions $f_\alpha^{a,b}$, $\tilde{f}_\alpha^{a,b}$

Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, tels que b divise n et que $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. On pose :

$$d = \frac{e}{\operatorname{pgcd}(b,e)}.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{P}(n/db)$, on va définir la fonction $f_\alpha^{a,b}$. Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.1.1. — *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, et soit $P = MU = P(\lambda)$. Soit $x = (x_1, \dots, x_t) \in \Omega(M)$, et pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, soit $\alpha_{(i)} \in \mathcal{P}(\lambda_i)$, et soit f_i' une fonction de $GL_{\lambda_i}(F)$ dans $\mathbb{C}$ dont le support est $I_{\alpha_{(i)}} x_i I_{\alpha_{(i)}}$ et biinvariante par $I_{\lambda_i}^0$. Posons :*

$$\alpha = \left(\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(t)}\right) \in \mathcal{P}(n);$$

alors il existe une unique fonction f de G dans $\mathbb{C}$ dont le support est $I_\alpha x I_\alpha$, biinvariante par I^0, et telle que, pour tout $l = (l_1, \dots, l_t) \in M$, on ait :

$$f(l) = f_1'(l_1)\, f_2'(l_2) \dots f_t'(l_t).$$

La vérification de ce lemme est immédiate. On notera $f_1' \otimes \dots \otimes f_t'$ la fonction f de l'énoncé.

Supposons d'abord que $a = 0$, $b = 1$ (donc $d = e$) et $\alpha = \left(\frac{n}{e}\right)$. Alors soit $f_\alpha^{1,0} = f_\alpha^0$ la fonction dont le support est $I_{(n/e)^e} w I_{(n/e)^e}$, avec :

$$w = \begin{pmatrix} & & & \mathrm{Id}_{n/e} \\ \mathrm{Id}_{n/e} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathrm{Id}_{n/e} & \end{pmatrix},$$

telle que pour un élément g de $I_{(n/e)^e} w I_{(n/e)^e}$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} \times & & & \times \\ M_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathfrak{p} & & M_{e-1} & \times \end{pmatrix},$$

où les $M_1, \ldots, M_{e-1}$ sont des éléments de $GL_{n/e}(\mathcal{O})$, les blocs au-dessus de ceux-ci sont à coefficients dans $\mathcal{O}$ et les blocs au-dessous à coefficients dans $\mathfrak{p}$, on a :

$$f(g) = q^{-(n/e)(n-n/e)/2} \operatorname{vol}\left(I_{(n/e)^e}\right)^{-1} \\ \cdot \varepsilon^{-1} \circ \operatorname{dét}(M_1)\, \varepsilon^{-2} \circ \operatorname{dét}(M_2) \ldots \varepsilon^{1-e} \circ \operatorname{dét}(M_{e-1}).$$

Supposons toujours $a = 0$, $b = 1$, mais $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ quelconque. Soit pour tout i, $f^0_{(\alpha_i)}$ la fonction de $GL_{e\alpha_i}$ dans $\mathbb{C}$ définie comme précédemment ; on pose alors :

$$f^0_\alpha = f^0_{(\alpha_1)} \otimes \cdots \otimes f^0_{(\alpha_t)}.$$

Supposons enfin a, b et α quelconques. Alors $f^{a,b}_\alpha$ est la fonction à support dans $\zeta^{na/b} I_{(n/b)^b}$, et telle que l'on ait :

$$f^{a,b}_\alpha\left(\zeta^{na/b}\cdot\right) = f^{a,b}_{\alpha,1} \otimes \cdots \otimes f^{a,b}_{\alpha,b},$$

où les $f^{a,b}_{\alpha,i}$ sont des fonctions de $GL_{n/b}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

- $f^{a,b}_{\alpha,1} = f^0_{\alpha,\varepsilon^b}$, c'est-à-dire la fonction définie comme précédemment en remplaçant ε par ε^b, caractère dont la restriction à $\mathcal{O}^*$ est d'ordre d ;
- pour $i \neq 1$, $f^{a,b}_{\alpha,i}$ est la fonction dont le support est $I_{\alpha * d}$, qui, en $g \in I_{\alpha * d}$ dont les blocs diagonaux sont $(g_{1,1}, \ldots, g_{1,d}, \ldots\ldots, g_{t,1}, \ldots, g_{t,d})$, vaut :

  $$f^{a,b}_{\alpha,i}(g) = \operatorname{vol}(I_{\alpha * d})^{-1} \prod_{j=1}^{t} \prod_{k=1}^{d} \varepsilon^{l(i)-bk} \circ \operatorname{dét}(g_{j,k}),$$

  où pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $l(i)$ est l'unique entier compris entre 0 et $b-1$ tel que $l(i)\, a$ est congru à $i-1$ modulo b.

Il est immédiat de vérifier que ces définitions sont compatibles entre elles.

LEMME 2.1.2. — *Soient a, b et α vérifiant les conditions requises. Alors il existe $\eta \in \mathcal{E}$ tel que $f^{a,b}_\alpha \in \mathcal{F}^\eta$.*

Démonstration. — En effet, il est clair d'après la définition de $f_\alpha^{a,b}$ qu'il existe $(i_1,\ldots,i_n)$ et $(j_1,\ldots,j_n)$ tels que pour tous $h,h'\in I$ et tout $g\in G$, en notant $h_1,\ldots,h_n$ les termes diagonaux de h et $h'_1,\ldots,h'_n$ ceux de h', on ait :

$$f_\alpha^{a,b}\left(hgh'\right)=\prod_{k=1}^{n}\varepsilon^{i_k}\left(h_k\right)\varepsilon^{j_k}\left(h'_k\right)f_\alpha^{a,b}\left(g\right).$$

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que l'on a, pour tout k :

$$i_k\equiv j_k+1\ \text{modulo}\, e.$$

En effet, si on pose :

$$k=\frac{nk_1}{b}+\sum_{i=1}^{k_2-1}d\alpha_i+\alpha_{k_2}k_3+k_4,$$

où k_1 est compris entre 0 et $b-1$, k_2 entre 1 et t, k_3 entre 0 et $d-1$ et k_4 entre 1 et α_{k_2}, on calcule à partir des définitions les valeurs de i_k et j_k :

$$j_k=l\left(k_1+1\right)-b\left(k_3+1\right);$$

$$i_k=l\left(k_1+a+1\right)-b\left(k_3+1\right)$$

si $k_1\neq b-a$, et

$$i_k=-b\left(k_3\right)$$

si $k_1=b-a$. On a donc, si $k_1\neq b-a$,

$$i_k-j_k=l\left(k_1+a+1\right)-l\left(k_1+1\right);$$

comme $l\left(k_1+1+a\right)a-l\left(k_1+1\right)a$ est congru à a modulo b et $\mathrm{pgcd}\left(a,b\right)=1$, $l\left(k_1+1+a\right)-l\left(k_1+1\right)$ est congru à 1 modulo b. Or puisque $k_1\neq b-a$, $l\left(k_1+1\right)a\not\equiv -a$ (modulo b), donc $l\left(k_1+1\right)\neq b-1$. Donc comme les $l\left(i\right)$ sont compris entre 0 et $b-1$ et $l\left(k_1+1\right)\neq b-1$, on a $i_k-j_k=l\left(k_1+a+1\right)-l\left(k_1+1\right)=1$. Si $k_1=b-a$, on a :

$$i_k-j_k=b-l\left(1-a\right);$$

$l\left(1-a\right)a$ est congru à $-a$ modulo b, donc $l\left(1-a\right)a+a$ est un multiple de b; donc puisque $\mathrm{pgcd}\left(a,b\right)=1$ et $l\left(1-a\right)$ est compris entre 0 et $b-1$, on a $l\left(1-a\right)+1=b$, donc $i_k-j_k=1$. Cela démontre le lemme. □

Soit x l'élément de Ω vérifiant, pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$:

- $x\left(k\right)=-\dfrac{na}{b}+\alpha_j+k$ si $1\leq k\leq\dfrac{n}{b}$ et si on a $k=\sum_{i=1}^{j-1}d\alpha_i+k'$, avec $1\leq k'\leq\left(d-1\right)\alpha_j$;
- $x\left(k\right)=-\dfrac{na}{b}-\left(d-1\right)\alpha_j+k$ si $1\leq k\leq\dfrac{n}{b}$ et si on a $k=\sum_{i=1}^{j-1}d\alpha_i+k'$, avec $\left(d-1\right)\alpha_j+1\leq k'\leq d\alpha_j$;

– $x(k) = -\dfrac{na}{b} + k$ sinon.

LEMME 2.1.3. — *Le support de $f_{\alpha}^{a,b}$ est $I_{\alpha^b * d} x I_{\alpha^b * d}$; de plus, on a :*

$$f_{\alpha}^{a,b}(x) = \mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right)^{-1} q^{-l(x)/2}.$$

Démonstration. — Si $a = 0$ et $b = 1$, cela résulte immédiatement des définitions. Si a et b sont quelconques, soit x_1 l'élément de $\Omega_{n/b}$ de longueur minimale tel que, avec les notations utilisées dans la définition de $f_{\alpha}^{a,b}$, le support de $f_{\alpha,1}^{a,b}$ soit $I_{\alpha * d} x_1 I_{\alpha * d}$. Alors le support de $f_{\alpha}^{a,b}$ est :

$$I_{\alpha^b * d} x I_{\alpha^b * d},$$

avec :

$$x = \zeta^{na/b}(x_1, \mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id}).$$

D'après le cas $a = 0$ et $b = 1$, x_1 est de la forme décrite par l'énoncé du lemme (en remplaçant n, a, b par $n/b, 0, 1$) ; on en déduit que x est bien l'élément de Ω cherché. De plus, on a :

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{a,b}(x) &= f_{\alpha,1}^{a,b}(x_1) \\ &= q^{-l(x_1)/2} \mathrm{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^{-b} \\ &= q^{-l(x_1)/2} \mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right)^{-1} ; \end{aligned}$$

enfin, en posant $M = M\left((n/b)^b\right)$, on a, puisque $(x_1, \mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id}) \in W_M$:

$$l(x) = l((x_1, \mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})) = l_M((x_1, \mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})) = l(x_1),$$

ce qui achève la démonstration. □

L'élément x vérifie également la propriété suivante :

LEMME 2.1.4. — *Posons $x = w_x \varpi^z$, avec $w_x \in W$ et $\varpi^z \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'orbite de k pour l'action de $w_x^{\mathbb{Z}}$ sur $\{1, \ldots, n\}$ est de cardinal db.*

Démonstration. — En effet, on a, pour tout k, en utilisant le lemme précédent, avec j convenable :

$$x^{db}(k) = k - db\frac{na}{b} - b((d-1)\alpha_j) + (d-1)b\alpha_j = k - nda,$$

qui est congru à k modulo n ; on en déduit que pour tout k, $w_x^{db}(k) = k$. Réciproquement, soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $w_x^i(k) = k$; w_x permute transitivement les intervalles de longueur n/b, donc i est multiple de b, et d'autre part, si ϵ est l'application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{0, \ldots, e-1\}$ associée à l'élément $\eta \in \mathcal{E}$ défini dans le lemme 2.1.2, $\epsilon\left(w_x^i(k)\right)$ est congru à $\epsilon(k) + i$ modulo e, donc i est multiple de e. Donc i est multiple de $\mathrm{ppcm}(b, e) = db$, ce qui démontre le lemme. □

Soit η l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $f_\alpha^{a,b} \in \mathcal{F}^\eta$. Il existe un unique élément $\tilde{f}_\alpha^{a,b}$ de $\mathcal{H}^\eta$ tel que l'on ait :

$$f_\alpha^{a,b} = f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}.$$

LEMME 2.1.5. — *$\tilde{f}_\alpha^{a,b}$ est l'élément de $\mathcal{H}^\eta$ de support $I_{\alpha^b*d}x'I_{\alpha^b*d}$, où $x' \in \Omega_\eta$ est tel que son image par l'application canonique de Ω_η dans $\left(\Omega_{n/e}\right)^e$ est :*

$$\left(\zeta^{(n/db)k_0}, \ldots, \zeta^{(n/db)k_{e-1}}\right),$$

avec, pour tout j, si $b' = \operatorname{pgcd}(b,e)$:

$$k_j = \left[\frac{ja}{b'}\right] - \left[\frac{(j-1)\,a}{b'}\right],$$

et vérifiant, pour tous $h_1, h_2 \in I_{\alpha^b*d}$:

$$\tilde{f}_\alpha^{a,b}\left(h_1x'h_2\right) = \eta\left(h_1h_2\right) q^{-l(x')/2} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b*d}\right)^{-1}.$$

Démonstration. — En effet, posons $x' = w_\eta^{-1}x$. w_η et x normalisent W_{α^b*d} et sont de longueur minimale modulo ce groupe, donc x' aussi ; on a donc :

$$I_{\alpha^b*d}x'I_{\alpha^b*d} = Ix'I_{\alpha^b*d} = \bigsqcup_{w\in W_{\alpha^b*d}} Ix'wI.$$

Or d'après le lemme 1.3.4, puisque le support de $f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}$ est contenu dans $Iw_\eta I_{\alpha^b*d}x'I_{\alpha^b*d}$, il est réunion de doubles classes de type $Iw'x'wI$, où $w \in W_{\alpha^b*d} \subset \Omega_\eta$ et où w' est une sous-chaîne de w_η ; mais alors, pour un tel w', on a $w'(\eta) = (\varepsilon \circ \text{dét})\,\eta$, donc par minimalité de la longueur de w_η, on a forcément $w' = w_\eta$. Donc le support de $f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}$ est contenu dans $I_{\alpha^b*d}xI_{\alpha^b*d}$, qui est précisément le support de $f_\alpha^{a,b}$. De plus, puisque x normalise W_{α^b*d}, on a $I_{\alpha^b*d}xI_{\alpha^b*d} = IxI_{\alpha^b*d}$, et pour tous $h' \in I$, $h \in I_{\alpha^b*d}$, on a :

$$\left(f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}\right)\left(h'xh\right) = \varepsilon \circ \text{dét}\left(h'\right) \eta\left(hh'\right) \left(f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}\right)(x)\,;$$

enfin, on calcule :

$$\begin{aligned}\left(f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b}\right)(x) &= q^{(l(w_\eta)+l(x')-l(x))/2} q^{-l(w_\eta)/2} f\left(x'\right)\\ &= q^{(l(x')-l(x))/2} q^{-l(x')/2} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b*d}\right)^{-1}\\ &= f_\alpha^{a,b}(x),\end{aligned}$$

ce qui suffit à assurer que $f^\eta * \tilde{f}_\alpha^{a,b} = f_\alpha^{a,b}$.

Il reste à vérifier que x' est bien de la forme voulue. Soit ϵ l'application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{0, \ldots, e-1\}$ associée à η, et soit, pour tout $j \in \{0, \ldots, e-1\}$, J_j l'ensemble des éléments k de $\mathbb{Z}$ tels que $\epsilon(k) = j$. On a, pour tout j :

$$w_\eta\left(J_j\right) = J_{j+1}$$

et w_η est croissant sur $J_j + n\mathbb{Z}$; de plus, pour tout k et tout k', l'intersection de J_j et de l'intervalle $\left\{\sum_{k'=1}^{k-1} d\alpha_{k'} + 1, \dots, \sum_{k'=1}^{k} d\alpha_{k'}\right\}$ est soit vide, soit exactement l'un des d sous-intervalles de la décomposition en sous-intervalles de longueur α_k de cet intervalle, donc il est clair d'après l'expression explicite de x donnée par le lemme 2.1.3 que x est croissant sur $J_j + n\mathbb{Z}$ pour tout j. On en déduit donc que pour tout j, x' est croissant sur $J_j + n\mathbb{Z}$; cela implique qu'il existe $l_0, \dots, l_{e-1}$ tels que l'image de x' par l'application canonique de Ω_η dans $\Omega_{(n/e)^e}$ est :

$$\left(\zeta^{l_0}, \dots, \zeta^{l_{e-1}}\right).$$

De plus, quitte à remplacer a par $a + kb$, avec k convenable, ce qui revient à remplacer l_j par $l_j + nk/e$ pour tout j, on peut supposer $1 \leq a \leq b$. On a alors, pour tout j :

$$\begin{aligned} l_j &= \operatorname{card}\left(\left\{k \in J_j \mid k > 0, x'(k) \leq 0\right\}\right) \\ &= \operatorname{card}\left(\left\{k \in J_j \mid k > 0, x(k) \leq 0\right\}\right) \\ &= \operatorname{card}\left(J_j \cap \left\{1, \dots, \frac{na}{b}\right\}\right). \end{aligned}$$

Or on a, pour tous i, j :

$$\operatorname{card}\left(J_j \cap \left\{\frac{n(i-1)}{b} + 1, \dots, \frac{ni}{b}\right\}\right) = \frac{n}{db}$$

s'il existe k tel que $l(i) + kb$ est congru à j modulo e, et :

$$\operatorname{card}\left(J_j \cap \left\{\frac{n(i-1)}{b} + 1, \dots, \frac{ni}{b}\right\}\right) = 0$$

sinon. De plus, la condition ci-dessus est vraie si et seulement si $l(i)$ est congru à j modulo b', c'est-à dire si $i - 1$ est congru à ja modulo b'. Donc si on pose $l_j = (n/db)k_j$, k_j est égal au nombre d'éléments de $\{0, \dots, a-1\}$ congrus à ja modulo b', ou encore au nombre d'éléments de $\{-ja, \dots, -ja + j - 1\}$ divisibles par b', soit :

$$k_j = \left[\frac{ja}{b'}\right] - \left[\frac{(j-1)a}{b'}\right],$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2. Fonctions $\mathfrak{f}_\alpha$, $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$

Soit $\alpha \in \mathcal{P}(n/e)$. Définissons les fonctions $\mathfrak{f}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$ de la manière suivante : supposons d'abord que $\alpha = (n/e)$. Alors $\mathfrak{f}_\alpha$ est la fonction dont le support est l'ensemble des éléments de $M_n(\mathcal{O}) \cap G$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & * \\ M_1 & \ddots & & & \vdots \\ \mathfrak{p} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{p} & \dots & \mathfrak{p} & M_{e-1} & * \end{pmatrix},$$

où les M_i sont des blocs $n/e \times n/e$ inversibles dans $M_{n/e}(\mathcal{O})$ et où les blocs marqués $\mathfrak{p}$ sont des blocs $n/e \times n/e$ dont tous les termes sont dans $\mathfrak{p}$, et qui vaut, pour g de la forme ci-dessus :

$$\mathfrak{f}_\alpha(g) = q^{-(n/e)(n-n/e)/2} \operatorname{vol}\left(I_{(n/e)^e}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \operatorname{dét}(M_i).$$

Supposons maintenant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ quelconque ; on pose :

$$\mathfrak{f}_\alpha = \mathfrak{f}_{(\alpha_1)} \otimes \dots \otimes \mathfrak{f}_{(\alpha_t)}.$$

$\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$ est, quant à elle, la fonction définie sur l'ensemble des éléments de $G \cap \operatorname{Lie}(I_{\alpha * e})$ de la forme :

$$g = \begin{pmatrix} M_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathfrak{p} & & M_{t(\alpha)e} \end{pmatrix},$$

où M_i est inversible modulo $\mathfrak{p}$ si i n'est pas multiple de e, telle que :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha(g) = \operatorname{vol}(I_{\alpha * e})^{-1} \prod_{i; e \text{ ne divise pas } i} \varepsilon^{-i} \circ \operatorname{dét}(M_i).$$

$\mathfrak{f}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$ ne sont pas à support compact mais pour tout entier k, si 1_k est la fonction caractéristique des éléments de G dont la valuation du déterminant est k, $1_k \mathfrak{f}_\alpha$ et $1_k \tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$ sont à support compact ; de plus, on vérifie de la même façon que dans le lemme 2.1.2 qu'il existe $\eta \in \mathcal{E}$ tel que pour tout $g \in G$ et tous $h, h' \in I_{\alpha * e}$, on a :

$$\mathfrak{f}_\alpha(h'gh) = \varepsilon \circ \operatorname{dét}(h')\, \eta(hh')\, \mathfrak{f}_\alpha(g);$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha(h'gh) = \eta(hh')\, \tilde{\mathfrak{f}}_\alpha(g),$$

le caractère η étant clairement le même pour les deux fonctions. On en déduit donc que pour tout k, $1_k \mathfrak{f}_\alpha \in \mathcal{F}^\eta$ et $1_k \tilde{\mathfrak{f}}_\alpha \in \mathcal{H}^\eta$. De plus, on déduit immédiatement des définitions que :

$$1_0 \mathfrak{f}_\alpha = f_\alpha^0;$$

$$1_0\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha = \tilde{f}^0_\alpha.$$

Définissons également les fonctions $\mathfrak{f}^X_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{f}}^X_\alpha$ de G dans $\mathbb{C}[X]$ par :

$$\mathfrak{f}^X_\alpha(g) = X^{\nu\circ\text{dét}(g)}\mathfrak{f}_\alpha(g),$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}^X_\alpha(g) = X^{\nu\circ\text{dét}(g)}\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha(g),$$

pour tout $g \in G$; l'image de ces fonctions est bien dans $\mathbb{C}[X]$ car leur support est constitué de matrices dont la valuation du déterminant est positive ou nulle.

LEMME 2.2.1. — *On a :*

$$\mathfrak{f}_\alpha = f^\eta * \tilde{\mathfrak{f}}_\alpha.$$

Démonstration. — En effet, soit $\mathcal{I}$ le support de $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$; alors le support de $\mathfrak{f}_\alpha$ n'est autre que $Iw_\eta\mathcal{I}$. De plus, soit $x \in \Omega \cap \mathcal{I}$; alors on a :

$$l(w_\eta x) = l(w_\eta) + l(x).$$

En effet, soit $J_1, \ldots, J_{et(\alpha)}$ la décomposition de $\{1, \ldots, n\}$ en intervalles associée à $\alpha * e$. On la complète en une décomposition de $\mathbb{Z}$ en intervalles en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, et(\alpha)\}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$J_{i+ket(\alpha)} = J_i + kn.$$

x stabilise J_i pour tout i non multiple de e, et pour k donné, si $j \in J_{ke}$, on a $x(j) \in J_{le}$, avec $l \leq k$: en effet, supposons $j \in \{1, \ldots, n\}$ et posons $x = w_x\varpi^z$, $w_x \in W$, $z \in \mathbb{Z}^n$. Si x_j est le terme d'indice $(w_x(j), j)$ de x, alors soit $x_j \in \mathfrak{p}$, auquel cas $x(j) \leq 0$, soit $x_j = 1$, auquel cas d'une part $x(j) = w_x(j)$, et d'autre part soit $w_x(j) < j$, soit $w_x(j)$ est dans le même intervalle que j.

D'autre part, on a :

$$w_\eta(J_k) = J_{k+1}$$

si k n'est pas multiple de e, et :

$$w_\eta(J_k) = J_{k-e+1}$$

sinon. Or on a :

$$\begin{aligned} &l(w_\eta) + l(x) - l(w_\eta x) \\ &\quad = 2\,\text{card}\{(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{Z} \mid i < j, x(i) > x(j), w_\eta x(i) < w_\eta x(j)\}. \end{aligned}$$

Soient donc $i, j \in \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{Z}$ tels que $x(i) > x(j)$ et $w_\eta x(i) < w_\eta x(j)$, et soient k et l tels que $x(i) \in J_k$ et $x(j) \in J_l$. Alors on a $l = l'e$, et $k = k' + (l'-1)e$, avec $1 \leq k' \leq e-1$; on en déduit que $i \in J_k$ et $j \in J_{l''e}$, avec $l'' \geq l'$, d'où $i > j$. On en conclut que l'ensemble considéré dans l'égalité ci-dessus est vide, soit :

$$l(w_\eta) + l(x) - l(w_\eta x) = 0,$$

d'où l'assertion. On en déduit, pour tout $x \in \Omega \cap \mathcal{I}$:

$$\left(f^{\eta} * \tilde{\mathfrak{f}}_{\alpha}\right)(w_{\eta}x) = q^{-l(w_{\eta})/2}\tilde{\mathfrak{f}}_{\alpha}(x) = \mathfrak{f}_{\alpha}(w_{\eta}x),$$

ce qui suffit à démontrer le lemme. □

On en déduit immédiatement, puisque f^{η} est à support dans K :

$$\mathfrak{f}_{\alpha}^{X} = f^{\eta} * \tilde{\mathfrak{f}}_{\alpha}^{X}.$$

2.3. Terme constant

Soit $f \in C_c^{\infty}(G)$, et soit $P = MU = P(\lambda)$ un parabolique standard de G, avec $\lambda \in \mathcal{P}(n)$. On définit le terme constant de f sur P par, pour $l \in M$:

$$f^{P}(l) = \delta_{P}^{G}(l)^{1/2} \int_{K \times U} f\left(k^{-1}luk\right) dk\, du.$$

Ici, la mesure sur K est normalisée par $\mathrm{vol}(I_{\lambda}) = 1$; on normalise également la mesure sur U par $\mathrm{vol}(K \cap U) = 1$.

On définit également le terme constant tordu par ε de f sur P par, pour $l \in M$:

$$f^{P,\varepsilon}(l) = \delta_{P}^{G}(l)^{1/2} \int_{K \times U} \varepsilon \circ \text{dét}(k)\, f\left(k^{-1}luk\right) dk\, du.$$

Soit D une distribution sur G, G_1 un sous-groupe de G. On dit que D est ε-variante par conjugaison sous G_1 si pour tout $f \in C_c^{\infty}(G)$ et pour tout $g \in G_1$:

$$D(Ad(g)\, f) = \varepsilon \circ \text{dét}(g)^{-1} D(f).$$

On dit que D est ε-variante si $G_1 = G$.

Soit $f, f' \in C_c^{\infty}(G)$. On note :

$$f \simeq_{G_1} f'$$

si $f - f'$ est annulée par toute distribution invariante par conjugaison sous G_1, et :

$$f \simeq_{G_1,\varepsilon} f'$$

si $f - f'$ est annulée par toute distribution ε-variante par conjugaison sous G_1.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t) \in \mathcal{P}(n)$. Soit $M(\mu, \lambda)$ l'ensemble des tableaux d'entiers positifs ou nuls $(a_{ij})_{i,j}$ de taille $t \times s$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall i \in \{1, \ldots, t\}\,; \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = \mu_i;$$

$$\forall j \in \{1, \dots, s\}\,; \sum_{i=1}^{t} a_{ij} = \lambda_j.$$

Il existe une bijection entre $M(\mu, \lambda)$ et l'ensemble des éléments w de W de longueur minimale modulo W_λ à gauche et W_μ à droite, définie de la manière suivante : soit $J_1, \dots, J_t$ (resp. $J'_1, \dots, J'_s$) la décomposition de $\{1, \dots, n\}$ en intervalles associée à λ (resp. μ). L'élément w correspondant à un tableau $(a_{ij})_{i,j}$ donné est celui tel que pour tous i, j, $w(J'_i)$ contient exactement a_{ij} éléments de J_j. On en déduit en particulier :

$$l(w) = \sum_{i,j} \sum_{k>i, k'<j} a_{ij} a_{kk'}.$$

Calculons maintenant le terme constant pour $\mathfrak{f}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha$:

LEMME 2.3.1. — *Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n/e)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{P}(n)$. Soit $P = MU = P(\lambda)$; soit W' l'ensemble des éléments de W de longueur minimale modulo W_λ à gauche et $W_{\alpha * e}$ à droite ; alors on a :*

$$\left(\mathfrak{f}_\alpha^X\right)^{P,\varepsilon} \simeq_{K_\lambda,\varepsilon} 0$$

s'il n'existe pas de $\lambda' \in \mathcal{P}(n/e)$ telle que $\lambda = e\lambda'$, et :

$$\left(\mathfrak{f}_\alpha^X\right)^{P,\varepsilon} \simeq_{K_\lambda,\varepsilon} \sum_{\left(a'_{ij}\right)_{i,j} \in M(\alpha,\lambda')} \varepsilon\,(-1)^{l(w)} \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{f}_{\left(a'_{\cdot j}\right)}^{X_j},$$

avec pour tout j :

$$X_j = q^{(n-\lambda_j)/2} X,$$

et pour tout $\left(a'_{ij}\right)_{i,j}$, w est l'élément de W' correspondant au tableau $(a_{ij})_{i,j}$, avec :

$$(a_{11}, \dots, a_{et,1}, a_{12}, \dots, a_{et,s}) = \left(\left(a'_{\cdot 1}\right) * e, \dots, \left(a'_{\cdot s}\right) * e\right),$$

si $\lambda = e\lambda'$.

Démonstration. — En effet, on a, pour $l = (l_1, \dots, l_s) \in M$, de la même façon que dans la démonstration de [**17**, IV.4] :

$$\left(\mathfrak{f}_\alpha^X\right)^{P,\varepsilon}(l) = \left(\prod_{j=1}^{s} X_j^{\nu \circ \mathrm{d\acute{e}t}(l_j)}\right) \int_{K \times \mathrm{Lie}\, U} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(k)\, \mathfrak{f}_\alpha\left(k^{-1}(l+u)\,k\right) du\, dk,$$

la mesure sur $\mathrm{Lie}\, U$ étant normalisée par $\mathrm{vol}\,(\mathrm{Lie}\, U \cap M_n\,(\mathcal{O})) = 1$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{K \times \mathrm{Lie}\, U} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(k)\, \mathfrak{f}_\alpha \left(k^{-1}\,(l+u)\,k\right) du\, dk \\
&= \sum_{w \in W'} \mathrm{vol}\,(I_\lambda w I_{\alpha * e}) \sum_{K_\lambda \times (K \cap U) \times \mathrm{Lie}\, U} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(hkw) \\
&\quad \cdot \mathfrak{f}_\alpha \left(w^{-1} k^{-1} h^{-1}\,(l+u)\, hkw\right) du\, dh\, dk \\
&= \sum_{w \in W'} \mathrm{vol}\,(I_\lambda w I_{\alpha * e}) \int_{K_\lambda \times \mathrm{Lie}\, U} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(kw)\, \mathfrak{f}_\alpha \left(w^{-1} k^{-1}\,(l+u)\, kw\right) du\, dk \\
&= \sum_{w \in W'} \mathrm{vol}\,(I_\lambda w I_{\alpha * e}) \int_{K_\lambda} \varepsilon\,(-1)^{l(w)}\, \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(k)\, (Ad\,(k)\, f_w)\,(l)\, dk,
\end{aligned}$$

avec pour tout $w \in W'$:

$$f_w\,(l) = \int_{\mathrm{Lie}\, U} \mathfrak{f}_\alpha \left(w^{-1}\,(l+u)\, w\right) du.$$

Soit η l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $1_k \mathfrak{f}_\alpha \in \mathcal{F}_\eta$ pour tout k, et soit x l'élément de W tel que le support de $1_0 \mathfrak{f}_\alpha$ est $I_{\alpha * e} x I_{\alpha * e}$, et de longueur minimale parmi ceux vérifiant cette condition ; il est clair que x normalise $W_{\alpha * e}$. Plus précisément, soit $J_1, \ldots, J_{et}$ la décomposition de $\{1, \ldots, n\}$ en intervalles associée à $\alpha * e$; on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, e\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, t\}$:

$$x\left(J_{e(j-1)+i}\right) = J_{e(j-1)+i+1}$$

si $i \neq e$, et :

$$x\left(J_{e(j-1)+e}\right) = J_{e(j-1)+1},$$

et x est croissant sur les J_i (cf. lemmes 2.1.3 et 2.1.4). Soit ϵ l'application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{0, \ldots, e-1\}$ associée à η ; ϵ étant constante sur chacun des J_i, on notera, pour tout i, $\epsilon\,(J_i)$ cette valeur constante. On a donc :

$$\begin{aligned}
f_w\,(l) &= q^{-l(x)/2}\, \mathrm{vol}\,(I_{\alpha * e})^{-1} \\
&\cdot \int_{u \in U,\, l+u = (g_{ij})_{i,j} \in w(\mathrm{supp}(\mathfrak{f}_\alpha))w^{-1}} \left(\prod_i \varepsilon^{\epsilon(J_i)} \circ \mathrm{d\acute{e}t} \left(\left(g_{wx(j), w(k)}\right)_{j,k \in J_i} \right) \right) du,
\end{aligned}$$

le produit étant pris sur les $i \in \{1, \ldots, et-1\}$ tels que e ne divise pas i ; de plus, si e ne divise pas i, on a $\epsilon\,(J_i) \neq 0$.

Soit w' l'élément de W_{et} défini par, pour tout i :

$$w'\,(i) = i+1$$

si i n'est pas multiple de e, et :

$$w'\,(i) = i+1-e$$

si i est multiple de e. D'après ce qui précède, on a pour tout i :

$$x\left(J_i\right) = J_{w'(i)}.$$

Soit $\left(a_{ij}\right)_{i,j} \in M\left(\alpha * e, \lambda\right)$ le tableau correspondant à w ; la matrice :

$$M_i = \left(g_{wx(k),w(k')}\right)_{k,k' \in J_i}$$

est donc une matrice carrée de taille $\operatorname{card}\left(J_i\right)$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} L_1 & U_{12} & \dots & U_{1,s} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & U_{s-1,s} \\ 0 & & & L_s \end{pmatrix},$$

où :

- il y a $s \times s$ blocs (éventuellement vides), et pour tous j, k, la taille du j, k-ème bloc, est de $a_{w'(i),j}$ lignes et $a_{i,k}$ colonnes ;
- la valeur des blocs L_j ne dépend que de l, et est donc fixe pour le calcul de l'intégrale ;
- la valeur des blocs U_{jk} dépend de u, et décrit donc toutes les valeurs possibles.

En particulier, pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$ et tout i non multiple de e, le rang de cette matrice est inférieur ou égal à :

$$r\left(i, j\right) = \sum_{k=1}^{j} a_{w'(i),k} + \sum_{k=j+1}^{s} a_{ik}.$$

Pour que l'intégrale soit non nulle, il est donc nécessaire que $r\left(i, j\right) \geq \operatorname{card}\left(J_i\right)$ pour tout i non multiple de e. De plus, on a le lemme suivant :

LEMME 2.3.2. — *Soit F_0 un corps fini, et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices $n_0 \times n_0$ sur F_0 de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où les blocs sont de tailles respectives i_1, i_2 en hauteur et j_1, j_2 en largeur, A et C sont fixés et B décrit $M_{i_1,j_2}\left(F_0\right)$. Soit, pour tout $y \in F_0$:

$$\mathcal{P}_y = \left\{M \in \mathcal{P} \mid \operatorname{dét}\left(M\right) = y\right\}.$$

Alors si $j_2 + i_1 > n_0$, tous les $\mathcal{P}_y$, pour y non nul, ont même cardinal.

Démonstration. — Puisque $j_2 + i_1 > n_0$, on a $i_1 > n_0 - j_2 = j_1$; donc il est facile de voir qu'il existe $Q \in GL_{i_1}(F_0)$ et $R \in GL_{i_2}(F_0)$ tels que la dernière ligne de QAR est nulle. Posons :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque la dernière ligne de QAR est nulle, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{pmatrix} QAR = QAR$$

pour tout $c \in F_0^*$. Donc si D_c est l'élément diagonal de $M_{n_0}(F_0)$ dont tous les termes diagonaux valent 1 sauf le i_1-ème qui vaut c, on a pour tout $M \in Q_1 \mathcal{P} R_1$, $D_c M \in Q_1 \mathcal{P} R_1$. L'application $M \mapsto D_c M$ est donc une application de $Q_1 \mathcal{P} R_1$ dans lui-même, et donc, pour tout $y \in F_0$, envoie $Q_1 \mathcal{P}_y R_1$ dans $Q_1 \mathcal{P}_{cy} R_1$.

De plus, D_c est inversible ; l'application $M \mapsto D_c M$ induit donc une bijection de $Q_1 \mathcal{P}_y R_1$ dans $Q_1 \mathcal{P}_{cy} R_1$. Comme ceci est vrai pour tous y et c, tous les $Q_1 \mathcal{P}_y R_1$, avec y non nul, ont même cardinal.

Enfin, puisque Q_1 et R_1 sont inversibles, on a pour tout y :

$$\operatorname{card} Q_1 \mathcal{P}_y R_1 = \operatorname{card} \mathcal{P}_y,$$

ce qui termine la démonstration. □

D'après ce lemme, pour que l'intégrale soit non nulle, il est également nécessaire que $r(i,j) \leq \operatorname{card}(J_i)$ lorsque i n'est pas multiple de e ; on doit donc avoir l'égalité dans ce cas. Or on a, pour tout j et pour tout $k \in \{1, \ldots, t\}$:

$$\sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} r(i,j) = \sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} \operatorname{card}(J_i) ;$$

en effet, w' laisse stable l'intervalle $\{(k-1)e+1, \ldots, ke\}$, donc on a, pour tout i et tout k' :

$$\sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} a_{w'(i),k'} = \sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} a_{ik'}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} r(i,j) &= \sum_{i}\sum_{k'=1}^{j} a_{w'(i),k'} + \sum_{i}\sum_{k'=j+1}^{s} a_{ik'} \\ &= \sum_{k'=1}^{s}\sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} a_{ik'} \\ &= \sum_{i=(k-1)e+1}^{ke} \operatorname{card}(J_i).\end{aligned}$$

On en conclut que si l'intégrale est non nulle, on a également $r(ke,j) = \operatorname{card}(J_{ke})$ pour tout j et tout k, donc $r(i,j) = \operatorname{card}(J_i)$ pour tous i,j. Or on a, pour tous i,j :

$$r(i,j) - r(i,j-1) = a_{w'(i),j} - a_{i,j} = 0.$$

Donc une condition nécessaire pour que $f_w \neq 0$ est que, pour tous i,j :

$$a_{w'(i),j} = a_{ij}.$$

Cela signifie que dans le tableau $(a_{ij})_{i,j}$, chaque ligne est répétée e fois ; il est donc nécessaire que pour tout j, λ_j soit multiple de e. Donc s'il n'existe pas de $\lambda' \in \mathcal{P}(n/e)$ telle que $\lambda = e\lambda'$, on a $\left(\mathfrak{f}_\alpha^X\right)^{P,\varepsilon} \simeq_{K_\lambda,\varepsilon} 0$; si on a $\lambda = e\lambda'$, il existe une bijection canonique entre l'ensemble des tableaux vérifiant la condition requise et $M(\alpha,\lambda')$, obtenue en ne gardant qu'une ligne sur e du tableau.

De plus, supposons que w vérifie la condition voulue. Pour tout i dans $\{1,\ldots,et-1\}$ tels que e ne divise pas i, la matrice :

$$\left(g_{wx(j),w(k)}\right)_{j,k\in J_i}$$

est alors une matrice triangulaire supérieure par blocs de tailles $a_{i1},\ldots,a_{is}$, dont la valeur des blocs diagonaux ne dépend que de l, donc est fixe quand l est fixe, et dont la valeur des blocs au-dessus de la diagonale dépend de u. On a donc :

$$\mathfrak{f}_\alpha\left(w^{-1}(l+u)\,w\right) = \mathfrak{f}_\alpha\left(w^{-1}lw\right)$$

lorsque $\mathfrak{f}_\alpha\left(w^{-1}(l+u)\,w\right) \neq 0$, ce qui est le cas si et seulement si on a à la fois $\mathfrak{f}_\alpha\left(w^{-1}lw\right) \neq 0$ et $w^{-1}uw \in I_{\alpha*e}xI_{\alpha*e} - w^{-1}lw$. De plus, cette dernière assertion est vraie si et seulement si pour tous i,i', les termes provenant de u dans le bloc :

$$(g_{jk})_{j\in J_i,k\in J_{i'}}$$

sont dans $\mathcal{O}$ si $i \leq i'$ ou si $i = i' + 1$ et i' n'est pas un multiple de e, et dans $\mathfrak{p}$ sinon. Ces termes sont au nombre de :

$$\sum_{1 \leq j < j' \leq s} a_{ij} a_{i',j'}.$$

Soit donc $\mathcal{U}$ le sous-ensemble de U vérifiant cette condition ; on a :

$$\mathrm{vol}\,(\mathcal{U}) = q^{-\sum_{(i,i') \in \mathcal{C}} \sum_{1 \leq j < j' \leq s} a_{ij} a_{i',j'}},$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des couples (i, i') ne vérifiant pas la condition ci-dessus. Or on a :

$$l\,(w) = \sum_{i,j} \sum_{i' < i, j' > j} a_{ij} a_{i',j'};$$

on en déduit :

$$\mathrm{vol}\,(\mathcal{U}) = q^{-l(w) + \sum_{i'} \sum_{1 \leq j < j' \leq s} a_{i'+1,j} a_{i',j'}},$$

la somme étant prise sur les i' tels que e ne divise pas i'. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_K\,(I_\lambda w I_{\alpha * e}) &= \left[I_{\alpha * e} : w^{-1} I_\lambda w \cap I_{\alpha * e}\right] \\ &= \mathrm{vol}_G\,(I_{\alpha * e})\,\mathrm{vol}_G\left(I_{\alpha''_w, G}\right)^{-1} q^{\sum_{1 \leq j < j' \leq s} \sum_{1 \leq i' < i \leq et} a_{ij} a_{i',j'}}, \end{aligned}$$

avec :

$$\left(\alpha''_w\right) = (a_{11}, \ldots, a_{1s}, a_{21}, \ldots, a_{et,s}).$$

Or α''_w est égale à α'_w à une permutation près ; on a donc :

$$\mathrm{vol}_G\left(I_{\alpha''_w, G}\right) = \mathrm{vol}_G\left(I_{\alpha'_w, G}\right) = \mathrm{vol}_M\left(I_{\alpha'_w, M}\right).$$

On en déduit :

$$\mathrm{vol}_K\,(I_\lambda w I_{\alpha^e}) = \mathrm{vol}_G\,(I_{\alpha * e})\,\mathrm{vol}_M\left(I_{\alpha'_w, M}\right)^{-1} q^{l(w)}.$$

Enfin, on a :

$$l\,(x) = \sum_{k=1}^{t} (e-1)\,\alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{t} (e-1) \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ek,j} \right)^2;$$

$$l_M\left(wxw^{-1}\right) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} (e-1)\,a_{ek,j}^2;$$

d'où :

$$\sum_{i'}\sum_{1\leq j<j'\leq s} a_{i'+1,j}a_{i',j'} = \sum_{1\leq j<j'\leq s}\sum_{k=1}^{t}(e-1)\,a_{ke,j}a_{ke,j'}$$
$$= \sum_{k=1}^{t}\frac{e-1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{s}a_{ek,j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{s}a_{ek,j}^2\right)$$
$$= \frac{l(x)-l_M\left(wxw^{-1}\right)}{2}.$$

On obtient donc :

$$\mathrm{vol}\,(\mathcal{U}) = \mathrm{vol}_K\left(I_\lambda w I_{\alpha^e}\right)^{-1}\mathrm{vol}_G\left(I_{\alpha * e}\right)\mathrm{vol}_M\left(I_{\alpha'_w,M}\right)^{-1} q^{\left(l(x)-l_M\left(wxw^{-1}\right)\right)/2},$$

d'où :

$$f_w = \mathrm{vol}\,(\mathcal{U})\,\mathrm{vol}_G\left(I_{\alpha * e}\right)^{-1} q^{\left(-l(x)+l_M\left(wxw^{-1}\right)\right)/2}\,\mathrm{vol}_M\left(I_{\alpha'_w,M}\right)\prod_{j=1}^{s}\mathfrak{f}_{\left(a'_{\cdot j}\right)}$$
$$= \mathrm{vol}_K\left(I_\lambda w I_{\alpha^e}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{s}\mathfrak{f}_{\left(a'_{\cdot j}\right)}.$$

On en déduit :

$$\left(\mathfrak{f}_\alpha^X\right)^{P,\varepsilon} \simeq_{K_\lambda,\varepsilon} \sum_{\left(a'_{ij}\right)_{i,j}\in M(\alpha,\lambda')} \varepsilon\,(-1)^{l(w)}\prod_{j=1}^{s} X_j^{\nu\circ\mathrm{dét}(\cdot)}\mathfrak{f}_{\left(a'_{\cdot j}\right)},$$

où w est associé à $\left(a'_{ij}\right)_{i,j}$ comme dans l'énoncé du lemme, ce qui démontre celui-ci. □

2.4. Deux lemmes utiles

Cette section est destinée à montrer deux lemmes (2.4.1 et 2.4.3) qui seront utilisés dans le chapitre suivant pour le calcul des traces.

LEMME 2.4.1. — *Soit D une distribution ε-variante sur G. Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, tels que b divise n et que $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1$, soit $d = e/\mathrm{pgcd}\,(e,b)$, et soit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_t) \in \mathcal{P}\,(n/db)$. Si f ne divise pas n/db, ou s'il n'existe pas de partition $\alpha' \in \mathcal{P}\,(n/fdb)$ telle que $\alpha = f\alpha'$, alors $D\left(f_\alpha^{a,b}\right) = 0$.*

Démonstration. — Supposons que f ne divise pas n/db, ou qu'il n'existe pas de $\alpha' \in \mathcal{P}\,(n/fdb)$ telle que $\alpha = f\alpha'$. Alors il existe un i_0 tel que $c = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_0}$ n'est pas divisible par f. Soient les parahoriques $I' = I_{(dc,n/b-dc)^b}$, $I'' = I_{(n/b-dc,dc)^b}$; soit également I'_1 (resp. I''_1) le sous-groupe des éléments de I'

(resp. I'') dont les blocs diagonaux sont congrus à 1 modulo $\mathfrak{p}$. La fonction $f_\alpha^{a,b}$ est biinvariante par I_1' et son support est inclus dans $\zeta^{na/b}I'$, donc on obtient :

$$D\left(f_\alpha^{a,b}\right) = \sum_{A \in I'/I_1'} f_\alpha^{a,b}\left(\zeta^{na/b}A\right) D\left(\phi_A\right),$$

où pour tout A, $f_\alpha^{a,b}\left(\zeta^{na/b}A\right)$ est la valeur constante de $f_\alpha^{a,b}$ sur $\zeta^{na/b}AI_1'$, et ϕ_A est la fonction caractéristique de $\zeta^{na/b}AI_1'$. On va montrer que $D\left(\phi_A\right) = 0$ pour tout A.

Soit donc $A \in I'/I_1'$. Il existe $h \in I'$ tel que l'on ait $h^{-1}\zeta^{na/b}AI_1'h = \zeta^{na/b}A'I_1'$, avec A' de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

A_1 étant de taille dc et A_2 de taille $n/b - dc$. Il suffit donc de montrer que l'on a $D\left(\phi_A\right) = 0$ lorsque A est de la forme ci-dessus. On a $\zeta^{-dc}\zeta^{na/b}AI_1'\zeta^{dc} = BI_1''$, où B est l'élément de I''/I_1'' suivant :

$$B = \begin{pmatrix} A_2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & A_1 \end{pmatrix};$$

de plus, on a $k^{-1}\zeta^{na/b}BI_1''k = \zeta^{na/b}B'I_1''$, où :

$$B' = \begin{pmatrix} A_2 & & & & \\ & A_1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et où k est l'élément de I'' diagonal par blocs dont pour tout $i \in \{1, \ldots, b\}$, le $2i-1$-ème bloc diagonal vaut 1 et le $2i$-ème vaut A_2 si $l\left(i\right) < l\left(b\right)$ et 1 sinon. On en déduit, si $\phi_{B'}$ est la fonction caractéristique de $\zeta^{na/b}BI_1''$:

$$D\left(\phi_{B'}\right) = \varepsilon\left(\varpi^{-dc}\left(-1\right)^{dc(n-dc)}\operatorname{d\acute{e}t}\left(A_2\right)^{-l(b)}\right) D\left(\phi_A\right).$$

De plus, on a :

$$\zeta^{na/b}AI_1' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & A_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & A_2^{-1} \end{pmatrix} \zeta^{na/b}AI_1' \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & A_2 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$D(\phi_A) = \varepsilon^b \circ \text{dét}(A_2)\, D(\phi_A);$$

on en déduit que $D(\phi_A) = 0$ si $\varepsilon^b \circ \text{dét}(A_2) \neq 1$. Supposons donc $\varepsilon^b \circ \text{dét}(A_2) = 1$; on va montrer que l'on a :

$$D(\phi_A) = D(\phi_{B'}).$$

Cela suffit à montrer que $D(\phi_A) = 0$; en effet, supposons le contraire. On a alors :

$$\varepsilon\left(\varpi^{-dc}(-1)^{dc(n-dc)}\, \text{dét}(A_2)^{-l(b)}\right) = 1$$

Or $\text{dét}(A_2)$ est un élément de $\mathcal{O}$, donc $\varepsilon^e \circ \text{dét}(A_2) = 1$, donc si on pose $b' = \text{pgcd}(b, e)$, on a $\varepsilon^{b'} \circ \text{dét}(A_2) = 1$. On en déduit, en élevant l'égalité ci-dessus à la puissance b' et en remarquant que $db' = e$ et que $\varepsilon(-1)^e = 1$:

$$\varepsilon^{-ec}(\varpi) = 1.$$

Or ε^{-ec} est trivial sur $\mathcal{O}$; on en déduit que $\varepsilon^{-ec} = 1$, ce qui est exclu car c n'est pas multiple de f. Donc on a bien $D(\phi_A) = 0$.

Montrons maintenant que l'on a $D(\phi_A) = D(\phi_{B'})$. Soit K' (resp. K_1') l'ensemble des éléments de $I_{(n/b)^b}$ dont tous les blocs diagonaux sauf le premier (resp. tous les blocs diagonaux) sont congrus à l'identité modulo $\mathfrak{p}$; K'/K_1' est canoniquement isomorphe à $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$. Soit donc D' la distribution sur $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$ telle que l'on ait, pour tout $g \in GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$:

$$D'\left(1_{\{g\}}\right) = D\left(\phi_g'\right),$$

où $1_{\{g\}}$ est la fonction caractéristique de $\{g\}$ dans $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$, et ϕ_g' la fonction caractéristique de $\zeta^{na/b}gK_1'$ dans G. C'est une distribution ε^b-variante ; de plus, en considérant les sous-groupes paraboliques $P' = M'U' = P((dc, n/b - dc))$ et $P'' = M''U'' = P((n/b - dc, dc))$ de $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$, on peut assimiler A (resp. B) à une classe modulo U' (resp. U'') dans $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$, et on a :

$$D(\phi_A) = \text{card}\left(U'\right)^{b-1} D'(1_{AU'});$$
$$D(\phi_B) = \text{card}\left(U''\right)^{b-1} D'(1_{BU''}).$$

Montrons la première de ces égalités ; la seconde se montre de manière exactement similaire. Identifions A à un de ses représentants dans I' ; soit $\mathcal{I}$ un système de représentants de I'_1 modulo K'_1. On a :

$$\phi_A = \sum_{h \in \mathcal{I}} \phi'_{A,h},$$

où pour tout h, $\phi'_{A,h}$ est la fonction caractéristique de $\zeta^{na/b} A h K'_1$. Or pour tout $h = (h_1, \ldots, h_b)$, $\phi'_{A,h}$ est conjuguée à $\phi'_{A,(h_1 h_{1+a} \ldots h_{1-a}, 1, \ldots, 1)}$ par un élément de I'_1 ; on a donc, avec un léger abus de notation :

$$D\left(\phi'_{A,h}\right) = D'\left(1_{A h_1 h_{1+a} \ldots h_{1-a}}\right);$$

de plus, pour tout $u \in U'$, le nombre de $h \in \mathcal{I}$ tels que l'image de l'élément $h_1 h_{1+a} \ldots h_{1-a}$ dans $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$ soit u est exactement $\mathrm{card}\,(U')^{b-1}$; on en déduit l'assertion.

De plus, on a :

$$\mathrm{card}\left(U'\right) = q^{dc(n/b-dc)} = \mathrm{card}\left(U''\right);$$

on est donc ramené à montrer que $D'(1_{AU'}) = D'(1_{BU''})$, ce qui est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 2.4.2. — *Soit $g' \in M_{dc}(\mathbb{F}_q) \times M_{n/b-dc}(\mathbb{F}_q) \subset M_n(\mathbb{F}_q)$, et soit g'' l'élément de $M_{n/b-dc}(\mathbb{F}_q) \times M_{dc}(\mathbb{F}_q) \subset M_n(\mathbb{F}_q)$ obtenu en permutant les deux blocs diagonaux de g'. Soit $\mathcal{C}$ une classe de $SL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$-conjugaison dans le groupe $GL_{n/b}(\mathbb{F}_q)$. Alors on a :*

$$\mathrm{card}\left\{u' \in \mathrm{Lie}\, U' \mid g' + u' \in \mathcal{C}\right\} = \mathrm{card}\left\{u'' \in \mathrm{Lie}\, U'' \mid g'' + u'' \in \mathcal{C}\right\}.$$

Démonstration. — Si g' est inversible, l'assertion ci-dessus est équivalente à :

$$\mathrm{card}\left\{u' \in U'' \mid g'u' \in \mathcal{C}\right\} = \mathrm{card}\left\{u'' \in U'' \mid g''u'' \in \mathcal{C}\right\}.$$

Supposons d'abord $g' \in SL_n(\mathbb{F}_q)$; alors on peut supposer $\mathcal{C} \subset SL_n(\mathbb{F}_q)$. Posons $G_1 = SL_n(\mathbb{F}_q)$, $P'_1 = M'_1 U' = P' \cap G_1$; soit $\mathcal{C}_{g'}$ la classe de M'_1-conjugaison de g', $1_{g'}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{C}_{g'}$. On a :

$$\mathrm{card}\left\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\right\} = \left(\mathrm{card}\, \mathcal{C}_{g'}\right)^{-1} \mathrm{card}\left\{u' \in U', \gamma \in \mathcal{C}_{g'} \mid \gamma u' \in \mathcal{C}\right\}.$$

Soit f une fonction sur M'_1, invariante par conjugaison ; on pose, pour tout $x \in G_1$:

$$i_{P'_1}^{G_1} f(x) = \left(\mathrm{card}\, P'_1\right)^{-1} \sum_{h \in G_1, m' \in M'_1, u' \in U', x = hm'u'h^{-1}} f\left(m'\right).$$

Soit $x \in \mathcal{C}$ quelconque, et soit $Z_{G_1}(x)$ le centraliseur de x dans G_1 ; alors on a :

$$\mathrm{card}\left\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\right\} = \frac{\mathrm{card}\, P'_1}{\mathrm{card}\, Z_{G_1}(x)\, \mathrm{card}\, \mathcal{C}_{g'}} i_{P'_1}^{G_1} 1_{g'}(x).$$

Or on a, d'après [**1**, prop. 8.2.7] :

$$i_{P'_1}^{G_1} f = i_{\overline{P'_1}}^{G_1} f,$$

avec $\overline{P'_1} = \overline{P'} \cap G_1 = M'_1\overline{U'}$, où $\overline{P'} = M'\overline{U'}$ est le parabolique opposé à P' ; on en déduit :

$$\operatorname{card}\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\} = \operatorname{card}\{u' \in \overline{U'} \mid g'u \in \mathcal{C}\}.$$

Or soit w l'élément de G_1 suivant :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id}_{ec} \\ \operatorname{Id}_{n/b-ec} & 0 \end{pmatrix}$$

si n/b est pair et ec impair, et :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Id}_{ec} \\ \operatorname{Id}_{n/b-ec} & 0 \end{pmatrix}$$

sinon ; dans tous les cas, on a bien dét $(w) = 1$. De plus, $w^{-1}g'w = g''$ et $w^{-1}\overline{U'}w = U''$; comme de plus $w \in G_1$, on en déduit :

$$\operatorname{card}\{u' \in \overline{U'} \mid g'u' \in \mathcal{C}\} = \operatorname{card}\{u'' \in U'' \mid g''u'' \in \mathcal{C}\},$$

ce qui démontre l'assertion.

Supposons ensuite g' inversible quelconque. Écrivons la décomposition de Jordan de g' : $g' = sv$, avec $s, v \in M'$, s semi-simple, v unipotent, et $sv = vs$. Posons :

$$\operatorname{Lie} U' = \left(\operatorname{Lie} U' \cap \operatorname{Lie} Z_G(s)\right) \oplus V',$$

où V' est la somme directe des sous-espaces propres pour la conjugaison par s distincts de $\operatorname{Lie} U' \cap \operatorname{Lie} Z_G(s)$. Alors puisque $Z_G(g') \subset Z_G(s)$, l'application $v \mapsto g'vg'^{-1} - v$ de V' dans V' est injective, donc bijective ; donc tout élément de P' de la forme $g'u'w$, avec $u' \in \exp(\operatorname{Lie} U' \cap \operatorname{Lie} Z_G(s))$, $w \in \exp(V')$, est conjugué à $g'u'$ par un élément $v' \in \exp(V')$, d'où :

$$\operatorname{card}\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\} = q^{\dim(V')} \operatorname{card}\{u' \in U' \cap Z_G(s) \mid g'u' \in \mathcal{C}\}.$$

Or on peut identifier $Z_G(s)$ à :

$$Z_G(s) = GL_{n_1}(\mathbb{F}_{q^{a_1}}) \times \cdots \times GL_{n_t}(\mathbb{F}_{q^{a_t}}),$$

où les n_i, a_i sont des entiers tels que :

$$\sum_{i=1}^{t} n_i a_i = n.$$

Posons :

$$Z_G(s)_1 = SL_{n_1}(\mathbb{F}_{q^{a_1}}) \times \cdots \times SL_{n_t}(\mathbb{F}_{q^{a_t}}).$$

Puisque $sv = vs$, $sg' = g's$ donc $g' \in Z_G(s)$; $\mathcal{C} \cap Z_G(s)$ est donc une réunion finie de classes de $Z_G(s)_1$-conjugaison dans $Z_G(s)$. Appelons $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ ces classes ; on a donc :

$$\operatorname{card}\left\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\right\} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card}\left\{u' \in U' \cap Z_G(s) \mid g'u' \in \mathcal{C}_i\right\}.$$

Écrivons $g' = (g'_1, \ldots, g'_t)$ et $g'' = (g''_1, \ldots, g''_t)$, avec $g'_j, g''_j \in GL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$ pour tout j ; alors il existe, pour tout j, un entier b_j tel que l'on ait, si on pose $P'_j = M'_j U'_j = P((b_j, n_j - b_j)) \subset GL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$ (resp. $P''_j = M''_j U''_j = P((n_j - b_j, b_j))$:

$$g'_j \in M_j, g''_j \in M'_j, g''_j = w_j^{-1} g'_j w_j$$

en définissant w_j pour tout j de manière analogue à w, et :

$$U' \cap Z_G(s) = U'_1 \times \cdots \times U'_t,$$

et de même pour U''. De plus, pour tout i, on a :

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i,1} \times \cdots \times \mathcal{C}_{i,t},$$

où pour tous i, j, $\mathcal{C}_{i,j}$ est une classe de $SL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$-conjugaison dans le groupe $GL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$; on obtient alors :

$$\operatorname{card}\left\{u' \in U' \mid g'u' \in \mathcal{C}\right\} = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{t} \operatorname{card}\left\{u'_j \in U'_j \mid g'_j u'_j \in \mathcal{C}_{i,j}\right\}.$$

On obtient une assertion similaire pour g'' ; il suffit donc de montrer l'assertion pour $\mathcal{C}_{i,j}$, g'_j et g''_j dans un bloc $GL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$, avec i et j donnés. Mais alors on a $g'_j = s_j v_j$, avec s_j central et v_j unipotent. Puisque s_j est central, $s^{-1}\mathcal{C}_{i,j}$ est une classe de $SL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$-conjugaison dans $GL_{n_j}\left(\mathbb{F}_{q^{a_j}}\right)$; comme on a :

$$\operatorname{card}\left\{u'_j \in U'_j \mid g'_j u'_j \in \mathcal{C}_{i,j}\right\} = \operatorname{card}\left\{u'_j \in U'_j \mid v_j u'_j \in s_j^{-1}\mathcal{C}_{i,j}\right\};$$

on est donc ramené au cas $g'_j = v_j$. Or v_j est unipotent, donc dét $(v_j) = 1$, et on est donc ramené au cas précédent.

Supposons enfin g' quelconque. Soient g'_1, g'_2 les blocs diagonaux de g'. Le fait de conjuguer g' par un élément h de $M' \cap SL_n(\mathbb{F}_q)$ ne change pas l'assertion ; on peut donc supposer que pour $i = 1, 2$, g'_i est de la forme :

$$g'_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & n_i \end{pmatrix}.$$

où s_i est une matrice carrée inversible de taille a_i et n_i une matrice carrée nilpotente de taille b_i.

Identifions, pour simplifier les notations, $\mathrm{Lie}\, U'$ à $M_{dc,n/b-dc}(\mathbb{F}_q)$. Soient V' et Z' les sous-espaces de $\mathrm{Lie}\, U'$ suivants :

$$V' = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, Z' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

où les blocs considérés sont de tailles a_1, b_1 en hauteur et a_2, b_2 en largeur. Alors Z' agit sur $(g' + \mathrm{Lie}\, U') \cap \mathcal{C}$, et on a $((g' + \mathrm{Lie}\, U') \cap \mathcal{C}) / Z' = (g' + V') \cap \mathcal{C}$: en effet, posons :

$$u' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}.$$

Alors pour $v = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix} \in Z'$, le bloc supérieur droit de :

$$(1+v)^{-1} (g' + u') (1+v)$$

vaut :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 + s_1 v_1 - v_1 n_2 \\ u_3 + n_1 v_2 - v_2 s_1 & u_4 \end{pmatrix};$$

il suffit de montrer que les applications $v_1 \mapsto s_1 v_1 - v_1 n_2$ et $v_2 \mapsto n_1 v_2 - v_2 s_1$ sont injectives. Soit donc v_1 telle que l'on ait $s_1 v_1 - v_1 n_2 = 0$; alors on a :

$$v_1 = s_1^{-1} v_1 n_2,$$

donc par une récurrence évidente :

$$v_1 = s_1^{-k} v_1 n_2^k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or n_2 est nilpotente, donc il existe k tel que $n_2^k = 0$; donc $v_1 = 0$. On montre l'injectivité de la deuxième application de la même manière.

On en déduit que l'on a :

$$\mathrm{card}\left\{u' \in \mathrm{Lie}\, U' \mid g' + u' \in \mathcal{C}\right\} = q^{\dim(Z')} \,\mathrm{card}\left\{u' \in V' \mid g' + u' \in \mathcal{C}\right\}.$$

Or l'ensemble $g' + V'$ est canoniquement isomorphe à :

$$\left(h_1 + \mathrm{Lie}\, U_1'\right) \times \left(h_2 + \mathrm{Lie}\, U_2'\right),$$

où $P_1' = M_1' U_1'$ (resp. $P_2' = M_2' U_2'$) est le sous-groupe parabolique standard $P((a_1, a_2))$ (resp. $P((b_1, b_2))$) de $GL_{a_1+a_2}(\mathbb{F}_q)$ (resp. $GL_{b_1+b_2}(\mathbb{F}_q)$), et :

$$h_1 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Or h_1 est inversible et h_2 nilpotent ; on est donc ramené à montrer le lemme dans ces deux cas. Le cas inversible a été traité précédemment ; pour le cas g' nilpotent, on remarque que $1 + \mathcal{C}$ est également une classe de $SL_n(\mathbb{F}_q)$-conjugaison dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, et que :

$$\mathrm{card}\left\{u' \in \mathrm{Lie}\, U' \mid g' + u' \in \mathcal{C}\right\} = \mathrm{card}\left\{u' \in \mathrm{Lie}\, U' \mid 1 + g' + u' \in 1 + \mathcal{C}\right\}.$$

Puisque g' est nilpotent, $1+g'$ est unipotent, donc inversible ; on est là encore ramené au cas précédent. $\square$

$\square$

LEMME 2.4.3. — *Soit D une distribution ε-variante sur G, et soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n/e)$. Alors s'il n'existe pas de $\alpha' \in \mathcal{P}(m)$ telle que $\alpha = f\alpha'$, $D(\mathfrak{f}_\alpha) = 0$.*

Démonstration. — La démonstration est identique à celle du lemme précédent, en posant $a = 0$ et $b = 1$. $\square$

CHAPITRE 3

CALCUL DE TRACES

3.1. Une proposition essentielle

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 3.1.1. — *Soit $\eta \in \mathcal{E}$, soit π une représentation admissible de G et soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Alors $V(\pi)_I^\eta$ est isomorphe à $V(\pi_P)_{I_M}^\eta$.*

Démonstration. — En effet, $V(\pi)_I^\eta$ est isomorphe à $V(\pi_B)_{I_T}^\eta$ d'après [**2**, 5.8]. Par le même argument, $V(\pi_P)_{I_M}^\eta$ est isomorphe à $V((\pi_P)_{B\cap M})_{I_T}^\eta$; et par transitivité du foncteur de Jacquet, $(\pi_P)_{B\cap M} = \pi_B$; d'où le lemme. □

Soit R la catégorie des représentations de $GL_{n/e}(F)$ engendrées par l'espace de leurs vecteurs invariants par I ; soit ι l'isomorphisme entre $\mathcal{H}^0$ et $\left(\mathcal{H}_{n/e}\right)^{\otimes e}$ défini dans les préliminaires.

Soit $\pi_0, \ldots, \pi_{e-1} \in R$. Posons $P = MU = P\left(\left(\frac{n}{e}\right)^e\right)$, et :

$$\pi = \operatorname{Ind}_P^G\left(\pi_0 \otimes \left(\varepsilon^{-1} \circ \text{dét}\right)\pi_1 \otimes \cdots \otimes \left(\varepsilon^{1-e} \circ \text{dét}\right)\pi_{e-1}\right).$$

Soit l'isomorphisme :

$$\phi_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}} : V(\pi)_I^{\eta_0} \longrightarrow V(\pi_0)_I \otimes \cdots \otimes V(\pi_{e-1})_I$$

tel que si $v_i \in V(\pi_i)_I$ pour tout i, $\phi^{-1}_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}(v_0 \otimes \cdots \otimes v_{e-1})$ est la fonction à support dans PI qui vaut $v_0 \otimes \cdots \otimes v_{e-1}$ en 1. Montrons que l'on a, si $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ est telle que $\iota(\mathfrak{f})$ est de la forme $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{e-1}$ et $v = \phi^{-1}_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}(v_0 \otimes \cdots \otimes v_{e-1})$:

$$\phi_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}(\pi(\mathfrak{f})\,v) = \pi_0(f_0)\,v_0 \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1})\,v_{e-1}.$$

Les deux membres de l'égalité ci-dessus étant tous deux des formes multilinéaires en $f_0, \ldots, f_{e-1}$, il suffit de la montrer dans le cas où $\mathfrak{f} = T_{x,\eta_0}$,

$x \in \Omega_M$. Posons $x = (x_0, \ldots, x_{e-1})$. Soit pour tout i, $v_i \in V(\pi_i)_I$; notons $v = \phi^{-1}_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}(v_0 \otimes \cdots \otimes v_{e-1})$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\pi(\mathfrak{f})\, v(1) &= \mathrm{vol}(IxI) \int_I \eta_0(g)\, v(gx)\, dx \\ &= \mathrm{vol}(IxI) \int_{I\cap M} \int_{I\cap \overline{U}} \eta_0(m)\, v(m\overline{u}x)\, d\overline{u}\, dm.\end{aligned}$$

De plus, $v(m\overline{u}x) \neq 0$ si et seulement si $m\overline{u}x \in PI = P\left(I \cap \overline{U}\right)$, soit $x^{-1}\overline{u}x \in I \cap \overline{U}$, soit $\overline{u} \in x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\pi(\mathfrak{f})\, v(1) &= \mathrm{vol}(IxI)\, \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) \int_{I\cap M} \eta_0(m)\, v(mx)\, dm \\ &= \mathrm{vol}(IxI)\, \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) \delta_P^G(x)^{1/2} \\ &\quad \cdot \prod_{i=0}^{e-1}\left(\varepsilon^{-i} \circ \mathrm{d\acute{e}t}(x_i) \int_{I_{n/e}} \pi_i(m_i x_i)\, v_i dm_i\right) \\ &= \mathrm{vol}(IxI)\, \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) \delta_P^G(x)^{1/2} \\ &\quad \cdot \prod_{i=0}^{e-1}\left(\mathrm{vol}\left(I_{n/e} x_i I_{n/e}\right)^{-1} \varepsilon^{-i} \circ \mathrm{d\acute{e}t}(x_i)\, T_{x_i}(v_i)\right).\end{aligned}$$

On a :

$$\mathrm{vol}(IxI) = q^{l(x)};$$

$$\prod_{i=0}^{e-1} \mathrm{vol}\left(I_{n/e} x_i I_{n/e}\right) = q^{l_M(x)}.$$

Pour achever la démonstration de l'assertion, il suffit donc de vérifier que l'on a :

$$\mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) \delta_P^G(x)^{1/2} = q^{(l_M(x)-l(x))/2}.$$

On a :

$$\mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) = \delta_P^G(x)^{-1}\, \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x^{-1}\left(I \cap \overline{U}\right)x\right);$$

il suffit donc de montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x^{-1}\left(I \cap \overline{U}\right)x\right) = q^{l_M(x)-l(x)}.$$

Écrivons $x = w_x \varpi^z$, $w_x \in W_M$, $z \in \mathbb{Z}^n$. On a, puisque w_x normalise $I \cap \overline{U}$:

$$\mathrm{vol}_1 = \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x\left(I \cap \overline{U}\right)x^{-1}\right) = \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap \varpi^z\left(I \cap \overline{U}\right)\varpi^{-z}\right);$$

$$\mathrm{vol}_2 = \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap x^{-1}\left(I \cap \overline{U}\right)x\right) = \mathrm{vol}\left(I \cap \overline{U} \cap \varpi^{-z}\left(I \cap \overline{U}\right)\varpi^{z}\right).$$

On en déduit :

$$\mathrm{vol}_1 = \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}} q^{z_i - z_j},$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des couples (i,j) tels que $i < j$, i et j ne sont pas dans le même intervalle de longueur n/e, et $z_i > z_j$, et :

$$\mathrm{vol}_2 = \prod_{(i,j)\in\mathcal{C}'} q^{z_j - z_i},$$

où $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des couples (i,j) tels que $i < j$, i et j ne sont pas dans le même intervalle de longueur n/e, et $z_j > z_i$. On a donc :

$$\mathrm{vol}_1\,\mathrm{vol}_2 = q^{\sum_{(i,j)\in\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'}|z_j - z_i|} = q^{l(x) - l_M(x)}.$$

Pour tout $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$, posons :

$$\mathfrak{f}^\varepsilon : g \longmapsto \varepsilon^{-1} \circ \mathrm{dét}\,(g)\,\mathfrak{f}\,(g)\,.$$

On vérifie aisément que si pour $\eta \in \mathcal{E}$ donné, $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^\eta$ (resp. $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^\eta$), alors $\mathfrak{f}^\varepsilon \in \mathcal{H}^{(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^{-1}\eta}$ (resp. $\mathfrak{f}^\varepsilon \in \mathcal{F}^{(\varepsilon\circ\mathrm{dét})^{-1}\eta}$.). L'application :

$$\mathfrak{f} \longmapsto \left(f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0,(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0}\right)^\varepsilon$$

induit donc un morphisme de $\mathcal{H}^0$ dans lui-même ; de plus, si $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ est telle que $\iota\,(\mathfrak{f})$ est de la forme $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{e-1}$, on a :

$$\iota\left(\left(f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0,(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0}\right)^\varepsilon\right) = f_1 \otimes \cdots \otimes f_{e-1} \otimes f_0^{\varepsilon^e}. \tag{2}$$

En effet, pour tout $x = (x_0, \dots, x_{e-1}) \in \Omega_0$, on a comme dans la démonstration du lemme 1.3.6, en posant $y = (x_1, \dots, x_{e-1}, x_0)$:

$$\begin{aligned} q^{-l(x)/2}\left(f^0 * T_{x,\eta_0} * f^{\eta_0,(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0}\right)^\varepsilon &= q^{-l(y)/2} T^\varepsilon_{y,(\varepsilon\circ\mathrm{dét})\eta_0} \\ &= \varepsilon^{-1} \circ \mathrm{dét}\,(y)\, q^{-l(y)/2} T_{y,\eta_0}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\iota\left(q^{-l(x)/2} T_{x,\eta_0}\right) = q^{-l_M(x)/2} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \mathrm{dét}\,(x_i)\, T_{x_0} \otimes \cdots \otimes T_{x_{e-1}};$$

$$\begin{aligned} \iota\left(\varepsilon^{-1} \circ \mathrm{dét}\,(y)\, q^{-l(y)/2} T_{y,\eta_0}\right) &= \varepsilon^{-1} \circ \mathrm{dét}\,(y)\, q^{-l_M(y)/2} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \mathrm{dét}\,(x_{i+1})\, T_{x_1} \otimes \cdots \otimes T_{x_{e-1}} \otimes T_{x_0}. \end{aligned}$$

Or on a $l_M(x) = l_M(y)$; d'autre part :

$$\varepsilon \circ \text{dét}(y)^{-1} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \text{dét}(x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \text{dét}(x_i)\, \varepsilon^{-e} \circ \text{dét}(x_0).$$

Cela démontre (2) pour $\mathfrak{f} = T_{x,\eta_0}$. Comme les T_{x,η_0} forment une base de $\mathcal{H}^0$, on en déduit (2) pour $\mathfrak{f}$ quelconque.

Supposons maintenant $\pi_0 \in R$ irréductible et telle que $\varepsilon^e \circ \text{dét}(\pi_0) \simeq \pi_0$, et pour tout $i \in \{1, \dots, e-1\}$, $\pi_i = \pi_0$. Alors on a :

$$\pi \simeq (\varepsilon \circ \text{dét})\, \pi.$$

De plus, π est irréductible ; il existe donc un opérateur d'entrelacement A_π^ε de π dans $(\varepsilon \circ \text{dét})\, \pi$, unique à une constante multiplicative près, vérifiant, pour tout $g \in G$:

$$A_\pi^\varepsilon \circ \pi(g) = \varepsilon \circ \text{dét}(g)^{-1}\, \pi(g) \circ A_\pi^\varepsilon.$$

Il est clair que A_π^ε envoie $V(\pi)_I^{(\varepsilon \circ \text{dét})\eta_0}$ dans $V(\pi)_I^{\eta_0}$; en utilisant le lemme 1.3.9, on voit donc que l'application $A_\pi^\varepsilon \circ \pi(f^0)$ préserve $V(\pi)_I^{\eta_0}$; de plus, on a pour tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$:

$$\text{(3)} \qquad A_\pi^\varepsilon \circ \pi(f^0) \circ \pi(\mathfrak{f}) = \pi\left(\left(f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0, (\varepsilon \circ \text{dét})\eta_0}\right)^\varepsilon\right) \circ A_\pi^\varepsilon \circ \pi(f^0).$$

En effet, on a le lemme suivant :

LEMME 3.1.2. — *Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. Soit π une représentation lisse irréductible de G vérifiant $\pi \simeq \varepsilon \circ \text{dét}(\pi)$, et soit A_π^ε l'opérateur d'entrelacement associé. Alors on a :*

$$A_\pi^\varepsilon \circ \pi(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{f}^\varepsilon) \circ A_\pi^\varepsilon.$$

Démonstration. — En effet, on a :

$$A_\pi^\varepsilon \circ \pi(\mathfrak{f}) = \int_G A_\pi^\varepsilon \circ \pi(g)\, \mathfrak{f}(g)\, dg$$

$$= \int_G \varepsilon^{-1} \circ \text{dét}(g)\, \mathfrak{f}(g)\, \pi(g) \circ A_\pi^\varepsilon dg$$

$$= \pi(\mathfrak{f}^\varepsilon) \circ A_\pi^\varepsilon.$$

□

On en déduit :

$$\pi\left(\left(f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0, (\varepsilon \circ \text{dét})\eta_0}\right)^\varepsilon\right) \circ A_\pi^\varepsilon = A_\pi^\varepsilon \circ \pi\left(f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0, (\varepsilon \circ \text{dét})\eta_0}\right);$$

de plus, on a :

$$f^0 * \mathfrak{f} * f^{\eta_0, (\varepsilon \circ \text{dét})\eta_0} * f^0 = f^0 * \mathfrak{f};$$

on en déduit (3).

Soit également $A_{\pi_0}^{\varepsilon^e}$ l'opérateur d'entrelacement défini de façon similaire pour π_0, et soit, si pour tout i, $v_i \in V(\pi_i)^I$:

$$B_\pi^\varepsilon : v_0 \otimes \cdots \otimes v_{e-1} \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_{e-1} \otimes A_{\pi_0}^{\varepsilon^e} v_0.$$

Alors il existe une constante c telle que l'on a :

$$\phi_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}} \circ A_\pi^\varepsilon \circ \pi\left(f^0\right) \circ \phi_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}^{-1} = cB_\pi^\varepsilon :$$

en effet, notons $B_\pi'^{\,\varepsilon}$ le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Soit $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ telle que $\iota(\mathfrak{f})$ est de la forme $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{e-1}$; d'après (2) et (3), on a :

$$\begin{aligned} B_\pi'^{\,\varepsilon} &\circ \left(\pi_0(f_0) \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1})\right) \\ &= \left(\pi_1(f_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1}) \otimes \pi_0\left(f_0^{\varepsilon^e}\right)\right) \circ B_\pi'^{\,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Or $A_{\pi_0}^{\varepsilon^e}$ est, à une constante multiplicative près, le seul opérateur sur $V(\pi_0)_I$ vérifiant, pour tout $f_0 \in \mathcal{H}_{n/e}$:

$$A_{\pi_0}^{\varepsilon^e} \circ \pi_0(f_0) = \pi_0\left(f_0^{\varepsilon^e}\right) \circ A_{\pi_0}^{\varepsilon^e};$$

on en déduit qu'il existe c telle que $B_\pi'^{\,\varepsilon} = cB_\pi^\varepsilon$.

On en déduit, pour $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^0$ telle que $\iota(\mathfrak{f})$ est de la forme $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{e-1}$:

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon \circ \pi\left(f^0 * \mathfrak{f}\right) = c \operatorname{tr} B_\pi^\varepsilon \circ \left(\pi_0(f_0) \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1})\right).$$

Soit donc $(e_i)_{i=1,\ldots,N}$ une base de $V(\pi_0)_I$. Alors :

$$\left\{e_{i_0} \otimes \cdots \otimes e_{i_{e-1}} \mid 1 \leq i_0, \ldots, i_{e-1} \leq N\right\}$$

est une base de $V(\pi_0)_I \otimes \cdots \otimes V(\pi_0)_I$. De plus, posons, relativement à la base (e_i) :

$$\begin{aligned} A_{\pi_0}^{\varepsilon^e} \otimes \pi_0(f_0) &= \left(a_{ij}^0\right)_{i,j}; \\ \pi_0(f_k) &= \left(a_{ij}^k\right)_{i,j}, \end{aligned}$$

pour $k > 0$. Alors on a, pour tous $j_0, \ldots, j_{e-1}$:

$$\begin{aligned} B_\pi^\varepsilon &\circ \left(\pi_0(f_0) \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1})\right)\left(e_{j_0} \otimes \cdots \otimes e_{j_{e-1}}\right) \\ &= \sum_{i_0,\ldots,i_{e-1}} a_{i_{e-1}j_0}^0 a_{i_0 j_1}^1 \ldots a_{i_{e-2}j_{e-1}}^{e-1} e_{i_0} \otimes \cdots \otimes e_{i_{e-1}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B_\pi^\varepsilon \circ \left(\pi_0(f_0) \otimes \cdots \otimes \pi_{e-1}(f_{e-1})\right) &= \sum_{i_0,\ldots,i_{e-1}} a_{i_{e-1}i_0}^0 a_{i_0 i_1}^1 \ldots a_{i_{e-2}i_{e-1}}^{e-1} \\ &= \operatorname{tr} A_{\pi_0}^{\varepsilon^e} \circ \pi_0\left(f_0 * \cdots * f_{e-1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1.3. — *Soit $\eta \in \mathcal{E}$, et soit $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^\eta$ telle que, si ι_η est l'isomorphisme entre $\mathcal{H}^\eta$ et $\left(\mathcal{H}_{n/e}\right)^e$ défini dans le chapitre 2, $\iota_\eta(\mathfrak{f})$ est de la forme $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{e-1}$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}(m)$. Alors on a :*

$$\operatorname{tr} A_\lambda^\varepsilon \circ \operatorname{St}_\lambda^\varepsilon \left(f^\eta * \mathfrak{f}\right) = \varepsilon \left(-1\right)^{l\left(w_{\eta_0,\eta}\right)} \operatorname{tr} A_\lambda^{\varepsilon^e} \circ \operatorname{St}_\lambda^{\varepsilon^e} \left(f_0 * \cdots * f_{e-1}\right).$$

Démonstration. — Supposons d'abord $\eta = \eta_0$. Posons $\pi_0 = \operatorname{St}_\lambda^{\varepsilon^e}$; en définissant les π_i, $i > 1$, et π comme précédemment, on a $\pi = \operatorname{St}_\lambda^\varepsilon$; il suffit de montrer que la constante c définie précédemment vaut 1. Soit D'_λ la droite de $V(\pi_0)_I$ définie (et notée D) dans [**17**, III.3] ; $A_{\pi_0}^{\varepsilon^e}$ la conserve et y agit par $(-1)^{n/e-m}$. De plus, si D_λ est la droite de $V(\pi)_I^{\eta_0}$ définie dans le chapitre 2, on a :

$$\phi_{\pi_0,\ldots,\pi_{e-1}}\left(D_\lambda\right) = D \otimes \cdots \otimes D;$$

comme A_π^ε conserve D_λ et y agit par $(-1)^{n/e-m}$, on en déduit que $c = 1$.

Supposons maintenant η quelconque. On a le lemme suivant :

LEMME 3.1.4. — *Soit $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^\eta$. Alors on a :*

$$\operatorname{tr} A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon \left(\left(f^{\eta_0,\eta}\right)^{\varepsilon^{-1}} * \mathfrak{f} * f^{\eta,\eta_0}\right) = \operatorname{tr} A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon (\mathfrak{f}).$$

Démonstration. — En effet, on a :

$$\begin{aligned} A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon \left(\left(f^{\eta_0,\eta}\right)^{\varepsilon^{-1}} * \mathfrak{f} * f^{\eta,\eta_0}\right) &= A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon \left(\left(f^{\eta_0,\eta}\right)^{\varepsilon^{-1}}\right) \\ &\quad \cdot \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f}) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right) \\ &= \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta_0,\eta}\right) \circ \left(A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f})\right) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right). \end{aligned}$$

De plus, toutes les applications linéaires ci-dessus sont de rang fini, donc on a :

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left(\operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta_0,\eta}\right) \circ \left(A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f})\right) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right)\right) \\ &\qquad = \operatorname{tr}\left(\operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta_0,\eta}\right) \circ \left(A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f})\right)\right). \end{aligned}$$

Or $f^{\eta,\eta_0} * f^{\eta_0,\eta}$ n'est autre que l'élément neutre 1_η de $\mathcal{H}^\eta$; donc $\operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta_0,\eta}\right)$ est l'identité sur $V_{I,m}^\eta$, qui contient l'image de $\operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f})$ d'après le lemme 1.3.9 ; on en déduit :

$$\operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta_0,\eta}\right) \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon\left(f^{\eta,\eta_0}\right) \circ \left(A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f})\right) = A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(\mathfrak{f}),$$

d'où l'assertion du lemme. □

Or on a : si $\mathfrak{f} \in \mathcal{H}^\eta$:

$$\left(f^{\eta_0,\eta}\right)^{\varepsilon^{-1}} * \left(f^\eta * \mathfrak{f}\right) * f^{\eta,\eta_0} = \varepsilon\left(-1\right)^{l\left(w_{\eta_0,\eta}\right)} f^{\eta_0} * \left(f^{\eta_0,\eta} * \mathfrak{f} * f^{\eta,\eta_0}\right);$$

d'autre part, d'après le lemme 1.3.6 :

$$\iota_{\eta_0}\left(f^{\eta_0,\eta} * \mathfrak{f} * f^{\eta,\eta_0}\right) = \iota_\eta(\mathfrak{f}),$$

d'où l'assertion. □

3.2. Quelques rappels sur la PSH-algèbre de Zelevinsky

Pour plus de détails sur la PSH-algèbre de Zelevinsky, voir **[18]**.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathcal{P}(n)$. On a défini $M(\lambda, \mu)$ dans le chapitre précédent. Soit $M^1(\lambda, \mu)$ l'ensemble des éléments $(a_{ij})_{i,j}$ de $M(\lambda, \mu)$ tels que tous les a_{ij} valent 0 ou 1.

Soit R la PSH-algèbre de Zelevinsky : en tant qu'algèbre, c'est l'algèbre des polynômes en des éléments $x_i, i \in \mathbb{N}^*$. C'est également un anneau gradué de la manière suivante :

$$R = \bigoplus_k R_k$$

avec pour tout k, $x_k \in R_k$. On en déduit que pour tout k, si pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(k)$ on pose :

$$x_\lambda = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \cdots x_{\lambda_t},$$

alors $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}^0(k)}$ constitue une base de l'espace vectoriel R_k. De plus, R_k est munie d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini positif à valeurs dans $\mathbb{Z}$, vérifiant, pour tous $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(k)$:

$$\langle x_\lambda, x_\mu \rangle = \operatorname{card} M(\lambda, \mu).$$

R est également engendrée par des éléments $y_i, i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant des propriétés exactement identiques. Les x_i et y_i sont liés de la manière suivante : si on pose :

$$X(T) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i T^i,$$

$$Y(T) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i T^i,$$

(en posant $x_0 = y_0 = 1$), alors on a :

$$X(T)\, Y(-T) = 1.$$

De plus, on a pour tout k et tous $\lambda, \mu \in \mathcal{P}^0(k)$, en définissant les y_λ de manière analogue aux x_λ :

$$\langle x_\lambda, y_\mu \rangle = \langle y_\lambda, x_\mu \rangle = \operatorname{card} M^1(\lambda, \mu).$$

Il existe également des éléments z_i, $z_i \in R_i$, tels que, en définissant les z_λ de manière similaire aux x_λ et y_λ, pour tout k, les z_λ, avec $\lambda \in \mathcal{P}^0(k)$, forment une base sur $\mathbb{Q}$ de $R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$, et tels que, si pour tout entier positif c, τ_c est l'endomorphisme d'algèbres de $R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ tel que pour tout i, $\tau_c(z_i) = z_{ci}$, on ait, pour tout k, tout $\lambda \in \mathcal{P}(ck)$ et tout $x \in R_k$:

$$\langle x_\lambda, \tau_c(x) \rangle = 0$$

s'il n'existe pas de $\lambda' \in \mathcal{P}(k)$ telle que $\lambda = c\lambda'$, et :

$$\langle x_\lambda, \tau_c(x)\rangle = \langle x_{\lambda'}, x\rangle$$

si λ' existe. (cf également [**16**, 5.5]).

3.3. Calcul des traces de $f_{f\alpha}^{a,b}$

Soit $v \in \mathbb{Z}$, posons :

$$\begin{aligned} l &= \frac{m}{\operatorname{pgcd}(m,v)}; \\ a &= \frac{v}{\operatorname{pgcd}(me,v)}; \\ b &= \frac{me}{\operatorname{pgcd}(me,v)}; \\ d &= \frac{e}{\operatorname{pgcd}(b,e)}. \end{aligned}$$

On a l'égalité suivante :

$$\frac{m}{l} = \frac{n}{fdb}.$$

En effet, d'une part, on a :

$$\frac{m}{l} = \operatorname{pgcd}(m,v);$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{n}{fdb} &= \frac{me}{db} \\ &= \frac{\operatorname{pgcd}(me,v)}{d} \\ &= \frac{\operatorname{pgcd}(me,v)\operatorname{pgcd}(b,e)}{e} \\ &= \frac{\operatorname{pgcd}(me,v)\operatorname{pgcd}(me/\operatorname{pgcd}(me,v),e)}{e} \\ &= \frac{\operatorname{pgcd}(me,e\operatorname{pgcd}(me,v))}{e} \\ &= \operatorname{pgcd}(m,\operatorname{pgcd}(me,v)). \end{aligned}$$

C'est clairement un diviseur de $\operatorname{pgcd}(m,v)$; d'autre part, $\operatorname{pgcd}(m,v)$ divise à la fois m et $\operatorname{pgcd}(me,v)$. On en déduit l'égalité cherchée.

On en déduit en particulier :

$$l = \frac{db}{e} = \frac{b}{\operatorname{pgcd}(b,e)}.$$

Posons, avec les notations du lemme 2.1.5 :

$$c_{a,b} = \prod_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \text{dét} \left(\zeta_{n/e}^{(n/db)k_i} \right).$$

PROPOSITION 3.3.1. — *Soient $\lambda, \alpha \in \mathcal{P}(m/l)$. Soit η l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $f_{f\alpha}^{a,b} \in \mathcal{F}^\eta$, et soit ϵ l'application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{0, \dots, e-1\}$ associée à η. Alors on a :*

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon} \left(1_{vf} 1_c f_{f\alpha}^{a,b} \right) = c_{a,b} \varepsilon \, (-1)^{l(w_{\eta_0,\eta})} \, (-1)^{(m-1/f)na/b} \, \langle x_\alpha, y_\lambda \rangle,$$

Démonstration. — En effet, on a :

$$1_{vf} 1_c f_{f\alpha}^{a,b} = f_{f\alpha}^{a,b}.$$

De plus, on a, d'après le lemme 2.1.5, $f_{f\alpha}^{a,b} = f^\eta * \tilde{f}_{f\alpha}^{a,b}$, avec :

$$\iota_\eta \left(\tilde{f}_{f\alpha}^{a,b} \right) = \bigotimes_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \text{dét} \left(\zeta_{n/e}^{(n/db)k_i} \right) f_{f\alpha,n/e}^{k_i,l},$$

où pour tout k, $f_{f\alpha,n/e}^{k,l}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\zeta^{nk/el} I_{f\alpha^l}$ dans $GL_{n/e}(F)$, divisée par vol $(I_{f\alpha^l})$. De plus, on a :

$$\sum_{i=0}^{e-1} k_i = da;$$

on en déduit, d'après la proposition 3.1.3 :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon} \left(1_{vf} 1_c f_{f\alpha}^{a,b} \right) = c_{a,b} \, (-1)^{l(w_{\eta_0,\eta})} \operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon^e} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon^e} \left(f_{f\alpha,n/e}^{da,l} \right).$$

Or da et l sont premiers entre eux ; en effet, d'après ce qui précède, d'une part l divise b et a et b sont premiers entre eux ; d'autre part, l et d sont premiers entre eux. Donc d'après [**17**, V.11], on a :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon^e} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon^e} \left(f_{f\alpha,n/e}^{da,l} \right) = (-1)^{(n/e)da - mda/l} \, \langle x_\alpha, y_\lambda \rangle.$$

On conclut en remarquant que :

$$\frac{mda}{l} = \frac{na}{fb};$$

$$\frac{mna}{b} - \frac{nd}{e} a = ma \left(\frac{n}{b} - fd \right) = mafd \left(\frac{m}{l} - 1 \right) = \frac{m}{l} \left(\frac{m}{l} - 1 \right) lafd,$$

qui est pair. □

3.4. Calcul des traces de $\mathfrak{f}_{f\alpha}$

Soit $v \in \mathbb{Z}$, posons à nouveau :

$$l = \frac{m}{\operatorname{pgcd}(m, v)}.$$

Soit, pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$, $\Gamma_{\lambda,\mathbb{Z}}$ l'ensemble des $(d_1, \ldots, d_t) \in \mathbb{Z}^t$ tels que, pour tout i compris entre 1 et $t-1$, on ait :

$$\left(\sum_{k=1}^{i} d_k\right)\left(\sum_{k=i+1}^{t} \lambda_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{i} \lambda_k\right)\left(\sum_{k=i+1}^{t} d_k\right) > 0.$$

Soit $\hat{\chi}_\lambda$ la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments $l = (l_1, \ldots, l_t)$ de $M(\lambda)$ tels que l'on ait :

$$(\nu \circ \operatorname{dét}(l_1), \ldots, \nu \circ \operatorname{dét}(l_t)) \in \Gamma_{\lambda,\mathbb{Z}}.$$

Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n/ef)$, soit η_λ l'élément de $\mathcal{E}$ tel que la restriction de η_λ à l'Iwahori standard de $M(e\lambda)$ soit :

$$\eta_{0,ef\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \eta_{0,ef\lambda_t},$$

où pour tout i, $\eta_{0,ef\lambda_i}$ est le caractère de $I_{ef\lambda_i}$ défini de manière analogue à η_0.

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 3.4.1. — *Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. On a :*

$$\operatorname{tr} A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon(1_c\mathfrak{f}) =$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\lambda)-1} \varepsilon (-1)^{l(w_{\eta_\lambda,\eta_0})} \operatorname{tr}\left(\bigotimes_{j=1}^{t(\lambda)} A_{\lambda_j}^\varepsilon \circ |\cdot|^{\lambda_j^*} \operatorname{St}_{\lambda_j}^\varepsilon\right)\left(\hat{\chi}_{ef\lambda}\mathfrak{f}^{P(ef\lambda),\varepsilon}\right),$$

où si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, on pose pour tout j :

$$\lambda_j^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=j+1}^{t} \lambda_k - \sum_{k=1}^{j} \lambda_k\right).$$

Démonstration. — La démonstration est identique à celle de [**17**, III.5], au détail suivant près : pour λ donnée, soit π l'unique facteur irréductible de $(\operatorname{St}_m^\varepsilon)_{M(ef\lambda)}^{ss}$ dont l'espace V est stable par $(A_m^\varepsilon)_{M(ef\lambda)}^{ss}$; alors on a :

$$(A_m^\varepsilon)_{M(ef\lambda)}^{ss}|_V = \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_\lambda,\eta_0})} \prod_{i=1}^{t(\lambda)} A_{\lambda_j}^\varepsilon.$$

En effet, soit D_m la droite de $V_{I,m}^{\eta_0}$ définie en 1.4, et soit :

$$D_{\eta_\lambda,m} = \operatorname{St}_m(f^{\eta_\lambda,\eta_0}) D_m.$$

L'opérateur A_m^ε, et donc aussi l'opérateur $(A_m^\varepsilon)_{M(ef\lambda)}^{ss}$, y agissent par le scalaire $\varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_\lambda},\eta_0)}(-1)^{n/e-m}$; de plus, en identifiant $\prod_{i=1}^{t(\lambda)} \mathcal{H}_{ef\lambda_i}^0$ à une sous-algèbre de $\mathcal{H}_n^{\eta_\lambda}$, on vérifie de la même façon que dans la démonstration de [**17**, III.5] que la projection de $D_{\eta_\lambda,m}$ sur $V_{I_M}^{\eta_\lambda} \subset V$ n'est autre que $\prod_{i=1}^{t(\lambda)} D_{\lambda_i}$. On en déduit l'assertion. □

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit $\alpha \in \mathcal{P}(m)$, $\lambda \in \mathcal{P}(m/l)$. Soit η l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $1_k\mathfrak{f}_{f\alpha} \in \mathcal{F}^\eta$ pour tout k. Alors on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^\varepsilon (1_{vf}1_c\mathfrak{f}_{f\alpha}) \\ &= \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0},\eta)}(-1)^{m-t(\lambda)} q^{n(vf-1)/2}\langle x_\alpha, x_m\left(\frac{vl}{m}\lambda, q^f\right)\rangle,\end{aligned}$$

en définissant $x_m\left(\frac{vl}{m}\lambda, q^f\right)$ comme dans [**17**, V.12].

Démonstration. — Supposons d'abord $\lambda = (m)$; on a, d'après les lemmes 3.4.1 et 2.3.1 :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A_m^\varepsilon \circ \operatorname{St}_m^\varepsilon (1_c\mathfrak{f}_{f\alpha}^X) \\ &= \sum_{\mu\in\mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\mu)-1}\varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_\mu},\eta_0)} \sum_{(w_{ij})\in M(f\alpha,f\mu)} I(\mu,(w_{ij})),\end{aligned}$$

avec pour tout $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_t)$:

$$I(\mu,(w_{ij})) = \operatorname{tr}\left(\prod_{j=1}^t A_{\mu_j}^\varepsilon \circ \operatorname{St}_{\mu_j}^\varepsilon\right)\left(\varepsilon(-1)^{l(w)}\hat{\chi}_{ef\mu}\prod_{j=1}^t \mathfrak{f}_{(w\cdot j)}^{X(j,\mu)}\right),$$

où w est associé à $(w_{ij})_{i,j}$ comme dans l'énoncé du lemme 2.3.1, et où :

$$X(j,\mu) = q^{(n-ef\mu_j)/2-\mu_j^*}X.$$

Soit, pour tout j, η_j l'élément de $\mathcal{E}_{ef\mu_j}$ tel que pour tout k, $1_k\mathfrak{f}_{(w\cdot j)} \in \mathcal{F}_{ef\mu_j}^{\eta_j}$. Montrons l'assertion suivante (l'égalité ci-dessous signifie que les termes correspondants des deux séries sont égaux) :

$$\iota_\eta\left(\tilde{\mathfrak{f}}_{(w\cdot j)}^{X(j,\mu)}\right) = \mathfrak{f}_{(w\cdot j),f\mu_j}^{Y(j,\mu)} \otimes f_{(w\cdot j),f\mu_j}^0 \otimes\cdots\otimes f_{(w\cdot j),f\mu_j}^0,$$

où $\mathfrak{f}_{(w\cdot j),f\mu_j}$ (resp. $f_{(w\cdot j),f\mu_j}^0$) est la fonction caractéristique de Lie $I_{(w\cdot j)}\cap GL_{f\mu_j}(F)$ (resp. $I_{(w\cdot j)}$) dans $GL_{f\mu_j}(F)$, divisée par vol $\left(I_{(w\cdot j)}\right)$, et où :

$$Y_{j,\mu} = q^{(e-1)f\mu_j/2}X_{j,\mu} = q^{(n-f\mu_j)/2-\mu_j^*}X.$$

En effet, soit $x \in \Omega_{\eta_j}$, et soit $(x_0, \ldots, x_{e-1})$ son image dans $\left(W_{f\mu_j}\right)^e$ par l'application canonique. On a $\tilde{\mathfrak{f}}(x) \neq 0$ si et seulement si on a à la fois $x_0 \in \operatorname{Lie} I_{(w.j)}$ et $x_i \in W_{(w.j)}$ pour tout $i \neq 0$; d'autre part :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{(w.j)}|_{IxI} = \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^i \circ \text{dét}\,(x_i)\,\text{vol}\left(I_{(w.j*e)}\right)^{-1} T_{x,\eta_j}.$$

De plus :

$$\iota_\eta\left(T_{x,\eta_j}\right) = q^{\left(l(x) - \sum_{i=0}^{e-1} l(x_i)\right)/2} \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \text{dét}\,(x_i) \bigotimes_{i=0}^{e-1} T_{x_i};$$

enfin, on a :

$$\text{vol}\left(I_{(w.j)}\right)^e = \text{vol}\left(I_{(w.j*e)}\right).$$

Pour montrer l'assertion, il suffit donc de vérifier que l'on a, pour tout $x \in \Omega_{\eta_j}$ tel que $\tilde{\mathfrak{f}}(x) \neq 0$:

$$l\,(x) - \sum_{i=0}^{e-1} l\,(x_i) = (e-1)\, f\mu_j \nu\,(x)\,.$$

Soit donc $J_1, \ldots, J_{et(\alpha)}$ la décomposition de $\{1, \ldots, ef\mu_j\}$ en intervalles selon $(w.j)*e$, que l'on complète en une décomposition de $\mathbb{Z}$ en intervalles, en posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $i \in \{1, \ldots, et\,(\alpha)\}$, $J_{i+ket(\alpha)} = J_i + kef\mu_j$. On a vu dans la démonstration du lemme 2.2.1 que x laisse stable les J_i, avec i non multiple de e, et que si $a \in J_{ke}$, $x\,(a) \in J_{le}$, avec $l \leq k$.

$l\,(x)$ est égal au nombre de couples (i, i'), avec $i \in \{1, \ldots, ef\mu_j\}$ et $i' \in \mathbb{Z}$ tels que $i > i'$ et $x\,(i) < x\,(i')$; $\sum_{i=0}^{e} l\,(x_i)$ est égal au nombre de couples (i, i') vérifiant les mêmes conditions, plus la condition suivante : si $i \in J_{ke+k'}$, alors il existe un l tel que $x\,(i) \in J_{le+k'}$. Or la condition $i > i'$ et $x\,(i) < x\,(i')$ implique, d'après ce qui précède, qu'il existe k, k' et l, avec $1 \leq k' \leq e-1$, tels que $i' \in J_{ke+k'}$ et $i \in J_{le}$. On a donc :

$$l(x) - \sum_{i=0}^{e} l(x_i) = \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}} \operatorname{card}\big(\{i' \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \exists k', 1 \leq k' \leq e-1,$$
$$ke + k' < le \text{ et } x(i) < i'\}\big)$$

(4)
$$= \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}} \sum_{l' \leq k < l, x(i) \in J_{l'e}} \sum_{k'=1}^{e-1} \operatorname{card}(J_{ke+k'})$$
$$= \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}} \sum_{l' \leq k < l, x(i) \in J_{l'e}} (e-1)\, w_{k+1,j}.$$

D'autre part, on déduit du lemme 1.2.1 que l'on a :

$$ef\mu_j \nu(x) = \sum_{i=1}^{ef\mu_j} (i - x(i)).$$

Puisque x stabilise les $J_{ke+k'}$, $1 \leq k \leq e-1$, la somme des $i - x(i)$ sur chacun de ces intervalles est nulle et on a donc :

$$ef\mu_j \nu(x) = \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}} (i - x(i)).$$

Soit pour tout k, a_k le plus petit élément de J_{ke}. Posons pour $l \in \{1, \ldots, t(\alpha)\}$ et $i \in J_{le}$, $i = a_l + b_i$, et si $x(i) \in J_{l'e}$, $x(i) = a_{l'} + c_i$; x permute les classes modulo $ef\mu_j$ des i, donc la somme des b_i est égale à la somme des c_i, et on en déduit :

$$ef\mu_j \nu(x) = \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}; x(i) \in J_{l'e}} (a_l - a_{l'})$$
$$= \sum_{l=1}^{t(\alpha)} \sum_{i \in J_{le}} \sum_{l' \leq k < l, x(i) \in J_{l'e}} e w_{k+1,j}.$$

On déduit de cette égalité et de (4) que l'on a :

$$l(x) - \sum_{i=0}^{e-1} l(x_i) = (e-1) f\mu_j \nu(x),$$

d'où l'assertion cherchée.

D'après la proposition 3.1.3 et [**17**, V.12], on a donc :

$$\operatorname{tr} A^{\varepsilon}_{\mu_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\mu_j} \left(\mathfrak{f}^{X(j,\mu)}_{(w.j)}\right) = \varepsilon (-1)^{l\left(w_{\eta_{0,ef\mu_j}, \eta_j}\right)} \operatorname{tr} A^{\varepsilon^e}_{\mu_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon^e}_{\mu_j} \left(\mathfrak{f}^{Y(j,\mu)}_{(w.j), f\mu_j}\right)$$

qui vaut 0 si $(w_{\cdot j}) \neq (f)^{\mu_j}$, et $\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,ef\mu}},\eta_j\right)}\left(1-X^f q^{(n-\mu_j)f/2-f\mu_j^*}\right)^{-1}$ si $(w_{\cdot j}) = (f)^{\mu_j}$. Donc $I(\mu,(w_{ij})) = 0$ si (w_{ij}) n'est pas de la forme fb pour $b \in M^1(\alpha,\mu)$; de plus, on a :

$$\varepsilon(-1)^{l(w)}\varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_\mu,\eta_0})}\prod_{j=1}^{t}\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,ef\mu_j}},\eta_j\right)} = \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0,\eta})}.$$

On en déduit, exactement de la même façon que dans la démonstration de [**17**, V.12], que l'on a, pour tout $D \geq 1$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr} A_m^\varepsilon \circ \mathrm{St}_m^\varepsilon(1_{fD}1_c\mathfrak{f}_{f\alpha})\\ &\qquad = \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0,\eta})}(-1)^{m-1}q^{n(fD-1)/2}\langle x_\alpha, x_m\left((D),q^f\right)\rangle.\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_t)$ quelconque ; posons $P = P(efl\lambda)$. On a, en utilisant le lemme 2.3.1 :

$$\begin{aligned}(5)\quad &\operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^\varepsilon(1_{vf}1_c\mathfrak{f}_{f\alpha})\\ &= \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0,\eta_{l\lambda}})}\operatorname{tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{t} A_{l\lambda_j}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda_j}^\varepsilon\right)\cdot\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{t} 1_{vf\lambda_j/m}1_c\right)(\mathfrak{f}_{f\alpha})^{P,\varepsilon}\right)\\ &= \varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0,\eta_{l\lambda}})}q^{\sum_{i=1}^{t}(n-efl\lambda_j)/2(vfl\lambda_j)/m}\\ &\qquad\cdot\sum_{(w'_{ij})_{i,j}\in M(f\alpha,fl\lambda)}\varepsilon(-1)^{l(w)}\prod_{i=1}^{t}\operatorname{tr} A_{l\lambda_j}^\varepsilon\circ\mathrm{St}_{l\lambda_j}^\varepsilon\left(1_{vf\lambda_j/m}1_c\mathfrak{f}_{(w'_{\cdot j})}\right),\end{aligned}$$

où si W' est l'ensemble des éléments de W de longueur minimale modulo $W_{efl\lambda}$ à gauche et $W_{f\alpha * e}$ à droite, pour tout $\left(w'_{ij}\right)_{i,j}$, w est l'élément de W' correspondant au tableau $(w_{ij})_{i,j}$, avec :

$$\left(w_{11},\dots,w_{et(\alpha),1},w_{12},\dots,w_{et(\alpha),t}\right) = \left((w'_{\cdot 1})*e,\dots,\left(w'_{\cdot,t(\alpha)}\right)*e\right);$$

le facteur $\varepsilon(-1)^{l(w_{\eta_0,\eta_{l\lambda}})}$ apparaît pour la même raison que dans la démonstration du lemme 3.4.1. Pour tout $\left(w'_{ij}\right)_{i,j}$, on obtient, d'après le cas précédent et le lemme 2.4.3, pour tout j :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda_j}^\varepsilon\circ\mathrm{St}_{l\lambda_j}^\varepsilon\left(1_{vf\lambda_j/m}1_c\mathfrak{f}_{(w'_{\cdot j})}\right) = 0$$

s'il existe un i tel que w'_{ij} n'est pas divisible par f, et :

$$\operatorname{tr} A^{\varepsilon}_{l\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{l\lambda_j}\left(1_{vf\lambda_j/m} 1_c \mathfrak{f}_{\left(w'_{\cdot j}\right)}\right) = \varepsilon\left(-1\right)^{l\left(w_{\eta_{0,ef l\lambda_j}}, \eta_{w,j}\right)} \cdot (-1)^{l\lambda_j - 1} q^{(efl\lambda_j/2)(vfl\lambda_j/(m-1))} \langle x_\beta, x_{l\lambda_j}\left(\frac{vl\lambda_j}{m}, q^f\right)\rangle,$$

où $\eta_{w,j}$ est l'élément de $\mathcal{E}_{efl\lambda_j}$ tel que pour tout k, $1_k \mathfrak{f}_{\left(w'_{\cdot j}\right)} \in \mathcal{F}^{\eta_{w,j}}_{ef\lambda_j}$, si $\left(w'_{\cdot j}\right) = f\beta$. On en déduit que l'expression (5) est nulle s'il n'existe pas de $\left(b_{ij}\right)_{i,j} \in M(\alpha, l\lambda)$ tel que $\left(w'_{ij}\right)_{i,j} = f\left(b_{ij}\right)_{i,j}$. D'autre part, on a :

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{n - efl\lambda_j}{2} \frac{vfl\lambda_j}{m} + \sum_{i=1}^{t} \frac{efl\lambda_j}{2}\left(\frac{vfl\lambda_j}{m} - 1\right) = \frac{n(vf-1)}{2};$$

$$\sum_{i=1}^{t} (l\lambda_j - 1) = m - t;$$

et, de la même façon que précédemment :

$$\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_0, \eta_{l\lambda}}\right)} \varepsilon(-1)^{l(w)} \prod_{i=1}^{t} \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,efl\lambda_j}}, \eta_{w,j}\right)} = \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_0, \eta}\right)}.$$

On conclut de la même façon que dans la démonstration de [**17**, V.12]. □

CHAPITRE 4

CALCUL DES GERMES PAR RÉCURRENCE

4.1. Définition des germes

On définit les germes s_λ^ε grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1.1. — *Soit $v \in \mathbb{Z}$. Posons :*

$$l = \frac{m}{\operatorname{pgcd}(m, v)}.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, il existe une unique fonction :

$$s_\lambda^\varepsilon : G_{c,vf}^H \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que pour tout $\gamma \in G_{c,vf}^H$, et tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$, on ait :

$$I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} s_\lambda^\varepsilon(\gamma) \operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^\varepsilon(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}).$$

Démonstration. — L'assertion de la proposition est vraie si et seulement si :

- pour $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ donnée, pour tout λ, on a :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^\varepsilon(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}) = 0$$

  seulement si pour tout $\gamma \in G_{c,vf}^H$, $I_G^\varepsilon(f, \gamma) = 0$;

- les applications linéaires :

$$\mathfrak{f} \longmapsto \operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^\varepsilon(1_{vf} 1_c \mathfrak{f})$$

  de $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes.

Montrons d'abord la deuxième assertion : soient des constantes c_λ, $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, telles que l'on ait, pour tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} c_\lambda \operatorname{tr} A_{l\lambda}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^\varepsilon(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}) = 0.$$

On va montrer que les c_λ sont forcément toutes nulles. Posons :

$$a = \frac{v}{\operatorname{pgcd}(me, v)},$$
$$b = \frac{me}{\operatorname{pgcd}(me, v)},$$
$$d = \frac{e}{\operatorname{pgcd}(b, e)},$$

et considérons la fonction $f_{f\alpha}^{a,b}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{P}(n/fdb)$; d'après la proposition 3.3.1, on a :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon} \left(1_{vf} 1_c f_{f\alpha}^{a,b}\right) = d_\lambda \langle x_\alpha, y_\lambda \rangle,$$

avec, en utilisant les notations de la proposition 3.3.1 :

$$d_\lambda = c_{a,b} \varepsilon \, (-1)^{l\left(w_{\eta_\lambda}, \eta\right)} \, (-1)^{(m+1/f)na/b}.$$

On en déduit :

$$\sum_\lambda c_\lambda d_\lambda \langle x_\alpha, y_\lambda \rangle = 0$$

pour tout α. Comme les x_α constituent une base de $R_{n/fdb}$ et comme le produit scalaire sur $R_{n/fdb}$ est non dégénéré, on en déduit :

$$\sum_\lambda c_\lambda d_\lambda y_\lambda = 0.$$

Or les y_λ sont linéairement indépendants dans R et les d_λ sont non nuls, donc pour tout λ, $c_\lambda = 0$, ce qui démontre l'assertion.

Montrons maintenant la première assertion. On a le lemme suivant :

LEMME 4.1.2. — *Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour toute représentation admissible irréductible π de G vérifiant $\pi \simeq (\varepsilon \circ \text{dét})\,\pi$, on a :

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon \circ \pi(\mathfrak{f}) = 0.$$

(ii) Pour toute représentation admissible irréductible tempérée π de G vérifiant $\pi \simeq (\varepsilon \circ \text{dét})\,\pi$, on a l'égalité ci-dessus.

(iii) Pour tout $\gamma \in G^H$ semi-simple et G-régulier, on a $I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma) = 0$.

Démonstration. — Elle est similaire à celle de [**17**, III.1]. □

Soit donc $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ telle que pour tout $\gamma \in G_{c,vf}^H$, on ait $I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma) = 0$. Cela équivaut à dire que pour tout $\gamma \in G^H$ semi-simple G-régulier, on a

$I_G^{\varepsilon}(1_{vf}1_c\mathfrak{f},\gamma) = 0$; donc d'après l'implication *(iii)⇒(i)* du lemme précédent, on a pour tout λ :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^{\varepsilon}(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) = 0.$$

Il reste donc à montrer la réciproque. Soit donc $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ telle que pour tout λ, on ait :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \mathrm{St}_{l\lambda}^{\varepsilon}(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) = 0.$$

D'après le lemme 4.1.2, il suffit de montrer que pour toute représentation admissible irréductible tempérée π de G vérifiant $\pi \simeq (\varepsilon \circ \mathrm{dét})\,\pi$, on a $\operatorname{tr} A_\pi^{\varepsilon} \circ \pi(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) = 0$.

Soit donc π vérifiant les conditions ci-dessus. Soit, pour tout $\eta \in \mathcal{E}$, $V(\pi)_I^{\eta}$ le sous-espace des éléments v de l'espace de π vérifiant, pour tout $h \in I$:

$$\pi(h)\,v = \eta(h)^{-1}\,v.$$

On va d'abord montrer l'assertion ci-dessus lorsque $V(\pi)_I^{\eta_0}$ est trivial. Pour cela, on a besoin des lemmes suivants :

LEMME 4.1.3. — *Soit π une représentation irréductible admissible de G telle qu'il existe $\eta \in \mathcal{E}$ telle que $V(\pi)_I^{\eta}$ est non trivial. Alors pour tout $\eta' \in \mathcal{E}$, $V(\pi)_I^{\eta'}$ est non trivial.*

Démonstration. — En effet, on a, d'après le lemme 1.3.9 :

$$\pi\left(f^{\eta',\eta}\right)\left(V(\pi)_I^{\eta}\right) \subset V(\pi)_I^{\eta'}.$$

Or en utilisant le lemme 1.3.3, on voit que $\pi\left(f^{\eta,\eta'}\right)\pi\left(f^{\eta',\eta}\right) = \pi\left(f^{\eta,\eta}\right) = \pi(1_\eta)$ est l'identité sur $V(\pi)_I^{\eta}$. En particulier $\pi\left(f^{\eta',\eta}\right)$ est non nulle sur $V(\pi)_I^{\eta}$, d'où l'assertion. □

LEMME 4.1.4. — *Soit $\eta \in \mathcal{E}$, et soit π une représentation irréductible admissible tempérée de G telle que $V(\pi)_I^{\eta}$ est trivial. Alors pour tout $\mathfrak{f}' \in \mathcal{F}^{\eta}$, on a $\operatorname{tr} A_\pi^{\varepsilon} \circ \pi(1_c\mathfrak{f}') = 0$.*

Démonstration. — En effet, soit $\mathfrak{f}' \in \mathcal{F}^{\eta}$. On a l'égalité suivante :

$$\operatorname{tr} A_\pi^{\varepsilon} \circ \pi\left(1_c\mathfrak{f}'\right) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\lambda)-1} \operatorname{tr} A_\pi^{\varepsilon}(\lambda) \circ \pi(\lambda)\left(\hat{\chi}_{ef\lambda}\mathfrak{f}'^{P(ef\lambda),\varepsilon}\right),$$

que l'on démontre de la même façon que dans [**17**, III.2]. Il suffit donc de montrer que pour tout λ, $\operatorname{tr} A_\pi^{\varepsilon}(\lambda) \circ \pi(\lambda)\left(\hat{\chi}_{ef\lambda}\mathfrak{f}'^{P(ef\lambda),\varepsilon}\right) = 0$. Pour cela, on a besoin du lemme 3.1.1 et du lemme suivant (en posant $P = MU = P(ef\lambda)$) :

LEMME 4.1.5. — *Pour tout $\eta' \in \mathcal{E}$, définissons de manière analogue à $\mathcal{F}^{\eta'}$ pour G le sous-espace $\mathcal{F}_M^{\eta'}$ de $C_c^\infty(M)$. Alors il existe $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathcal{E}$ et des fonctions $f_{i,\lambda} \in \mathcal{F}_M^{\eta_i}$ pour tout i, telles que :*

$$\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon} \simeq_{K_M,\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} f_{i,\lambda},$$

Démonstration. — En effet, on a pour tout $l \in M$:

$$\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon}(l) = \delta_P^G(l)^{1/2} \int_{K \times U} \varepsilon \circ \operatorname{dét}(k)\, \mathfrak{f}'\left(k^{-1} l u k\right) du\, dk.$$

Soit $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ telle que $M = M(\lambda)$. Décomposons K en union disjointe :

$$K = \bigsqcup_{w \in W'} I_\lambda w I,$$

où W' est le sous-ensemble des éléments de W de longueur minimale modulo W_M à gauche. Pour tout $g \in G$ et tout $h \in I$, on a $\mathfrak{f}'\left(h^{-1} g h\right) = \varepsilon \circ \operatorname{dét}(h)^{-1} \mathfrak{f}'(g)$. On en déduit :

$$\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon}(l) = \sum_{w \in W'} \operatorname{vol}(I_\lambda w I)\, \delta_P^G(l)^{1/2} \cdot \int_{K_M \times (K \cap U) \times U} \varepsilon \circ \operatorname{dét}(hkw)\, \mathfrak{f}'\left(w^{-1} k^{-1} h^{-1} l u h k w\right) du\, dh\, dk.$$

Dans chaque terme, l'intégrale sur $K \cap U$ est en fait contenue dans l'intégrale sur U, et on obtient donc :

$$\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon}(l) = \sum_{w \in W'} \operatorname{vol}(I_\lambda w I) \int_{K_M} \varepsilon \circ \operatorname{dét}(k)\, f_w\left(k^{-1} l k\right) dk,$$

avec pour tout $w \in W'$:

$$f_w(l) = \varepsilon \circ \operatorname{dét}(w)\, \delta_P^G(l)^{1/2} \int_U \mathfrak{f}'\left(w^{-1} l u w\right) du.$$

On en déduit :

$$\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon} \simeq_{K_M,\varepsilon} \sum_{w \in W'} \operatorname{vol}(I_\lambda w I)\, f_w.$$

D'autre part, on vérifie aisément que l'on a :

$$w I w^{-1} \cap M = I_M.$$

On en déduit, pour tout $l \in M$ et tous $h, h' \in I_M$:

$$\begin{aligned} f_w\left(h'lh\right) &= \delta_P^G(l)^{1/2} \int_U \mathfrak{f}'\left(w^{-1}h'lhuw\right) du \\ &= \delta_P^G(l)^{1/2} \int_U \mathfrak{f}'\left(w^{-1}h'luhw\right) du \\ &= \varepsilon \circ \text{dét}\left(w^{-1}h'w\right) \eta\left(w^{-1}h'hw\right) \delta_P^G(l)^{1/2} \int_U \mathfrak{f}'\left(w^{-1}luw\right) du \\ &= \varepsilon \circ \text{dét}\left(h'\right)\left(w(\eta)\right)\left(h'h\right) f_w(l). \end{aligned}$$

Donc les $\mathrm{vol}\left(I_\lambda wI\right) f_w$, $w \in W'$, conviennent et le lemme est démontré. □

Revenons à la démonstration du lemme 4.1.4. Soit donc $\lambda \in \mathcal{P}(m)$, et écrivons, grâce au lemme 4.1.5, $\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon} \simeq_{K_M,\varepsilon} \sum f_{\lambda,i}$, avec $f_{\lambda,i} \in \mathcal{F}_M^{\eta_i}$ pour tout i. Puisque $\hat{\chi}_{ef\lambda}$ est biinvariante par I, on a aussi pour tout i :

$$\hat{\chi}_{ef\lambda} f_{\lambda,i} \in \mathcal{F}_M^{\eta_i}.$$

Or d'après les lemmes 4.1.5 et 4.1.3, puisque $V(\pi)_I^\eta = 0$, $V(\pi_P)_{I_M}^{(\varepsilon\circ\text{dét})\eta_i}$ aussi. De plus, d'après le lemme 1.3.9, l'image de $\pi(\lambda)(f_{\lambda,i})$ est contenue dans $V(\pi_P)_{I_M}^{(\varepsilon\circ\text{dét})\eta_i}$; donc on a :

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon(\lambda) \circ \pi(\lambda)\left(\hat{\chi}_{ef\lambda} f_{\lambda,i}\right) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout i, on a, pour tout λ :

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon(\lambda) \circ \pi(\lambda)\left(\hat{\chi}_{ef\lambda}\mathfrak{f}'^{P,\varepsilon}\right) = 0$$

et le lemme est démontré. □

Écrivons $\mathfrak{f} = \sum_{\eta\in\mathcal{E}} \mathfrak{f}_\eta$, avec pour tout η, $\mathfrak{f}_\eta \in \mathcal{F}^\eta$. On a bien évidemment :

$$1_{vf} 1_c \mathfrak{f} = \sum_{\eta\in\mathcal{E}} 1_{vf} 1_c \mathfrak{f}_\eta.$$

Pour tout η, d'après le lemme 4.1.3, $V(\pi)_I^\eta$ est trivial, donc puisque $1_{vf}\mathfrak{f}_\eta \in \mathcal{F}^\eta$, d'après le lemme 4.1.4, on a :

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon \circ \pi\left(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}_\eta\right) = 0.$$

On en déduit l'assertion cherchée.

Supposons maintenant que $V(\pi)_I^{\eta_0}$ est non trivial. Puisque π est tempérée, elle est équivalente à l'induite d'une représentation de carré intégrable σ d'un certain sous-groupe de Levi standard M de G, une telle induite étant irréductible. D'après [**2**, 5.8], si $V(\pi)_I^\eta$ est non trivial, $V(\pi_B)_{I_B}^\eta$ également ; il existe donc $w \in W$ tel que $V(\sigma_{B\cap M})_{I_B}^{w(\eta)}$ est non trivial, donc $V(\sigma)_{I_M}^{w(\eta)}$ aussi.

Puisque σ est de carré intégrable, elle est donc de la forme $\mathrm{St}_M \otimes \chi$, où χ est un caractère de M vérifiant, pour tout $h \in I_M$:

$$\chi(h) = w(\eta)(h)^{-1}.$$

De plus, on a le résultat suivant :

LEMME 4.1.6. — *Il existe $w' \in W$ qui normalise M et tel que l'on ait :*

$$\sigma \simeq (\varepsilon \circ \mathrm{dét})\, \sigma^{w'}.$$

Démonstration. — En effet, puisque σ est un sous-quotient de π_P, $(\varepsilon \circ \mathrm{dét})\,\sigma$ est un sous-quotient de $((\varepsilon \circ \mathrm{dét})\,\pi)_P$, qui est isomorphe à π_P. De plus, c'est une représentation de carré intégrable ; d'après [**14**, 4.5.12], il existe donc $w' \in W$ qui normalise M et tel que l'on ait :

$$(\varepsilon \circ \mathrm{dét})\,\sigma \simeq \sigma^{w'},$$

ce qui démontre le lemme. □

On en déduit que σ est, à permutation des facteurs près, de la forme :

$$(\chi_1 \circ \mathrm{dét})\,\mathrm{St}_{\lambda_1} \otimes (\varepsilon\chi_1 \circ \mathrm{dét})\,\mathrm{St}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \left(\varepsilon^{ef-1}\chi_1 \circ \mathrm{dét}\right)\mathrm{St}_{\lambda_1}$$
$$\otimes (\chi_2 \circ \mathrm{dét})\,\mathrm{St}_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \left(\varepsilon^{ef-1}\chi_s \circ \mathrm{dét}\right)\mathrm{St}_{\lambda_t},$$

avec $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(m)$, et pour tout i, χ_i est un caractère non ramifié de F^* ; quitte à conjuguer par un élément de W, on peut donc supposer que σ est précisément de cette forme ; on a alors $M = M(\lambda * ef)$. On en déduit :

$$\pi = \mathrm{Ind}_{P(\lambda * ef)}^G \sigma = \mathrm{Ind}_{P(ef\lambda)}^G \prod_{i=1}^t (\chi_i \circ \mathrm{dét})\,\mathrm{St}_{\lambda_i}^\varepsilon.$$

A_π est l'opérateur induit de $\bigotimes_{i=1}^t A_{\lambda_i}^\varepsilon$; on a donc, avec des normalisations convenables des opérateurs d'entrelacement :

$$\mathrm{tr}\, A_\pi^\varepsilon \circ \pi(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) = \mathrm{tr}\left(\bigotimes_{i=1}^t A_{\lambda_i}^\varepsilon \circ (\chi_i \circ \mathrm{dét})\,\mathrm{St}_{\lambda_i}^\varepsilon\right)\left((1_{vf}1_c\mathfrak{f})^{P(ef\lambda),\varepsilon}\right).$$

Le support de $(1_{vf}1_c\mathfrak{f})^{P(ef\lambda),\varepsilon}$ est constitué d'éléments compacts, donc si $l = (l_1, \ldots, l_t)$ est un élément de ce support, on a pour tout i :

$$\nu \circ \mathrm{dét}(l_i) = \frac{vfef\lambda_i}{n};$$

pour que l'on ait $\mathrm{tr}\, A_\pi^\varepsilon \circ \pi(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) \neq 0$, il est donc nécessaire que pour tout i, $vfef\lambda_i/n$ soit un multiple de f, donc que $v\lambda_i/m$ soit entier, donc que λ_i soit un multiple de $l = \dfrac{m}{\mathrm{pgcd}(m, v)}$.

Supposons la condition ci-dessus vérifiée ; on a alors :

$$\prod_{i=1}^{t} \chi_i \circ \text{dét}\,(l_i) = \prod_{i=1}^{t} \chi_i \left(\varpi^{vfef\lambda_i/n}\right)$$

pour tout élément $l = (l_1, \dots, l_i)$ du support. On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon \circ \pi\,(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) \\
&\quad = \left(\prod_{i=1}^{t} \chi_i \left(\varpi^{vfef\lambda_i/n}\right)\right) \operatorname{tr}\left(\prod_{i=1}^{t} A_{\lambda_i}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{\lambda_i}^\varepsilon \left((1_{vf}1_c\mathfrak{f})^{P(ef\lambda),\varepsilon}\right)\right) \\
&\quad = \left(\prod_{i=1}^{t} \chi_i \left(\varpi^{vfef\lambda_i/n}\right)\right) \operatorname{tr} A_\lambda^\varepsilon \circ \mathrm{St}_\lambda^\varepsilon\,(1_{vf}1_c\mathfrak{f})\,.
\end{aligned}$$

Or cette dernière trace est nulle par hypothèse ; on en déduit :

$$\operatorname{tr} A_\pi^\varepsilon \circ \pi\,(1_{vf}1_c\mathfrak{f}) = 0$$

et la proposition est démontrée. □

4.2. Première relation de récurrence

Soit $\gamma \in G^H$ elliptique G-régulier. Alors γ est compact ; les germes du chapitre précédent sont donc définis en γ. Dans cette section, ainsi que dans la suivante, on donne des formules de récurrence permettant (au moins théoriquement) de calculer la valeur de ces germes en γ, si γ vérifie la condition suivante : l'extension $F(\gamma)/F$ est modérément ramifiée.

On a vu dans l'introduction que lorsque γ est tel que $F(\gamma)/F$ est modérément ramifiée, il existe des éléments $\delta, \gamma' \in F(\gamma)^*$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\gamma = \delta\gamma'$;
- γ' est congru à 1 modulo l'idéal maximal de $F(\gamma)$;
- si on pose $F' = F(\delta)$, alors δ est F'/F-cuspidal.

δ et γ' ne sont pas uniquement déterminés, mais F' l'est. Soit b l'indice de ramification de F'/F et c son degré résiduel ; posons $n' = n/bc$, et soit $G' = GL_{n'}(F')$; nous allons montrer une relation de récurrence permettant de ramener le calcul de la valeur d'un germe sur G en γ à celui de la valeur d'un germe sur G' en γ'.

Considérons l'extension EF'/F'. Soit d son indice de ramification, f' son degré résiduel ; posons $m' = \dfrac{n'}{df'}$, et soit $H' = GL_{m'}(EF')$. Soit également l l'indice de ramification de EF'/E, c' son degré résiduel ; on a les relations :

$$le = db = \operatorname{ppcm}(b, e)\,, f'c = c'f.$$

Soit $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers de F', $\mathfrak{p}'$ son idéal maximal, ϖ' une uniformisante de F'. Soit également le caractère $\varepsilon' = \varepsilon \circ N_{F'/F}$ de F'^*.

LEMME 4.2.1. — *ε' est un caractère modérément ramifié d'ordre df', et son ordre sur $\mathcal{O}'^*$ est d.*

Démonstration. — En effet, il est clair que $N_{F'/F}(1+\mathfrak{p}') \subset 1+\mathfrak{p}$, donc ε' est trivial sur $1+\mathfrak{p}'$, donc modérément ramifié ; de plus, le noyau de ε' est $N_{EF'/F'}(EF')$, donc il est d'ordre df'. Pour montrer la deuxième assertion, soit F'' l'extension non ramifiée de F maximale contenue dans F'. On a :

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ N_{F''/F} \circ N_{F'/F''}.$$

Comme ε' est trivial sur $1+\mathfrak{p}'$, il induit un caractère sur $\mathbb{F}_{q^f}^*$, dont l'ordre est égal à l'ordre sur $\mathcal{O}'^*$ de ε', et que par un léger abus de notation on notera également ε'. Il en est de même pour ε, et on a, en réduisant les applications ci-dessus aux corps résiduels :

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ N_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q} \circ \left(x \mapsto x^b\right).$$

Or on sait que la norme sur une extension d'un corps fini est surjective, donc le caractère composé $\varepsilon \circ N_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q}$ est de même ordre que ε sur $\mathcal{O}^*$, soit e. Soit donc x un élément de $\mathbb{F}_{q^f}$ qui engendre ce corps sur $\mathbb{F}_q$; l'ordre de ε' sur $\mathcal{O}'^*$ est donc égal au plus petit $k > 0$ tel que l'image de x^{kb} par un caractère d'ordre e est nulle, qui vaut clairement :

$$\frac{e}{\operatorname{pgcd}(b,e)} = d.$$

Donc le lemme est démontré. $\square$

On peut identifier G' à un sous-groupe de G de la manière suivante : soit ϕ_0 un isomorphisme de F-espaces vectoriels de F' dans F^{bc} vérifiant la condition suivante : pour tout $i = jb+k$, $0 \leq k < b$, on a :

$$\phi_0\left(\varpi'^i \mathcal{O}'\right) = \left(\varpi^j \mathcal{O}, \dots, \varpi^j \mathcal{O}, \underbrace{\varpi^{j+1}\mathcal{O}, \dots, \varpi^{j+1}\mathcal{O}}_{kc \text{ fois}}\right).$$

On en déduit un isomorphisme de F-espaces vectoriels ϕ de $F'^{n'}$ dans F^n de la façon suivante : si pour tout $x \in F'$, $\phi_0(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_{bc}(x))$, on pose :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_{n'}) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_c(x_1), \phi_1(x_2), \dots, \phi_c(x_2), \dots, \phi_c(x_{n'}),\\ \phi_{c+1}(x_1), \dots, \phi_{2c}(x_1) \dots, \phi_{bc}(x_{n'})).\end{aligned}$$

ϕ vérifie la condition suivante : soit pour tout $i = jn + k$, $0 \leq k < n$, le réseau de F^n suivant :

$$\mathcal{L}_{i,F} = \left(\varpi^j \mathcal{O}, \ldots, \varpi^j \mathcal{O}, \underbrace{\varpi^{j+1}\mathcal{O}, \ldots, \varpi^{j+1}\mathcal{O}}_{k \text{ fois}}\right);$$

alors, en définissant pour tout i le réseau $\mathcal{L}_{i,F'}$ de $F'^{n'}$ de manière analogue, on a pour tout i :

$$\phi\left(\mathcal{L}_{i,F'}\right) = \mathcal{L}_{ic,F}.$$

Un isomorphisme vérifiant ces conditions est dit compatible aux chaînes de réseaux. On déduit de ϕ de façon canonique une injection i_ϕ de G' dans G, que l'on utilisera pour identifier G' à un sous-groupe de G. On déduit des définitions que $W_{G'}$ est un sous-groupe de W_G ; de plus, puisque ϕ est compatible aux chaînes de réseaux, pour tout entier k et tout $\alpha \in \mathcal{P}(k')$, avec $k' = \operatorname{pgcd}(n', k)$, on a :

$$\zeta_{G'}^k I_{\alpha^{n'/k'},G'} = G' \cap \zeta_G^{ck} I_{c\alpha^{n/ck'},G}.$$

On a donc, dans G, en identifiant δ à l'homothétie de rapport δ dans G' :

$$\delta \in \zeta_G^{na/b} I_{(c)^{n/c},G}.$$

Écrivons donc $\delta = \zeta_G^{na/b}\delta_0$, avec $\delta_0 \in I_{(c)^{n/c},G}$. Soit $h_1, \ldots, h_b$ les blocs diagonaux de taille n/b de δ_0 ; posons :

$$x_\delta = \varepsilon'^{n'(d+1)/2}\left(\varpi_F^{-a}\delta^b\right)\prod_{i=2}^{b} \varepsilon^{l(i)} \circ \operatorname{dét}(h_i).$$

PROPOSITION 4.2.2. — *Soit δ un élément F'/F-cuspidal de F', γ' un élément de $I_{G'}$ unipotent modulo $\mathfrak{p}'$, $\alpha \in \mathcal{P}(n/db)$; posons $\gamma = \delta\gamma'$ et $a = \nu_{F'}(\delta)$. Supposons de plus que γ est un élément semi-simple régulier de G. Alors on a :*

$$I_G^\varepsilon\left(f_\alpha^{a,b}, \gamma\right) = (-1)^{n'(c-1)(d-1)/d}\, \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta I_{G'}^{\varepsilon'}\left(f_{\alpha'}^0, \gamma'\right).$$

s'il existe $\alpha' \in \mathcal{P}(n'/d)$ telle que $\alpha = c\alpha'$, et

$$I_G^\varepsilon\left(f_\alpha^{a,b}, \gamma\right) = 0$$

sinon.

Démonstration. — On a d'abord le résultat suivant :

LEMME 4.2.3. — *Soit $g \in G$, tel que l'on ait :*

$$g^{-1}\gamma g \in \zeta_G^{na/b} I_{d\alpha^b,G}.$$

Alors il existe $\alpha'' \in \mathcal{P}(n'/b)$ *tel que* $d\alpha = c\alpha''$ *; de plus, on a :*

$$g \in G' I_{d\alpha^b, G}.$$

C'est le lemme VI.3 de **[17]**. Comme le support de $f_\alpha^{a,b}$ est inclus dans $\zeta_G^{na/b} I_{d\alpha^b, G}$, on en déduit :

$$I_G^\varepsilon\left(f_\alpha^{a,b}, \gamma\right) = \sum_{g\in\Gamma} \int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right) dh,$$

où T_γ est le centralisateur de γ dans G et Γ un système de représentants des doubles classes de $G' I_{d\alpha^b}$ modulo T_γ à gauche et $I_{d\alpha^b}$ à droite; de plus, cette somme est nulle s'il n'existe pas de $\alpha'' \in \mathcal{P}(n')$ telle que $d\alpha = c\alpha''$. On supposera donc dans la suite de la démonstration qu'il existe $\alpha'' \in \mathcal{P}(n')$ telle que $d\alpha = c\alpha''$, et on choisira Γ tel que $\Gamma \subset G'$; Γ est alors également un système de représentants des doubles classes de G' modulo T_γ à gauche et $I_{\alpha'', G'}$ à droite.

De même, s'il existe $\alpha' \in \mathcal{P}(n'/d)$ telle que $\alpha = c\alpha'$, Γ est aussi un système de représentants des doubles classes de G' modulo T_γ à gauche et $I_{d\alpha', G'}$ à droite, et on obtient :

$$I_{G'}^{\varepsilon'}\left(f_{\alpha'}^0, \gamma'\right) = \sum_{g\in\Gamma} \int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g I_{d\alpha'}} \varepsilon' \circ \text{dét}(h)\, f_{\alpha'}^0\left(h^{-1}\gamma' h\right) dh.$$

Pour montrer la proposition, on montrera que les termes correspondants des deux sommes ci-dessus sont égaux.

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 4.2.4. — *On peut choisir* Γ *tel qu'il vérifie la propriété suivante : soit* $g \in \Gamma$ *tel que* $f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma g h\right) \neq 0$ *pour au moins un* $h \in I_{d\alpha^b}$ *; alors* $g^{-1}\gamma g \in \varpi'^a I_{G'}$ *et* $g \in I_{G'}\Omega_{G'}$.

Démonstration. — En effet, soit $g \in G'$ tel qu'il existe $h \in I_{d\alpha^b}$ tel que $f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma g h\right) \neq 0$; écrivons-le :

$$g = h_1 x h_2,$$

avec $h_1 \in I_{G'}$, $h_2 \in I_{\alpha'', G'}$ et $x \in \Omega_{G'}$ de longueur minimale modulo $W_{\alpha'', G'}$ à droite. Comme $I_{\alpha'', G'}$ est inclus dans $I_{d\alpha^b, G}$, $g' = h_1 x$ est dans la même double classe que g ; de plus, $f_\alpha^{a,b}\left(h_2^{-1} g'^{-1}\gamma g' h_2\right) \neq 0$, donc $g'^{-1}\gamma g \in \varpi'^a I_{d\alpha^b, G}$; on en déduit que puisque $g'^{-1}\delta g' = \delta$ est à la fois dans $\varpi'^a I_{G'}$ et dans $\varpi^a x^{-1} I_{G'} x$, $g'^{-1}\gamma' g'$ est à la fois dans $x^{-1} I_{G'} x$ et dans $I_{\alpha'', G'}$; il suffit donc de montrer l'inclusion suivante :

$$x^{-1} I_{G'} x \cap I_{\alpha'', G'} \subset I_{G'}.$$

En effet, soit $h = (h_{ij})_{i,j} \in x^{-1}I_{G'}x \cap I_{\alpha'',G'}$. Puisque $h \in x^{-1}I_{G'}x$, on a $h_{ij} \in \mathfrak{p}'$ pour tous i,j tels que $x^{-1}(i) > x^{-1}(j)$; or puisque x est de longueur minimale modulo $W_{\alpha'',G'}$ à droite, pour tous i,j tels que $i > j$ et i et j sont dans le même intervalle pour la décomposition de $\{1,\ldots,n'\}$ selon α'', on a $x^{-1}(i) > x^{-1}(j)$. Donc $h \in I_{G'}$ et le lemme est démontré. □

Traitons d'abord séparément le cas où $d = 1$: on a alors, d'après ce qui précède $I_G^{\varepsilon}\left(f_{\alpha}^{a,b},\gamma\right) = 0$ s'il n'existe pas de $\alpha'' \in \mathcal{P}(n')$ telle que $\alpha = c\alpha''$, ce qui est exactement la deuxième assertion de la proposition avec $\alpha' = \alpha''$. On supposera donc que l'on a $\alpha = c\alpha'$. Montrons le lemme suivant :

LEMME 4.2.5. — *Supposons $d = 1$. Pour tout $g \in \Gamma$ tel que $f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right) \neq 0$, on a :*

$$f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right) = f_{\alpha}^{a,b}(\gamma) = \mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b,G}\right)^{-1} x_{\delta}.$$

Démonstration. — En effet, on a :

$$f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right) = f_{\alpha}^{a,b}\left(\delta g^{-1}\gamma' g\right).$$

Or $g^{-1}\gamma' g$ est un élément de $I_{G'}$ dont tous les termes diagonaux sont congrus à 1 modulo $\mathfrak{p}'$; on en déduit :

$$f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right) = f_{\alpha}^{a,b}(\delta) = \mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b,G}\right)^{-1} x_{\delta}.$$

On a de même, en posant $g = 1$:

$$f_{\alpha}^{a,b}(\gamma) = f_{\alpha}^{a,b}(\delta).$$

On en déduit l'assertion du lemme. □

On déduit de ce lemme que pour tout $g \in \Gamma$, on a :

$$f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right) = x_{\delta}\,\mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b,G}\right)^{-1}\mathrm{vol}\left(I_{\alpha',G'}\right) f_{\alpha'}^{a,1}\left(g^{-1}\gamma g\right).$$

En effet, puisqu'on a supposé $d = 1$, $f_{\alpha'}^{a,1}$ n'est autre que la fonction caractéristique de $\varpi'^a I_{\alpha',G'}$ multipliée par $\mathrm{vol}\left(I_{\alpha',G'}\right)^{-1}$. De plus, puisque $d\alpha^b = \alpha^b * d = \alpha^b$, pour tout $h \in I_{\alpha^b}$, on a :

$$f_{\alpha}^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma g h\right)\varepsilon\circ\mathrm{d\acute{e}t}(gh) = f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right)\varepsilon\circ\mathrm{d\acute{e}t}(g),$$

et donc :

$$I_G^{\varepsilon}\left(f_{\alpha}^{a,b},\gamma\right) = \sum_{g\in\Gamma}\mathrm{vol}\left(T_{\gamma}\backslash T_{\gamma} g I_{\alpha^b,G}\right) f_{\alpha}^{a,b}\left(g^{-1}\gamma g\right)\varepsilon\circ\mathrm{d\acute{e}t}(g);$$

de même, on a :

$$I_{G'}^{\varepsilon'}\left(f_{\alpha'}^{0},\gamma'\right) = \sum_{g\in\Gamma}\mathrm{vol}\left(T_{\gamma}\backslash T_{\gamma} g I_{\alpha',G'}\right) f_{\alpha'}^{0}\left(g^{-1}\gamma' g\right)\varepsilon'\circ\mathrm{d\acute{e}t}(g).$$

On a, comme dans [**17**, VI.4] :

$$\operatorname{vol}\left(T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{\alpha^b,G}\right) = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b,G}\right)\operatorname{vol}\left(I_{\alpha',G'}\right)^{-1}\operatorname{vol}\left(T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{\alpha',G'}\right);$$
$$\varepsilon\circ\operatorname{dét}_G(g) = \varepsilon'\circ\operatorname{dét}_{G'}(g),$$

et d'après les définitions :

$$f_{\alpha'}^{a,1}\left(g^{-1}\gamma g\right) = f_{\alpha'}^{0}\left(g^{-1}\gamma' g\right).$$

L'assertion de la proposition en résulte. (remarquons que puisque $d = 1$, on a $\varepsilon'^{n'(d-1)/2}\left(\varpi'^{-a}\delta^b\right) = 1$.)

Supposons maintenant $d \geq 2$. Soit K_0 le sous-groupe compact des éléments de I dont les blocs diagonaux selon la partition $d\alpha^b$ sont congrus à l'identité modulo $\mathfrak{p}$; on a le résultat suivant :

LEMME 4.2.6. — *Pour tout $g \in \Gamma$, on a :*

$$\int_{T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}} \varepsilon\circ\operatorname{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right)dh$$
$$= \frac{\operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g K_0)}{[g^{-1}T_\gamma g\cap I_{d\alpha^b} : g^{-1}T_\gamma g\cap K_0]}\sum_{h\in\Lambda}\varepsilon\circ\operatorname{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma g h\right),$$

où Λ est un système de représentants de $I_{d\alpha^b}$ modulo K_0.

Démonstration. — En effet, on a :

$$T_\gamma g I_{d\alpha^b} = \bigcup_{h\in\Lambda} T_\gamma g h K_0;$$

de plus, pour $h, h' \in \Lambda$, on a $T_\gamma g h K_0 = T_\gamma g h' K_0$ si et seulement si $h' \in g^{-1}T_\gamma g h K_0$. Puisque $f_\alpha^{a,b}$ est biinvariante par K_0, on en déduit :

$$\int_{T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}} \varepsilon\circ\operatorname{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right)dh = \frac{1}{[g^{-1}T_\gamma g\cap I_{d\alpha^b} : g^{-1}T_\gamma g\cap K_0]}$$
$$\sum_{h\in\Lambda}\operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g h K_0)\,\varepsilon\circ\operatorname{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma g h\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a, pour tout h :

$$\operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g h K_0) = \operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g K_0).$$

En effet, on a :

$$\operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g h K_0) = \operatorname{vol}(T_\gamma\backslash T_\gamma g K_0 h),$$

d'où l'assertion. □

On démontre de la même manière un lemme similaire pour G', $f^0_{\alpha'}$ et γ', lorsque $\alpha = c\alpha'$.

Supposons d'abord $a = 0$, $b = 1$ (d'où $d = e$) et $\alpha = (n/e)$; on a donc $I_{d\alpha^b,G} = K_G$, $I_{\alpha'',G'} = K_{G'}$. Soit $g \in \Gamma$; $g^{-1}\gamma g$ est un élément de $I_{(c)^{n/c}}$, et les images dans $GL_c(\mathbb{F}_q)$ des blocs diagonaux de taille c de G sont des éléments elliptiques réguliers tous égaux. De plus, $f^{a,b}_\alpha = f^0_\alpha$ est à support dans K et biinvariante par K_0, donc se projette en une application de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{C}$ que par un léger abus de notation on notera également f^0_α. En particulier, Λ s'identifie canoniquement à $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

On définit de la même façon $f^0_{\alpha'}$ relativement à $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$.

Enfin, ε est un caractère de F^* trivial sur $1+\mathfrak{p}$, qui induit donc un caractère de $\mathbb{F}_q^*$ que l'on notera également ε. On définit de même ε' sur $\mathbb{F}_{q^c}$.

Lorsque $b = 1$, l'extension F'/F est non ramifiée, donc l'injection de G' dans G induit une injection de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, que l'on utilisera pour identifier le premier à un sous-groupe du second. De plus : cette injection est de la forme suivante : il existe une injection de $\mathbb{F}_{q^c}$ dans $M_c(\mathbb{F}_q)$ telle que pour tout $x \in GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ et pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n/c\}$, le (i,j)-ème bloc de taille c de l'image de x n'est autre que l'image du (i,j)-ème terme de x par cette injection.

Fixons $g \in \Gamma$. On supposera que l'on a $g^{-1}\gamma g \in K_{G'}$; en effet, si ce n'est pas le cas, les intégrales à comparer sont nulles. On notera γ_g l'image de $g^{-1}\gamma g$ dans $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c}) \subset GL_n(\mathbb{F}_q)$. En tant qu'élément de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$, γ_g est le produit d'une homothétie et d'un élément nilpotent. Il est donc conjugué à un élément de la forme $\gamma_\lambda = \delta\,\mathrm{Id} + J_\lambda$, avec $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t'}) \in \mathcal{P}^0(n/f)$, les λ_i étant classés par ordre décroissant, où $\delta \in \mathcal{O}'^*$ est identifié à son image dans $\mathbb{F}_{q^c}$, et où J_λ est la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_{t'}} \end{pmatrix},$$

où pour tout i, J_i est la matrice $i \times i$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\delta\,\mathrm{Id} + J_\lambda$ commute avec les matrices diagonales de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ de la forme :

$$\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_{t'}, \ldots, a_{t'}),$$

où pour tout i, a_i est répété λ_i fois; pour tous $a_1, \ldots, a_{t'}$, il existe donc dans le centralisateur de γ_g une matrice dont le déterminant vaut :

$$\prod_{i=1}^{t'} \varepsilon'(a_i)^{\lambda_i}.$$

On en déduit :

$$\int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g K} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right) dh = 0$$

s'il existe $a_1, \ldots, a_{t'}$ tel que :

$$\prod_{i=1}^{t'} \varepsilon'(a_i)^{\lambda_i} \neq 1,$$

ce qui, puisque ε' est d'ordre e sur $F_{q^c}^*$, est vrai si et seulement si il existe i tel que e ne divise pas λ_i. En particulier, si n/c n'est pas divisible par e, on a forcément :

$$\int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g K} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right) dh = 0$$

pour tout g. En repassant au cas plus général où α est quelconque (en supposant tout de même que $e\alpha_i$ est multiple de c pour tout i), la condition précédente devient : il existe i tel que $e\alpha_i/c$ n'est pas multiple de e, autrement dit α_i n'est pas multiple de c; ce qui est équivalent à dire qu'il n'existe pas de partition α' tel que $\alpha = c\alpha'$. Donc la deuxième assertion de la proposition est démontrée.

Supposons donc que λ_i est divisible par e pour tout i. Quitte à conjuguer γ et γ' par un même élément de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$, on peut supposer que $\gamma_g = \gamma_\lambda$. Montrons le lemme suivant :

LEMME 4.2.7. — *Soit $W' = W'_G$ l'ensemble des éléments de W_G de longueur minimale modulo $W_{(c)^{n/c}}$ à gauche et $W_{(n/e)^e}$ à droite. Soit $P = MU = P(c\lambda) \subset GL_n(\mathbb{F}_q)$. Alors il existe $w \in W'$ tel que l'on ait :*

$$\sum_{h \in GL_n(\mathbb{F}_q), u \in U} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right) = \sum_{h \in P\left((c)^{n/c}\right) w P\left((n/e)^e\right), u \in U} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right).$$

De même, soit $W'_{G'}$ l'ensemble des éléments de $W_{G'}$ de longueur minimale modulo $W_{(n/ce)^e}$ à droite. Soit $P' = M'U' = P'(\lambda) \subset GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$. Alors il existe $w' \in W'_{G'}$ tel que l'on ait, si B' est le sous-groupe de Borel standard de

$GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$:

$$\sum_{h\in GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c}),u\in U'} \varepsilon' \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right)$$
$$= \sum_{h\in B'w'P'((n/ce)^e),u\in U'} \varepsilon' \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right);$$

de plus, $w = w'$.

Démonstration. — Supposons d'abord $\lambda = (n/f)$; U et U' sont alors triviaux. Montrons d'abord l'existence de w' ; pour cela, on va montrer qu'il existe un unique $w' \in W'_{G'}$ tel que l'on ait éventuellement :

$$\sum_{h\in B'w'P'((n/ce)^e)} \varepsilon' \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda h\right) \neq 0.$$

On a d'abord le lemme suivant :

LEMME 4.2.8. — *Soit B'_1 le sous-groupe des matrices $h \in B'$ telles que pour tout i, si h_i est le i-ème terme diagonal de h, $\varepsilon'(h_i) = 1$. Alors l'ensemble $\left\{h^{-1}\gamma_\lambda h \mid h \in B'_1\right\}$ est l'ensemble O'_{γ_λ} des matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \delta & G_{12} & \dots & G_{1,n/c} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & G_{n/c-1,n/c} \\ 0 & & & \delta \end{pmatrix},$$

avec :

- *si $j \geq i+2$, G_{ij} est quelconque ;*
- *si $j = i+1$, $G_{i,j}$ décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}^*_{q^c}$ tels que $\varepsilon'(G_{i,j}) = 1$.*

Démonstration. — Soit $h \in B'_1$. Écrivons $h = (H_{ij})_{1\leq i,j\leq n/c}$. Alors pour tout i, on obtient, en posant $h^{-1}\gamma_\lambda h = (G_{ij})_{1\leq i,j\leq n/c}$:

$$G_{ii} = H_{ii}^{-1}\delta H_{ii} = \delta;$$
$$G_{i,i+1} = H_{ii}^{-1}H_{i+1,i+1};$$

ce qui suffit à assurer que $h^{-1}\gamma_\lambda h \in O'_{\gamma_\lambda}$. Réciproquement, soit $h' \in O'_{\gamma_\lambda}$. On note $j_{h'}$ est le plus grand indice tel qu'il existe un i tel que le $(i, j_{h'})$-ème terme de h' est différent de celui de γ_λ, en posant $j_{h'} = 1$ s'il n'en existe aucun ; on va montrer par récurrence sur $j_{h'}$ qu'il existe $h \in B'_1$ tel que $h' = h^{-1}\gamma_\lambda h$. Si $j_{h'} = 1$, alors $h' = \gamma_\lambda$ et l'assertion est triviale. Supposons donc $j_{h'} > 1$ et écrivons $h' = (G_{ij})_{i,j}$. Supposons d'abord $j_{h'} \geq 3$; soit $h_1 = (H_{ij})_{i,j} \in B'_1$ tel que :

– pour tout i, $H_{ii} = 1$;

– si $i < j$ et $j \neq j_{h'} - 1$, $H_{ij} = 0$.

Alors h_1^{-1} est l'élément de B'_1 obtenu en remplaçant, pour tout $i < j_{h'} - 1$, $H_{i,j_{h'}-1}$ par son opposé ; donc pour tout $i < j_{h'} - 1$, le $(i, j_{h'})$-ème terme de $h_1^{-1}h'h_1$ vaut $G_{i,j_{h'}} - H_{i,j_{h'}-1}G_{j_{h'}-1,j_{h'}}$; de plus, comme $G_{j_{h'}-1,j_{h'}}$ est non nul, on peut choisir h_1 tel que $G_{i,j_{h'}} - H_{i,j_{h'}-1}G_{j_{h'}-1,j_{h'}} = 0$ pour tout $i < j_{h'} - 1$. De plus, pour tout i et tout $j \geq j_{h'}$, le (i,j)-ème terme de $h_1^{-1}h'h_1$ est égal à G_{ij}, donc $j_{h_1^{-1}h'h_1} \leq j_{h'}$.

On peut donc supposer h' tel que pour tout $i < j_{h'} - 1$, $G_{i,j_{h'}} = 0$; il est évident que c'est toujours le cas si $j_{h'} = 2$. Soit h_2 la matrice diagonale dont les $n/c - j_{h'} + 2$ derniers termes diagonaux sont égaux à $G_{j_{h'},j_{h'}+1}$, les premiers étant égaux à 1. Alors pour tous i, j tels que $j_{h'} \leq j$, le (i,j)-ème terme de $h_2^{-1}h'h_2$ vaut δ si $j = i$, 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon. Donc $j_{h_2^{-1}h'h_2} < j_{h'}$; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire le lemme. □

Revenons à la démonstration de l'assertion cherchée. Soit $w' \in W'_{G'}$; les classes de $B'w'P'((n/ce)^e) = B'_1w'P'((n/ce)^e)$ modulo $P'((n/ce)^e)$ à droite ayant toutes même cardinal, la somme de l'énoncé est égale à un multiple de :

$$\sum_{h \in B'_1} f^0_{(n/ce)}\left(w'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h w'\right).$$

De plus, puisque B'_1 est un groupe, on a :

$$\sum_{h \in B'_1} f^0_{(n/ce)}\left(w'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h w'\right) = \frac{\operatorname{card} B'_1}{\operatorname{card} Z_{B'_1}(\gamma_\lambda)} \sum_{g' \in O'_{\gamma_\lambda}} f^0_{(n/ce)}\left(w'^{-1}g'w'\right),$$

où $Z_{B'_1}(\gamma_\lambda)$ est le sous-groupe des éléments de B'_1 qui commutent avec γ_λ. On a, pour tout $g' \in O'_{\gamma_\lambda}$, en posant $g' = \left(g'_{ij}\right)_{i,j}$:

$$f^0_{(n/ce)}\left(w'^{-1}g'w'\right) = \prod_{i=1}^{e-1} \varepsilon'^{-i} \circ \operatorname{d\acute{e}t}(H_i),$$

où pour tout i, H_i est la matrice carrée de taille n/ce suivante :

$$H_i = \left(g'_{w'(in/ce+j),w'((i-1)n/ce+k)}\right)_{j,k}.$$

Posons, comme dans la démonstration du lemme précédent :

$$h^{-1}\gamma_\lambda h = (G_{ij})_{1 \leq i,j \leq n/c}.$$

Soit $(w_{ij})_{i,j}$ l'élément de $M\left((n/ce)^e,(1)^{n/c}\right)$ associé à w'. Décomposons pour tout i, H_i en :

$$H_i = \left(H'_{ijk}\right)_{1\leq j,k\leq n/c}$$

où pour tous j,k, le bloc H'_{ijk} est de taille $w_{(i+1)j}\times w_{ik}$, donc comprend 0 ou 1 terme ; alors pour tous i,j,k, si le bloc H'_{ijk} est non vide, l'unique terme qui le constitue est G_{jk}. Donc d'après le lemme précédent :

- si $j\geq k$, H'_{ijk} est forcément nul ;
- si $j\leq k-2$, H'_{ijk} prend toutes les valeurs possibles.

En particulier, pour tout i et tout j, le bloc de H_i constitué des $\sum_{k=j}^{n/c} w_{(i+1)k}$ dernières lignes et des $\sum_{k=1}^{j} w_{ik}$ premières colonnes est toujours nul, donc le rang de H_i est inférieur ou égal à :

$$\sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k} + \sum_{k=j+1}^{n/c} w_{ik}.$$

Pour que la somme de l'énoncé soit non nulle, on doit donc avoir, pour tous i,j, $1\leq i\leq e-1$, $1\leq j\leq \dfrac{n}{c}$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k} + \sum_{k=j+1}^{n/c} w_{ik} \geq \frac{n}{ce},$$

soit, puisque $\sum_{k=1}^{n/c} w_{ik} = \dfrac{n}{ce}$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k} \geq \sum_{k=1}^{j} w_{ik}.$$

De plus, pour tout i, le bloc de H_i constitué des $\sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k}$ premières lignes et des $\sum_{k=j+1}^{n/c} w_{ik}$ dernières colonnes prend toutes les valeurs possibles indépendamment des valeurs des autres blocs et des $H_{i'}$, $i'\neq i$; donc d'après le lemme 2.3.2, s'il existe i,j, $1\leq i\leq e-1$ tels que l'on ait :

$$\sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k} + \sum_{k=j+1}^{n/c} w_{ik} > \frac{n}{ce},$$

si on pose, pour x racine e-ème de 1 dans $\mathbb{C}$:

$$O'_{\gamma_\lambda,x} = \left\{g'\in O'_{\gamma_\lambda} \mid f^0_{(n/ce)}\left(w'^{-1}g'w'\right) = x\right\},$$

on a card $\left(O'_{\gamma_\lambda,x}\right) = \text{card}\left(O'_{\gamma_\lambda,\varepsilon^i(y)x}\right)$ pour tout x et pour tout $y \in \mathbb{F}_{q^c}^*$, et donc puisque ε^i est non trivial sur $\mathbb{F}_{q^c}^*$, la somme de l'énoncé est nulle.

Pour que la somme de l'énoncé soit non nulle, on doit donc avoir, pour tous i, j, $1 \leq i \leq e-1$:

$$\sum_{k=1}^{j} w_{ik} \geq \sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k}.$$

En combinant cette inégalité avec celle précédemment trouvée, on obtient, pour tous i, j, $1 \leq i \leq e-1$:

$$\sum_{k=1}^{j} w_{ik} = \sum_{k=1}^{j-1} w_{(i+1)k}.$$

On en déduit :

- $w_{i1} = 0$ si $i < e$, donc $w_{e1} = 1$;
- $w_{e-1,2} = w_{e1} = 1$, donc pour tout $k \neq e-1$, $w_{k1} = 0$;
- par une récurrence évidente, pour $j \leq e$, $w_{e-j+1,j} = 1$, et $w_{kj} = 0$ si $k \neq e-j+1$;
- pour tout $k < e$, on a forcément $w_{k,e+1} = w_{k+1,e} = 0$, donc $w_{e,e+1} = 1$, et ainsi de suite...

Par le raisonnement ci-dessus, on voit qu'il existe un seul w' satisfaisant la condition requise, qui est celui associé au tableau de $M\left((n/ce)^e, (1)^{n/c}\right)$ suivant :

$$\begin{pmatrix} & 1 & & 1 & \dots & & 1 \\ & / & & / & & / & \\ 1 & & 1 & & \dots & 1 & \end{pmatrix},$$

ce qui montre l'assertion cherchée.

Montrons maintenant l'existence de w ; pour cela, on aura besoin de quelques préliminaires. Soit $\mathbb{M} = M_c(\mathbb{F}_q)$; soit B un élément de $\mathbb{F}_{q^c}$ qui engendre $\mathbb{F}_{q^c}$ sur $\mathbb{F}_q$, et soit

$$\mathbb{E} = \{AB - BA, A \in \mathbb{M}\}.$$

LEMME 4.2.9. — *L'espace $\mathbb{E}$ est de dimension $c(c-1)$ sur $\mathbb{F}_q$, stable par multiplication à gauche et à droite par $\mathbb{F}_{q^c}$, supplémentaire de $\mathbb{F}_{q^c}$ dans $\mathbb{M}$, et ne dépend pas du choix de B ; de plus, il ne contient aucune matrice de rang* 1.

Démonstration. — En effet, $\mathbb{E}$ est l'image de l'application linéaire de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}$:

$$A \longmapsto AB - BA$$

dont le noyau est l'ensemble des matrices qui commutent avec B, qui n'est autre que $\mathbb{F}_{q^c}$. Comme $\mathbb{F}_{q^c}$ est de dimension c sur $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{E}$ est de dimension $c\,(c-1)$.

De plus, soit $C \in \mathbb{F}_{q^c}$, $A \in \mathbb{M}$; C et B commutent, donc on a :

$$C\,(AB - BA) = CAB - CBA = CAB - BCA = (CA)\,B - B\,(CA) \in \mathbb{M}.$$

La stabilité à droite se montre de la même façon.

Pour montrer que $\mathbb{E}$ est supplémentaire de $\mathbb{F}_{q^c}$ dans $\mathbb{M}$, il suffit, puisqu'on sait que la somme de leurs dimensions est c^2, de montrer que leur intersection est réduite à 0. En effet, soit A un élément de cette intersection ; puisque $A \in \mathbb{E}$, on a pour tout $B \in \mathbb{F}_{q^c}$, $\operatorname{tr}(BA) = 0$ ($BA \in \mathbb{E}$, et il est clair que tous les éléments de $\mathbb{E}$ sont de trace nulle) ; mais puisque $A \in \mathbb{F}_{q^c}$, si $A \neq 0$, cela signifie que tout élément de $\mathbb{F}_{q^c}$ est de trace nulle, ce qui est faux ; donc $A = 0$ et l'assertion est démontrée.

Pour montrer que $\mathbb{E}$ ne dépend pas du choix de B, soit B' un autre générateur de $\mathbb{F}_{q^c}$, et soit $A \in \mathbb{M}$; il suffit de montrer que $AB' - B'A \in \mathbb{E}$. En effet, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ tel que $B' = P\,(B)$; posons $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$. Alors on a :

$$AB' - B'A = \sum_{i=0}^{k} a_i \left(AB^i - B^iA\right).$$

Il reste à montrer que $AB^i - B^iA \in \mathbb{E}$ pour tout i. Montrons-le par récurrence sur i : c'est évident pour $i = 0$, et pour $i = 1$, c'est vrai par définition de $\mathbb{E}$. Soit donc $i > 1$; on a :

$$\begin{aligned} AB^i - B^iA &= AB^i - BAB^{i-1} + BAB^{i-1} - B^iA \\ &= (AB - BA)\,B^{i-1} - B\left(AB^{i-1} - B^{i-1}A\right). \end{aligned}$$

On a :

$$(AB - BA)\,B^{i-1} \in \mathbb{E}$$

d'après la deuxième assertion du lemme, et :

$$B\left(AB^{i-1} - B^{i-1}A\right) \in \mathbb{E}$$

d'après la même assertion et l'hypothèse de récurrence ; donc $AB^i - B^iA \in \mathbb{E}$ et l'assertion est démontrée.

Pour montrer la dernière assertion, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 4.2.10. — *Soit $v \in (\mathbb{F}_q)^c$, $v \neq 0$. Alors l'espace $\{Cv \mid C \in \mathbb{F}_{q^c}\}$ est exactement $(\mathbb{F}_q)^c$.*

Démonstration. — En effet, l'application $C \mapsto Cv$ est une application de $\mathbb{F}_{q^c}$ dans $(\mathbb{F}_q)^c$, linéaire, et injective puisque le seul élément non inversible de $\mathbb{F}_{q^c}$ est 0 ; donc puisque $\mathbb{F}_{q^c}$ et $(\mathbb{F}_q)^c$ sont tous deux de dimension c sur $\mathbb{F}_q$, elle est également surjective. $\square$

Soit donc $D \in \mathbb{E}$ de rang au plus 1 ; il faut montrer que $D = 0$. Puisque D est de rang au plus 1, il existe P une matrice inversible de $\mathbb{M}$ telle que $P^{-1}DP$ est une matrice dont seule la première colonne est éventuellement non nulle ; soit v cette première colonne. En appliquant le lemme précédent (en remplaçant $\mathbb{F}_{q^c}$ par $P^{-1}\mathbb{F}_{q^c}P$), on obtient que l'espace des $P^{-1}CDP$, avec $C \in \mathbb{F}_{q^c}$, est exactement, si $v \neq 0$, l'espace des matrices de cette forme. Or pour tout C, $\operatorname{tr}\left(P^{-1}CDP\right) = \operatorname{tr}(CD) = 0$, donc le terme de la première ligne et de la première colonne de $P^{-1}CDP$ est forcément nul, ce qui contredit ce qui précède si $v \neq 0$. Donc $v = 0$, soit $D = 0$. □

On a de la même façon que précédemment : pour tout $w \in W'$, la somme de l'énoncé est nulle si et seulement si :

$$\sum_{h \in P\left((c)^{n/c}\right)} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h w\right) = 0.$$

Soit $P_1\left((c)^{n/c}\right)$ le sous-groupe des éléments h du parabolique $P\left((c)^{n/c}\right)$ de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ tels que pour tout i, si h_i est le i-ème bloc diagonal de h, $\varepsilon \circ \text{dét}\,(h_i) = 1$. On a :

$$P_1\left((c)^{n/c}\right) = M_1\left((c)^{n/c}\right) U\left((c)^{n/c}\right),$$

avec :

$$M_1\left((c)^{n/c}\right) = M\left((c)^{n/c}\right) \cap P_1\left((c)^{n/c}\right);$$

on écrit de la même façon :

$$B'_1 = M'_1\left((1)^{n/c}\right) U'\left((1)^{n/c}\right).$$

Il est clair que $B'_1 \subset P_1\left((c)^{n/c}\right)$, et même que $M'_1\left((1)^{n/c}\right) \subset M_1\left((c)^{n/c}\right)$ et $U'_1\left((1)^{n/c}\right) \subset U\left((c)^{n/c}\right)$; soit donc $\mathcal{M}'$ un système de représentants de $M_1\left((c)^{n/c}\right)$ modulo $M'_1\left((1)^{n/c}\right)$ à gauche. Soit également $\mathcal{M}$ un système de représentants de $M'\left((1)^{n/c}\right)$ modulo $M'_1\left((1)^{n/c}\right)$, qui est également un système de représentants de $M\left((c)^{n/c}\right)$ modulo $M_1\left((c)^{n/c}\right)$.

Soit enfin $U_1\left((c)^{n/c}\right)$ le sous-espace des éléments de $U\left((c)^{n/c}\right)$ dont tous les blocs de taille c au-dessus de la diagonale principale sont dans $\mathbb{E}$.

On a les deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.11. — *Soit $h \in P\left((c)^{n/c}\right)$. Alors on peut écrire :*

$$h = h_1 h_2 h_3 h_4,$$

avec $h_1 \in B_1'$, $h_2 \in U_1\left((c)^{n/c}\right)$, $h_3 \in \mathcal{M}$ *et* $h_4 \in \mathcal{M}'$ *; de plus, une telle décomposition est unique.*

Démonstration. — En effet, écrivons d'abord $h = lu$, avec $l \in M\left((c)^{n/c}\right)$ et $u \in U\left((c)^{n/c}\right)$. Alors on peut écrire $l = l_1h_3h_4$,avec $l_1 \in M_1'\left((1)^{n/c}\right)$, $h_3 \in \mathcal{M}$ et $h_4 \in \mathcal{M}'$. De plus, comme $M\left((c)^{n/c}\right)$ normalise $U\left((c)^{n/c}\right)$, $u' = h_3h_4uh_4^{-1}h_3^{-1} \in U\left((c)^{n/c}\right)$. Si on peut décomposer u' en $u' = u_1h_2$, avec $u_1 \in U'\left((1)^{n/c}\right)$ et $h_2 \in U_1\left((c)^c\right)$, on aura :

$$h = l_1u'h_3h_4 = l_1u_1h_2h_3h_4,$$

de plus, $h_1 = l_1u_1 \in M_1'\left((1)^{n/c}\right)U'\left((1)^{n/c}\right) = B_1'$ et on aura gagné. Montrons donc que l'on peut décomposer u' de cette manière : posons $u' = (U_{ij})_{i,j}$, où les U_{ij} sont des blocs de taille c. Pour tous i, j avec $i < j$, posons :

$$U_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

où $A_{ij} \in \mathbb{F}_{q^c}$ et $B_{ij} \in \mathbb{E}$. Soit $k \in \{1, \ldots, n/c - 1\}$; supposons que pour tous i, j tels que $j - i < k$, $B_{ij} = 0$. Soit u_k l'élément de $U'\left((1)^{n/c}\right)$ dont tous les blocs de taille $c \times c$ au-dessus de la diagonale sont nuls sauf les blocs de coordonnées $(i, i+k)$ pour tout i, qui valent $-B_{i,i+k}$. Posons $u_ku' = \left(U_{ij}'\right)_{i,j}$; alors si on décompose pour tout (i, j), $i < j$:

$$U_{ij}' = A_{ij}' + B_{ij}'$$

avec $A_{ij}' \in \mathbb{F}_{q^c}$ et $B_{ij}' \in \mathbb{E}$, pour tous i, j tels que $j - i \leq k$, on a $A_{ij}' = 0$. Donc par une récurrence évidente, en remontant d'une ligne à chaque fois, on arrive à :

$$u_1'u' = h_2,$$

où u_1' est le produit des u_k, qui est donc dans $U'\left((1)^{n/c}\right)$, et où :

$$h_2 \in U_1\left((c)^{n/c}\right).$$

Il suffit de poser $u_1 = {u_1'}^{-1}$ et on a la décomposition voulue.

De plus, dans ce qui précède, la décomposition $h = lu$ est unique, ainsi que, par définition de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, la décomposition $l = l_1h_3h_4$. Il suffit donc, pour achever la démonstration du lemme, de montrer que la décomposition

$u' = u_1 h_2$ est unique. Or on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(U'\left((1)^{n/c}\right)\right) &= q^{n(n/c+1)/2};\\
\operatorname{card}\left(U_1\left((c)^{n/c}\right)\right) &= q^{(c-1)n(n/c+1)/2};\\
\operatorname{card}\left(U\left((c)^{n/c}\right)\right) &= q^{cn(n/c+1)/2}\\
&= \operatorname{card}\left(U'\left((1)^{n/c}\right)\right)\operatorname{card}\left(U_1\left((c)^{n/c}\right)\right);
\end{aligned}$$

donc l'application $(u_1, h_2) \mapsto u'$, qui est surjective par ce qui précède, est bijective, et donc la décomposition est bien unique. □

LEMME 4.2.12. — *Fixons $h' \in \mathcal{M}$, $h'' \in \mathcal{M}'$. Soient $h_1, \dots, h_{n/c}$ les blocs diagonaux de $h'h''$. L'ensemble :*

$$O_{\gamma_\lambda, h', h''} = \left\{h''^{-1}h'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h h' h'' \mid h \in B_1' U_1\left((c)^{n/c}\right)\right\}$$

est égal à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par blocs de la forme $(D_{ij})_{i,j}$, où l'on considère la décomposition par blocs de taille c, telles que, pour tous i, j :

- *$D_{ii} = h_i^{-1}\delta h_i$;*
- *si $j = i+1$, D_{ij} est une matrice de la forme $h_i^{-1}\left(D'_{ij} + D''_{ij}\right) h_j$, où D'_{ij} est un élément de $(\mathbb{F}_{q^c})^*$ tel que $\varepsilon'\left(D'_{ij}\right) = 1$ et $D''_{ij} \in \mathbb{E}$;*
- *si $j \geq i+2$, D_{ij} est quelconque.*

Démonstration. — Soit $h \in B_1' U_1 (c)^{n/c}$. Écrivons $h = (H_{ij})_{1<i,j<n/c}$, les blocs considérés étant de taille c. Alors pour tout i, on obtient, en posant $h''^{-1}h'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h h' h'' = (D_{ij})_{1<i,j<n/c}$:

$$\begin{aligned}
D_{ii} &= h_i^{-1}\delta h_i;\\
D_{i,i+1} &= h_i^{-1}H_{ii}^{-1}\delta H_{i,i+1}h_{i+1} + h_i^{-1}H_{ii}^{-1}H_{i+1,i+1}h_{i+1}\\
&\quad - h_i^{-1}H_{ii}^{-1}H_{i,i+1}H_{i+1,i+1}^{-1}\delta H_{i+1,i+1}h_{i+1}\\
&= h_i^{-1}\left(D'_{i,i+1} + D''_{i,i+1}\right) h_{i+1},
\end{aligned}$$

avec $D'_{i,i+1} = H_{ii}^{-1}H_{i+1,i+1} \in (\mathbb{F}_{q^c})^*$ et :

$$\begin{aligned}
D''_{i,i+1} &= H_{ii}^{-1}\delta H_{i,i+1} - H_{ii}^{-1}H_{i,i+1}H_{i+1,i+1}^{-1}\delta H_{i+1,i+1}\\
&= \delta H_{ii}^{-1}H_{i,i+1} - H_{ii}^{-1}H_{i,i+1}\delta \in \mathbb{E};
\end{aligned}$$

de plus, on a $\varepsilon'\left(D'_{i,i+1}\right) = 1$; on en déduit que $h''^{-1}h'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda h h' h''$ est dans l'ensemble décrit.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer l'égalité des cardinaux des deux ensembles considérés ; en utilisant les lemmes 4.2.8 et 4.2.9, il suffit donc de montrer que l'on a :

$$\operatorname{card}\left(O_{\gamma_\lambda,h',h''}\right) = q^{c(c-1)(n/c)(n/c-1)/2}\operatorname{card}\left(O'_{\gamma_\lambda}\right).$$

Or γ_λ est un élément de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ régulier dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, donc son centraliseur dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est contenu dans $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$; on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{card}\left(O_{\gamma_\lambda,h',h''}\right)}{\operatorname{card}\left(O'_{\gamma_\lambda}\right)} &= \frac{\operatorname{card}\left(B'_1U_1\left((c)^{n/c}\right)\right)}{\operatorname{card}\left(B'_1\right)} \\ &= \operatorname{card}\left(U_1\left((c)^{n/c}\right)\right) \\ &= q^{c(c-1)(n/c)(n/c-1)/2},\end{aligned}$$

ca qui achève la démonstration. □

Revenons à la démonstration du lemme 4.2.7. Soit $w \in W'$, et soit $(w_{ij})_{i,j}$ l'élément de $M\left((n/e)^e, (c)^{n/c}\right)$ associé. Fixons $h'' \in \mathcal{M}'$; on va montrer que la somme :

$$\sum_{h'\in\mathcal{M},h\in B'_1U_1(c)^{n/c}} \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h'\right) f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}h''^{-1}h'^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda hh'h''w\right)$$

est nulle lorsque $w \neq w'$, ce qui suffira à démontrer le lemme. Cette somme est un multiple de :

$$\sum_{h'\in\mathcal{M}} \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h'\right) \sum_{g\in O_{\gamma_\lambda,h',h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right),$$

donc il suffit de montrer que cette dernière somme est nulle pour $w \neq w'$.

On a, pour $g \in O_{\gamma_\lambda,h',h''}$ donné, en posant $g = (g_{ij})_{i,j}$:

$$f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right) = q^{-m'(n-m')/2}\operatorname{vol}\left(I_{(n/e)^e}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{e-1}\varepsilon^{-i}\circ\operatorname{dét}\left(H_i\right),$$

où pour tout i, H_i est la matrice carrée de taille n/e suivante :

$$H_i = \left(g_{w(in/e+j),w((i-1)n/e+k)}\right)_{j,k}.$$

Posons, comme dans le corollaire précédent, $g = (D_{ij})_{1\leq i,j\leq n/c}$. Décomposons pour tout i, H_i en :

$$H_i = \left(H'_{ijk}\right)_{1\leq j,k\leq s}$$

où pour tous j,k, le bloc H'_{ijk} est de taille $w_{(i+1)j} \times w_{ik}$; alors pour tous i,j,k, les éléments composant H'_{ijk} proviennent du bloc D_{jk}. Donc d'après le corollaire précédent, lorsque g décrit $O_{\gamma_\lambda,h',h''}$:

- si $j > k$, $H'_{ijk} = 0$;
- si $j = k$, H'_{ijk} est fixe ;
- si $k = j+1$, H'_{ijk} décrit un certain ensemble ;
- si $j \leq k-2$, H'_{ijk} prend toutes les valeurs possibles.

Pour tout j, soit a_j le plus grand indice tel que $w_{a_j,j} \neq 0$. Supposons qu'il existe un j non multiple de e tel que l'on ait $a_j \leq a_{j+1}$. Alors aucun des blocs $H'_{i,j,j+1}$ ne contient un terme de la dernière colonne de $D_{j,j+1}$. De plus, $\mathbb{E}$ ne contient aucune matrice de rang 1 ; en particulier pour tous $g, g' \in \mathbb{M}$ inversibles, $g^{-1}\mathbb{E}g'$ ne contient aucune matrice non nulle dont toutes les colonnes sont nulles sauf la dernière, donc il n'existe pas deux éléments de $g^{-1}\mathbb{E}g'$ distincts dont les $c-1$ premières colonnes sont identiques ; comme le cardinal de $\mathbb{E}$ est précisément $q^{c(c-1)}$, cela signifie que les $c-1$ premières colonnes des éléments de $g^{-1}\mathbb{E}g'$ prennent toutes les valeurs possibles. On en déduit, en utilisant le lemme 4.2.12, que les $c-1$ premières colonnes de $D_{j,j+1}$ prennent toutes les valeurs possibles indépendamment des valeurs prises par les autres blocs. D'autre part, pour tout x racine e-ème de l'unité, si $h_{x,j}$ est l'élément de $\mathcal{M}$ tel que, si $(h_{x,j,1}, \ldots, h_{x,j,n/c})$ sont ses blocs diagonaux, $\varepsilon \circ \operatorname{dét}(h_{x,j,i})$ vaut 1 si $i \leq j$ et x si $i = j$, les ensembles $O_{\gamma_\lambda,h',h''}$ et $O_{\gamma_\lambda,h'h_{x,j},h''}$ ne diffèrent que par le bloc $D_{j,j+1}$, et donc d'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{g \in O_{\gamma_\lambda,h',h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right) = \sum_{g \in O_{\gamma_\lambda,h'h_{x,j},h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{h' \in \mathcal{M}} \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h'\right) \sum_{g \in O_{\gamma_\lambda,h',h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right) \\
&\qquad = \sum_{h' \in \mathcal{M}} \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h'\right) \sum_{g \in O_{\gamma_\lambda,h'h_{x,j},h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right) \\
&\qquad = \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h_{x,j}\right)^{-1} \sum_{h' \in \mathcal{M}} \varepsilon \circ \operatorname{dét}\left(h'\right) \sum_{g \in O_{\gamma_\lambda,h',h''}} f^0_{(n/e)}\left(w^{-1}gw\right) ;
\end{aligned}$$

or $\varepsilon \circ \operatorname{dét}(h_{x,j}) = x^{n/c-j}$. L'égalité ci-dessus est vraie pour tout x, et puisque j n'est pas multiple de e, il existe un x tel que $x^{n/c-j} \neq 1$; on en déduit que la somme cherchée est nulle.

Pour que cette somme soit non nulle, on doit donc avoir, pour tout j non multiple de e, $a_j > a_{j+1}$. Or ceci est vrai si et seulement si, pour tout j congru à $k \in \{1, \dots, e\}$ modulo e :

$$a_j = e + 1 - k.$$

On en déduit :

- si j est multiple de e, $a_j = 1$, donc forcément $w_{1j} = c$ et $w_{kj} = 0$ pour $k > 1$;
- si j est congru à $e - 1$ modulo e, $a_j = 2$, donc les seuls i tels que w_{ij} est éventuellement non nul sont 1 et 2 ; or on a déjà :

$$\sum_{k, e|k} w_{1k} = \sum_{k, e|k} c = \frac{n}{e} = \sum_{k=1}^{n/c} w_{1k},$$

  donc forcément $w_{1j} = 0$ et $w_{2j} = c$;
- par une récurrence évidente, on en déduit que pour tout j, $w_{a_j, j} = c$ et $w_{kj} = 0$ si $k \neq a_j$.

Le seul $w \in W'$ vérifiant ces conditions est donc celui correspondant au tableau :

$$(w_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} & c & & c & \dots & & c \\ / & & / & & & / & \\ c & & c & & \dots & c & \end{pmatrix}.$$

De plus, comme tous les w_{ij} sont égaux à 0 ou à c, w est constitué de blocs $c \times c$ tous égaux à 0 ou à Id_c ; c'est donc un élément de $W_{G'}$. Pour achever la démonstration du lemme 4.2.7 dans le cas $t(\lambda) = 1$, il suffit de vérifier que $w = w'$, ce qui découle immédiatement du lemme suivant, que l'on démontre aisément :

LEMME 4.2.13. — *Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(n/c)$. Soit $w \in W_{G'}$, de longueur minimale modulo W_α à gauche et W_β à droite, et soit $(w_{ij})_{i,j} \in M(\beta, \alpha)$ le tableau associé à w. Alors, en tant qu'élément de W_G, w est de longueur minimale modulo $W_{c\alpha}$ à gauche et $W_{c\beta}$ à droite, et le tableau de $M(c\beta, c\alpha)$ associé à w est $(cw_{ij})_{i,j}$.*

Supposons maintenant λ quelconque. Soit $P = MU = P(c\lambda)$; alors on a $\gamma_\lambda = (\gamma_{(\lambda_1)}, \dots, \gamma_{(\lambda_t)}) \in M$. Soit W'' l'ensemble des éléments de W de longueur minimale modulo W_M à gauche et $W_{(n/e)^e}$ à droite. Alors on montre de la même façon que dans la démonstration du lemme 2.3.1 que si $w_1 \in W''$ est tel que l'on a :

$$\Sigma_{w_1} = \sum_{h \in Pw_1 P((n/e)^e), u \in U} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right) \neq 0,$$

alors si $(a_{ij})_{i,j}$ est le tableau de $M\left((n/e)^e, c\lambda\right)$ associé à w_1, on a $a_{ij} = a_{i+1,j}$ pour tout j et tout $i < e$; il existe un seul w_1 vérifiant cette condition, c'est celui tel que $a_{ij} = c\lambda'_j$ pour tous i, j, avec $e\lambda'_j = \lambda_j$.

De plus, pour $h = (h_1, \ldots, h_t) \in M$ donné, on calcule, par un raisonnement analogue à celui effectué dans la démonstration du lemme 2.3.1 :

$$(6) \quad \sum_{u\in U} \varepsilon \circ \text{dét}\,(hw_1)\, f^0_{(n/e)}\left(w_1^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda u h w_1\right) \\ = C \prod_{i=1}^{t} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h_i)\, f^0_{(c\lambda_i/e)}\left(h_i^{-1}\gamma_{(\lambda_i)} h_i\right),$$

où C ne dépend pas de h. La somme Σ_{w_1} est donc égale à un multiple de :

$$\sum_{(h_1,\ldots,h_t)\in M} \prod_{i=1}^{t} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h_i)\, f^0_{(c\lambda_i/e)}\left(h_i^{-1}\gamma_{(\lambda_i)} h_i\right).$$

En appliquant le cas précédent (que l'on généralise trivialement à un produit de groupes linéaires), on voit qu'il existe $w_2 \in W'_M$ (W'_M étant défini pour M de manière analogue à W' pour G) tel que pour tout $w'_2 \in W'_M$, $\Sigma'_{w'_2}$ vaut :

$$\sum_{(h_1,\ldots,h_t)\in\left(P\left((c)^{n/c}\right)\cap M\right)w'_2\left(P(c\lambda'^e)\cap M\right)} \prod_{i=1}^{t} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h_i)\, f^0_{(c\lambda_i/e)}\left(h_i^{-1}\gamma_{(\lambda_i)} h_i\right),$$

qui est nulle sauf si $w'_2 = w_2$. D'autre part, pour tout w'_2, puisque $w'_2 \in W_M$, on a $l\left(w'_2 w_1\right) = l\left(w'_2\right) + l\left(w_1\right)$, d'où :

$$\left(P\left((c)^{n/c}\right)\cap M\right) w'_2 \left(P\left(c\lambda'^e\right)\cap M\right) w_1 P\left(n/e^e\right) \\ = \left(P\left((c)^{n/c}\right)\cap M\right) w'_2 w_1 P\left((n/e)^e\right);$$

on en déduit, grâce à (6), et puisque $P\left((c)^{n/c}\right) = U\left(P\left((c)^{n/c}\right)\cap M\right)$, que :

$$\sum_{h\in P\left((c)^{n/c}\right)w'_2 w_1 P\left((n/e)^e\right),\, u\in U} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right) \\ = \text{card}\,(U) \sum_{h\in\left(P\left((c)^{n/c}\right)\cap M\right)w'_2 w_1 P\left((n/e)^e\right),\, u\in U} \varepsilon \circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right)$$

est un multiple de $\Sigma'_{w'_2}$, donc est nulle sauf si $w'_2 = w_2$. On obtient finalement :

$$\sum_{h\in GL_n(\mathbb{F}_q),u\in U} \varepsilon\circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right)$$
$$= \sum_{h\in P\left((c)^{n/c}\right)w_2w_1P((n/e)^e),u\in U} \varepsilon\circ \text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right).$$

Posons donc $w = w_2w_1$. Si $J_1,\ldots,J_{n/c}$ (resp. $J'_1,\ldots,J'_e$) est la décomposition de $\{1,\ldots n\}$ en intervalles de longueur c (resp n/e), w est alors l'élément de W' tel que pour tout $i = je+k$, $w^{-1}(J_i) \subset J'_{e+1-k}$; on retrouve donc le w du cas précédent.

On effectue un raisonnement exactement similaire pour trouver w' ; on retrouve également le w' du cas précédent. On a donc bien $w = w'$ et le lemme 4.2.7 est démontré. □

Montrons maintenant la proposition 4.2.2. On procède par récurrence sur λ, selon l'ordre lexicographique inverse de $\mathcal{P}^0(n/f)$ ($\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \leq \mu = (\mu_1,\ldots,\mu_s)$ si et seulement si il existe un i tel que $\lambda_i \geq \mu_i$ et que $\lambda_j = \mu_j$ pour tout $j < i$). Comme dans la démonstration du lemme 4.2.12, l'application :

$$\begin{aligned} U_1\left((c)^{n/c}\right)\times\gamma_\lambda U' &\longrightarrow \gamma_\lambda U\\ (u,h) &\longmapsto uhu^{-1}\end{aligned}$$

est surjective; on en déduit que tout élément de la forme $\gamma_\lambda u, u\in U$ est conjugué à un élément de la forme $\gamma_\lambda u, u\in U'$; de plus, un tel élément est soit conjugué à γ_λ par un élément de $U'\left((1)^{n/c}\right)$, soit à un γ_μ, avec $\mu<\lambda$. Il suffit de montrer que l'on a, en identifiant U' à un sous-ensemble de $K_{G'}$ et pour $g\in\Gamma$ tel que l'image de $g^{-1}\gamma g$ dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est γ_λ :

$$\sum_{u\in U'}\int_{T_\gamma\backslash T_\gamma gK_G} \varepsilon\circ\text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma uh\right)dh$$
$$= \sum_{u\in U'}(-1)^{n(c-1)(e-1)/ce}x_\delta\int_{T_\gamma\backslash T_\gamma gK_{G'}}\varepsilon'\circ\text{dét}\,(h)\, f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma' uh\right)dh.$$

En effet, notons, pour tout $u\in U'$, x_u (resp. y_u) le terme correspondant à u dans le membre de gauche (resp. de droite) de cette égalité. Celle-ci se réécrit :

$$Nx_1+\sum_{u\in\mathcal{U}}x_u = Ny_1+\sum_{u\in\mathcal{U}}y_u,$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des $u\in U'$ tels que $\gamma_\lambda u$ n'est pas conjugué à γ_λ. Or N est non nul, et par hypothèse de récurrence, pour tout $u\in\mathcal{U}$, on a $x_u = y_u$; on en déduit $x_1 = y_1$, d'où l'assertion de la proposition.

D'après le lemme 4.2.6, pour tout $u \in U'$, on a :

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{\mathrm{vol}\,(T_\gamma \backslash T_\gamma g K_{0,G})}{[g^{-1}T_\gamma g \cap K_G : g^{-1}T_\gamma g \cap K_{0,G}]} \sum_{h \in GL_n(\mathbb{F}_q)} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right) \\ &= \frac{\mathrm{vol}\,(K_{0,G})}{\mathrm{vol}\,(g^{-1}T_\gamma g \cap K_G)} \sum_{h \in GL_n(\mathbb{F}_q)} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h)\, f^0_{(n/e)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right); \end{aligned}$$

de même, en utilisant le fait que si $\gamma_\lambda = \delta\gamma'_\lambda$, pour tout $h \in GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ et tout $u \in U'$:

$$f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right) = x_\delta f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma'_\lambda u h\right),$$

on a :

$$\begin{aligned} y_u = (-1)^{n(c-1)(e-1)/ce} & \frac{\mathrm{vol}\left(K_{0,G'}\right)}{\mathrm{vol}\,(g^{-1}T_\gamma g \cap K_{G'})} \\ & \cdot \sum_{h \in GL_{n/c}\left(\mathbb{F}_{q^c}\right)} \varepsilon' \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h)\, f^0_{(n/ce)}\left(h^{-1}\gamma_\lambda u h\right). \end{aligned}$$

Or on a :

$$g^{-1}T_\gamma g \cap K_G = g^{-1}T_\gamma g \cap K_{G'};$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\left(I_{(n/e)^e,G}\right) &= \mathrm{card}\,(P\,((n/e)^e))\,\mathrm{vol}\,(K_{0,G}); \\ \mathrm{vol}\left(I_{(n/ce)^e,G'}\right) &= \mathrm{card}\left(P'\,((n/ce)^e)\right)\mathrm{vol}\left(K_{0,G'}\right); \end{aligned}$$

enfin, si w est l'élément de W défini dans le lemme 4.2.7, on a $w^{-1}W_{(c)^{n/c},G}w \subset W_{(n/e)^e,G}$, d'où :

$$\mathrm{card}\left(P\left(\left(\frac{n}{e}\right)^e\right)\right) = \frac{\mathrm{card}\left(P\left((c)^{n/c}\right) wP\,((n/e)^e)\right)}{q^{l_G(w)}};$$

de même, on a :

$$\mathrm{card}\left(P'\left(\left(\frac{n}{ce}\right)^e\right)\right) = \frac{\mathrm{card}\,(B'w'P'\,((n/ce)^e))}{q^{cl_{G'}(w)}}.$$

Posons pour simplifier les notations :

$$\begin{aligned} {f'_{(n/e)}}^0 &= q^{(n/e)(n-n/e)/2}\,\mathrm{vol}\left(I_{(n/e)^e,G}\right) f^0_{(n/e)}; \\ {f'_{(n/ce)}}^0 &= q^{(cn/ce)(n/c-n/ce)/2}\,\mathrm{vol}\left(I_{(n/ce)^e,G'}\right) f^0_{(n/ce)}; \end{aligned}$$

ce sont des fonctions dont les valeurs sont les racines e-ièmes de l'unité. L'égalité à montrer devient donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{h\in GL_n(\mathbb{F}_q),u\in U'} & \varepsilon\circ \text{dét}\,(h)\, {f'_{(n/e)}}^0 \left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right) \\
&= (-1)^{n'(c-1)(e-1)/e}\, q^{[c(c-1)(e-1)/2](n/ce)^2-l_G(w)+cl_{G'}(w)} \\
&\cdot \frac{\text{card}\left(P\left((c)^{n/c}\right)wP\left((n/e)^e\right)\right)}{\text{card}\left(B'w'P'\left((n/ce)^e\right)\right)} \\
&\cdot \sum_{h\in GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c}),u\in U'} \varepsilon'\circ \text{dét}\,(h)\, {f'_{(n/ce)}}^0\left(h^{-1}\gamma_\lambda uh\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

D'après le lemme 4.2.7 (dans lequel on peut remplacer U par U' par le même argument que celui utilisé plus haut), on peut remplacer $GL_n\,(\mathbb{F}_q)$ par l'ensemble $P\left((c)^{n/c}\right)wP\left((n/e)^e\right)$ et $GL_{n/c}\,(\mathbb{F}_{q^c})$ par l'ensemble $B'wP'\left((n/ce)^e\right)$ dans l'égalité ci-dessus. On peut même la réécrire comme suit :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\circ \text{dét}_G\,(w) & \sum_{h\in P_1\left((c)^{n/c}\right),u\in U'} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda uhw\right) \\
&= (-1)^{n'(c-1)(e-1)/e}\, q^{[c(c-1)(e-1)/2(n/ce)^2]-l_G(w)+cl_{G'}(w)} \\
&\cdot \frac{\text{card}\left(P_1\left((c)^{n/c}\right)\right)}{\text{card}\,(B'_1)}\varepsilon'\circ \text{dét}_{G'}\,(w) \\
&\cdot \sum_{h\in B'_1,u\in U'} {f'_{(n/ce)}}^0\left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda uhw\right).
\end{aligned}
$$

Il est clair d'après les définitions que :

$$\varepsilon\circ \text{dét}_G\,(w) = \varepsilon'\circ \text{dét}_{G'}\,(w)$$

De plus, soit $\mathcal{M}'$ un système de représentants du groupe $M_1\left((c)^{n/c}\right)$ modulo $M'_1\left((1)^{n/c}\right)$ à droite ; c'est également un système de représentants de $P\left((c)^{n/c}\right)$ modulo $P'\left((1)^{n/c}\right)$ à droite. Il est clair d'après la définition de w que $w^{-1}M\left((c)^{n/c}\right)w\subset M\left((n/e)^e\right)$; donc tous les éléments de $w^{-1}\mathcal{M}'w$ sont dans $M\left((n/e)^e\right)$, donc pour tout $g\in GL_n\,(\mathbb{F}_q)$ et tout $h_4\in\mathcal{M}'$, on a :

$${f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}h_4^{-1}gh_4w\right) = {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}gw\right).$$

De plus, tout élément h de $P_1\left((c)^{n/c}\right)$ s'écrit de manière unique $h=h_1h_2h_4$, avec $h_1\in B'_1$, $h_2\in U_1\left((c)^{n/c}\right)$ et $h_4\in\mathcal{M}'$ (d'après le lemme 4.2.11, en remarquant que l'on a alors $h_3 = 1$) ; on en déduit, pour tout $u \in U'$:

$$f'_{(n/e)}{}^0\left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda uhw\right) = f'_{(n/e)}{}^0\left(w^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}\gamma_\lambda uh_1h_2w\right).$$

On vérifie de manière analogue au lemme 4.2.8 que l'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ de la forme :

$$h_1^{-1}\gamma_\lambda uh_1, h_1 \in B'_1, u \in U'$$

est exactement l'ensemble des éléments $g = (G_{ij})_{i,j}$ triangulaires supérieurs tels que :

- pour tout i, $G_{ii} = \delta$;
- s'il n'existe pas d'indice k tel que $i = \sum_{k'=1}^{k} \lambda_{k'}$, $G_{i,i+1}$ est tel que $\varepsilon'(G_{i,i+1}) = 1$;
- sinon, G_{ij} est quelconque.

De plus, soit $g \in \mathcal{B}$; écrivons $g = h^{-1}\gamma_\lambda uh$. Alors l'ensemble des (h', u') tels que $g = h'^{-1}\gamma_\lambda u'h'$ est en bijection avec l'ensemble des (h'', u'') tels que $\gamma_\lambda = h''\gamma_\lambda u''h''$, la bijection étant donnée par $h'' = h'h^{-1}$, $u'' = u'h''uh''^{-1}$; on en déduit que le nombre de couples (h, u) tels que $h^{-1}\gamma_\lambda uh = g$ est le même pour tous les éléments g de $\mathcal{B}$. D'autre part, on déduit du lemme 4.2.12 que l'ensemble $\mathcal{A}$ des éléments de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ de la forme :

$$h_2^{-1}h_1^{-1}\gamma_\lambda uh_1h_2, h_1 \in B'_1, h_2 \in U_1\left((c)^{n/c}\right), u \in U'$$

est exactement l'ensemble des éléments $g = (D_{ij})_{i,j}$, où l'on considère la décomposition en blocs de taille c, triangulaires supérieurs par blocs tels que :

- pour tout i, $D_{ii} = \delta$;
- s'il n'existe pas d'indice j tel que $i = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k$, $D_{i,i+1} = D'_{i,i+1} + D''_{i,i+1}$, où $D'_{i,i+1}$ est un élément de $\mathbb{F}_{q^c}^*$ tel que $\varepsilon \circ \text{dét}\left(D'_{i,i+1}\right) = 1$ et $D''_{i,i+1} \in \mathbb{E}$;
- sinon, D_{ij} est quelconque.

De même, le nombre de triplets (h_1, h_2, u') tels que $h_2^{-1}h_1^{-1}\gamma_\lambda uh_1h_2 = g$ est le même pour tous les éléments g de $\mathcal{A}$. De plus, pour $h \in \mathcal{A}$, si l'on écrit $w^{-1}hw = (H_{kk'})_{k,k'}$, les blocs considérés étant de taille n/e, pour tout k, le (k, k')-ème bloc est égal à :

$$H_{kk'} = \left(D_{ie+1-k, je+1-k'}\right)_{1 \leq i,j \leq n/c}.$$

En particulier, les $H_{kk'}$ sont des matrices triangulaires supérieures par blocs, donc on a, pour tous k, k' :

$$\text{dét}(H_{kk'}) = \prod_{i=1}^{n/c} \text{dét}\left(D_{ie+1-k, ie+1-k'}\right).$$

Donc on a, quand h est tel que ${f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right) \neq 0$:

$$ {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right) = \prod_{k=1}^{e-1} \varepsilon^{-k} \circ \text{dét}\left(H_{k+1,k}\right) = \prod_{k=1}^{e-1}\prod_{i=1}^{n/c} \varepsilon^{-k} \circ \text{dét}\left(D_{ie-k,ie+1-k}\right); $$

la valeur de ${f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right)$ ne dépend alors que de la valeur des blocs $D_{i,i+1}$, avec i non multiple de e.

Or on a ${f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right) \neq 0$ seulement si pour tous k, k' avec $k \geq k'+2$, $H_{kk'} = 0$. Soit donc $\mathcal{A}'$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant cette condition : c'est le sous-ensemble des éléments de $P\left((c)^{n/c}\right)$ de la forme $\left(D_{ij}\right)_{i,j}$, où :

- D_{ii} est diagonal par blocs de taille f et tous ses blocs diagonaux sont égaux à δ, pour tout i ;
- $D_{i,i+1}$ est somme d'un élément de $\mathbb{E}$ et d'un élément de $\mathbb{F}_{q^c}^*$ dont l'image du déterminant par ε est 1, pour tout i tel qu'il n'existe pas d'indice k tel que $i = \sum_{k'=1}^{k} \lambda_{k'}$;
- $D_{ij} = 0$ si, en posant $i = i_1 e + i_2$, $j = j_1 e + j_2$, on a $j_2 \geq i_2 + 2$;
- D_{ij} est quelconque sinon.

On en déduit :

$$ \sum_{h \in P_1\left((c)^{n/c}\right), u \in U'} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda u h w\right) $$
$$ = \frac{\text{card}\left(P_1\left((c)^{n/c}\right)\right)\text{card}\left(U'\right)}{\text{card}\left(\mathcal{A}\right)} \sum_{h\in\mathcal{A}'} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right). $$

De plus, pour $h \in \mathcal{A}'$, la valeur de ${f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right)$ ne dépend que de celle des $D_{i,i+1}$, avec i non multiple de e ; si $\mathcal{A}''$ est le sous-ensemble de $\mathcal{A}'$ constitué des éléments h tels que, avec les notations ci-dessus, $D_{ij} = 0$ pour tous i, j tels que l'on ait $j \geq i+2$, ou $j = i+1$ et i multiple de e, on a :

$$ \sum_{h\in\mathcal{A}'} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right) = \frac{\text{card}\left(\mathcal{A}'\right)}{\text{card}\left(\mathcal{A}''\right)} \sum_{h\in\mathcal{A}''} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right). $$

Calculons donc la somme du membre de droite. On a, d'après ce qui précède et en posant $\varepsilon(0) = 0$:

$$ \sum_{h\in\mathcal{A}''} {f'_{(n/e)}}^0\left(w^{-1}hw\right) = \prod_{k=1}^{e-1}\prod_{i=1}^{n/ce}\sum_{h\in\mathcal{A}_1} \varepsilon^{e-k} \circ \text{dét}\left(h\right), $$

où $\mathcal{A}_1$ est l'ensemble des matrices carrées de taille c qui sont somme d'un élément de $\mathbb{F}_{q^c}^*$ dont l'image par ε du déterminant est 1 et d'un élément de $\mathbb{E}$.

On a le résultat suivant :

LEMME 4.2.14. — *Pour tout entier k, $1 \leq k \leq e-1$, on a :*

$$\sum_{h \in \mathcal{A}_1} \varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(h) = \frac{q^c - 1}{e} (-1)^{c-1} q^{c(c-1)/2}.$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathcal{A}_1$; par définition de $\mathcal{A}_1$ et grâce au lemme 4.2.9, la décomposition :

$$h = h_1 + h_2,$$

avec $h_1 \in \mathbb{F}_{q^c}^*$, $\varepsilon \circ \operatorname{dét}(h_1) = 1$, et $h_2 \in \mathbb{E}$, est unique. On a, toujours grâce au lemme 4.2.9 :

$$h_1^{-1} h_2 \in \mathbb{E};$$

d'où, en posant $h_3 = h_1^{-1} h_2$:

$$\varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(h) = \varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(h_1(1+h_3)) = \varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(1+h_3).$$

On obtient donc :

$$\sum_{h \in \mathcal{A}_1} \varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(h) = \frac{q^c - 1}{e} \sum_{h_3 \in \mathbb{E}} \varepsilon^{e-k} \circ \operatorname{dét}(1+h_3).$$

L'assertion résulte donc du lemme suivant :

LEMME 4.2.15. — *Pour tout caractère χ de $\mathbb{F}_q^*$ non trivial, on a, en posant $\chi(0) = 0$:*

$$\sum_{A \in \mathbb{E}} \chi \circ \operatorname{dét}(1+A) = (-1)^{c-1} q^{c(c-1)/2}.$$

Démonstration. — En effet, fixons un caractère non trivial ψ de $\mathbb{F}_q$ et posons, pour tout $A' \in \mathbb{F}_{q^c}$, que l'on identifie à un élément de $M_c(\mathbb{F}_q)$:

$$\phi(A') = \sum_{A \in \mathbb{E}} \chi \circ \operatorname{dét}(A' + A);$$

$$\hat{\phi}(A') = \sum_{A'' \in \mathbb{F}_{q^c}} \phi(A'') \psi \circ \operatorname{tr}(A'A'').$$

On a :

$$\hat{\phi}(A') = \sum_{A'', A} \chi \circ \operatorname{dét}(A'' + A) \psi \circ \operatorname{tr}(A'A'');$$

or pour $A \in \mathbb{E}$, on a $\operatorname{tr} A'A = 0$, donc on en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\left(A'\right) &= \sum_{A'',A} \chi \circ \text{dét}\left(A'' + A\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(A'\left(A'' + A\right)\right) \\ &= \sum_{M \in M_c(\mathbb{F}_q)} \chi \circ \text{dét}\left(M\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(A'M\right).\end{aligned}$$

Si $A' \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\left(A'\right) &= \sum_{M} \chi \circ \text{dét}\left(A'^{-1}M\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(M\right) \\ &= \chi \circ \text{dét}\left(A'\right)^{-1} \hat{\phi}\left(1\right).\end{aligned}$$

On a ensuite par inversion de Fourier :

$$\begin{aligned}\phi\left(1\right) &= q^{-c} \sum_{A' \in M_j\left(\mathbb{F}_{q^c}\right)} \hat{\phi}\left(A'\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(-A'\right) \\ &= q^{-c}\hat{\phi}\left(1\right) \sum_{A' \in GL_j\left(\mathbb{F}_{q^c}\right)} \chi \circ \text{dét}\left(A'\right)^{-1} \psi \circ \operatorname{tr}\left(-A'\right).\end{aligned}$$

Posons pour q' donné, si χ' est un caractère de $\mathbb{F}_{q'}^*$ et ψ' un caractère non trivial de $\mathbb{F}_{q'}$:

$$g\left(\chi', \psi'\right) = -\sum_{x \in \mathbb{F}_{q'}} \chi'\left(x\right) \psi'\left(x\right).$$

Calculons $\hat{\phi}\left(1\right)$. Soit $B = DU$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de $GL_c\left(\mathbb{F}_q\right)$, et soit S un système de représentants de G/U, que l'on pourra supposer tel que $S \cap B = D$. Soit également N l'ensemble des matrices nilpotentes triangulaires supérieures de $M_c\left(\mathbb{F}_q\right)$; on a bien sûr $U = 1 + N$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\left(1\right) &= \sum_{X \in S} \sum_{Y \in N} \chi \circ \text{dét}\left(X\left(1 + Y\right)\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(X\left(1 + Y\right)\right) \\ &= \sum_{X \in S} \sum_{Y \in N} \chi \circ \text{dét}\left(X\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(X + XY\right) \\ &= \sum_{X \in S} \chi \circ \text{dét}\left(X\right) \psi \circ \operatorname{tr}\left(X\right) \sum_{Y \in N} \psi \circ \operatorname{tr}\left(XY\right).\end{aligned}$$

Pour X donné, la somme en Y ci-dessus est nulle sauf si le caractère :

$$Y \mapsto \psi \circ \operatorname{tr}\left(XY\right)$$

est trivial, ce qui est le cas si et seulement si $X \in B$. On a donc :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(1) &= \operatorname{card} N \sum_{X \in D} \chi \circ \operatorname{dét}(X)\, \psi \circ \operatorname{tr}(X) \\ &= q^{c(c-1)/2} \sum_{x_1, \dots, x_{jc} \in \mathbb{F}_q^*} \chi\left(\prod_i x_i\right) \psi\left(\sum_i x_i\right) \\ &= (-1)^c\, q^{c(c-1)/2} g(\chi, \psi)^c .\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on trouve :

$$\sum_{A' \in \mathbb{F}_{q^c}^*} \chi \circ \operatorname{dét}(A')^{-1}\, \psi \circ \operatorname{tr}(-A') = -\overline{g\left(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q}, \psi \circ \operatorname{tr}\right)}.$$

Or on a (théorème de Hasse-Davenport) :

$$g(\chi, \psi)^c = g\left(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q}, \psi \circ \operatorname{tr}\right);$$

et :

$$g\left(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q}, \psi \circ \operatorname{tr}\right) \overline{g\left(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q}, \psi \circ \operatorname{tr}\right)} = q^c.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\phi(1) &= (-1)^{c-1}\, q^{-c+c(c-1)/2+c} \\ &= (-1)^{c-1}\, q^{c(c-1)/2},\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. □

□

On en déduit :

$$\sum_{h \in \mathcal{A}''} f_\alpha'^{\,0}\left(w^{-1} h w\right) = \left(\frac{q^c - 1}{e} (-1)^{c-1}\, q^{c(c-1)/2}\right)^{n(e-1)/ce},$$

d'où :

$$\begin{aligned}&\sum_{h \in P_1\left((c)^{n/c}\right), u \in U'} f_{(n/e)}'^{\,0}\left(w^{-1} h^{-1} \gamma_\lambda u h w\right) \\ &\qquad = \frac{\operatorname{card}\left(P_1\left((c)^{n/c}\right)\right) \operatorname{card}(U') \operatorname{card}(\mathcal{A}')}{\operatorname{card}(\mathcal{A}) \operatorname{card}(\mathcal{A}'')} \\ &\qquad\qquad \cdot \left(\frac{q^c - 1}{e} (-1)^{c-1}\, q^{c(c-1)/2}\right)^{n(e-1)/ce}.\end{aligned}$$

On obtient par le même raisonnement :

$$\sum_{h\in B'_1, u\in U'} f'_{(n/ce)}{}^0 \left(w^{-1}h^{-1}\gamma_\lambda uhw\right)$$
$$= \frac{\operatorname{card}(B'_1)\operatorname{card}(U')\operatorname{card}(\mathcal{B}')}{\operatorname{card}(\mathcal{B})\operatorname{card}(\mathcal{B}'')}\left(\frac{q^c-1}{e}\right)^{n(e-1)/ce},$$

où $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont les sous-ensembles de $GL_{n/c}(\mathbb{F}_{q^c})$ définis de façon analogue à $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$. Pour montrer (7), il suffit donc de vérifier que l'on a :

$$\frac{\operatorname{card}(\mathcal{A}')\operatorname{card}(\mathcal{B})\operatorname{card}(\mathcal{B}'')}{\operatorname{card}(\mathcal{A})\operatorname{card}(\mathcal{A}'')\operatorname{card}(\mathcal{B}')}q^{nc(c-1)(e-1)/2ce}$$
$$= q^{[c(c-1)(e-1)/2](n/ce)^2 - l_G(w) + cl_{G'}(w)},$$

ou encore :

$$\frac{\operatorname{card}(\mathcal{A}')\operatorname{card}(\mathcal{B})\operatorname{card}(\mathcal{B}'')}{\operatorname{card}(\mathcal{A})\operatorname{card}(\mathcal{A}'')\operatorname{card}(\mathcal{B}')}q^{l_G(w)-cl_{G'}(w)}$$
$$= q^{-nc(c-1)(e-1)/2ce + c(c-1)(e-1)/2(n/ce)^2}.$$

On calcule, à partir des définitions :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{A}) &= q^{c(c-1)(n/2c)(n/c-1))}\operatorname{card}(\mathcal{B})\,;\\
\operatorname{card}\left(\mathcal{A}'\right) &= q^{c(c-1)((e-1)n/ce+(e(e+1)/2+e-1)(n/2ce)(n/ce-1))}\operatorname{card}\left(\mathcal{B}'\right)\,;\\
\operatorname{card}\left(\mathcal{A}''\right) &= q^{c(c-1)(e-1)n/ce}\operatorname{card}\left(\mathcal{B}''\right).
\end{aligned}$$

De plus, on a, si (w_{ij}) est le tableau associé à w (en tant qu'élément de G') comme dans la démonstration du lemme 4.2.7 :

$$\begin{aligned}
l_{G'}(w) &= \sum_{i,j}\sum_{k>i,l<j} w_{ij}w_{kl} = \frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{n}{2ce}\left(\frac{n}{ce}+1\right)\right);\\
l_G(w) &= \sum_{i,j}\sum_{k>i,l<j} c^2 w_{ij}w_{kl} = c^2 l_{G'}(w),
\end{aligned}$$

d'où :

$$q^{l_G(w)-cl_{G'}(w)} = q^{[c(c-1)e(e-1)/2](n/2ce)(n/ce+1)}.$$

La formule cherchée se déduit de ces égalités.

Supposons maintenant toujours $a = 0$ et $b = 1$, mais $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ quelconque. On a :

$$f_\alpha^0 = f_{\alpha_1}^0 \otimes \cdots \otimes f_{\alpha_t}^0.$$

On a déjà vu que la deuxième assertion de la proposition 4.2.2 était vraie. La première se montre de la même façon que le cas $\alpha = (n/e)$, en considérant cette fois la projection de $I_{\alpha * e}$ dans $\prod_{i=1}^{t} GL_{e\alpha_i}(\mathbb{F}_q)$.

Supposons enfin a et b quelconques : on a les lemmes suivants :

LEMME 4.2.16. — *Soit $g \in \Gamma$ tel que $\int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}} \varepsilon \circ \text{dét}(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right) dh \neq 0$. Alors il existe $k \in K_{G'}$ tel que $k^{-1}g^{-1}\gamma' gk$ est congru à $g^{-1}\gamma'^b g$ modulo $\mathfrak{p}'$; de plus, on a :*

$$\varepsilon' \circ \text{dét}(k) = \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)$$

qui vaut toujours 1 *ou* -1.

Démonstration. — En effet, l'image de $g^{-1}\gamma' g$ dans $GL_{n'}(\mathbb{F}_{q^c})$ est une matrice unipotente triangulaire supérieure, donc il existe $k' \in K_{G'}$ et une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t'}) \in \mathcal{P}(n')$ tels que l'image de $k'^{-1}g^{-1}\gamma' gk'$ est la matrice $\mathrm{Id} + J_\lambda$; de plus, pour que la condition de l'énoncé soit vérifiée, il est nécessaire qu'il existe $\lambda' \in \mathcal{P}(n'/d)$ tel que $\lambda = d\lambda'$. L'image de $k'^{-1}g^{-1}\gamma'^b gk' = \left(k'^{-1}g^{-1}\gamma' gk'\right)^b$ est alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} (\mathrm{Id} + J_{\lambda_1})^b & & \\ & \ddots & \\ & & (\mathrm{Id} + J_{\lambda_{t'}})^b \end{pmatrix}.$$

Pour tout i, les termes situés juste au-dessus de la diagonale principale de $(\mathrm{Id} + J_{\lambda_i})^b$ sont tous égaux à b. Puisque l'extension F'/F est modérément ramifiée, b n'est pas multiple de p ; on montre alors de façon analogue à la démonstration du lemme 4.2.8 que cette matrice est conjuguée par un élément unipotent u de $GL_{n'}(\mathbb{F}_{q^c})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} + bJ_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Id} + bJ_{\lambda_{t'}} \end{pmatrix}.$$

or cette dernière matrice n'est autre que l'image de $k''^{-1}\left(k'^{-1}g^{-1}\gamma gk'\right)k''$, avec $k'' \in K_{G'}$ d'image :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & b & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b^{n'-1} \end{pmatrix}.$$

Donc il suffit de poser $k = k'k''u^{-1}k'^{-1}$; on a alors :

$$\begin{aligned}\varepsilon' \circ \text{dét}\,(k) = \varepsilon' \circ \text{dét}\,(k'') &= \prod_{i=0}^{n'} \varepsilon'^{i}\,(b) \\ &= \varepsilon'^{n'(n'-1)/2}\,(b) \\ &= \varepsilon'^{(d-1)n'/2+d^2(n'/d)((n'/d)-1)/2}\,(b) \\ &= \varepsilon'^{(d-1)n'/2}\,(b)\,.\end{aligned}$$

De plus, $(d-1)n'/2$ est égal à la moitié d'un multiple de d, donc l'expression ci-dessus vaut toujours 1 ou -1. □

LEMME 4.2.17. — *Soit $g \in \Gamma$, $h \in I_{d\alpha^b}$ tels que $f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) \neq 0$. Alors si $h_1, \ldots, h_b$ sont les blocs diagonaux de h de taille n/b et $g_1, \ldots, g_b$ ceux de $\zeta^{-na/b}g^{-1}\gamma g$, on a :*

$$\begin{aligned}f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) = \varepsilon \circ \text{dét}\,(h)^{-1}\,\varepsilon^b \circ \text{dét}\,(h_{1-a})\, x_\delta x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d, G}\right)^{-1} \\ \cdot \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right) f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}h_{1-a}\right),\end{aligned}$$

où $x_{\varpi_F^a\delta^{-b}}$ est défini de manière similaire à x_δ en remplaçant G par $GL_{n/b}(F)$, G' par $GL_{n'}(F'')$, F'' étant l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans F', et ε par ε^b ; de plus, pour tout $i \geq 2$, on a $h_{i-a}^{-1}g_i h_i \in I_{\alpha * d}$.

Démonstration. — En effet, on a, avec les notations utilisées dans la définition de $f_\alpha^{a,b}$:

$$f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{b} f_{\alpha,i}^{a,b}\left(h_{i-a}^{-1}g_i h_i\right).$$

De plus, soit $f_{\alpha,0}^{a,b}$ l'unique fonction de $GL_{n/b}(F)$ dans $\mathbb{C}$ dont le support est $I_{\alpha * d}$ et telle que pour $x \in GL_{n/b}(F)$ et $y \in I_{\alpha * d}$, on ait :

$$f_{\alpha,1}^{a,b}(xy) = f_{\alpha,0}^{a,b}(y)\, f_{\alpha,1}^{a,b}(x)\,;$$

on déduit immédiatement des définitions que l'on a :

$$f_{\alpha,i}^{a,b} = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^{-1}\left(\varepsilon^{l(i)} \circ \text{dét}\right) f_{\alpha,0}^{a,b}$$

pour $i \geq 2$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) \\
&\qquad = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^{1-b} f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1h_1\right)\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(h_{i-a}^{-1}g_ih_i\right) f_{\alpha,0}^{a,b}\left(h_{i-a}^{-1}g_ih_i\right) \\
&\qquad = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^{1-b}\left(\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(h_{i-a}^{-1}h_i\right)\right)\left(\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(g_i\right)\right) \\
&\qquad\quad \cdot f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1g_{1+a}\cdots g_{1-a}h_{1-a}\right)
\end{aligned}$$

si pour tout $i \geq 2$, $h_{i-a}^{-1}g_ih_i \in P\left(\alpha * d\right)$, et :

$$f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) = 0$$

sinon.

Or on a :

$$\operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right) = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^b,$$

d'où :

$$\operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right)^{1-b} = \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d}\right)^{-1}\operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d}\right)^b;$$

ensuite :

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(h_{i-a}^{-1}h_i\right) \\
&\qquad = \varepsilon^{-l(1+a)}\circ \operatorname{dét}\left(h_1\right)\varepsilon^{l(1-a)}\circ \operatorname{dét}\left(h_{1-a}\right)\prod_{i\neq 1,1-a}\varepsilon^{-l(i+a)+l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(h_i\right),
\end{aligned}$$

et d'après la définition de $l\left(i\right)$:

$$l\left(1+a\right) = 1, l\left(1-a\right) = b-1,$$

et pour tout $i \neq 1, 1-a$:

$$l\left(i+a\right) - l\left(i\right) = 1,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)}\circ \operatorname{dét}\left(h_{i-a}^{-1}h_i\right) &= \left(\prod_{i\neq 1-a}\varepsilon^{-1}\circ \operatorname{dét}\left(h_i\right)\right)\varepsilon^{b-1}\circ \operatorname{dét}\left(h_{1-a}\right) \\
&= \varepsilon\circ \operatorname{dét}\left(h\right)^{-1}\varepsilon^{b}\circ \operatorname{dét}\left(h_{1-a}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma gh\right) = \varepsilon \circ \text{dét}\,(h)^{-1}\,\varepsilon^b \circ \text{dét}\,(h_{1-a})\left(\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)} \circ \text{dét}\,(g_i)\right)$$
$$\cdot \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^a * b,G}\right)^{-1} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * b}\right) f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}h_{1-a}\right),$$

De plus, $g^{-1}\gamma g \in \delta I^1_{(n/b)^b,G}$, donc on a :

$$\prod_{i=2}^{b}\varepsilon^{l(i)} \circ \text{dét}\,(g_i) = \varepsilon'^{-n'(d-1)/2}\left(\varpi_F^{-a}\delta^b\right)^{-1} x_\delta;$$

de plus, par définition :

$$\varepsilon'^{n'(d-1)/2}\left(\varpi_F^{-a}\delta^b\right) = x_{\varpi_F^{-a}\delta^b},$$

ce qui achève la démonstration. □

On en déduit, si Λ est un système de représentants de $I_{d\alpha^b}$ modulo K_0, en posant $G_{n/b} = GL_{n/b}(F)$:

$$\sum_{h\in\Lambda}\varepsilon \circ \text{dét}\,(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}k_g^{-1}g^{-1}\gamma g k_g h\right)$$
$$= \sum_{h=(h_1,\ldots,h_b)\in\Lambda_0}\varepsilon \circ \text{dét}\,(h)^{-1}\,\varepsilon^b \circ \text{dét}\,(h_{1-a})\, x_\delta x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b}$$
$$\cdot \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d,G}\right)^{-1} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d,G_{n/b}}\right) f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}h_{1-a}\right),$$

où Λ_0 est l'ensemble des éléments h de Λ tels que pour tout $i \geq 2$, on a $h_{i-a}^{-1}g_i h_i \in I_{\alpha * d}$. Cette somme est égale à :

$$\frac{\operatorname{card}(\Lambda_0)}{\operatorname{card}(\Lambda_1)} x_\delta x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha^b * d,G}\right)^{-1} \operatorname{vol}\left(I_{\alpha * d,G_{n/b}}\right)$$
$$\cdot \sum_{h_{i-a}\in\Lambda_1}\varepsilon^b \circ \text{dét}\,(h_{1-a})\, f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1}g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}h_{1-a}\right),$$

où Λ_1 est un système de représentants de $I_{d\alpha,G_{n/b}}$ modulo l'ensemble K'_0 des éléments de $I_{d\alpha,G_{n/b}}$ dont tous les blocs diagonaux sont égaux à l'identité.

De plus, on a :

$$\frac{\operatorname{vol}\left(T_\gamma\backslash T_\gamma g K_0\right)}{\left[g^{-1}T_\gamma g \cap I_{d\alpha^b,G} : g^{-1}T_\gamma g \cap K_0\right]} = \frac{\operatorname{vol}\left(T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}\right)}{\operatorname{card}(\Lambda)}$$
$$= \frac{\operatorname{vol}\left(I_{d\alpha^b,G}\right)}{\operatorname{vol}\left(g^{-1}T_\gamma g \cap I_{d\alpha^b,G}\right)\operatorname{card}(\Lambda)};$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}\,(\Lambda) &= \mathrm{vol}\left(I_{d\alpha^b,G}\right)[I:K_0]\,; \\ \mathrm{card}\,(\Lambda_0) &= \mathrm{vol}\left(I_{\beta,G}\right)[I:K_0] \end{aligned}$$

avec $\beta = ((d\alpha), (\alpha * d), \ldots, (\alpha * d))$, d'où :

$$\mathrm{card}\,(\Lambda_0) = \frac{\mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b * d,G}\right)\mathrm{vol}\left(I_{d\alpha,G_{n/b}}\right)}{\mathrm{vol}\left(I_{\alpha * d,G_{n/b}}\right)}[I:K_0]\,,$$

soit :

$$\mathrm{card}\,(\Lambda) = \frac{\mathrm{vol}\left(I_{d\alpha^b,G}\right)\mathrm{vol}\left(I_{\alpha * d,G_{n/b}}\right)}{\mathrm{vol}\left(I_{\alpha^b * d,G}\right)\mathrm{vol}\left(I_{d\alpha,G_{n/b}}\right)}\mathrm{card}\,(\Lambda_0)\,.$$

On obtient finalement, en utilisant le lemme 4.2.6 :

$$\begin{aligned} &\int_{T_\gamma \backslash T_\gamma g I_{d\alpha^b}} \varepsilon \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h)\, f_\alpha^{a,b}\left(h^{-1}\gamma h\right) dh \\ &\quad = \frac{\mathrm{vol}\left(I_{d\alpha,G_{n/b}}\right)}{\mathrm{vol}\left(g^{-1}T_\gamma g \cap I_{d\alpha^b,G}\right)\mathrm{card}\,(\Lambda_1)} \\ &\qquad \cdot x_\delta x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} \sum_{h_{i-a}\in\Lambda_1} \varepsilon^b \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h_{1-a})\, f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1} g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a} h_{1-a}\right). \\ &\quad = \frac{\mathrm{vol}\left(K_0'\right)}{\mathrm{vol}\left(g^{-1}T_\gamma g \cap I_{d\alpha^b,G}\right)} \\ &\qquad \cdot x_\delta x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} \sum_{h_{i-a}\in\Lambda_1} \varepsilon^b \circ \mathrm{d\acute{e}t}\,(h_{1-a})\, f_\alpha^0\left(h_{1-a}^{-1} g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a} h_{1-a}\right). \end{aligned}$$

On a également, d'après le lemme 4.2.6 et le lemme 4.2.16, si Λ' est un système de représentants de $I_{\alpha',G'}$ modulo $K_{0,G'}$:

$$\begin{aligned}\int_{T_\gamma\backslash T_\gamma g I_{\alpha'}} & \varepsilon' \circ \text{dét}\,(h) f^0_{\alpha'}\left(h^{-1}\gamma' h\right) dh \\ &= \frac{\operatorname{vol}\left(T_\gamma\backslash T_\gamma g K_{0,G'}\right)}{\left[g^{-1}T_\gamma g\cap I_{\alpha',G'} : g^{-1}T_\gamma g\cap K_{0,G'}\right]} \\ &\quad \cdot \sum_{h\in\Lambda'} \varepsilon' \circ \text{dét}_{G'}\,(h)\, f^0_{\alpha'}\left(h^{-1}g^{-1}\gamma' g h\right) \\ &= \varepsilon'^{(d-1)n'/2}\,(b)\, x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} \frac{\operatorname{vol}\left(K_{0,G'}\right)}{\operatorname{vol}\left(g^{-1}T_\gamma g\cap I_{\alpha',G'}\right)} \\ &\quad \cdot \sum_{h\in\Lambda'} \varepsilon^b \circ \text{dét}_G\,(h)\, f^0_{\alpha'}\left(h^{-1}\varpi_F^{-a} g^{-1}\gamma^b g h\right).\end{aligned}$$

Or $g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}$ est congru modulo $\mathfrak{p}$ à $\varpi_F^{-a}g^{-1}\gamma^b g$ dans $G_{n/b}$; d'autre part, on a :

$$\begin{gathered} g^{-1}T_\gamma g\cap I_{d\alpha^b,G} = g^{-1}T_\gamma g\cap I_{\alpha',G'};\\ \frac{n'\,(c-1)\,(d-1)}{d} = \frac{(n/b)\,(c-1)\,(d-1)}{cd}.\end{gathered}$$

On a donc finalement à montrer une égalité similaire à l'égalité $x_u = y_u$ du cas $a=0, b=1, t=1$, généralisée au cas t quelconque ; cette égalité ayant déjà été démontrée, on en déduit donc la proposition. □

Soit $\eta_G^{a,b}$ l'élément de $\mathcal{E}_G$ tel que $f^{a,b}_{(n/db)} \in \mathcal{F}^{\eta_G^{a,b}}$; posons :

$$\varepsilon_G^{a,b} = \varepsilon\,(-1)^{l_G\left(w_{\eta_{0,G},\eta_G^{a,b}}\right)}.$$

De même, soit $\eta_{G'}^{0,1}$ l'élément de $\mathcal{E}_{G'}$ tel que $f^0_{f'(n'/d)} \in \mathcal{F}^{\eta_{G'}^{0,1}}$; on pose, pour tout $\lambda' \in \mathcal{P}\,(m')$:

$$\varepsilon_{G'}^{0} = \varepsilon\,(-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta_{0,G'},\eta_{G'}^{0,1}}\right)}.$$

On a la relation suivante :

PROPOSITION 4.2.18. — *On a, avec les notations de la proposition 3.3.1, en considérant les éléments y_λ de la PSH-algèbre de Zelevinsky :*

$$c_{a,b}\,(-1)^{(m-1/f)na/b}\,\varepsilon_G^{a,b}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^0(m/l)} s_\lambda^\varepsilon(\gamma)\,y_\lambda$$
$$=(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d}\,\varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\,x_\delta\varepsilon_{G'}^0\tau_{c'}\left(\sum_{\lambda'\in\mathcal{P}^0(m')} s_{\lambda'}^{\varepsilon'}(\gamma')\,y_{\lambda'}\right).$$

Démonstration. — En effet, on déduit des propositions 4.1.1 et 3.3.1, pour tout $\alpha\in\mathcal{P}(n/fdb)$, si $\eta_{\alpha,G}^{a,b}$ est l'élément de $\mathcal{E}_G$ tel que $f_{f\alpha}^{a,b}\in\mathcal{F}_G^{\eta_{\alpha,G}^{a,b}}$:

$$I_G^\varepsilon\left(\varepsilon\,(-1)^{l_G\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{\alpha,G}^{a,b}}\right)}f_{f\alpha}^{a,b},\gamma\right)=\langle x_\alpha,y(\gamma)\rangle,$$

avec :

$$y(\gamma)=c_{a,b}\,(-1)^{(m-1/f)na/b}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}^0(m/l)}\varepsilon\,(-1)^{l_G\left(w_{\eta_{0,G},\eta_G^{a,b}}\right)}s_\lambda^\varepsilon(\gamma)\,y_\lambda.$$

De même, en appliquant ces mêmes propositions, pour tout $\alpha'\in\mathcal{P}(m')$, si $\eta_{\alpha',G'}^{0,1}$ est l'élément de $\mathcal{E}_{G'}$ tel que $f_{f'\alpha'}^0\in\mathcal{F}_{G'}^{\eta_{\alpha',G'}^{0,1}}$:

$$I_{G'}^{\varepsilon'}\left(\varepsilon'\,(-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta_{G'}^{0,1},\eta_{\alpha',G'}^{0,1}}\right)}f_{f'\alpha'}^0,\gamma'\right)=\langle x_{\alpha'},y'(\gamma')\rangle,$$

avec :

$$y'(\gamma')=\sum_{\lambda'\in\mathcal{P}^0(m')}\varepsilon\,(-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta_{G'}^0,\eta_{G'}^{0,1}}\right)}s_{\lambda'}^{\varepsilon'}(\gamma')\,y_{\lambda'}.$$

On en déduit, d'après la proposition 4.2.2 et le lemme 2.4.1 :

$$\langle x_\alpha,y(\gamma)\rangle=\varepsilon\,(-1)^{l_G\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{\alpha,G}^{a,b}}\right)-l_{G'}\left(w_{\eta_{G'}^{0,1},\eta_{\alpha',G'}^{0,1}}\right)}$$
$$\cdot\,(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d}\,\varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\,x_\delta\langle x_{\alpha'},y'(\gamma')\rangle$$

si $\alpha=\dfrac{n}{fdbm'}\alpha'$, et :

$$\langle x_\alpha,y(\gamma)\rangle=0$$

s'il n'existe pas de α' telle que $\alpha = \dfrac{n}{fdbm'}\alpha'$; de plus, on a, pour tout α :

$$\varepsilon\left(-1\right)^{l_G\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{\alpha,G}^{a,b}}\right)-l_{G'}\left(w_{\eta_{G'}^{0,1},\eta_{\alpha',G'}^{0,1},G'}\right)} = 1.$$

On en déduit, comme dans [**17**, VII.2] :

$$y\left(\gamma\right) = \left(-1\right)^{n'(c-1)(d-1)/d}\,\varepsilon'^{(d-1)n'/2}\left(b\right)x_\delta\tau_{n/fdbm'}\left(y'\left(\gamma'\right)\right).$$

Enfin, n/m' est le degré de EF'/F, db son indice de ramification, et f est le degré résiduel de E/F ; on en déduit que $n/fdbm'$ est le degré résiduel c'de EF'/E, ce qui achève la démonstration. □

On va maintenant établir une relation de récurrence sur les facteurs de transfert : rappelons d'abord leur définition. Soit γ_H une image de γ dans H ; on pose :

$$\Delta_{\varepsilon,1}\left(\gamma,\gamma_H\right) = \left|\prod_{\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(E/F),\sigma\neq\tau} r\left(\sigma\left(\gamma_H\right),\tau\left(\gamma_H\right)\right)\right|_F^{1/2}\left|\mathrm{d\acute{e}t}_G\left(\gamma\right)\right|_F^{(m-n)/2}.$$

D'autre part, soit v un élément de F^n tel que les $\gamma^k\left(v\right)$, $0 \leq k \leq n-1$, engendrent F^n ; posons :

$$\Delta_{\varepsilon,2}\left(\gamma\right) = \varepsilon^{-1}\left(\mathrm{d\acute{e}t}\left(v,\gamma\left(v\right),\dots,\gamma^{n-1}\left(v\right)\right)\right),$$

le déterminant étant pris par rapport à la base canonique de F^n. Cette dernière expression ne dépend pas du choix de v, grâce au lemme suivant :

LEMME 4.2.19. — *Soit $\gamma \in G^H$ régulier. Alors l'expression :*

$$\varepsilon\left(\mathrm{d\acute{e}t}\left(v,\gamma v,\dots,\gamma^{n-1}v\right)\right),$$

pour $v \in F^n$ tel que le déterminant ci-dessus est non nul, ne dépend pas du choix de v.

Démonstration. — En effet, soit v, v' deux éléments de F^n vérifiant la condition requise. Alors $\left\{v,\gamma v,\dots,\gamma^{n-1}v\right\}$ est une base de F^n, donc il existe un polynôme P tel que $v' = P\left(\gamma\right)v$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d\acute{e}t}\left(v',\gamma v',\dots,\gamma^{n-1}v'\right) &= \mathrm{d\acute{e}t}\left(P\left(\gamma\right)v,\gamma P\left(\gamma\right)v,\dots,\gamma^{n-1}P\left(\gamma\right)v\right)\\ &= \mathrm{d\acute{e}t}\left(P\left(\gamma\right)v,P\left(\gamma\right)\gamma v,\dots,P\left(\gamma\right)\gamma^{n-1}v\right)\\ &= \mathrm{d\acute{e}t}\left(P\left(\gamma\right)\right)\mathrm{d\acute{e}t}\left(v,\gamma v,\dots,\gamma^{n-1}v\right).\end{aligned}$$

En particulier, $P\left(\gamma\right)$ est inversible. De plus, en identifiant E^m à F^n de manière convenable, γ est un élément de $M_m\left(E\right)$, donc $P\left(\gamma\right)$ aussi ; on en déduit que $P\left(\gamma\right) \in G^H$, d'où $\varepsilon\circ\mathrm{d\acute{e}t}\left(P\left(\gamma\right)\right) = 1$, ce qui démontre le lemme. □

On a alors :

$$\Delta_\varepsilon(\gamma,\gamma_H)=\Delta_{\varepsilon,1}(\gamma,\gamma_H)\,\Delta_{\varepsilon,2}(\gamma).$$

On vérifie aisément l'assertion suivante : si $g\in G$ et $h\in H$:

$$\Delta_\varepsilon\left(g^{-1}\gamma g,h^{-1}\gamma_H h\right)=\varepsilon\circ\text{dét}(g)\,\Delta_\varepsilon(\gamma,\gamma_H).$$

On a la relation de récurrence suivante sur les facteurs de transfert : soit $\eta_{1,G}$ l'élément de $\mathcal{E}_G$ associé à l'application $\epsilon_{1,G}$ de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{0,\dots,e-1\}$ telle que pour tout i, $\epsilon_{1,G}(i)$ est congru à $i-1$ modulo e. On définit de manière similaire $\eta_{1,G'}\in\mathcal{E}_{G'}$.

Posons également :

$$\varepsilon_{G,1}^{a,b}=\varepsilon(-1)^{l_G\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{1,G}}\right)};$$

$$\varepsilon_{G',1}^{0}=\varepsilon'(-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta_{G'}^{0,1},\eta_{1,G'}}\right)}.$$

LEMME 4.2.20. — *Soit γ_H (resp. $\gamma'_{H'}$ une image de γ (resp. γ') dans H (resp. H'). On a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H)=(-1)&^{n'(c-1)(d-1)/d+(m^2ea/b)(f-1)}\\&\varepsilon_{G,1}^{a,b}\varepsilon_{G',1}^{0}\varepsilon(-1)^{n(b+1)/2}c_{a,b}\varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\,x_\delta^{-1}\Delta_{\varepsilon',G'}\left(\gamma',\gamma'_{H'}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. — On démontre l'égalité $\Delta_{\varepsilon,1,G}(\gamma,\gamma_H)=\Delta_{\varepsilon',1,G'}\left(\gamma',\gamma'_{H'}\right)$ de la même façon que dans [**17**, VII.3]. Il suffit donc de montrer que l'on a :

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma)=(-1)&^{n'(c-1)(d-1)/d+(m^2ea/b)(f-1)}\\&\varepsilon_{G,1}^{a,b}\varepsilon_{G',1}^{0}\varepsilon(-1)^{n(b+1)/2}c_{a,b}\varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\,x_\delta^{-1}\Delta_{\varepsilon',2,G'}\left(\gamma'\right).\end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus ne change pas si on remplace γ par un de ses conjugués dans G' ; on peut donc supposer, en considérant une base $v_1,\dots,v_{n'}$ de $F'^{n'}$ telle que pour tout $i\geq 2$, $\gamma\delta^{-1}v_i=v_i+v_{i-1}$, que γ est congru modulo $\mathfrak{p}'$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix}\delta & \delta & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta\\ 0 & & & \delta\end{pmatrix}.$$

On a alors par une récurrence évidente, si $(e'_1, \ldots, e'_{n'})$ est la base canonique de $F'^{n'}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n'-1\}$:

$$\gamma'^i\left(e'_{n'}\right) \equiv \delta^i e'_{n'-i} + \sum_{j=n'-i+1}^{n'} a_{ij} e'_j$$

modulo $\mathfrak{p}'$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(e'_{n'}, \gamma'\left(e'_{n'}\right), \ldots, \gamma'^{n'-1}\left(e'_{n'}\right)\right) &= \delta^{n'(n'-1)/2}\,\text{dét}\left(e'_{n'}, \ldots, e'_1\right)\\ &= (-\delta)^{n'(n'-1)/2},\end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta_{\varepsilon',2,G'}(\gamma) = \varepsilon'(-\delta)^{n'(n'-1)/2}.$$

Supposons d'abord $a = 0$ et $b = 1$. Puisque $\gamma = \delta\gamma'$, on a, avec $v \in F'^{n'}$ convenable :

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon',2,G'}(\gamma) &= \varepsilon'^{-1}\left(\text{dét}\left(v, \delta\gamma'(v), \ldots, (\delta\gamma')^{n'-1}(v)\right)\right)\\ &= \varepsilon'(\delta)^{-n'(n'-1)/2}\,\varepsilon'^{-1}\left(\text{dét}\left(v, \gamma'(v), \ldots, \gamma'^{n'-1}(v)\right)\right)\\ &= x_\delta^{-1}\Delta_{\varepsilon',2,G'}\left(\gamma'\right);\end{aligned}$$

d'autre part, on a $n(b+1)/2 = n$, donc $\varepsilon(-1)^{n(b+1)/2} = 1$. Il suffit donc de montrer que l'on a :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = (-1)^{n'(c-1)(d-1)/d}\,\varepsilon^{a,b}_{G,1}\varepsilon^{0}_{G',1}\Delta_{\varepsilon',2,G'}(\gamma).$$

Calculons donc $\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma)$. Dans G, γ est congru modulo $\mathfrak{p}$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \delta & \delta & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta \\ 0 & & & \delta \end{pmatrix},$$

les blocs considérés étant de taille c. De plus, puisque δ engendre l'extension non ramifiée F'/F, on peut supposer que son image dans $M_c(F)$ est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & -a_{c-1} \end{pmatrix},$$

où $P_\delta = X^c + a_{c-1}X^{c-1} + \cdots + a_0$ est le polynôme minimal de δ sur F. Montrons que γ est conjugué à un élément de G congru modulo $\mathfrak{p}$ à la matrice suivante :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \delta & E_{c1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & E_{c1} \\ 0 & & & \delta \end{pmatrix},$$

où E_{c1} est l'élément de $M_c(\mathbb{F}_q)$ dont tous les termes sont nuls sauf le $(c,1)$-ème qui vaut 1 ; on aura alors :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma_0) = \varepsilon(-1)^{n(n-1)/2}.$$

En effet, d'après le lemme 4.2.9, si $\mathbb{E}$ est le sous-espace de $M_c(\mathbb{F}_q)$ défini comme dans la démonstration de la proposition 4.2.2, on a $E_{c1} = A + B$, avec $A \in \mathbb{F}_{q^c}$ et $B \in \mathbb{E}$; de plus, toujours par le lemme 4.2.9, B n'est pas de rang 1, donc A est non nul. On voit donc, de manière similaire au corollaire 4.2.12, que γ est congru modulo $\mathfrak{p}$ à $h\gamma_0 h^{-1}$, où h est un élément de K congru modulo $\mathfrak{p}$ à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \delta^{-1}A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \left(\delta^{-1}A\right)^{n'-1} \end{pmatrix} u,$$

avec $u \in U\left((c)^{n'}\right)$. On a, de même que pour γ', si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de F^n :

$$\text{dét}\left(e_n, \gamma_0(e_n), \ldots, \gamma_0^{n-1}(e_n)\right) = \text{dét}\left(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\right) = (-1)^{n(n-1)/2},$$

d'où, si $v = h(e_n)$, $v \in \mathcal{O}^n$ et :

(8) $$\text{dét}\left(v, \gamma(v), \ldots, \gamma^{n-1}(v)\right) = \text{dét}(h)(-1)^{n(n-1)/2} \in \mathcal{O}^*.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) &= \varepsilon \circ \text{dét}(h)^{-1} \Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma_0) \\ &= \varepsilon' \left(\delta^{-1}A\right)^{-n'(n'-1)/2} \varepsilon(-1)^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon'(-1)^{n'(n'-1)/2} &= \varepsilon(-1)^{n(n'-1)/2} \\ &= \varepsilon(-1)^{n(n-n')/2} \varepsilon(-1)^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Or $\varepsilon(-1) = 1$ si e est impair, et $n(n-n')/2$ est pair si e est pair, donc on a dans tous les cas :

$$\varepsilon'(-1)^{n'(n'-1)/2} = \varepsilon(-1)^{n(n-1)/2}.$$

Il reste à calculer $\varepsilon'(A)^{n'(n'-1)/2}$. Si e est impair, e divise $n'(n'-1)/2$, donc $\varepsilon'(A)^{n'(n'-1)/2} = 1$. Supposons donc e pair. On a :

$$\delta \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c-1 & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c-1 & \ddots \end{pmatrix} \delta$$

$$= \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & -2a_2 & \dots & -(c-1)\,a_{c-1} & -c \end{pmatrix}.$$

Le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est un élément de $\mathbb{E}$; on en déduit que l'on a :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 2a_2 & \dots & (c-1)\,a_{c-1} & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Id} + \mathbb{E}.$$

De plus, CA est un élément de $A + \mathbb{E}$ dont toutes les lignes sont nulles sauf éventuellement la dernière ; on en déduit, à l'aide du lemme 4.2.9, que l'on a $CA = E_{c1}$. On en déduit $C = E_{c1}A^{-1}$, donc la première ligne de A^{-1} est égale à la dernière ligne de C. Or on vérifie par une récurrence triviale que pour tout $i \in \{0, \dots, c-1\}$, sur la première ligne de δ^i,le $i+1$-ème terme vaut 1 et tous les autres valent 0 ; de plus, deux éléments de $\mathbb{F}_{q^c}$ sont égaux si et seulement si leurs premières lignes sont égales (sinon $\mathbb{F}_{q^c}$ contiendrait un élément non nul dont la première ligne serait nulle, ce qui est exclu). On en déduit :

$$A^{-1} = a_1 + 2a_2\delta + \dots + (c-1)\,a_{c-1}\delta^{c-2} + c\delta^{c-1} = P'_\delta(\delta),$$

où P'_δ est le polynôme dérivé de P_δ. On a, d'autre part :

$$P_\delta = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q\right)} (X - \sigma(\delta)),$$

d'où, en dérivant :

$$P'_\delta = \sum_\sigma \prod_{\tau \neq \sigma} (X - \tau(\delta)).$$

En prenant la valeur de ce polynôme en δ, on obtient :

$$P'_\delta(\delta) = \prod_{\sigma\neq 1}(\delta - \sigma(\delta)).$$

Lorsque c est impair, le produit ci-dessus est un produit de $c-1/2$ expressions de la forme :

$$(\delta - \delta^\sigma)\left(\delta - \delta^{\sigma^{-1}}\right)$$

qui vaut aussi :

$$-(\delta - \delta^\sigma)(\delta - \delta^\sigma)^{\sigma^{-1}}.$$

Or l'ordre de $(\delta - \delta^\sigma)^{\sigma^{-1}}$ étant le même que celui de $\delta - \delta^\sigma$ dans $\mathbb{F}_{q^c}^*$, soit tous deux sont des carrés soit aucun des deux ne l'est ; leur produit est donc toujours un carré. Le terme ci-dessus est donc égal à un carré multiplié par -1. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(A)^{n'(n'-1)/2} &= \varepsilon'(-1)^{((c-1)/2)(n'(n'-1))/2} \\
&= \varepsilon(-1)^{c(c-1)n'(n'-1)/4} \\
&= \varepsilon(-1)^{(c-1)(e-1)n/4+(c-1)(n'-e)n/4}.
\end{aligned}$$

Or $c-1$ et n sont pairs, et $n'-e$ est multiple de e ; on en déduit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(A)^{n'(n'-1)/2} &= \varepsilon(-1)^{(c-1)(e-1)n/4} \\
&= \varepsilon(-1)^{(c(c-1)/2)(e(e-1)/2)n/ce}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant c pair. On a alors $\varepsilon'(-1) = 1$, donc par un raisonnement similaire au cas c impair, $P'_\delta(\delta)$ est égal à un carré multiplié par $x = \delta - \sigma_+(\delta)$, où σ_+ est l'unique élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^c}/\mathbb{F}_q)$. On a :

$$\sigma_+(x) = x^{q^{c/2}} = -x,$$

donc puisque x est non nul, x est racine du polynôme $X^{q^{c/2}-1}+1$. L'ordre de x dans $\mathbb{F}^*{}_{q^c}$ divise donc $2\left(q^{c/2}-1\right)$ mais ne divise pas $q^{c/2}-1$. De plus, e est pair et p ne divise pas e, donc p est impair, donc q aussi ; on en déduit qu'il existe $y \in \mathbb{F}_{q^c}^*$ tel que $x = y^{\left(q^{c/2}+1\right)/2}$, mais qu'il n'existe pas de y tel que $x = y^{q^{c/2}+1}$. Autrement dit, x est un carré si et seulement si $q^{c/2}+1$ est un multiple de 4, ce qui est le cas si et seulement si q est congru à 3 modulo 4 et $c/2$ est impair.

D'autre part, on a $\varepsilon(-1)^{ce/4} = -1$ si et seulement si q est congru à 3 modulo 4 et $c/2$ est impair ; on en déduit :

$$\varepsilon'(A)^{e/2} = -\varepsilon(-1)^{ce/4},$$

d'où, puisque n' est pair et $n'-e$ est multiple de e :

$$\begin{aligned}\varepsilon'(A)^{n'(n'-1)/2} &= \varepsilon'(A)^{n'(e-1)/2}\\ &= \left(\varepsilon'(A)^{e/2}\right)^{(n'/e)(e-1)}\\ &= (-1)^{(n'/e)(e-1)}\,\varepsilon\,(-1)^{(n'/e)(ce/4)(e-1)}\\ &= (-1)^{(c-1)(e-1)n/ce}\,\varepsilon\,(-1)^{(n/ce)(c(c-1)/2)e(e-1)/2},\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $c-1$ est impair. D'après les cas précédents, cette dernière égalité reste vraie si on ne suppose plus c pair ni e pair ; on en déduit donc que quels que soient c et e, on a :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = (-1)^{(c-1)(e-1)n/ce}\,\varepsilon\,(-1)^{(c(c-1)/2)(e(e-1)/2)n/ce} \cdot \varepsilon'(\delta)^{n'(n'-1)/2}\,\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma_0).$$

On conclut en remarquant que :

$$(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d} = (-1)^{(c-1)(e-1)n/ce};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{a,b}_{G,1}\varepsilon^{0}_{G',1} &= \varepsilon\,(-1)^{(e(e-1)/2)(((n/e)(n/e-1)/2+n/e)-(ce(e-1)/2)((n/ce)(n/ce-1)/2+n/ce)}\\ &= \varepsilon\,(-1)^{(e(e-1)/2)(n/e)^2(c-1)/2}\\ &= \varepsilon\,(-1)^{(e(e-1)/2)(n/e)(c-1)/2}\\ &= \varepsilon\,(-1)^{(c(c-1)/2)(e(e-1)/2)n/ce},\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme dans le cas $a=0$ et $b=1$.

Supposons maintenant a et b quelconques. Soit $E_1,\dots,E_b$ (resp. $V_1,\dots,V_b$) les sous-espaces de F^n (resp. les sous-modules de $\mathcal{O}^n$) engendrés par respectivement $\left(e_1,\dots,e_{n/b}\right),\dots,\left(e_{(b-1)n/b+1},\dots,e_n\right)$; on a pour tout k, si $v\in V_1$:

$$\gamma^k(v) \in \varpi_F^{[(ka+b-1)/b]}\left(\sum_{i=1}^{i_k} V_i + \sum_{i=i_k+1}^{b} \varpi_F V_i\right),$$

avec :

$$i_k = 1-ka+\left[\frac{ka+b-1}{b}\right]b.$$

Soit $v_1\in V_1$ non nul ; puisque γ est elliptique régulier, dét $\left(v_1,\gamma v_1,\dots,\gamma^{n-1}v_1\right)$ est non nul. Soit, pour tous i,k, v_{ik} la projection de $\gamma^k(v_1)$ sur E_i suivant la somme des autres E_j ; on a :

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(v_1, \gamma\left(v_1\right), \ldots, \gamma^{n-1}\left(v_1\right)\right) &= \text{dét}\left(v_1, \sum_{i=1}^{b} v_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{b} v_{i,n-1}\right) \\ &= \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_{n-1}\leq b} \text{dét}\left(v_1, v_{j_1 1}, \ldots, v_{j_{n-1},n-1}\right).\end{aligned}$$

Les termes de la somme ci-dessus sont tous dans $\mathfrak{p}^{t_{a,b}}$, avec :

$$t_{a,b} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{ia+b-1}{b}\right];$$

de plus, seuls sont non nuls ceux pour lesquels, pour tout i, exactement n/b des j_k valent i, et parmi ceux-ci, tous sont dans $\mathfrak{p}^{t_{a,b}+1}$ sauf éventuellement celui tel que $j_k = i_k$ pour tout k. Notons x_γ ce dernier terme. Soient $g_1, \ldots, g_b$ les blocs diagonaux de $\zeta^{-na/b}\gamma$; posons pour tout $i \in \{1, \ldots, b\}$:

$$\gamma_i = g_{i+a} g_{i+2a} \cdots g_{i-a} g_i.$$

Pour tout i, si $w \in V_i$, la projection de $\varpi_F^{-a}\gamma^b(w)$ sur V_i suivant la somme des autres V_j est $\gamma_i(w)$; x_γ est donc congru modulo $\mathfrak{p}^{t_{a,b}+1}$ à :

$$d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}} \prod_{i=1}^{b} \text{dét}\left(v_i, \gamma_i\left(v_i\right), \ldots, \gamma_i^{n/b-1}\left(v_i\right)\right),$$

où :

$$d_{a,b} = \text{dét}\left(e_1, e_{-na/b+1}, \ldots, e_{-(b-1)na/b+1}, e_2, \ldots, e_{-(b-1)na/b+n/b}\right),$$

et où pour tout i, v_i est la projection sur E_i suivant la somme des E_j, $j \neq i$, de $\varpi^{-[(ka+b-1)/b]}\gamma^k v_1$, avec $k \in \{0, \ldots, b-1\}$ tel que $1 - ak$ est congru à i modulo b; c'est un élément de V_i. D'autre part, le déterminant sur E_i est pris par rapport à la base canonique.

De plus, on a pour tout k :

$$\gamma_{1-ak} = g_{1-a(k-1)} \cdots g_1 \gamma_1 g_1^{-1} \cdots g_{1-a(k-1)}^{-1};$$

de plus, si on identifie, pour tout i, E_i à $F^{n/b}$ de manière canonique, on a :

$$v_{1-ak} = g_{1-a(k-1)} \cdots g_1 v_1.$$

On en déduit que x_γ est congru modulo $\mathfrak{p}^{t_{a,b}+1}$ à :

$$\begin{aligned} d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}} &\left(\prod_{k=0}^{b-1} \text{dét}\left(g_{1-a(k-1)}\cdots g_1\right)\right)\left(\text{dét}\left(v_1,\gamma_1 v_1,\ldots,\gamma_1^{n/b-1}v_1\right)\right)^b \\ &= \text{dét}\left(g_1\right)^{-b} d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}} \left(\prod_{k=0}^{b-1} \text{dét}\left(g_{1-a(k-1)}\cdots g_1\right)\right) \\ &\qquad \cdot\left(\text{dét}\left(v_{1-a},\gamma_{1-a}v_{1-a},\ldots,\gamma_{1-a}^{n/b-1}v_{1-a}\right)\right)^b \end{aligned}$$

puisque $\gamma_{1-a} = g_1\gamma_1 g_1^{-1}$.

Soit F'' l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans F', soit $\mathcal{O}''$ son anneau des entiers, $\mathfrak{p}''$ l'idéal maximal de celui-ci. Quitte à imposer au plongement de G' dans G des hypothèses supplémentaires, on peut supposer que $g = \gamma_{1-a} = g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}$ est dans $GL_{n'}(\mathcal{O}'') \subset GL_{n/b}(F)$; il est alors congru à $\varpi_F^{-a}\gamma^b$ modulo $\mathfrak{p}'$ dans $GL_{n'}(\mathcal{O}')$, donc également modulo $\mathfrak{p}$ dans $GL_{n/b}(\mathcal{O})$; de plus, g est régulier. Enfin, on peut écrire :

$$g = \delta_g\gamma'_g,$$

où δ_g est un élément de $\mathcal{O}''$ congru à $\varpi_F^{-a}\delta^b$ modulo $\mathfrak{p}'$ et où γ'_g est congru à γ'^b modulo $\mathfrak{p}'$ dans $GL_{n'}(\mathcal{O}')$. On montre de la même façon que dans la démonstration du lemme 4.2.16 qu'il existe $k \in K_{G'}$ tel que $k^{-1}\gamma' k$ est congru à γ'^b, donc à γ'_g, modulo $\mathfrak{p}'$, et que k vérifie :

$$\text{dét}\,(k) \equiv b^{(d-1)n'/2}$$

modulo $\mathfrak{p}'$; de plus, on peut supposer $k \in GL_{n'}(\mathcal{O}'')$. L'élément kgk^{-1} est alors un élément de $GL_{n'}(\mathcal{O}'')$ congru modulo $\mathfrak{p}''$ à :

$$\begin{pmatrix} \delta_g & \delta_g & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_g \\ 0 & & & \delta_g \end{pmatrix}.$$

Soit donc $\gamma'' = \delta_g^{-1}kgk^{-1}$. C'est un élément régulier de $GL_{n'}(\mathcal{O}'')$ congru modulo $\mathfrak{p}'$ à γ' ; on peut alors appliquer le raisonnement du cas $a = 0$ et $b = 1$ (en remplaçant γ, γ', G, G' par $kgk^{-1}, \gamma'', GL_{n/b}(F), GL_{n'}(F'')$) pour obtenir, d'une part, grâce à l'égalité 8, en définissant $v \in \mathcal{O}^{n/b}$ de manière similaire :

$$\text{dét}\left(v, kgk^{-1}v, \ldots, kg^{n/b-1}k^{-1}v\right) \in \mathcal{O}^*,$$

et d'autre part (x_{δ_g} étant défini de manière similaire à x_δ, relativement au plongement de $GL_{n'}(F'')$ dans $GL_{n/b}(F)$ et en remplaçant ε par ε^b) :

$$\Delta_{\varepsilon^b,2,GL_{n/b}(F)}\left(kgk^{-1}\right) = (-1)^{n'(c-1)(d-1)/d} \cdot \varepsilon(-1)^{bl\left(w_{\eta_{1,GL_{n/b}(F)},\eta^{0,1}_{GL_{n/b}(F)}}\right)} x_{\delta_g}^{-1}\Delta_{\varepsilon'',2,GL_{n''}(F'')}\left(\gamma''\right),$$

avec :

$$\varepsilon'' = \varepsilon^b \circ N_{F''/F}.$$

On déduit de la première de ces deux égalités que l'on a :

$$\text{dét}\left(k^{-1}v, gk^{-1}v, \ldots, g^{n/b-1}k^{-1}v\right) \in \mathcal{O}^*.$$

Posons $v_1 = g_1^{-1}k^{-1}v$. C'est un élément de $\mathcal{O}^{n/b}$, donc en tant qu'élément de E_1, c'est un élément de V_1 ; de plus, on a $v_{1-a} = k^{-1}v$, donc d'après ce qui précède :

$$\varepsilon^{-1} \circ \text{dét}\left(v_1, \gamma(v_1), \ldots, \gamma^{n-1}(v_1)\right) = \varepsilon^b \circ \text{dét}(g_1)\,\varepsilon^{-1}\left(d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}}\right) \cdot \prod_{k=0}^{b-1} \varepsilon \circ \text{dét}\left(g_{1-a(k-1)}\cdots g_1\right)^{-1} \varepsilon^{-b}\left(\text{dét}\left(v_{1-a}, gv_{1-a}, \ldots, g^{n/b-1}v_{1-a}\right)\right).$$

On a, comme dans le lemme 4.2.17 :

$$\prod_{k=0}^{b-1} \varepsilon \circ \text{dét}\left(g_{1-a(k-1)}\cdots g_1\right) = \varepsilon^{b-1} \circ \text{dét}(g_1) \prod_{i=2}^{b} \varepsilon^{l(i)-1} \circ \text{dét}(g_i)$$
$$= \varepsilon^{-1} \circ \text{dét}(g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a})\,\varepsilon^b \circ \text{dét}(g_1)\, x^{-1}_{\varpi_F^{-a}\delta^b} x_\delta.$$

Il est clair d'après les définitions que l'on a :

$$x_{\varpi_F^{-a}\delta^b} = x_{\delta_g};$$

d'autre part :

$$\varepsilon \circ \text{dét}_{GL_{n/b}(F)}(g_1 g_{1+a}\cdots g_{1-a}) = \varepsilon \circ \text{dét}_G\left(\zeta^{-na/b}\gamma\right) = \varepsilon \circ \text{dét}_G\left(\zeta^{-na/b}\right).$$

Posons :

$$d'_{a,b} = \text{dét}\left(e_1, e_{-na/b+1}, \ldots, e_{-(b-1)na/b+1}, e_2, \ldots, e_{-(b-1)na/b+n/b}\right) \cdot (-1)^{(n-1)na/b};$$

$$t'_{a,b} = \sum_{i=1}^{n} [(ia + b - 1)/b].$$

On a :

$$\begin{aligned} d'_{a,b}\varpi_F^{t'_{a,b}} &= (-1)^{(n-1)na/b}\, \varpi_F^{na/b} d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}} \\ &= \mathrm{dét}_G\left(\zeta^{na/b}\right) d_{a,b}\varpi_F^{t_{a,b}}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) &= \varepsilon^{-1}\left(d'_{a,b}\varpi_F^{t'_{a,b}}\right) x_\delta^{-1} x_{\delta_g} \Delta_{\varepsilon^b,2,GL_{n/b}(F)}(g) \\ &= \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, \Delta_{\varepsilon^b,2,GL_{n/b}(F)}\left(kgk^{-1}\right); \\ \Delta_{\varepsilon',2,G'}\left(\gamma'\right) &= \Delta_{\varepsilon'',2,GL_{n'}(F'')}\left(\gamma''\right); \end{aligned}$$

en effet, on vérifie que la restriction à F'' de ε' est égale à ε'' ; d'autre part, pour $v' \in \mathcal{O}''^{n'} \subset F''^{n'} \subset F'^{n'}$ convenable :

$$\mathrm{dét}\left(v', \gamma'' v', \dots, \gamma''^{n'-1} v'\right)$$

est un élément de $\mathcal{O}''^*$ congru modulo $\mathfrak{p}'$ à :

$$\mathrm{dét}\left(v', \gamma' v', \dots, \gamma''^{n'-1} v'\right).$$

Il reste donc à montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}\left(d'_{a,b}\varpi_F^{t'_{a,b}}\right) &= (-1)^{(m^2ea/b)(f-1)} \\ &\quad \cdot \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{1,G}}\right) - bl\left(w_{\eta_{1,GL_{n/b}(F)},\eta^{0,1}_{GL_{n/b}(F)}}\right) + n(b+1)/2} c_{a,b}, \end{aligned}$$

Montrons donc cette dernière égalité. Rappelons que l'on a :

$$\begin{aligned} c_{a,b} &= \prod_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i} \circ \mathrm{dét}\left(\zeta_{n/e}^{nk_i/db}\right) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i}\left(\left(-1\right)^{n/e-1}\varpi\right)^{nk_i/db}\right), \end{aligned}$$

avec pour tout i, si $b' = \mathrm{pgcd}(b, e)$:

$$k_i = \left[\frac{ia}{b'}\right] - \left[\frac{(i-1)a}{b'}\right].$$

Écrivons d'abord $c_{a,b} = c'_{a,b}c''_{a,b}$, avec :

$$c'_{a,b} = \prod_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i}\left(\varpi^{nk_i/db}\right);$$
$$c''_{a,b} = \prod_{i=0}^{e-1} \varepsilon^{-i}\left((-1)^{(n/e-1)nk_i/db}\right).$$

On va montrer que l'on a :

$$(9) \quad \varepsilon\left(\varpi_F^{t'_{a,b}}\right) = (-1)^{(m^2ea/b)(f-1)}\, {c'_{a,b}}^{-1};$$

$$(10) \quad \varepsilon\left(d'_{a,b}\right) = \varepsilon\,(-1)^{l\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{1,G}}\right)-bl\left(w_{\eta_{1,GL_{n/b}(F)},\eta^{0,1}_{GL_{n/b}(F)}}\right)+n(b+1)/2}\, {c''_{a,b}}^{-1}.$$

Montrons d'abord (9). On a :

$$\begin{aligned}
t'_{a,b} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{ia+b-1}{b}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\left[\frac{ia+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(i+1)\,a+b-1}{b}\right]\right)+n\left[\frac{na+b-1}{b}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{e-1} i\left(\sum_{j=0}^{n/e-1}\left(\left[\frac{(je+i)\,a+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(je+i+1)\,a+b-1}{b}\right]\right)\right) \\
&\quad + e\sum_{j=1}^{n/e-1} j\left(\left[\frac{jea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(j+1)\,ea+b-1}{b}\right]\right)+n\left[\frac{na+b-1}{b}\right].
\end{aligned}$$

Or n est multiple de ef ; d'autre part, pour tout i, on a :

$$\sum_{j=0}^{n/e-1}\left(\left[\frac{(je+i+1)\,a+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(je+i)\,a+b-1}{b}\right]\right) = k_{e-i}\frac{n}{db};$$

en effet, quitte à remplacer a par $a+kb$ avec k convenable, ce qui revient à ajouter kn/e aux deux membres de l'égalité, on peut supposer que $1 \leq a \leq b$. Le membre de gauche k' de l'égalité ci-dessus est alors égal au nombre d'éléments divisibles par b dans la réunion des intervalles :

$$\{(je+i)\,a+b,\ldots,(je+i+1)\,a+b-1\}$$

pour j allant de 0 à $n/e-1$, qui est lui-même égal au nombre d'éléments divisibles par b dans la réunion des intervalles :

$$\{(-je-i-1)\,a+1,\ldots,(-je-i)\,a\}$$

(qui sont les opposés des intervalles précédents, plus b). Or on a $\operatorname{ppcm}(b,e)=le$, et $n/e=(n/db)l$; k' est donc égal à n/db fois le nombre d'éléments divisibles par b dans la réunion des intervalles :

$$\{(-je-i-1)\,a+1,\ldots,(-je-i)\,a\}$$

pour j allant de 0 à $l-1$. Or pour $r\in\{-a\,(i+1)+1,\ldots,-ai\}$ donné, il existe j tel que $r-je$ est divisible par b si et seulement si r est divisible par b', et un tel j est alors unique dans $\{0,\ldots,l-1\}$; on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned}
k' &= \frac{n}{db}\left(\left[\frac{-ia}{b'}\right]-\left[\frac{-(i+1)\,a}{b'}\right]\right)\\
&= \frac{n}{db}\left(\left[\frac{(e-i)\,a}{b'}\right]-\left[\frac{(e-i-1)\,a}{b'}\right]\right)\\
&= \frac{n}{db}k_{e-i},
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\varpi^{\sum_{i=1}^{e-1} i\left(\sum_{j=0}^{n/e-1}([((je+i)a+b-1)/b]-[((je+i+1)a+b-1)/b])\right)}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{e-1}\varepsilon^{i}\left(\varpi^{-nk_{e-i}/db}\right)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{e-1}\varepsilon^{-i}\left(\varpi^{-nk_i/db}\right)\right)\varepsilon^{e}\left(\varpi^{(n/db)\sum_{i=1}^{e-1}k_i}\right).
\end{aligned}$$

Le second terme de l'expression ci-dessus est nul car en/db est multiple de ef ; elle vaut donc ${c'_{a,b}}^{-1}$. Montrons maintenant que l'on a :

$$\varepsilon\left(\varpi^{e\sum_{j=1}^{n/e} j([(jea+b-1)/b]-[((j+1)ea+b-1)/b])}\right)=(-1)^{m^2ea(f-1)/b}.$$

(pour simplifier les calculs, on rajoute un terme $j=n/e$ dans la somme en exposant, qui ne change pas la valeur de l'expression puisque $\varepsilon^{-1}\left(\varpi^{en/e}\right)=1$). En effet, mea/b est entier, donc on a pour tout $j=km+k'$:

$$\left[\frac{jea+b-1}{b}\right]=\frac{kmea}{b}+\left[\frac{k'ea+b-1}{b}\right],$$

d'où :

$$\left[\frac{jea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(j+1)\,ea+b-1}{b}\right]$$
$$=\left[\frac{k'ea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(k'+1)\,ea+b-1}{b}\right].$$

On en déduit :

$$\sum_{j=1}^{n/e} j\left(\left[\frac{jea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(j+1)\,ea+b-1}{b}\right]\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{f-1}\sum_{k'=1}^{m}(km+k')\left(\left[\frac{k'ea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(k'+1)\,ea+b-1}{b}\right]\right)$$
$$=f\sum_{k'=1}^{m}k'\left(\left[\frac{k'ea+b-1}{b}\right]-\left[\frac{(k'+1)\,ea+b-1}{b}\right]\right)+\sum_{k=0}^{f-1}km\frac{mea}{b}.$$

On a bien évidemment :

$$\varepsilon^{-1}\left(\varpi^{ef\sum_{k'=1}^{m}([(k'ea+b-1)/b]-[((k'+1)ea+b-1)/b])}\right)=1$$

puisque ε est d'ordre ef ; d'autre part, on a :

$$\sum_{k=0}^{f-1}km\frac{mea}{b}=\frac{m^2ea}{b}\frac{f\,(f-1)}{2},$$

et :

$$\varepsilon^{-1}\left(\varpi^{e\left(m^2ea/b\right)f(f-1)/2}\right)=(-1)^{m^2ea(f-1)/b},$$

ce qui achève la démonstration de (9).

Montrons maintenant (10). Cette égalité est triviale si e est impair ; on supposera donc e pair. On remarque d'abord que l'on a $d_{a,b}=(-1)^{l(w_0)}$, où w_0 est l'élément de W tel que l'on a (modulo n) $w_0\,(1)=1$, $w_0\,(2)=-na/b+1,\ldots$ $w_0\,(b+1)=2$, etc. Soit donc w_1 l'élément de W qui envoie $1,2,\ldots,n$ sur $1,b+1,\ldots,n-b+1,2,b+2,\ldots$; on a :

$$l\,(w_1)=\frac{b\,(b-1)}{2}\frac{n/b\,(n/b-1)}{2},$$

et w_0w_1 envoie (modulo n) $1,2,\ldots,n$ sur $1,2,\ldots,n/b,-na/b+1,\ldots$. Donc $l\,(w_0w_1)$ est égale à $(n/b)^2$ fois la longueur de l'élément u de W_b tel que pour tout $i\in\{1,\ldots b\}$, $u\,(i)$ est congru modulo b à $1-a\,(i-1)$.

D'autre part, soit ϵ l'application de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{0,\ldots,e-1\}$ associée à $\eta_G^{a,b}$; on a, modulo e :

$$(\epsilon(1),\ldots,\epsilon(n)) =$$
$$(-b,\ldots,-b,-2b,\ldots,-2b,\ldots,-db,l(2)-b,\ldots,l(2)-b,\ldots,l(b)-db),$$

chaque terme étant répété n/db fois. Soit w_2 l'élément de W qui envoie (modulo n) $1,2,\ldots,n$ sur $1,2,\ldots,n/b,na/b+1,\ldots$. De même que précédemment, $l(w_2)$ est égale à $(n/b)^2$ fois la longueur de l'élément v de W_b tel que pour tout $i\in\{1,\ldots b\}$, $w_{2,b}(i)$ est congru modulo b à $1+a(i-1)$; de plus, pour tout i, $uv^{-1}(i)$ est congru à $2-i$ modulo b, donc $l\left(uv^{-1}\right)$ est congru modulo 2 à $(b-1)(b-2)/2$. D'autre part, soit $\epsilon_2=\epsilon\circ w_2$; on a, modulo e :

$$(\epsilon_2(1),\ldots,\epsilon_2(n))$$
$$=(-b,\ldots,-b,-2b,\ldots,-2b,\ldots,-db,1-b,\ldots,1-b,\ldots,b-1-db).$$

Si $\eta_2=w_2^{-1}\left(\eta_G^{a,b}\right)$, on a $w_2=w_{\eta_G^{a,b},\eta_2}x$, avec $x\in W_{\eta_2}$. Calculons $l(x)$. Soit $(x_0,\ldots,x_{e-1})$ l'image de x par l'application canonique de W_{η_2} dans $\left(W_{n/e}\right)^e$; on a, modulo n/e, pour tout i et pour tout $k\in\{1,\ldots,n/db\}$:

$$x_i\left(k+\frac{n}{db}\left(\left[\frac{ia}{b'}\right]-a\left[\frac{i}{b'}\right]\right)\right)=k,$$
$$x_i\left(k+\frac{n}{db}\left(a+\left[\frac{ia}{b'}\right]-a\left[\frac{i}{b'}\right]\right)\right)=\frac{n}{db}+k,$$

etc. On en déduit, modulo 2 :

$$l(x_i)\equiv\frac{n}{db}\left((l-1)\left(\left[\frac{ia}{b'}\right]-a\left[\frac{i}{b'}\right]+l(x_{a,l})\right)\right),$$

où $x_{a,l}$ est l'élément de W_l tel que $x_{a,l}(j)$ est congru à aj modulo l. On en déduit (puisque e est pair) que $l(x)$ est congru modulo 2 à :

$$\frac{n}{db}(l-1)\sum_{i=0}^{e-1}\left(\left[\frac{ia}{b'}\right]-a\left[\frac{i}{b'}\right]\right).$$

On remarque que $n/db\left(\frac{n}{e}-l\right)=l\frac{n}{db}\left(\frac{n}{db}-1\right)$ est toujours pair ; d'autre part, on a :

$$\frac{n}{db}(l-1)\sum_{i=0}^{e-1}[ib']=\frac{n}{db}(l-1)\,b'\frac{d(d-1)}{2}.$$

Or l et d sont premiers entre eux, donc ne peuvent pas être pairs simultanément, donc $(l-1)(d-1)/2$ est entier ; l'expression ci-dessus est donc un multiple de $db' = e$. On en déduit que $l(x)$ est congrue modulo 2 à :

$$\frac{n}{db}\left(\frac{n}{e}-1\right)\left(\sum_{i=0}^{e-1}(-i)\left(\left[\frac{ia}{b'}\right]-\left[\frac{i-1a}{b'}\right]\right)+e\left[\frac{(e-1)\,a}{b'}\right]\right).$$

Or on a pour tout i :

$$\left[\frac{ia}{b'}\right]-\left[\frac{(i-1)\,a}{b'}\right]=k_i.$$

On en déduit que $l(x)$ est congru modulo 2 à :

$$-\frac{n}{db}\left(\frac{n}{e}-1\right)\sum_{i=0}^{e-1}ik_i,$$

soit :

$$\varepsilon\,(-1)^{l(x)}=c''_{a,b}{}^{-1}.$$

Soit ensuite w_3 l'élément de W qui conserve les intervalles de longueur n/b, inverse l'ordre des intervalles de longueur n/db à l'intérieur de ceux-ci et est croissant sur chacun de ces derniers ; on a :

$$l(w_3)=b\left(\frac{n}{db}\right)^2\frac{d\,(d-1)}{2}$$

qui est congru modulo 2 à :

$$b\frac{n}{db}\frac{d\,(d-1)}{2}.$$

d'autre part, si $\epsilon_3=\epsilon_2\circ w_3$, on a, modulo n :

$$\begin{aligned}&(\epsilon_3(1),\dots,\epsilon_3(n))\\&\quad=(0,\dots,0,b,\dots,b,\dots,(d-1)\,b,1,\dots,1,\dots,b-1+(d-1)\,b),\end{aligned}$$

et si $\eta_3=w_3^{-1}(\eta_2)$, $w_3=w_{\eta_2,\eta_3}$. Soit ensuite w_4 l'élément de W qui conserve les intervalles de longueur n/b, envoie $1,\dots,n/b$ sur $1,(n/db)+1,\dots,(d-1)\,n/db+1,2,(n/db)+2,\dots$ et agit de même sur les autres intervalles ; on a :

$$l(w_4)=b\frac{d\,(d-1)}{2}\frac{(n/db)\,(n/db-1)}{2};$$

d'autre part, si $\epsilon_4=\epsilon_3\circ w_4$, on a, modulo n :

$$\begin{aligned}&(\epsilon_4(1),\dots,\epsilon_4(n))\\&=(0,b,\dots,(d-1)\,b,0,b,\dots,(d-1)\,b,\dots,1,1+b,\dots,1+(d-1)\,b,\dots),\end{aligned}$$

et si $\eta_4=w_4^{-1}(\eta_3)$, $w_4=w_{\eta_3,\eta_4}$. Enfin, on a $\epsilon_{1,G}=\epsilon_4\circ w_1^{-1}$, donc $w_1^{-1}=w_{\eta_4,\eta_{1,G}}y$, avec $y\in W_{\eta_{1,G}}$. Calculons $l(y)$. Soit $(y_0,\dots,y_{e-1})$ l'image de y par l'application canonique de $W_{\eta_{1,G}}$ dans $\left(W_{n/e}\right)^e$; pour tout i, on a pour tout $k\in$

$\{1, \ldots, n/db\}$ et pour tout $k' \in \{0, \ldots, l-1\}$, $y_i(k + k'(n/db)) = t + (k-1)l$, où t est l'élément de $\{1, \ldots, l\}$ tel que $[i/b'] + (t-1)d$ est congru à k' modulo l. On en déduit, de même que pour x, que $l(y)$ est congru modulo e à :

$$\sum_{i=0}^{e-1} \frac{n}{db}(l-1)\left[\frac{i}{b'}\right] = \frac{n}{db}(l-1)\,b'\frac{d(d-1)}{2}.$$

Or on a vu que l'expression ci-dessus est un multiple de $db' = e$; on a donc finalement :

$$\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{1,G}}\right)} = \varepsilon(-1)^{l(w_1 w_2 w_3 w_4 x)}.$$

Soient $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, x'$ les éléments de $W_{n/b}$ définis de manière similaire en remplaçant G par $GL_{n/b}(F)$, $\eta_G^{a,b}$ par $\eta^{0,1}_{GL_{n/b}(F)}$ et $\eta_{1,G}$ par $\eta_{1,GL_{n/b}(F)}$. Les éléments w'_1, w'_2 et x' sont triviaux, et on a, modulo 2 :

$$l(w'_3) \equiv \frac{d(d-1)}{2}\frac{n}{db};$$
$$l(w'_4) \equiv \frac{d(d-1)}{2}\frac{(n/db)(n/db-1)}{2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_G^{a,b},\eta_{1,G}}\right)-bl\left(w_{\eta_{1,GL_{n/b}(F)},\eta^{0,1}_{GL_{n/b}(F)}}\right)} &= \varepsilon(-1)^{l(w_1)+l(w_2)+l(x)}\\ &= \varepsilon\left((-1)^{l(w_0w_1)+l(w_2)}\,d_{a,b}\right){c''_{a,b}}^{-1}.\end{aligned}$$

Pour montrer (10), il suffit de vérifier que $l(w_0w_1) + l(w_2)$ est congru modulo 2 à $(n(b+1)/2) + (n-1)(na/b)$. Cette expression est un multiple de n/b, de même que $l(w_0w_1)$ et $l(w_2)$; donc si n/b est pair, l'assertion est triviale. Supposons donc n/b impair ; alors puisque e est pair, n aussi, donc b aussi. Puisque a et b sont premiers entre eux, a est impair, donc $(n(b+1)/2) + (n-1)(na/b)$ est congru modulo 2 à :

$$\frac{n}{b}\frac{b(b+1)}{2} + \frac{n}{b} = \frac{n}{b}\frac{b^2+b+2}{2}$$

qui est lui-même congru modulo 2 à :

$$\frac{b^2-3b+2}{2} = \frac{(b-1)(b-2)}{2}.$$

Or d'après ce qui précède, cette expression est congrue modulo 2 à la longueur de uv^{-1}, qui est elle-même congrue modulo 2 (puisque n/b est impair) à :

$$l(w_0w_1) + l(w_2).$$

Donc (10) est démontrée, ce qui achève la démonstration du lemme. □

4.3. Deuxième relation de récurrence

La relation de récurrence démontrée dans la partie précédente ne suffit pas : en effet, il y a des cas où $F' = F$. Supposons donc que $n > 1$, et que γ est congru à 1 modulo l'idéal maximal de $F(\gamma)$. On peut alors trouver $\gamma_0 \in F^*$ et $\delta, \gamma' \in F(\gamma)^*$ tels que l'on ait :

- $\gamma = \gamma_0 (1 + \delta\gamma')$;
- γ_0 (resp. γ') est congru à 1 modulo l'idéal maximal de F (resp. $F(\gamma)$) ;
- si $F' = F(\delta)$, F' est strictement plus grand que F et δ est F'/F-cuspidal.

Là encore, F' est uniquement déterminé ; soit donc b son indice de ramification. Posons également $a = \nu_{F'}(\delta)$; a est uniquement déterminé aussi. Soit également $\gamma'' = \delta\gamma'$.

PROPOSITION 4.3.1. — *Supposons $n > 1$. Soit $\gamma'' \in I^1_{G'}$, $\delta \in F'^*$, F'/F-cuspidal et de valuation strictement positive, et $\gamma_0 \in 1 + \mathfrak{p} \subset F^*$, et posons $\gamma' = \delta\gamma''$, $\gamma = \gamma_0 (1 + \gamma')$. Supposons de plus que γ est un élément semi-simple régulier de G^H. Soit $\alpha \in \mathcal{P}(n/e)$; alors on a :*

$$I^\varepsilon_G \left(f^0_\alpha, \gamma\right) = I^\varepsilon_G \left(1_{na/b}\mathfrak{f}_\alpha, \gamma'\right),$$

où $a = \nu_{F'}(\delta)$.

Démonstration. — En effet, il est clair d'après la définition de $\mathfrak{f}_\alpha$ que l'on a, pour tout $g \in G$:

$$\mathfrak{f}_\alpha(g) = \mathfrak{f}_\alpha(1 + g).$$

D'où l'on déduit, pour tout $g \in G$, et pour $\eta \in \mathcal{E}$ convenable :

$$\mathfrak{f}_\alpha\left(g^{-1}\gamma g\right) = \mathfrak{f}_\alpha\left(\gamma_0 g^{-1}\left(1 + \gamma'\right) g\right) = \eta(\gamma_0)\, \mathfrak{f}_\alpha\left(g^{-1}\gamma' g\right).$$

Or il est clair que $\eta(\gamma_0) = 1$; de plus, pour tout $g \in G$, $\nu \circ \text{dét}\left(g^{-1}\gamma' g\right) = \nu \circ \text{dét}(\gamma') = na/b$. On en déduit :

$$\mathfrak{f}_\alpha\left(g^{-1}\gamma g\right) = \left(1_{na/b}\mathfrak{f}_\alpha\right)\left(g^{-1}\gamma' g\right).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout g, $\nu \circ \text{dét}\left(g^{-1}\gamma g\right) = 0$, et que $1_0\mathfrak{f}_\alpha = f^0_\alpha$. □

On en déduit la relation suivante :

PROPOSITION 4.3.2. — *On a, avec les notations de la proposition 3.4.2 :*

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m)} s^\varepsilon_\lambda(\gamma)\, y_\lambda = q^{n(vf-1)/2} \sum_{\lambda' \in \mathcal{P}^0(m/l)} (-1)^{m - t(\lambda')} s^\varepsilon_{\lambda'}(\gamma'')\, x_m \left(\frac{vl}{m}\lambda, q^f\right).$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.2.18, en utilisant cette fois les propositions 3.4.2 et 4.3.1 et le lemme 2.4.3 au lieu des propositions 3.3.1 et 4.2.2 et du lemme 2.4.1. □

On a également la relation de récurrence suivante sur les facteurs de transfert :

LEMME 4.3.3. — *Soit γ_H (resp. γ''_H) une image de γ (resp. γ'') dans H. On a l'égalité suivante :*

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H) = q^{-(n-m)na/2b}\Delta_{\varepsilon,G}\left(\gamma'',\gamma''_H\right).$$

Démonstration. — Puisque γ'' est elliptique, l'égalité ci-dessus ne dépend pas du choix de γ''_H ; on peut donc supposer $\gamma''_H = \gamma_0^{-1}\gamma_H - 1$. On a pour tous $\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$, $r(\sigma(\gamma_H),\tau(\gamma_H)) = r(\sigma(\gamma''_H),\tau(\gamma''_H))$, et $|\mathrm{dét}_G(\gamma'')|_F = q^{-na/b}|\mathrm{dét}_G(\gamma)|_F$. On en déduit :

$$\Delta_{\varepsilon,1,G}(\gamma,\gamma_H) = q^{-(n-m)na/2b}\Delta_{\varepsilon,1,G}\left(\gamma'',\gamma''_H\right).$$

D'autre part, on a pour tout $v \in F^n$ et tout entier k, puisque $\gamma = \gamma_0(1+\gamma'')$:

$$\gamma^k(v) = \gamma_0^k\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\gamma''^i(v)\right).$$

On en déduit :

$$\mathrm{dét}\left(v,\gamma(v),\ldots,\gamma^{n-1}v\right) = \gamma_0^{n(n-1)/2}\,\mathrm{dét}\left(v,\gamma''(v),\ldots,\gamma''^{n-1}v\right).$$

Or $\gamma_0 \in 1+\mathfrak{p}$, donc $\varepsilon(\gamma_0) = 1$; on en déduit :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = \Delta_{\varepsilon,2,G}\left(\gamma''\right),$$

ce qui achève la démonstration. □

CHAPITRE 5

LE TRANSFERT

5.1. Facteurs de transfert

Soit $\gamma \in G^H$ compact ; on supposera $F(\gamma)/F$ modérément ramifiée. Fixons une image γ_H de γ dans H. Soit $v = \nu \circ \text{dét}_H(\gamma_H)$; définissons l, a, b comme dans 3.3. Notons, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, $s^{\varepsilon}_{\lambda,G}$ le germe noté $s^{\varepsilon}_{\lambda}$ précédemment. On peut également appliquer la proposition 4.1.1 à H ; on obtient des germes $s_{\lambda,H}$, $\lambda \in \mathcal{P}(m/l)$.

PROPOSITION 5.1.1. — *On a pour tout* $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$:

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H)\, s^{\varepsilon}_{\lambda,G}(\gamma) = \varepsilon\,(-1)^{l_G\left(w_{\eta_{0,G},\eta_{1,G}}\right)+n(e-1)/2}\, s_{\lambda,H}(\gamma_H).$$

Démonstration. — Supposons d'abord γ elliptique ; on va montrer la proposition par récurrence sur n, en utilisant les formules des propositions 4.2.18 et 4.3.2.

- Si $n = 1$, on a alors $E = F$, $G = H = F^*$ et $\varepsilon = 1$; on en déduit en particulier que $\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H) = 1$. Donc l'assertion est triviale.
- Cas 1 : supposons $n > 1$. Définissons γ', G', H', m', ε', a, b comme dans 4.2, et fixons $\gamma'_{H'}$. Supposons que pour tout $\lambda' \in \mathcal{P}^0(m')$, on ait :

$$\Delta_{\varepsilon',G'}\left(\gamma',\gamma'_{H'}\right) s^{\varepsilon'}_{\lambda',G'}\left(\gamma'\right) = \varepsilon'\,(-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta_{0,G'},\eta_{1,G'}}\right)+n'(d-1)/2}\, s_{\lambda',H'}\left(\gamma'_{H'}\right).$$

Posons :

$$A_1 = c_{a,b}\,(-1)^{(m-1/f)na/b} \sum_{\lambda\in\mathcal{P}^0(m/l)} \varepsilon^{a,b}_G\, s^{\varepsilon}_{\lambda,G}(\gamma)\, y_\lambda;$$

$$A_2 = (-1)^{n'(c-1)(d-1)/d}\, \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta \tau_{c'} \left(\sum_{\lambda'\in\mathcal{P}^0(m')} \varepsilon^0_{G'}\, s^{\varepsilon'}_{\lambda',G'}\left(\gamma'\right) y_{\lambda'}\right);$$

$$B_1 = (-1)^{(m-1)mea/b} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} s^{\varepsilon}_{\lambda,H}(\gamma_H)\, y_\lambda;$$

$$B_2 = \tau_{c'}\left(\sum_{\lambda' \in \mathcal{P}^0(m')} s^{\varepsilon'}_{\lambda',H'}(\gamma_{H'})\, y_{\lambda'}\right).$$

On a $A_1 = A_2$ d'après la proposition 4.2.18, $B_1 = B_2$ d'après cette même proposition appliquée au cas $E = F$, et :

$$(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d} \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta^{-1} \Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma', \gamma'_{H'})\, A_2 = \varepsilon' (-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta^{0,1}_{G'},\eta_{1,G'}}\right)+n'(d-1)/2} B_2$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. On en déduit :

$$(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d} \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta^{-1} \Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma', \gamma'_{H'})\, A_1 = \varepsilon' (-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta^{0,1}_{G'},\eta_{1,G'}}\right)+n'(d-1)/2} B_1,$$

d'où, puisque les y_λ sont linéairement indépendants, pour tout λ :

$$(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d} \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta^{-1} \Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma', \gamma'_{H'})\, c_{a,b}(-1)^{(m-1/f)na/b} \varepsilon^{a,b}_G s^{\varepsilon}_{\lambda,G}(\gamma) = \varepsilon' (-1)^{l_{G'}\left(w_{\eta^{0,1}_{G'},\eta_{1,G'}}\right)+n'(d-1)/2} (-1)^{(m-1)mea/b} s_{\lambda,H}(\gamma).$$

Or on a :

$$\left(m - \frac{1}{f}\right)\frac{na}{b} - (m-1)\frac{mea}{b} = \frac{\left(mn - m^2 e\right)a}{b} = \frac{m^2 ea}{b}(f-1);$$

d'autre part, on a d'après le lemme 4.2.20 :

$$(-1)^{n'(c-1)(d-1)/d + m^2 ea(f-1)/b} \varepsilon'^{(d-1)n'/2}(b)\, x_\delta^{-1} c_{a,b} \varepsilon^{a,b}_{G,1} \varepsilon^{0}_{G',1} \varepsilon (-1)^{n(b+1)/2} \Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma', \gamma'_{H'}) = \Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H);$$

de plus :

$$\varepsilon (-1)^{l_G\left(w_{\eta^{a,b}_G,\eta_{1,G}}\right)} \varepsilon^{a,b}_G = \varepsilon (-1)^{l_G\left(w_{\eta_{0,G},\eta_{1,G}}\right)}.$$

Pour montrer l'égalité de la proposition, il suffit donc de vérifier que l'on a :

$$\varepsilon (-1)^{n(e-1)/2} = \varepsilon' (-1)^{n'(d-1)/2} \varepsilon (-1)^{n(b+1)/2}.$$

Cette égalité est triviale si e est impair, car on a alors $\varepsilon(-1) = \varepsilon'(-1) = 1$; supposons donc e pair. On a $\varepsilon'(-1) = \varepsilon\left(N_{F'/F}(-1)\right) = \varepsilon(-1)^{bc}$; d'autre part :

$$\frac{n(e-1)}{2} - bc\frac{n'(d-1)}{2} = \frac{n(e-d)}{2} = \frac{nd(b'-1)}{2};$$

de plus, puisque e est pair, d'une part b et $b' = \operatorname{pgcd}(b,e)$ ont même parité, et d'autre part n est pair ; on en déduit que $n(b+1)/2$ est congru modulo 2 à :

$$\frac{n}{2}\left(b'+1\right) - n = \frac{n(b'-1)}{2};$$

enfin, on a, puisque n est un multiple de $db' = e$:

$$\frac{nd(b'-1)}{2} - \frac{n(b'-1)}{2} = \frac{n(d-1)(b'-1)}{2} = 2\frac{n}{e}\frac{d(d-1)}{2}\frac{b'(b'-1)}{2},$$

qui est pair, ce qui achève la démonstration.

– Cas 2 : supposons toujours $n > 1$, mais γ congru à 1 modulo l'idéal maximal de $F(\gamma)$. Définissons γ'', γ''_H comme dans 4.3, et supposons que pour tout $\lambda'' \in \mathcal{P}(m/l)$, on ait :

$$\Delta_{\varepsilon,G}\left(\gamma'',\gamma''_H\right) s^{\varepsilon}_{\lambda'',G}\left(\gamma''\right) = \varepsilon(-1)^{l_G\left(w_{\eta_{0,G},\eta_{1,G}}\right)+n(e-1)/2} s_{\lambda'',H}\left(\gamma''_H\right).$$

Un raisonnement exactement similaire au précédent, en utilisant cette fois la proposition 4.3.2 et le lemme 4.3.3, donne l'égalité de la proposition.

Pour montrer que ce raisonnement par récurrence suffit à démontrer la proposition dans le cas γ elliptique, le cas $n = 1$ étant trivial, il faut vérifier que si $n > 1$, on peut toujours se ramener à un n plus petit. En effet, appliquons d'abord le cas 1 à γ. Si F' est strictement plus grand que F, c'est gagné. Sinon, on obtient un élément γ' de F, congru à 1 modulo l'idéal maximal de $F(\gamma')$, auquel on peut donc appliquer le cas 2. On obtient ainsi un élément γ'' de F, qui, si on lui applique le cas 1, donne un corps F' strictement plus grand que F. Donc l'assertion de la proposition est démontrée.

Supposons maintenant γ quelconque. On déduit de la proposition 4.1.1 que pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, on a :

$$s^{\varepsilon}_{\lambda}\left(g^{-1}\gamma g\right) = \varepsilon \circ \operatorname{dét}(g)^{-1} s^{\varepsilon}_{\lambda}(\gamma).$$

L'égalité de l'énoncé ne change donc pas si on conjugue γ par un élément de G et γ_H par un élément de H ; on peut donc supposer qu'il existe $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_t) \in \mathcal{P}(m)$ telle que $\gamma_H = (\gamma_{H,1},\dots,\gamma_{H,t})$ est dans $M_H(\mu)$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_t)$ est dans $M_G(ef\mu)$, et pour tout i, γ_i est un élément elliptique régulier de $GL_{ef\mu_i}(F)$; de plus, on a, puisque γ est compact, pour tout i :

$$\nu_E \circ \operatorname{dét}_H(\gamma_i) = \frac{\mu_i}{m}v,$$

d'où :

$$\frac{\mu_i}{\operatorname{pgcd}\left(\mu_i, \nu_E \circ \operatorname{dét}_H\left(\gamma_i\right)\right)}=\frac{m}{\operatorname{pgcd}(m, v)}=l.$$

Posons :

$$\Delta_G(\gamma)=\left|\prod_{i \neq j}\left(c_i-c_j\right)\right|_F^{1/2}\left|\operatorname{dét}_G(\gamma)\right|_F^{(1-n)/2},$$

où $c_1, \ldots, c_n$ sont les valeurs propres de γ en tant qu'élément de G dans une extension de F les contenant toutes. Posons $P_G=M_G U_G=P_G(ef\mu)$, $P_H= M_H U_H=P_H(\mu)$. On a alors pour tout $\mathfrak{f} \in C_c^{\infty}(G)$:

$$\Delta_G(\gamma) I_G^{\varepsilon}(\mathfrak{f}, \gamma)=\Delta_{M_G}(\gamma) I_{M_G}^{\varepsilon}\left(\mathfrak{f}^{P_G, \varepsilon}, \gamma\right),$$

soit, d'après la proposition 4.1.1 :

$$\begin{aligned}
\Delta_G(\gamma) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} & s_\lambda^{\varepsilon}(\gamma) \operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon}\left(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}\right) \\
& =\Delta_{M_G}(\gamma) \\
\cdot \sum_{\lambda_{(i)} \in \mathcal{P}^0\left(\mu_i/l\right), i=1, \ldots, t} & \left(\prod_{i=1}^t s_{\lambda_{(i)}}^{\varepsilon}\left(\gamma_i\right)\right) \operatorname{tr}\left(\bigotimes_{i=1}^t A_{l\lambda_{(i)}}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda_{(i)}}^{\varepsilon}\right)\left(\left(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}\right)^{P, \varepsilon}\right);
\end{aligned}$$

Or on a, pour tous $\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}$, si λ est l'unique élément de $\mathcal{P}^0(m/l)$ égal à $\left(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}\right)$ à permutation des termes près :

$$\operatorname{tr} A_{l\lambda}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda}^{\varepsilon}\left(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}\right)=\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{l\lambda}, \eta_{0, G}}\right)} \operatorname{tr}\left(\bigotimes_{i=1}^t A_{l\lambda_{(i)}}^{\varepsilon} \circ \operatorname{St}_{l\lambda_{(i)}}^{\varepsilon}\right)\left(\left(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}\right)^{P, \varepsilon}\right);$$

on en déduit, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, si $\mathcal{P}_\lambda$ est l'ensemble des $\left(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}\right)$ vérifiant la condition ci-dessus :

$$\Delta_G(\gamma) s_\lambda^{\varepsilon}(\gamma)=\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{l\lambda}, \eta_{0, G}}\right)} \Delta_{M_G}(\gamma) \sum_{\left(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}\right) \in \mathcal{P}_\lambda} \prod_{i=1}^t s_{\lambda_{(i)}}^{\varepsilon}\left(\gamma_i\right).$$

On obtient de la même façon sur H :

$$\Delta_H\left(\gamma_H\right) s_\lambda\left(\gamma_H\right)=\Delta_{M_H}\left(\gamma_H\right) \sum_{\left(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}\right) \in \mathcal{P}_\lambda} \prod_{i=1}^t s_{\lambda_{(i)}}\left(\gamma_{H, i}\right).$$

De plus, d'après le cas γ elliptique, on a pour tout $\left(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(t)}\right) \in \mathcal{P}_\lambda$:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{t} s^{\varepsilon}_{\lambda_{(i)}}(\gamma_i) \\
&\qquad = \Delta_{\varepsilon, M_G}(\gamma, \gamma_H) \prod_{i=1}^{t} \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,ef\mu_i}}, \eta_{1,ef\mu_i}\right) + ef\mu_i(e-1)/2} s_{\lambda_{(i)}}(\gamma_{H,i})\,;
\end{aligned}$$

de plus, la restriction de $\eta_{1,G}$ à I_{M_G} n'est autre que le produit des $\eta_{1,ef\mu_i}$, donc on a :

$$\varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{l\lambda}}, \eta_{0,G}\right)} \prod_{i=1}^{t} \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,ef\mu_i}}, \eta_{1,ef\mu_i}\right)} = \varepsilon(-1)^{l\left(w_{\eta_{0,G}}, \eta_{1,G}\right)}\,;$$

enfin :

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{ef\mu_i(e-1)}{2} = \frac{n(e-1)}{2}.$$

Il suffit donc, pour montrer la proposition, de vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta_H(\gamma_H)}{\Delta_G(\gamma)} \Delta_{\varepsilon, G}(\gamma, \gamma_H) = \frac{\Delta_{M_H}(\gamma_H)}{\Delta_{M_G}(\gamma)} \Delta_{\varepsilon, M_G}(\gamma, \gamma_H).$$

On montre de la même façon que dans la démonstration de [**17**, VIII.5] :

$$\begin{aligned}
\Delta_G(\gamma) &= \Delta_{\varepsilon,1,G}(\gamma, \gamma_H)\, \Delta_H(\gamma_H)\,; \\
\Delta_{M_G}(\gamma) &= \Delta_{\varepsilon,1,M_G}(\gamma, \gamma_H)\, \Delta_{M_H}(\gamma_H).
\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = \Delta_{\varepsilon,2,M_G}(\gamma).$$

En effet, soient $c_1, \ldots, c_n$ les valeurs propres de γ (en tant qu'élément de G) dans une extension F_1 de F les contenant toutes ; on les supposera numérotées de telles façon que si $J_1, \ldots, J_t$ est la décomposition de $\{1, \ldots, n\}$ en intervalles suivant $ef\lambda$, alors pour tout k et tout $i \in J_k$, c_i est une valeur propre du k-ème bloc diagonal de γ. Soit, pour tout i, v_i un vecteur propre de γ dans F_1^n associé à la valeur propre γ_i. Les v_i forment une base de F_1^n, que l'on peut supposer stable par $\mathrm{Gal}\left(\overline{F}/F\right)$. Soit donc $v = v_1 + \cdots + v_n$; pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\left(\overline{F}/F\right)$, on a $\sigma(v) = v$; on en déduit que $v \in F^n$. Pour tout entier k, on a alors :

$$\gamma^k(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i^k v_i;$$

on en déduit que l'on a, le déterminant des v_i étant pris par rapport à la base canonique de F^n :

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(v, \gamma(v), \dots, \gamma^{n-1}(v)\right) &= \text{dét}\left(\left(c_i^k\right)_{k,i}\right) \text{dét}\left(v_1, \dots, v_n\right) \\ &= \left(\prod_{i>j}(c_i - c_j)\right) \text{dét}\left(v_1, \dots, v_n\right),\end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = \varepsilon^{-1}\left(\left(\prod_{i>j}(c_i - c_j)\right) \text{dét}\left(v_1, \dots, v_n\right)\right).$$

Par le même raisonnement, on obtient, si pour tout k, $J_k = \{a_{k-1}+1, \dots, a_k\}$:

$$\Delta_{\varepsilon,2,M_G}(\gamma) = \prod_{k=1}^{t} \varepsilon^{-1}\left(\left(\prod_{i>j, i,j\in J_k}(c_i - c_j)\right) \text{dét}\left(v_{a_{k-1}+1}, \dots, v_{a_k}\right)\right),$$

les déterminants étant pris par rapport aux bases canoniques des sous-espaces de F^n considérés. Or on a :

$$\prod_{k=1}^{t} \text{dét}\left(v_{a_{k-1}+1}, \dots, v_{a_k}\right) = \text{dét}\left(v_1, \dots, v_n\right);$$

$$\frac{\prod_{i>j}(c_i - c_j)}{\prod_{k=1}^{t}\left(\prod_{i>j,i,j\in J_k}(c_i - c_j)\right)} = \prod_{i,j\in\mathcal{C}}(c_i - c_j),$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des couples i, j tels que $i > j$ et que i et j ne sont pas dans le même J_k. Le produit ci-dessus est un élément de F ; de plus, soient $k_1, k_2 \in \{1, \dots, t\}$ distincts, soient $\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}$ les blocs diagonaux correspondants de γ. Alors pour tout $i_0 \in J_{k_1}$, $\prod_{j\in J_{k_2}}(c_{i_0} - c_j)$ est un élément de $F(\gamma_{k_1})$, et $\prod_{i\in J_{k_1}, j\in J_{k_2}}(c_i - c_j)$ en est la norme. De plus, $F(\gamma_{k_1})$ contient E, donc on a, pour un i_0 quelconque :

$$\prod_{i\in J_{k_1}, j\in J_{k_2}}(c_i - c_j) = N_{E/F}\left(N_{F(\gamma_{k_1})/E}\left(\prod_{j\in J_{k_2}}(c_{i_0} - c_j)\right)\right),$$

d'où :

$$\varepsilon\left(\prod_{i\in J_{k_1}, j\in J_{k_2}}(c_i - c_j)\right) = 1.$$

Comme ceci est vrai pour tout couple k_1, k_2, et comme l'on a :

$$\prod_{i,j\in C} (c_i - c_j) = \prod_{1\leq k_2<k_1\leq j} \prod_{i\in J_{k_1}, j\in J_{k_2}} (c_i - c_j),$$

on en déduit que l'on a :

$$\varepsilon\left(\prod_{i,j\in C} (c_i - c_j)\right) = 1,$$

d'où :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = \Delta_{\varepsilon,2,M_G}(\gamma)$$

et la proposition est démontrée. □

5.2. Le résultat principal

THÉORÈME 5.2.1. — *Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. Alors il existe $\mathfrak{f}_H \in C_c^\infty(H)$ telle que l'on ait :*

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H) I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma) = I_H(\mathfrak{f}_H, \gamma_H)$$

pour tout $\gamma \in G$ semi-simple régulier et pour toute image γ_H de γ dans H.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. On définit $\phi_\mathfrak{f}$ sur l'ensemble des éléments de H semi-simples G-réguliers par :

$$\phi_\mathfrak{f}(\gamma_H) = \Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H) I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma),$$

où γ est un élément de G^H tel que γ_H est une image de γ. On veut montrer l'assertion suivante : il existe $\mathfrak{f}_H \in C_c^\infty(H)$ telle que $I_H(\mathfrak{f}_H, \gamma_H) = \phi_\mathfrak{f}(\gamma_H)$ pour tout $\gamma_H \in H$ semi-simple G-régulier. Pour cela, il suffit, d'après [**11**, lemme 2.2 A], de prouver que $\phi_\mathfrak{f}$ vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\phi_\mathfrak{f}$ est invariante par conjugaison ;
- la restriction de $\phi_\mathfrak{f}$ à tout tore maximal est à support compact ;
- si $\gamma_{0,H}$ est un élément semi-simple de H, il existe un voisinage Ω de $\gamma_{0,H}$ dans H et $f_0 \in C_c^\infty(H)$ tels que pour tout $\gamma_H \in \Omega$ semi-simple G-régulier, on ait :

$$\phi_\mathfrak{f}(\gamma_H) = I_H(f_0, \gamma_H). \tag{11}$$

Les deux premières propriétés sont évidentes ; montrons donc la troisième.

Montrons d'abord que l'on peut se ramener au cas où $\gamma_{0,H}$ est elliptique : en effet, supposons (11) vraie dans le cas elliptique, et soit $\gamma_{0,H} \in H$ semi-simple quelconque. Quitte à conjuguer $\gamma_{0,H}$, on peut supposer qu'il existe $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t) \in \mathcal{P}(m)$ tel que si $P_H = M_H U_H = P(\mu)$, on ait $\gamma_{0,H} = (\gamma_{0,H_1}, \ldots, \gamma_{0,H_t}) \in M_H$, où pour tout i, γ_{0,H_i} est un élément elliptique de

$H_i = GL_{\mu_i}(E)$; on peut également supposer que M_H est maximal vérifiant cette propriété ; on a alors :

$$Z_H(\gamma_{0,H}) = \prod_{i=1}^{t} Z_{H_i}(\gamma_{0,H_i}).$$

Soit $P_G = M_G U_G = P(ef\mu) \subset G$; on identifie E^m à F^n de telle façon que l'on ait $M_H \subset M_G$. Soit pour tout i un voisinage V_i de γ_{0,H_i} dans H_i, et soit :

$$V = \left\{ h \left(\prod_{i=1}^{t} V_i \right) h^{-1} \mid h \in H \right\}.$$

C'est un voisinage de $\gamma_{0,H}$ dans H. Soit donc $\gamma_H \in V$; quitte à remplacer γ_H par un de ses conjugués dans H, on peut supposer $\gamma_H = (\gamma_{H_1}, \ldots, \gamma_{H_t}) \in M_H$ et choisir $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_t) \in M_G$ dont γ_H est une image. Supposons pour simplifier les notations que $\mathfrak{f}^{P,\varepsilon} = \prod_{i=1}^{t} f_i$, où pour tout i, f_i est une fonction localement constante à support compact sur $G_i = GL_{ef\mu_i}(F)$; on a alors :

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H) I_G^{\varepsilon}(\mathfrak{f}, \gamma) = \prod_{i=1}^{t} \Delta_{\varepsilon,G_i}(\gamma_i, \gamma_{H,i}) I_{G_i}^{\varepsilon}(f_i, \gamma_i).$$

Puisque la propriété (11) est vraie dans le cas elliptique, il existe pour tout i un voisinage Ω_i relatif à γ_{0,H_i} et f_i, que l'on supposera inclus dans V_i, et une fonction $f_{i,0} \in C_c^{\infty}(H_i)$ tels que l'on ait :

$$\Delta_{\varepsilon,G_i}(\gamma_i, \gamma_{H,i}) I_{G_i}^{\varepsilon}(f_i, \gamma_i) = I_{H_i}^{\varepsilon}(f_{i,0}, \gamma_{H_i})$$

pour tout $\gamma_{H_i} \in \Omega_i$. Quitte à restreindre les Ω_i, on peut trouver $f_0 \in C_c^{\infty}(H)$ tel que l'on ait :

$$I_H(f_0, \gamma_H) = \prod_{i=1}^{t} I_{H_i}(f_{i,0}, \gamma_{H_i})$$

si pour tout i, $\gamma_{H_i} \in \Omega_i$. Alors on a $\phi_f(\gamma) = I_H(f_0, \gamma_H)$ pour tout $\gamma_H \in \Omega$, avec :

$$\Omega = \left\{ h \left(\prod_{i=1}^{t} \Omega_i \right) h^{-1} \mid h \in H \right\};$$

donc puisque Ω est un voisinage de $\gamma_{0,H}$ dans H, (11) est démontrée.

Montrons maintenant (11) dans le cas où $\gamma_{0,H}$ est elliptique. On supposera d'abord qu'elle est vraie en 1. Soit donc $\delta \in \overline{F}$ une valeur propre de $\gamma_{0,H}$, $F' = F[\delta]$, $E' = E[\delta]$, $\varepsilon' = \varepsilon \circ N_{F'/F}$; alors, de la même façon que dans le chapitre précédent, ε' est associé à E'/F'. Soit $n' = \dfrac{n}{[F':F]}$, $m' = \dfrac{m}{[E':E]}$; on pose $G' = GL_{n'}(F')$, $H' = GL_{m'}(E')$. Puisque $\gamma_{0,H}$ est elliptique, on peut identifier H' à $Z_H(\gamma_{0,H})$. Soit γ_0 un élément de G dont les valeurs propres sont les conjugués de δ sur F, chacun avec multiplicité m' ; on peut également identifier G' à $Z_G(\gamma_0)$. Or on a les faits suivants (cf Harish-Chandra, [**3**, VI]) :

- pour tout voisinage $V_{G'}$ de γ_0 dans G', il existe un voisinage $V_{H'}$ de $\gamma_{0,H}$ dans H' tel qu'en posant $V = \{hV_{H'}h^{-1} \mid h \in H\}$, pour tout $\gamma_H \in V$ semi-simple G-régulier, il existe $\gamma \in V_{G'}$ dont γ_H est une image ;
- il existe $V_{G'}$ et $\mathfrak{f}' \in C_c^\infty(G')$ tels que l'on ait :
$$I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma) = I_{G'}^{\varepsilon'}(\mathfrak{f}', \gamma)$$
pour tout $\gamma \in V_{G'}$ semi-simple G-régulier.

Supposons que l'on a l'assertion suivante : il existe une constante $c \neq 0$ tel que pour tout $\gamma \in G'$ proche de γ_0 :

$$c\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H) = \Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma, \gamma_H). \tag{12}$$

Comme $\gamma_{0,H}$ et γ_0 sont des éléments centraux respectivement de H' et de G', il est clair que (11) pour 1 implique (11) pour le couple $\gamma_{0,H}, \gamma_0$, c'est-à-dire qu'il existe $f_0' \in C_c^\infty(H')$ et un voisinage Ω' de $\gamma_{0,H}$ dans H' tels que, pour tout $\gamma_H \in \Omega'$ semi-simple G-régulier, on ait :

$$c^{-1}\Delta_{\varepsilon',G'}(\gamma, \gamma_H)\, I_{G'}^{\varepsilon'}(\mathfrak{f}', \gamma) = I_{H'}(f_0', \gamma_H),$$

soit :

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H)\, I_G^{\varepsilon}(\mathfrak{f}', \gamma) = I_{H'}(f_0', \gamma_H).$$

Le même résultat de Harish-Chandra que précédemment implique, quitte à restreindre Ω', l'existence de f_0 tel que $I_H(f_0, \gamma_H) = I_{H'}(f_0', \gamma_H)$. Donc pour tout élément γ_H semi-simple régulier de :

$$\Omega = \{h\Omega' h^{-1} \mid h \in H\},$$

on a $\phi_{\mathfrak{f}}(\gamma) = I_H(f_0, \gamma_H)$, d'où l'assertion recherchée.

Montrons maintenant (12). Soit ϕ un isomorphisme de F^n dans $F'^{n'}$, et soit :

$$\overline{\phi} : F^n \underset{F}{\otimes} \overline{F} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)/\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')} \sigma(F')^{n'} \underset{\sigma(F')}{\otimes} \overline{F}$$
$$v \otimes \lambda \longmapsto \bigoplus (\sigma \circ \phi(v) \otimes \lambda).$$

Supposons :

$$G' = \{\phi^{-1} \circ g' \circ \phi \mid g' \in GL_{n'}(F')\}.$$

Pour $g' \in GL_{n'}(F')$, $g_G' = \phi^{-1} \circ g' \circ \phi$ et $v \in F^n \underset{F}{\otimes} \overline{F}$, on a :

$$\overline{\phi}(g_G' v) = \underline{g'}\overline{\phi}(v),$$

où $\underline{g}' = \bigoplus_\sigma \sigma(g')$. Soit $\gamma \in G'$ semi-simple régulier tel que γ_G soit régulier, et soit $v_1', \ldots, v_{n'}'$ des vecteurs propres de γ dans $F'^n \underset{F'}{\otimes} \overline{F}$ tels que $\{v_1', \ldots, v_{n'}'\}$ soit stable par $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n'}$ sont les valeurs propres associées, pour $v' = v_1' + \cdots + v_{n'}'$, on a :

$$v' \wedge \gamma(v') \wedge \cdots \wedge \gamma^{n'-1}(v') = L' v_1' \wedge \cdots \wedge v_{n'}',$$

avec :

$$L' = \prod_{1 \leq i < j \leq n'} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Soit $e_1', \ldots, e_{n'}'$ la base canonique de $F'^{n'}$; on pose :

$$\delta'(\gamma) = \frac{v' \wedge \gamma(v') \wedge \cdots \wedge \gamma^{n'-1}(v')}{e_1' \wedge \cdots \wedge e_{n'}'}.$$

Fixons $\sigma_1, \ldots, \sigma_{[F':F]}$ des représentants de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) / \mathrm{Gal}(\overline{F}/F')$ et posons :

$$\begin{aligned}
(v_1, \ldots, v_n) &= \left(\sigma_1 v_1', \ldots, \sigma_1 v_{n'}', \sigma_2 v_1', \ldots, \sigma_{[F':F]} v_{n'}'\right); \\
(E_1, \ldots, E_n) &= \left(\sigma_1 e_1', \ldots, \sigma_1 e_{n'}', \sigma_2 e_1', \ldots, \sigma_{[F':F]} e_{n'}'\right).
\end{aligned}$$

Les v_i sont des vecteurs propres pour $\underline{\gamma}$, de valeurs propres les $\sigma_k \lambda_j$; pour $v = v_1 + \cdots + v_n$, on a donc :

$$v \wedge \underline{\gamma} v \wedge \cdots \wedge \underline{\gamma}^{n-1} v = L_1 L_2 v_1 \wedge \cdots \wedge v_n,$$

avec :

$$L_1 = \prod_{k=1}^{[F':F]} \prod_{1 \leq i < j \leq n'} (\sigma_k \lambda_j - \sigma_k \lambda_i),$$

$$L_2 = \prod_{1 \leq k < l \leq [F':F]} \prod_{i,j=1}^{n'} (\sigma_l \lambda_j - \sigma_k \lambda_i),$$

Il est clair que l'on a :

$$L_1 \frac{v_1 \wedge \cdots \wedge v_n}{E_1 \wedge \cdots \wedge E_n} = \prod_{k=1}^{[F':F]} \sigma_k \left(L' \frac{v_1' \wedge \cdots \wedge v_{n'}'}{e_1' \wedge \cdots \wedge e_{n'}'} \right) = N_{F'/F}\left(\delta'(\gamma)\right).$$

D'autre part, posons :

$$L_3 = \prod_{1 \leq k < l \leq [F':F]} (\sigma_l \delta - \sigma_k \delta)^{n'^2}.$$

On a $L_2 L_3^{-1} \in F^*$; de plus, si γ est assez proche de γ_0, les λ_j sont proches de δ, donc L_2 est proche de L_3 ; on peut supposer γ suffisamment proche de γ_0 pour que l'on ait :

$$L_2 \in L_3 (1 + \mathfrak{p}).$$

On en déduit, si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de F^n :

$$\begin{aligned}\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) &= \varepsilon^{-1}\left(\frac{v \wedge \underline{\gamma}(v) \wedge \cdots \wedge \underline{\gamma}^{n-1}(v)}{\overline{\phi} e_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\phi} e_n}\right) \\ &= \varepsilon'^{-1}\left(\delta'(\gamma)\right) \varepsilon^{-1}\left(L_3 \frac{E_1 \wedge \cdots \wedge E_n}{\overline{\phi} e_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\phi} e_n}\right).\end{aligned}$$

Le premier terme vaut $\Delta_{\varepsilon',2,G'}(\gamma)$, le second ne dépend pas de γ ; on a donc :

$$\Delta_{\varepsilon,2,G}(\gamma) = c \Delta_{\varepsilon',2,G'}(\gamma),$$

avec $c \neq 0$. De plus, pour γ suffisamment proche de γ_0, on a, avec les notations du chapitre précédent :

$$|r(\sigma(\gamma), \tau(\gamma))| = |r(\sigma(\gamma_0), \tau(\gamma_0))|$$

pour tous σ, τ distincts dans $\mathrm{Gal}(E/F)$, et :

$$|\mathrm{d\acute{e}t}_G(\gamma)| = |\mathrm{d\acute{e}t}_G(\gamma_0)|.$$

On en déduit :

$$\Delta_{\varepsilon,1,G}(\gamma, \gamma_H) = \Delta_{\varepsilon',1,G'}(\gamma, \gamma_H),$$

d'où l'assertion cherchée.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer (11) dans le cas $\gamma_{0,H} = 1$. Pour tout $\mathfrak{f}' \in C_c^\infty(H)$, si $\mathcal{U}_H$ est l'ensemble des orbites unipotentes de H, on a au voisinage de 1 un développement de la forme :

$$I_H(\mathfrak{f}', \gamma_H) = \sum_{U \in \mathcal{U}_H} I_H(\mathfrak{f}', U) \Gamma_U(\gamma_H),$$

où les Γ_U sont les germes de Shalika. Comme les distributions :

$$\{I_H(\cdot, U) \mid U \in \mathcal{U}_H\}$$

sur $\mathcal{H}_H$ sont linéairement indépendantes (cf par exemple [**16**, corollaire 4.4]), il suffit de montrer qu'il existe des constantes c_U telles que l'on ait :

$$\phi_{\mathfrak{f}}(\gamma_H) = \sum_{U \in \mathcal{U}_H} c_U \Gamma_U(\gamma_H)$$

pour γ_H suffisamment proche de 1. Si $\mathfrak{f}' \in \mathcal{H}_H$, on a également, d'après la proposition 4.1.1 appliquée au cas $G = H$:

$$I_H(\mathfrak{f}', \gamma_H) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m)} s_{\lambda,H}(\gamma_H) \operatorname{tr} \mathrm{St}_\lambda \left(1_0 1_c \mathfrak{f}'\right);$$

de plus, le nombre d'orbites unipotentes de H est exactement égal au cardinal de $\mathcal{P}^0(m)$, et d'après la démonstration de la proposition 4.1.1 appliquée à H, les distributions $\{\operatorname{tr} \operatorname{St}_\lambda(1_0 1_c \cdot) \mid \lambda \in \mathcal{P}^0(m)\}$ sur $\mathcal{H}_H$ sont linéairement indépendantes. Soit donc $S_{1,H}$ l'espace des germes de fonctions au voisinage de 1 engendré par les $\Gamma_U(\cdot), U \in \mathcal{U}_H$ et $S_{2,H}$ l'espace engendré par les $s_{\lambda,H}(\cdot), \lambda \in \mathcal{P}^0(m)$; on a $S_{1,H} = S_{2,H}$. D'après la proposition 5.1.1, $S_{2,H}$ est aussi égal à l'espace $S_{2,G}$ engendré par les $\Delta_{\varepsilon,G}(\cdot)\, s^\varepsilon_{\lambda,G}(\cdot), \lambda \in \mathcal{P}^0(m)$. Enfin, pour tout $\mathfrak{f} \in C^\infty_c(G)$, on a au voisinage de 1 un développement :

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H)\, I^\varepsilon_G(\mathfrak{f}, \gamma) = \sum_{U \in \mathcal{U}^\varepsilon_G} I^\varepsilon_G(\mathfrak{f}, U)\, \Gamma^\varepsilon_U(\gamma),$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon_G$ est l'ensemble des orbites unipotentes U de G telles que si $u \in U$, pour tout $g \in Z_G(u)$, on a $\varepsilon \circ \operatorname{dét}(g) = 1$; par le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 4.2.2, on voit que si, pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}^0(n)$, U est l'orbite de l'élément $\gamma_\lambda = \operatorname{Id} + J_\lambda \in G$, avec :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_{t'}} \end{pmatrix},$$

où pour tout i, J_i est la matrice $i \times i$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

on a $U \in \mathcal{U}^\varepsilon_G$ si et seulement si $\lambda = ef\lambda'$, avec $\lambda' \in \mathcal{P}^0(m)$. Si $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^\mathcal{E}$, on a également :

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H)\, I^\varepsilon_G(\mathfrak{f}, \gamma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m)} s^\varepsilon_{\lambda,G}(\gamma) \operatorname{tr} A^\varepsilon_\lambda \circ \operatorname{St}^\varepsilon_\lambda(1_0 1_c \mathfrak{f})\, \Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H).$$

D'après la démonstration de la proposition 4.1.1, les distributions :

$$\{\operatorname{tr} A^\varepsilon_\lambda \circ \operatorname{St}^\varepsilon_\lambda(1_0 1_c \cdot) \mid \lambda \in \mathcal{P}^0(m)\}$$

sur $\mathcal{F}^\mathcal{E}$ sont linéairement indépendantes ; on en déduit que pour tout λ, le germe $\Delta_{\varepsilon,G}(\cdot)\, s^\varepsilon_{\lambda_G}(\cdot)$ appartient à l'espace $S_{1,G}$ engendré par les $\Gamma^\varepsilon_U, U \in \mathcal{U}^\varepsilon_G$. On a donc :

$$S_{1,H} = S_{2,H} = S_{2,G} \subset S_{1,G}.$$

Or d'après [4, lemme 2.4], les germes de Shalika $\Gamma_U(\cdot)$ sont linéairement indépendants ; on en déduit que $\dim(S_{1,H}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}^0(m))$. Or $S_{1,G}$ est engendré par $\operatorname{card}(\mathcal{U}^\varepsilon_G) = \operatorname{card}(\mathcal{P}^0(m))$ éléments, donc est de dimension au plus card $(\mathcal{P}^0(m))$; on en déduit que $S_{1,H} = S_{1,G}$. Mais alors, il existe des constantes c_U telles que l'on a :

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H)\, I_G^{\varepsilon}(\mathfrak{f},\gamma) = \sum_{u\in\mathcal{U}_H} c_U \Gamma_U(\gamma_H),$$

ce qui achève la démonstration. □

COROLLAIRE 5.2.2. — *Supposons $p > n$. Soit maintenant $G = SL_n$, et H un groupe endoscopique de G ; soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. Alors il existe $\mathfrak{f}_H \in C_c^\infty(H)$ telle que l'on ait :*

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma,\gamma_H)\, I_G^{\varepsilon}(\mathfrak{f},\gamma) = I_H(\mathfrak{f}_H,\gamma_H)$$

pour tout $\gamma \in G$ semi-simple régulier et pour toute image γ_H de γ dans H.

Démonstration. — En effet, d'après [**9**, III], H est de la forme suivante : il existe une extension cyclique E de F, de degré divisant n, et, si $m = n/[E:F]$, une partition $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \in \mathcal{P}(m)$, tels que H est l'ensemble des éléments h de $GL_{\lambda_1}(E) \otimes \cdots \otimes GL_{\lambda_t}(E)$ vérifiant :

$$N_{E/F} \circ \text{dét}(h) = 1.$$

On se ramène aisément au cas où $\lambda = (m)$; de plus, puisque $p > n$, d'une part p ne divise par l'indice de ramification de E/F, qui est donc modérément ramifiée, et d'autre part, pour tout $\gamma \in G$ semi-simple régulier, $F[\gamma]$ est produit d'extensions modérément ramifiées de F. Le résultat se déduit alors immédiatement du théorème précédent. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.W. Carter. *Finite groups of Lie type.* John Wiley & Sons, 1985.

[2] D. Goldstein. *Thesis.* MSRI, Berkeley, 1990.

[3] Harish-Chandra. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups.* (notes par G. van Dijk) Lecture Notes in Mathematics 102, Springer, 1970.

[4] Harish-Chandra. *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups.* Œuvres complètes, vol. 4.

[5] R. Howe. *Tamely ramified supercuspidal representations of GL_n.* Pacific Journal of Mathematics, **73**, 1977, pp. 437-460.

[6] D. Kazhdan. *Cuspidal geometry of p-adic groups.* Journal d'Analyse Mathématique, **47**, 1986, pp. 1-36.

[7] D. Kazhdan. *On lifting.* in *Lie group representations II.* Lecture Notes in Mathematics, **1401**, Springer, 1984, pp. 209-249.

[8] J.P. Labesse, R.P. Langlands. *L-Indistinguishability for SL_2.* Canadian Journal of Mathematics, **31**, 1979, pp. 726-785.

[9] R.P. Langlands. *Les débuts d'une formule des traces stable.* Publications mathématiques de l'université Paris VII, 1983.

[10] R.P. Langlands, D. Shelstad. *Definition of Transfer Factors.* Math. Ann., **278**, 1987, pp. 219-271.

[11] R.P. Langlands, D. Shelstad. *Descent for transfer factors.* Grothendieck Festschrift II, Progress in Math., **87**,1990, pp. 485-563.

[12] G. Lusztig. *Affine Hecke algebras and their graded versions.* J. AMS.

[13] J. Shalika. *A theorem on semi-simple p-adic groups.* Annals of Mathematics, **95**, 1972, pp. 226-242.

[14] Allan J. Silberger. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1979.

[15] G. van Dijk. *Computation of certain induced characters of p-adic groups.* Math. Ann., **199**, 1972, pp. 229-240.

[16] J.L. Waldspurger. *Sur les germes de Shalika pour les groupes linéaires.* Math. Ann., **284**, 1989, pp. 199-221.

[17] J.L. Waldspurger. *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental.* Canadian Journal of Mathematics, **43**, 1991, pp. 852-896.

[18] A.V. Zelevinsky. *Representations of finite classical groups.* Lecture Notes in Mathematics, **869**, Springer, 1981.

[19] A.V. Zelevinsky. *Induced representations of reductive p-adic groups, II.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, **13**, 1980, pp. 165-210.