ÉRIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 53 (1993)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_53__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 53
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 2.

LE PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ LINÉAIRE POUR DES DONNÉES À SINGULARITÉS ALGÉBRIQUES

Eric LEICHTNAM

Résumé Nous étudions le problème de Cauchy Ramifié d'ordre m à caractéristiques simples lorsque les données sont algébriques et ramifiées autour d'une queue d'aronde T. Nous montrons qu'il existe m queues d'arondes caractéristiques issues de T et que le problème de Cauchy admet une (unique) solution qui est somme de m fonctions chacune étant algébrique ramifiée autour d'une des queues d'arondes caractéristiques.

Abstract. We study the Ramified Cauchy Problem of order m with simple characteristics when the Cauchy data are algebraic and ramified around a swallowtail T. We prove that there are m characteristic swallowtails containing T and that the Cauchy Problem has a (unique) solution which is the sum of m functions, each of them being algebraic ramified around one of the characteristic swallowtails.

AMS Subjects Classification : 35 A 20, 35 C 10.

Texte reçu le 4 mai 1992

Ecole Normale Supérieure, Centre de Mathématiques Appliquées, 45 rue d'Ulm, 75230 PARIS cedex 05.

Table des Matières

0. INTRODUCTION.

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} a(x,D)u = v(x) \\ D^s_{x_0}u(x)\big|_S = u_s(x') \quad 0 \le s < m \end{cases}$$

où $a(x,D)$ désigne un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x_j)_{0\le j\le n}$ sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$; où l'hyperplan S d'équation $x_0 = 0$ est non caractéristique pour $a(x,D)$. Posons $x' = (x_1,\ldots,x_n)$. Soit $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, désignons par $D(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.2)\qquad F(x,z) = z^{k+1} - x_k z^{k-1} - x_{k-1}z^{k-2}\ldots - x_2 z - x_1 = 0.$$

Posons en outre :

$$(0.3)\qquad \Delta(x_2,\ldots,x_k,z) = \Delta = \partial_z F(x,z).$$

Désignons par T l'hypersurface analytique (dite queue d'aronde) de S d'équation $D(x_1,x_2,\ldots,x_k) = 0$. Nous supposerons que chaque fonction $u_s(x')$ $(0 \le s < m)$ est holomorphe ramifiée autour de T et de la forme : $(0 \le s \le m-1)$

$$(0.4)\qquad u_s(x') = \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x';D)\cdot(z^\ell(x'))$$

où $x \to z(x')$ désigne une solution holomorphe ramifiée autour de T de l'équation (0.2), où ($-w$ étant un entier naturel donné) les $P_{s,\ell}(x';D)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $s-w$ à coefficients holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \{x' \in \mathbb{C}^k\}$. Indiquons - à titre d'exemple - qu'en différentiant l'équation (0.2) on obtient : $\partial_{x_1} z^\ell(x') = \frac{\ell z^{\ell-1}}{\Delta}$ pour $0 \le \ell \le k$. Le second membre $v(x)$ sera précisé dans le théorème 0.2. à ce stade de la rédaction on peut supposer sans inconvénient - pour fixer les idées - que $v(x) \equiv 0$. En outre nous étudierons le problème (0.1) avec les hypothèses suivantes. Notons $a_m(x;\xi)$ le polynôme caractéristique homogène en ξ de l'opérateur $a(x,D)$; nous supposerons que $a(x,D)$ est à caractéristiques simples ce qui signifie que l'équation de degré m en ξ_0 :

$$(0.5)\qquad a_m(0;\xi_0,1,0,\ldots,0) = 0$$

possède m racines distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

Posons $m = 2p+\delta$ où $\delta \in \{0,1\}$, un exemple simple de symbole $a_m(x;\xi)$ est le polynôme suivant :

$$\xi_0^\delta \prod_{j=1}^{p}(j\xi_0^2 - \xi_1^2 \ldots - \xi_n^2).$$

L'hypothèse à caractéristiques simples est en quelque sorte l'analogue holomorphe de la notion (réelle, C^∞) d'opérateurs strictement hyperbolique relativement à S. Nous rappelons la définition d'une queue d'aronde :

Définition 0.0. Une hypersurface analytique K de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie dans un voisinage ouvert connexe U de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ est appelée queue d'aronde de sommet 0 s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et k fonctions holomorphes sur U s'annulant en 0 $x \to g_j(x)$ $1 \leq j \leq k$ telles que les différentielles $dg_j(0)$ $(1 \leq j \leq k)$ sont linéairement indépendantes et K est définie par l'équation :

$$D(g_1(x),\ldots,g_k(x)) = 0$$

où $D(g_1,\ldots,g_k)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$z^{k+1} = g_k z^{k-1} + \ldots + g_2 z + g_1. \tag{0.6}$$

Nous définissons le conormal $N(K)$ de K comme étant l'adhérence dans $T^*U\backslash 0$ du conormal $N(K_{\text{reg}})$ de la partie lisse K_{reg} de K. Nous dirons que K est caractéristique pour $a(x,D)$ si la restriction du symbole principal $a_m(x,\xi)$ à $N(K)$ (ou $N(K_{\text{reg}})$) est identiquement nulle.

Remarque. Soit $m_0 \in U\backslash K$. considérons un germe holomorphe au point $(g_1(m_0),\ldots,g_k(m_0))$ $(X_1,\ldots,X_k) \to z(X_1,\ldots,X_k)$ solution de l'équation :

$$z^{k+1} = X_k z^{k-1} + \ldots + X_2 z + X_1$$

On peut prolonger (voir thm 3.2) holomorphiquement ce germe $z(X_1,\ldots,X_k)$ le long de tout chemin issu de $(g_1(m_0),\ldots,g_k(m_0))$ ne rencontrant pas la queue d'aronde $D(X_1,\ldots,X_k)^{-1}(0)$. Le germe en m_0 $x \to z(g_1(x),\ldots,g_k(x))$ est alors prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de m_0 et tracé dans $U\backslash K$.

Le théorème suivant affirme qu'il existe (près de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$) m hypersurfaces analytiques (singulières) $K^1,\ldots,K^m$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ issues de T. caractéristiques pour $a(x,D)$. Les K^i sont des queues d'aronde de sommet 0 et

- dans un voisinage de 0 - ce sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques vérifiant ces propriétés. Notons :

$$\pi \left| \begin{array}{l} T^*\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (x,\xi) \longrightarrow x \end{array} \right.$$

la projection usuelle.

Théorème 0.1. (Avec les notations du Problème (0.1)). Soit λ_j $(1 \leq j \leq m)$ l'une des racines de l'équation (0.5). Alors :

1°. Il existe une lagrangienne holomorphe lisse homogène Λ_j définie dans un petit voisinage conique de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0) \in T^*\mathbb{C}^{n+1}$ et vérifiant les quatre propriétés suivantes :

a) $\pi(\Lambda_j) \cap S = T$ (dans un voisinage de 0)

b) $(0,\ldots,0;\ \lambda_j,1,0,\ldots,0) \in \Lambda_j$

c) la restriction de $a_m(x;\xi)$ à Λ_j est identiquement nulle.

d) $\{(x',\xi')/\exists\xi_0,\ (0,x';\xi_0,\xi') \in \Lambda_j\}$ est une lagrangienne holomorphe lisse incluse dans $N(T)$ (voir def 0.0) et comprenant $(0,\ldots,0;\ 1,0,\ldots,0)$.

Il existe un voisinage conique V_1 de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ tel que toute lagrangienne incluse dans V_1 holomorphe lisse homogène vérifiant ces quatre propriétés coïncide avec Λ_j dans un petit voisinage conique de $(0,\ldots,0;$ $\lambda_j,1,0,\ldots,0)$. Par ailleurs on peut construire Λ_j de sorte qu'il existe k fonctions $x \to g_\ell^j(x)$ $(1 \leq \ell \leq k)$ définies et holomorphes sur un voisinage ouvert Ω de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telles que $g_\ell^j(0,x') = x_\ell$ $(1 \leq \ell \leq k)$, que l'hypersurface $K^j = \pi(\Lambda_j) \cap \Omega$ soit une queue d'aronde caractéristique définie par l'équation $D(g_1^j,\ldots,g_k^j)(x) = 0$ où $D(g_1^j,\ldots,g_k^j)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.7)_j \qquad z^{k+1} = g_k^j(x)z^{k-1} + \ldots + g_2^j(x)z + g_1^j(x),$$

et que Λ_j et le conormal $N(K^j)$ coïncident au-dessus d'un petit voisinage ouvert de l'origine. En particulier $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ appartient à $N(K^j)$.

2°. Soit $\mathcal{A}$ une hypersurface définie dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ par une équation analytique $f(x_0,x') = 0$ telle que $\mathcal{A} \cap S = T$ (près de 0), $a_m(x;\xi)$ s'annule sur le conormal de la partie lisse $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ de $\mathcal{A}$ et que $f(x_0,x')$ induise un germe *irréductible* en 0 (c'est le cas si $f(0,x') = D(x_1,\ldots,x_k)$). Alors $\exists j \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\mathcal{A}$ et $\pi(\Lambda_j) = K^j$ coincident dans un petit voisinage de 0.

Remarque. 1°) Le conormal à la queue d'aronde T *n'a qu'une seule* direction au-dessus de l'origine. Ce fait crucial et l'hypothèse faite sur l'équation (0.5) permettent (par la géométrie symplectique complexe) de construire $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ et donc $K^1 = \pi(\Lambda_1), \ldots, K^m = \pi(\Lambda_m)$.

2°) La version initiale du 2°) du théorème 0.1 imposait une condition un peu plus forte sur $\mathcal{A}$; je remercie J.-M. Delort de m'avoir indiqué comment on pouvait se contenter de supposer $\mathcal{A}$ irréductible en 0.

L'un des résultats principaux de cet article est le théorème suivant :

Théorème 0.2 (Avec les notations précédentes). Soient $-w$ un entier naturel et U [resp. W] un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ [resp. $\mathbb{C}^n$]. Alors il existe un voisinage ouvert V (inclus dans U) de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant $V \cap S \subset W$ et tel que pour tous opérateurs différentiels linéaires $P_{s,\ell}(x'; D'_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $s - w$ (où $0 \leq s \leq m-1$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur W, pour tous opérateurs différentiels linéaires $Q_{j,\ell}(x; D_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $-w + m - 1$ (où $1 \leq j \leq m$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur U, pour tout point $x^0 = (0, x'^0)$ de $S \cap V \backslash T$ et tout germe holomorphe en x'^0 $x' \to z(x')$ solution de l'équation (0.2), le problème (0.1) défini avec les données de Cauchy suivantes :

$$
(0.8) \qquad
\begin{aligned}
u_s(x') &= \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x'; D_{x'})(z^\ell(x')) \quad 0 \leq s \leq m-1 \\
v(x) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} Q_{j,\ell}(x; D_x)(z^\ell(G_j(x)))
\end{aligned}
$$

où $G_j(x) = (g_1^j(x), \ldots, g_k^j(x))$ admet pour solution un germe en x^0 holomorphe $u(x)$ qu'on peut prolonger holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(0, x'^0)$ tracé dans $V \backslash \cup_{j=1}^m K^j$ et ne rencontrant pas les queues d'arondes caractéristiques $K^1, \ldots, K^m$. En outre le germe solution $u(x)$ est de la forme:

$$
u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} R_{j,\ell}(x; D_x)(z^\ell(G_j(x)))
$$

où les $R_{j,\ell}(x; D_x)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $-w$ à coefficients holomorphes sur V

Remarque. 0°). Pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$ on a $G_0(0, x') = (x_1, \ldots, x_k)$.

1°). Les précisions sur les ordres des opérateurs $P_{s,\ell}, Q_{j,\ell}, R_{j,\ell}$ montrent que le théorème 0.2 précise la nature des singularités de la solution $u(x)$ en fonction des singularités et la croissance des données.

2°). La queue d'aronde T est définie dans un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_k$. Si (de manière plus intrinsèque) on considère une queue d'aronde $T' \subset S$ *de sommet* 0 telle que pour tout $(0; \xi') \in N(T') \backslash 0$ l'équation $a_m(0, \ldots, 0; \xi_0, \xi') = 0$ possède m racines simples alors on obtient des résultats analogues aux théorèmes 0.1 et 0.2.

Note. En admettant le théorème géométrique 0.1, D'Agnolo et Schapira ([3]) ont démontré indépendamment une version plus faible du théorème 0.2.

Dans [15] et [16] nous avons étudié divers types de Problèmes de Cauchy Ramifié, à chaque fois nous appliquons le programme suivant (voir aussi [17]) composé de quatre points :

1°). Si $u(x)$ est holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface analytique K de $\mathbb{C}^{n+1}$, les singularités (microlocales) de u vivent dans une lagrangienne complexe de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$: le conormal $N(K)$ de K. Lorsque K est singulière il faut préciser de quel conormal il s'agit et étudier sa géométrie.

2°). Le flot hamiltonien Φ du symbole principal $a_m(x; \xi)$ propage les singularités de $u(x)$ suivant des lagrangiennes caractéristiques (les conormaux des hypersurfaces caractéristiques sont invariants sous l'action de Φ).

3°). On considère des régions où on a une représentation de $u(x)$ (i.e. une expression explicite du revêtement sur lequel $u(x)$ devient uniforme).

4°). On résoud l'équation $a(x; D)u(x) = v(x)$ en utilisant les représentations du 3° par la méthode de l'optique géométrique. Le choix des opérateurs d'intégration et des normes (pour établir la convergence des séries) dépend de manière cruciale de la géométrie de la lagrangienne $N(K)$ considérée au point 1°).

Maintenant nous allons décrire la structure de cet article en indiquant comment nous avons appliqué ce programme.

Dans la section §9 nous montrons (z désignant une solution ramifiée de l'équation (0.2)) que les singularités de $z, z^2, \ldots, z^k$ vivent dans le conormal $N(T)$ de T, le théorème 9.1 fournit un énoncé précis. La section §8 est consacrée à l'étude de la géométrie de $N(T)$ et montre que $N(T)$ ne possède qu'une seule codirection au-dessus de l'origine : celle conormale à x_1. Comme le laisse prévoir les points 1° et 4° du programme, l'opérateur de primitivation par rapport à x_1 jouera un rôle clef.

Dans la section §2 nous prouvons le théorème 0.1. Dans le théorème 2.2 nous construisons la lagrangienne caractéristique Λ_j (conformément au point 2° du programme) en propageant par le flot Φ le lieu *caractéristique* (pour $a(x; D)$) constitué de points voisins de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots 0)$ et de la forme $(0, x'; \xi_0, \xi')$ où $(x'; \xi') \in N(T)$. Pour démontrer l'existence des fonctions $g_\ell^j(x)$ vérifiant $g_\ell^j(0, x') = x_\ell$ (ce qui est crucial pour notre objet) nous devons reprendre en les précisant certains résultats d'Arnold (voir [1], [2]) de la théorie des singularités. En utilisant la proposition 2.4 et la définition 2.7 nous montrons que

$$\pi(\Lambda_j(x_0)) = \{x'/(x_0, x') \in \pi(\Lambda_j)\}$$

est la projection sur la base d'une legendrienne $\mathcal{L}(x_0)$ de $\{(x_1, \ldots, x_n; p_2, \ldots, p_n)\}$ muni de la structure (complexe) de contact standard par la 1-forme $dx_1 - p_2 dx_2 \ldots - p_n dx_n$. Le théorème 2.8 montre qu'on peut paramétrer $\mathcal{L}(x_0)$ à l'aide d'une fonction génératrice $S(x_0, z, x_3, \ldots, x_n)$ dépendant du paramètre x_0. Le fait que $\pi(\Lambda_j)$ soit une queue d'aronde repose alors sur le théorème 2.9 qui affirme qu'on peut écrire $S(x_0, z, x_3, \ldots, x_n) - zx_2$ sous la forme $Z^{k+1} - X_k Z^{k-1} \ldots - X_1$ où Z [resp. X_ℓ, $1 \leq \ell \leq k$] est fonction de $(x_0, z, x_2, \ldots, x_n)$ [resp. $(x_0, x_2, \ldots, x_n)$]. La preuve du théorème 2.9 reprend un argument de Martinet [18] (voir aussi [1] page 124) : nous utilisons la versalité infinitésimale du déploiement $S(0, z, x_3, \ldots, x_n) - x_2 z - x_1$ de z^{k+1} et le théorème de préparation de Weierstrass. Les queues d'arond K^j que nous avons construites sont définies sur de "très petits voisinages ouverts de 0", en utilisant les résultats de Hauser [9] on devrait pouvoir construire des queues d'aronde K^j définies sur des ouverts beaucoup plus gros. Par ailleurs nous prouvons le 2° du théorème 0.1 (i.e. les K^j sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques caractéristiques issues de T) en utilisant des résultats de géométrie analytique locale et le fait que T et le discriminant $D(x_1, \ldots, x_k)$ induisent en l'origine des germes irréductibles (voir prop. 8.11 et thm 8.12).

Dans les sections numérotées de §3 à §9 nous travaillerons avec les variables $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{C}^k$ et considérerons les solutions z de l'équation:

$$F(y, z) = z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z - y_1 = 0 \tag{0.9}$$

nous avons en quelque sorte remplacé $(x_1, \ldots, x_k)$ par $(y_1, \ldots, y_k)$ dans l'équation (0.2) pour éviter ultérieurement des confusions de notations. Dans la section §3 nous étudions les ramifications (autour de T) des fonctions algébriques en z et dégageons (voir thm 3.11) le contenu géométrique du concept de la somme aux $k + 1$ racines de l'équation (0.9). Dans le théorème 3.6 nous construisons des fonctions $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y_2, \ldots, y_k)$ $1 \leq \ell \leq k$ dont la somme aux $k + 1$ racines est nulle : elles joueront un rôle fondamental.

Dans la section §4 nous étudions la géométrie (qui est à la fois riche et compliquée) de l'algèbre $A = \mathcal{O}_Y[z]$ où z est solution de l'équation (0.9) et

$\mathcal{O}_Y$ désigne l'algèbre des germes $u(y)$ holomorphes en 0. Dans le cas simple de l'équation $z^2 = y_1$ les éléments de A de la forme $\sqrt{y_1}u(y_1)$ sont singuliers et leur somme suivant les deux racines est nulle. Cette remarque nous conduit - dans le cas général - à introduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments de A dont la somme suivant les $k+1$ racines de l'équation (0.9) est nulle; $e_1, e_2, \ldots, e_k$ appartiennent à $\mathcal{S}$. La proposition 4.10 et le théorème 4.11 montrent qu'on a une décomposition $A = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{S}$ sur laquelle les dérivations ∂_{y_ℓ} $(1 \leq \ell \leq k)$ opèrent de manière diagonale, de plus $\mathcal{S}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module libre de rang k admettant $e_1, e_2, \ldots, e_k$ pour base. Le théorème 4.12 montre que tout u de $\mathcal{S}$ possède - dans $\mathcal{S}$ - une unique primitive en y_1 notée $v = D^{-1}u$. De plus si pour $p \in \mathbb{N}$ on pose

$$A^p = \{u \in A \ / \ \partial_y^\alpha u \in A \text{ pour tout } \alpha \text{ de longueur } \leq p\}$$

alors le corollaire 4.16 montre que D^{-1} induit une bijection de $A^p \cap \mathcal{S}$ sur $A^{p+1} \cap \mathcal{S}$. Conformément à ce que laissent prévoir les points 1° et 4° de notre programme, D^{-1} joue un rôle crucial. Si $h \in \mathbb{N}$ on pose $e_\ell^h = D^{-h}e_\ell$ et $e_\ell^{-h} = \partial_{y_1}^h e_\ell$; pour étudier les primitives itérées e_ℓ^h des e_ℓ $(h \in \mathbb{N})$ il est très commode de travailler avec des matrices et d'introduire (voir déf. 4.25) la matrice carrée d'ordre k $P(y)$ telle que :

$$\begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_k^1 \end{bmatrix} = P(y) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Une récurrence facile sur $h \in \mathbb{N}$ montre que (voir théorème 4.27) :

$$\begin{bmatrix} e_1^{h+1} \\ \vdots \\ e_k^{h+1} \end{bmatrix} = (\mathrm{id} + h\partial_{y_1}P)^{-1}P \begin{bmatrix} e_1^h \\ \vdots \\ e_k^h \end{bmatrix}$$

On peut alors facilement obtenir des majorations du type $\left|e_\ell^h\right| \leq \frac{C^{h+1}}{h!}r^h$ pour $|y| < r$ (voir thm 4.32). Les théorèmes 4.34 et 4.36 montrent qu'on peut décomposer chaque terme du type $\partial_y^\alpha e_\ell^{h+|\alpha|}$ suivant les e_i^{h+q} où $1 \leq i \leq k$ et $0 \leq q \leq |\alpha|$. Cette section §4 se termine par l'important théorème 4.37 qui affirme que si $c(y; D_y)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\underline{m}$ caractéristique pour la queue d'aronde T alors les $c(y; D_y)e_\ell^{m-1}$ s'expriment en fonction des $e_1, e_2, \ldots, e_k$ (et non pas de leurs dérivées).

Dans la section §6 on se ramène à une situation où les données de Cauchy et le second membre $v(x)$ du problème (0.1) admettent des représentations (cf. point 3° de notre programme) du type ($0 \leq s \leq m-1$) suivant :

$$u_s(x') = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1-s} u^h_{s,\ell}(x')\ e^{h+m-1}_\ell(x_1, \ldots, x_k)$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w+1-m} v^{h-m+1}_{j,\ell}(x)\ e^h_\ell(G_j(x))$$

où on a posé $G_j(x) = (g^j_1(x), \ldots, g^j_k(x))$. Rappelons que dans le théorème 0.2 les opérateurs différentiels $P_{s,\ell}$ [resp. $Q_{j,\ell}$] avec lesquels on définit $u_s(x')$ [resp. $v(x)$] sont d'ordre $\leq -w+s$ [resp. $\leq -w+m-1$]. La section §5 définit - à l'aide de fonctions majorantes convenables les espaces de Banach dans lesquels vivent les séries permettant de définir $v(x)$ et les $u_s(x')$.

Dans la section §7 nous prouvons le théorème 0.2. Nous recherchons la solution $u(x)$ du problème (0.1) sous la forme :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x)\ e^{h+m-1}_\ell(G_j(x))$$

Conformément au point 4° de notre programme nous construisons $u(x)$ par la méthode de l'optique géométrique. Le fait que la queue d'aronde K^j soit caractéristique pour l'opérateur $a(x;D)$ d'ordre m montre qu'on peut exprimer $a(x;D)\left[b^h_{j,\ell}(x)e^{h+m-1}_\ell(G_j(x))\right]$ en fonction des $e^h_i(G_j(x))$ ($1 \leq i \leq k$).

L'hypothèse " à caractéristiques simples" faite sur l'équation (0.5) montre que dans l'expression obtenue en développant $a(x;D)\left[b^h_{j,\ell}(x)e^{h+m-1}_\ell(G_j(x))\right]$ le coefficient de $\partial_{x_0} b^h_{j,\ell}(x) \times e^h_\ell(G_j(x))$ n'est pas nul pour $x = 0$ (voir théorèmes 7.7 et 7.10). On met alors en place un processus formel de résolution par la méthode de l'optique géométrique où $\partial_{x_0} b^h_{j,\ell}$ joue le rôle de terme pivot. Par ailleurs on ramène l'étude des données de Cauchy du problème (0.1) à l'étude d'une formule linéaire récurrente exprimant $b^h_{j,\ell}(0,x')$ (voir théorème 7.16) après avoir inversé la matrice de Vandermonde définie par $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; un procédé analogue a été utilisé par Wagschal dans [23]. On montre alors que le théorème 0.2 est conséquence du théorème 7.18 qui établit l'existence - dans un espace de séries du type $\sum b^h_{j,\ell}\ e^{h+m-1}_\ell$ - d'une solution d'un gros système d'équations. Notre démonstration est effective : elle fournit un algorithme pour calculer de proche en proche les $b^h_{j,\ell}$.

Nous pensons (et espérons) que les méthodes développées dans cet article - notamment l'étude géométrique de $\mathcal{O}_Y[z]$ - peuvent être utilisées pour construire des solutions ramifiées de certaines équations aux dérivées partielles venant de la physique (Euler, par exemple). A titre de motivation nous montrons dans la section §10 qu'il se produit pour l'équation de Burger un phénomène d'éclatement des singularités (typiquement *non-linéaire*) faisant apparaître des solutions algébriques ramifiées du type précédent.

Il semble très probable que l'on puisse étendre les théorèmes 0.1 et 0.2 au cas d'un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante (voir §1), toutefois la solution $u(x)$ aura une structure beaucoup plus compliquée: elle ne sera plus (en général) à croissance lente et il faudra remplacer les opérateurs $R_{j,\ell}(x; D_x)$ du théorème 0.2 par une somme "infinie" d'opérateurs différentiels.

Dans la théorie des singularités la queue d'aronde est appelée singularité (stable) de type A_k (voir [1], [2]). Il serait intéressant de généraliser les résultats de cet article aux singularités de type D_k ou E_k qui (elles aussi) sont stables.

Nous remercions Jean-Marc Delort pour avoir bien voulu lire ce manuscrit.

Nous terminons cette introduction par un petit historique sur le problème de Cauchy Ramifié :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} a(x,D)u = v \\ D^s_{x_0}u(x)\big|_S = u_s(x') \quad 0 \le s \le m-1 \end{cases}$$

où $a(x, D)$ est à caractéristiques multiples de multiplicité constante (voir §1) relativement à T' définie par $x_0 = x_1 = 0$ et les $u_s(x')$ sont holomorphes ramifiées autour de T'. Notons $s_1, \ldots, s_d$ la liste (voir [28]) des hypersurfaces caractéristiques issues de T'.

Le cas où le second membre $v(x)$ est identiquement nul a été traité par Hamada [27] (dans le cas où les $u_s(x')$ ont des singularités polaires) et par Hamada-Leray-Wagschal [28]. Leur méthode consiste à uniformiser le problème et à montrer la convergence d'une solution formelle par des estimations.

Ce même cas ($v(x) \equiv 0$) est repris par :

- Kashiwara et Schapira [29] en utilisant des transformations de contact.
- D'Agnolo et Schapira [26] par les outils de la théorie microlocale des faisceaux.

Dans [15] nous avons résolu le cas général où le second membre $v(x)$ est holomorphe ramifié (quelconque) autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques s_i $1 \leq i \leq d$. Nous avons montré en outre que si les données $v(x)$, $u_s(x')$ $0 \leq s \leq m-1$ sont de détermination finie alors il en est de même de la solution; de plus si la monodromie des données est résoluble [resp. unipotente] alors il est est de même de celle de la solution.

§1. NOTATIONS

Les coordonnées d'un point x de $\mathbb{C}^{n+1}$ seront notées $(x_j)_{0\leq j\leq n}$. Si $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n)$ est un multi-indice à composantes entières, on appelle longueur de β l'entier $|\beta| = \sum_0^n |\beta_i|$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable x_j $(0 \leq j \leq n)$ sera noté indifféremment D_{x_j}, ∂_{x_j} ou $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Si $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un multi-indice de dérivation, nous poserons :

$$D_x^\beta = D_{x^0}^{\beta_0} \times \dots \times D_{x^n}^{\beta_n}.$$

On peut écrire $a(x, D)$ sous la forme

$$a(x, D) = \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta(x) D_x^\beta$$

les fonctions a_β étant holomorphes sur un polydisque ouvert U de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Par définition le polynôme caractéristique de $a(x, D)$ a pour expression:

$$a_m(x;\xi) = \sum_{|\beta|=m} a_\beta(x)\xi^\beta.$$

On sait que l'anneau des polynômes à $n+1$ indéterminées à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine est factoriel; le polynôme caractéristique $a_m(x;\xi)$ de $a(x, D)$ se décompose en facteurs irréductibles :

$$\prod_s a_{m,s}(x;\xi)^{m_s} = a_m(x;\xi)$$

l'entier $m_s \geq 1$ est appelé la multiplicité du facteur irréductible $a_{m,s}(x;\xi)$; $a_{m,s}(x;\xi)$ est un polynôme homogène en ξ et à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine; sans restreindre la généralité on peut supposer ces coefficients holomorphes dans U. Dans cet article nous supposerons que l'équation (0.5) suivante :

$$a_m(0, \dots, 0; \xi_0, 1, 0, \dots, 0) = 0$$

possède m racines simples deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Ceci entraîne que tous les entiers m_s sont égaux à un.

Par convention on dit que $a(x; D)$ est à caractéristiques multiples de multiplicité constante (voir [8]) si les racines de l'équation suivante :

$$\prod_s a_{m,s}(0;\xi_0, 1, 0, \dots, 0) = 0$$

sont toutes simples. on ne suppose pas que les m_s valent 1.

§2. PREUVE DU THÉORÈME 0.1.

Definition 2.0. Soient $p = (x;\xi) \in T^*\mathbb{C}^{n+1}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose alors $\lambda.p = (x;\lambda\xi)$. On dit qu'une partie A de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ est conique ou homogène si $\forall p \in A$, $\forall \mu \in \mathbb{C}^*$, $\mu.p \in A$.

Rappelons que le champ hamiltonien (complexe) H_{a_m} de a_m est défini par :

$$H_{a_m}(x;\xi) = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial a_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right].$$

Le flot (complexe) $\Phi(t,p)$ du champ hamiltonien est défini par :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(t,p) = H_{a_m}(\Phi(t,p)) \\ \Phi(0,p) = p \qquad p \in T^*\mathbb{C}^{n+1} \end{cases}$$

Comme $a_m(x;\xi)$ est homogène de degré m en ξ on démontre aisément la relation suivante :

$$\Phi(t,\lambda.p) = \lambda.\Phi(t\lambda^{m-1},p).$$

Soit $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Comme par hypothèse l'équation polynomiale (0.5) possède m racines distinctes deux à deux, $\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ n'est pas nul. Comme $a_m(x;\xi)$ est homogène en ξ, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe un voisinage ouvert conique V_1 [resp. V_2] de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ dans $T^*\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0$ [resp. de $(0,\ldots,0;,1,0,\ldots,0)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times (\mathbb{C}^n\backslash 0)$] et une fonction homogène en ξ' de degré 1 et holomorphe sur $V_2 : (x;\xi') \to \xi_j(x;\xi')$ de sorte que :

(2.1) : pour tout $(x;\xi_0,\xi')$ de V_1, $(x;\xi') \in V_2$ et l'équation $a_m(x;\xi_0,\xi') = 0$ équivaut à $\xi_0 = \xi_j(x;\xi')$. Naturellement $\xi_j(0,\ldots,0;1,0,\ldots,0) = \lambda_j$. Comme $\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(0,\ldots,0;\ \lambda_j,1,0,\ldots,0)$ n'est pas nul, la différentielle de $(t,x';\xi) \to \Phi(t,(0,x';\xi))$ est inversible au point $(0,0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$. Le théorème d'inversion locale permet alors de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.1. On peut trouver $\epsilon_0 > 0$, un voisinage ouvert (non conique) W_1 [resp. V] de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0) \in \{(x';\xi)\}$ [resp. $\{(x;\xi)\}$] tels que, $D(0,\epsilon_0)$ désignant le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et rayon ϵ_0, l'application:

$$D(0,\epsilon_0) \times W_1 \longrightarrow V$$

$$(t,(x';\xi)) \longmapsto \Phi(t,(0,x';\xi))$$

définisse un difféomorphisme holomorphe tel que $t \neq 0$ entraine $\Phi(t,(0,x';\xi)) \notin S$. Nous supposerons - ce qui est loisible - que $V \subset V_1$.

Rappelons (voir théorème 8.9) que le conormal $N(T)$ de la queue d'aronde T (cf. introduction) est paramétré par :

$$\begin{cases} x_1 = -kz^{k+1} + (k-2)x_k z^{k-1} + \ldots + x_3 z^2 \\ x_2 = (k+1)z^k - (k-1)x_k z^{k-2} \ldots - 2x_3 z \\ x_3 = x_3 \\ \vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda & \xi_{k+1} = 0 \\ \xi_2 = z\lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \xi_k = z^{k-1}\lambda & \xi_n = 0 \end{cases}$$

où $(x_3, \ldots, x_n, z, \lambda) \in \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Note : le point $(0, \ldots, 0; 1, 0, \ldots, 0)$ appartient à $N(T)$. Le théorème suivant fournit la construction de Λ_j. On note $\pi : (x; \xi) \to x$ la projection usuelle de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

Théorème 2.2. (Avec les notations précédentes). On peut trouver ϵ_1 dans $]0, \frac{\epsilon_0}{2^m}[$ et un voisinage ouvert (non conique) W_2 de $(0, \ldots, 0; 1, 0, \ldots, 0) \in \{(x', \xi')\}$ tels que :

1°)

$$\Lambda_j = \{\lambda.\Phi(t, (0, x'; \xi_j(0, x'; \xi'), \xi')) \ / \ |t| < \epsilon_1, \ \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ et } (x'; \xi') \in N(T) \cap W_2\}$$

est incluse dans V_1, est une sous-variété lagrangienne lisse holomorphe conique de $T^*\mathbb{C}^{n+1} \backslash 0$ contenant le point $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$ telle que :

$$a_m(x; \xi)|_{\Lambda_j} \equiv 0 \qquad \pi(\Lambda_j) \cap S = T$$

$$\Lambda_j \cap S = \{(0, x'; \lambda\xi_j(0, x'; \xi'), \lambda\xi') \ / \lambda \in \mathbb{C}^*, (x'; \xi') \in N(T) \cap W_2\}$$

2°). Pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$ et tout voisinage ouvert W_2' (inclus dans W_2) de $(0, \ldots, 0; 1, 0, \ldots, 0) \in \{x'; \xi')\}$:

$$\Lambda_j' = \{\lambda.\Phi(t, (0, x'; \xi_j(0, x'; \xi'), \xi')) \ / \ |t| < \epsilon, \ \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ et } (x'; \xi') \in N(T) \cap W_2'\}$$

est une lagrangienne lisse conique contenant $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$. De plus il existe un voisinage ouvert Ω de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$\pi^{-1}(\Omega) \cap \Lambda_j' = \pi^{-1}(\Omega) \cap \Lambda_j$$

3°). Pour tout voisinage ouvert conique V_1' inclus dans V_1 de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ il existe un voisinage ouvert Ω de $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\pi^{-1}(\Omega)\cap\Lambda_j\cap V_1'=\pi^{-1}(\Omega)\cap\Lambda_j$.

Preuve 1°). Le principe de la démonstration est classique (voir Hörmander [10] page 154). Rappelons que V_1, V_2 et $\xi_j(x;\xi')$ ont été définis avant la propriété (2.1). On vérifie aisément qu'on peut trouver η dans $]0,\frac{1}{100}[$ et ϵ_1 dans $]0,\frac{\epsilon_0}{2^m}[$, qu'on peut trouver un voisinage ouvert connexe W_2 de $(0,\ldots,0;1,0,\ldots,0)$ dans $\{(x';\xi')\}\backslash 0$ et un voisinage ouvert $V'(\subset V_1)$ de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ dans $\{(x;\xi)\}$ de telle sorte que l'on ait :

(2.2) : $\forall\lambda\in D(1,\eta)$ (le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 1 et rayon η), $\forall(x';\xi')\in W_2$, $(0,x',\xi')$ appartient à $V_2\backslash 0$ et $(0,x';\lambda\xi_j(0,x';\xi'),\lambda\xi')$ appartient à W_1 (voir prop. 2.1).

(2.3) : Si $\mu\in\mathbb{C}^*$ et $p\in V'$ sont tels que $\mu.p\in V'$ alors $\mu\in D(1,\eta)$.

Si on rétrécit W_2 alors (2.2) sera encore vérifiée, par conséquent nous supposerons qu'en outre on a :

(2.4) : Pour tout t de $D(0,\epsilon_1)$ et tout (x',ξ') de W_2, $\Phi(t;(0,x';\xi_j(0,x';\xi'),\xi'))$ appartient à $V'\subset V_1$.

D'après le théorème 8.9 $N(T)\backslash 0$ est une sous-variété lisse de $T^*\mathbb{C}^n\backslash 0$, la propriété (2.2) montre alors que :

$$I=\{(0,x';\xi_j(0,x';\xi'),\xi')\ /\ (x',\xi')\in W_2\cap N(T)\}\subset W_1$$

est une sous-variété isotrope lisse de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ incluse dans W_1. La proposition 2.1 et la propriété (2.4) montrent alors que : $(0<\epsilon_1<2^{-1}\epsilon_0)$

$$A_j=\{\Phi(t;p)\ /|t|<\epsilon_1,p\in I\}\subset V'$$

est une sous-variété holomorphe lisse de dimension $n+1$ incluse dans $V'(\subset V_1)$ contenant le point $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$. Comme $a_m(x;\xi)$ est nul sur I et est constant sur les courbes intégrales du champ H_{a_m}, on constate que la restriction de a_m à A_j est nulle. De plus pour chaque point p de I, T_pA_j est engendré par H_{a_m} et T_pI (qui est isotrope), donc la 2-forme $\sigma=\sum_0^n dx_j\wedge d\xi_j$ s'annule sur T_pA_j. Comme $\Phi^*(t,\cdot)\sigma=\sigma$ on vérifie alors aisément que A_j est *lagrangienne*. Par ailleurs la proposition 2.1 et le fait que $I\subset W_1$ montrent que si $\Phi(t,p)\in S$ avec $|t|<\epsilon_1$ et $p\in I$ alors t est nul. **Donc $A_j\cap S=I$.**

Posons maintenant $\Lambda_j=\mathbb{C}^*A_j=\{\lambda.\Phi(t;p)\ /\ |t|<\epsilon_1,p\in I,\lambda\in\mathbb{C}^*\}$. Pour achever la preuve du 1°) du théorème nous devons prouver que Λ_j est une *lagrangienne lisse* de dimension $\underline{n+1}$. Pour cela nous allons prouver que pour tout (t,p) de $D(0,\epsilon_1)\times I$ il existe un voisinage ouvert W de $\Phi(t,p)$ dans $T^*\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0$ tel que :

$$W\cap A_j = W\cap \mathbb{C}^* A_j = W\cap \Lambda_j$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel W n'existe pas. Il existe alors pour chaque entier naturel $q\geq 1$, $\lambda_q\in\mathbb{C}^*$, $t_q\in D(0,\epsilon_1)$, $p_q\in I$ tels que : $\Phi(t_q,p_q)\in A_j$

$$\lambda_q.\Phi(t_q,p_q)\notin A_j \text{ et } \lim_{q\to+\infty}\lambda_q.\Phi(t_q,p_q)=\Phi(t,p).$$

Comme A_j est incluse dans V' qui est ouvert et $\Phi(t,p)$ appartient à V', il existe $N>0$ tel que pour tout $q\geq N$: $\lambda_q.\Phi(t_q,p_q)$ (et $\Phi(t_q,p_q)$) appartient à V'. La propriété (2.3) appliquée avec λ_q à la place de μ montre alors que pour $q\geq N$, $\lambda_q\in D(1,\eta)$. La définition de I et la propriété (2.2) montrent alors que $\lambda_q.p_q$ appartient à W_1 pour tout $q\geq N$. De plus pour tout $q\geq N$ on a $|t_q|<\epsilon_1\leq\epsilon_0 2^{-m}$ et $|\lambda_q|\geq 1-\eta\geq 1-\frac{1}{100}$. Par conséquent pour tout $q\geq N$ on a :

$$\frac{t_q}{\lambda_q^{m-1}}\in D(0,\epsilon_0),\ \lambda_p.p_q\in W_1,\ p_q\in I\subset W_1$$

$$\lambda_q.\Phi(t_q,p_q)=\Phi\left(\frac{t_q}{\lambda_q^{m-1}},\lambda_q.p_q\right)\underset{q\to+\infty}{\longrightarrow}\Phi(t,p).$$

D'après la proposition 2.1 Φ définit un difféomorphisme de $D(0,\epsilon_0)\times W_1$ sur son image, on constate alors que :

$$\lim_{q\to\infty}\frac{t_q}{\lambda_q^{m-1}}=t\in D(0,\epsilon_1),\ \lim_{q\to\infty}\lambda_q.p_q=p\in I.$$

Comme par hypothèse p et les p_q appartiennent à I on peut écrire :

$$p=(0,x';\xi_j(0,x';\xi'),\xi'),\ p_q=(0,x'^q;\xi_j(0,x'^q;\xi'^q),\xi'^q)$$

où $(x';\xi')$ et les $(x'^q;\xi'^q)$ appartiennent à $W_2\cap N(T)$. On vient de voir que $\lim_{q\to\infty}(x'^q;\lambda_q\xi'^q)=(x';\xi')$. Comme W_2 est ouvert et $N(T)$ est conique ceci entraîne que $(x'^q;\lambda_q\xi'^q)\in W_2\cap N(T)$ pour q assez grand. On vérifie alors aisément (vu la définition de I) que pour q assez grand $\lambda_q.\Phi(t_q,p_q)$ appartient à A_j, ce qui est absurde. Ceci prouve le 1°). Prouvons alors le 2°).

D'après ce qui précède Λ'_j est bien une lagrangienne *conique* lisse. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas de voisinage ouvert Ω de

$0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\pi^{-1}(\Omega) \cap \Lambda_j = \pi^{-1}(\Omega) \cap \Lambda'_j$. comme, par construction, Λ_j contient Λ'_j, il existe - pour chaque entier naturel q - $t_q \in D(0, \epsilon_1)$ et $(x'^q, \xi'^q) \in W_2 \cap N(T)$ de sorte que :

$$(2.5) : \alpha_q = \Phi(t_q, (0, x'^q; \xi_j(0, x'^q; \xi'^q), \xi'^q)) \notin \Lambda'_j$$

$$\lim_{q \to \infty} \pi(\alpha_q) = 0$$

Quitte à considérer des suites extraites on peut supposer que :

$$\lim_{q \to \infty} t_q = t \in \overline{D}(0, \epsilon_1), \ (x'^q; \xi'^q) \underset{q \to \infty}{\longrightarrow} (x', \xi') \in \overline{W}_2 \cap N(T) \backslash 0.$$

D'après la propriété (2.2), $(0, x'; \xi_j(0, x'; \xi'), \xi')$ appartient à W_1. La proposition 2.1 montre alors que α_q converge vers $\Phi(t, (0, x'; \xi_j(0, x'; \xi'), \xi'))$, comme $\pi(\alpha_q)$ tend vers $0 \in S$ on a forcément $t = 0$ puis $x' = 0$. Par conséquent $(0; \xi') \in N(T)\backslash 0$, d'après le théorème 8.9 il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\xi' = \lambda(1, 0, \ldots, 0)$. Par conséquent en reprenant la formule (2.5), on peut écrire pour q assez grand :

$$\frac{1}{\lambda}.\alpha_q = \Phi(\lambda^{m-1} t_q, (0, x'^q; \frac{1}{\lambda}\xi_j \left(0, x'^q; \xi'^q), \frac{\xi'^q}{\lambda})\right) \notin \Lambda'_j.$$

Ceci est absurde; ceci prouve le 2°). Comme le 3°) est une conséquence facile du 2°), le théorème 2.2 est prouvé.

Remarque 2.3. Soit Λ une lagrangienne holomorphe lisse homogène incluse dans V_1 et vérifiant les quatre propriétés a), b), c), d) du théorème 0.1. Soit $(0, x'; \xi_0, \xi') \in \Lambda$, les propriétés c), (2.1) et d) montrent alors que $\xi_0 = \xi_j(0, x'; \xi')$ et $(x'; \xi') \in N(T)$. La propriété c) montre en outre que Λ est invariante sous l'action du flot Φ. Comme $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0) \in \Lambda$, la propriété d) et le mécanisme de la preuve du théorème 2.2 permettent de voir que Λ et Λ_j contiennent le même germe en $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$ de variété lagrangienne holomorphe lisse homogène. Par conséquent Λ coïncide avec Λ_j dans un petit voisinage conique de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$.

Proposition 2.4. Il existe un voisinage ouvert conique V'_1 (inclus dans $V_1 \cap T^*\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0$) de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$, il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{C}^n = \{(x_0, z, x_3, \ldots, x_n)\}$, on peut trouver des fonctions holomorphes sur U (à valeurs complexes) $u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n) \to h_i(u)$ $(1 \leq i \leq 2)$, $u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n) \mapsto g_p(u)$ $(3 \leq p \leq n)$ de sorte que l'on ait :

1°)

$$(*)\quad \begin{cases} h_1(0,z,x_3,\ldots,x_n) = -kz^{k+1} + (k-2)x_k z^{k-1} \\ \qquad\qquad + (k-3)x_{k-1}z^{k-2} + \ldots + x_3 z^2 \\ h_2(0,z,x_3,\ldots,x_n) = (k+1)z^k - (k-1)x_k z^{k-2} \\ \qquad\qquad - (k-2)x_{k-1}z^{k-3} \ldots - 2x_3 z \\ g_3(0,z,x_3,\ldots,x_n) = z^2 \\ \vdots \\ g_k(0,z,x_3,\ldots,x_n) = z^{k-1} \\ g_{k+1}(0,z,x_3,\ldots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(0,z,x_3,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}$$

et l'application : $U \times \mathbb{C}^* \to \Lambda_j \cap V_1'$

$$(u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n), \lambda) \to (x_0, h_1(u), h_2(u), x_3, \ldots, x_n;$$

$$\lambda g_0(u), \lambda, \lambda z, \lambda g_3(u), \ldots, \lambda g_n(u)) = (x, \xi)$$

où on a posé $g_0(u) = \xi_j(x_0, h_1(u), h_2(u), x_3, \ldots, x_n; 1, z, g_3(u), \ldots, g_n(u))$ soit l'inverse d'une carte locale de Λ_j (et donc un difféomorphisme) définie sur tout $\Lambda_j \cap V_1'$.

2°) Si $(x_0, h_1(u), h_2(u), x_3, \ldots, x_n)$ tend vers 0 alors $u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n)$ tend vers 0.

Preuve. désignons par $\mathcal{H}$ l'hypersurface lisse de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ d'équation $\xi_1 = 1$. $\mathcal{H}$ est transverse à Λ_j (conique) au point $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0) = \tilde{m}_0$. Il existe donc un voisinage ouvert W (dans $T^*\mathbb{C}^{n+1}$) de $\tilde{m}_0$ tel que $\mathcal{H} \cap W \cap \Lambda_j$ ($\ni \tilde{m}_0$) soit une sous-variété holomorphe lisse de dimension n.

Lemme 2.5. $\mathcal{H} \cap W \cap \Lambda_j$ est transverse - au point $\tilde{m}_0$ - à la sous-variété définie par les équations : $x_0 = 0,\ x_3 = \ldots = x_n = 0,\ \xi_2 = 0$.

Preuve du lemme. Rappelons que Λ_j est conique et que le champ hamiltonien H_{a_m} est tangent à Λ_j. Notons $t \to (x(t); \xi(t))$ la courbe intégrale de H_{a_m} issue de $\tilde{m}_0 = (x(0); \xi(0))$. La courbe $t \to \Gamma(t) = (x(t); \frac{\xi_0(t)}{\xi_1(t)}, 1, \frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)}, \ldots, \frac{\xi_n(t)}{\xi_1(t)})$ est définie pour t dans un petit voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}$ et est tracée dans $\mathcal{H} \cap W \cap \Lambda_j$. Comme $\partial_{\xi_0} a_m(\tilde{m}_0) \neq 0$ on constate que $\Gamma'(0)$ est transverse (en $\tilde{m}_0$) à l'hyperplan S d'équation $x_0 = 0$. Par ailleurs, la paramétrisation de $N(T)$ rappelée au début de cette section et le théorème 2.2 montrent que $S \cap \Lambda_j \cap \mathcal{H} \cap W$ est transverse - au point $\tilde{m}_0$ - à la sous-variété définie par les équations : $x_3 = \ldots = x_n = 0$, $\xi_2 = 0$. On obtient alors immédiatement le lemme 2.5.

Comme $\mathcal{H} \cap W \cap \Lambda_j$ est de dimension n, le lemme 2.5 montre qu'il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^n = \{u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n)\}$ et des fonctions holomorphes sur U $h_1(u), h_2(u), g_0(u), g_p(u)$ $(3 \leq p \leq n)$ telles que :

$$u = (x_0, z, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_0, h_1(u), h_2(u), x_3, \ldots, x_n;$$
$$g_0(u), 1, z, g_3(u), \ldots, g_n(u))$$

soit l'inverse d'une carte locale de $\mathcal{H} \cap W \cap \Lambda_j$ au point $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0)$. Par construction Λ_j est caractéristique et incluse dans V_1, la propriété (2.1) entraîne alors que $g_0(u) = \xi_j(x_0, h_1(u), h_2(u), x_3, \ldots, x_n; 1, z, g_3(u), \ldots, g_n(u))$. L'expression de $\Lambda_j \cap S$ fournie par le théorème 2.2 et la paramétrisation de $N(T)$ rappelée au début de cette section (voir aussi théorème 8.9) montrent que les fonctions $h_1(0, \cdot)$, $h_2(0, \cdot)$, $g_p(0, \cdot)$ $(3 \leq p \leq n)$ vérifient nécessairement les conditions (*) de la proposition. On obtient alors aisément le 1°). Le 2°) est une simple conséquence du 3°) du théorème 2.2. Ceci prouve la proposition 2.4.

Corollaire 2.6. (Avec les notations de la proposition 2.4). soient D un disque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}$ et P un polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^{n-1} = \{(z, x_3, \ldots, x_n)\}$ tels que $D \times P \subset U$. Alors il existe un voisinage ouvert conique V_1' de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots, 0) \in T^*\mathbb{C}^{n+1}$ tels que pour tout $x_0 \in D$ l'application :

$$(u' = (z, x_3, \ldots, x_n), \lambda) \in P \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (h_1(x_0, u'), h_2(x_0, u'), x_3, \ldots, x_n;$$
$$\lambda, \lambda z, \lambda g_3(x_0, u'), \ldots, \lambda g_n(x_0, u'))$$

définit un plongement dont l'image est une lagrangienne holomorphe lisse conique $\Lambda_j(x_0)$ de $T^*\mathbb{C}^n \backslash 0$, et que

$$\Lambda_j \cap V_j' = \{(x_0, x'; \xi_0, \xi') \;/\; x_0 \in D, (x', \xi') \in \Lambda_j(x_0), \xi_0 = \xi_j(x_0, x'; \xi')\}.$$

Note. Les $\Lambda_j(x_0)$ constituent une déformation holomorphe du conormal $N(T) = \Lambda_j(0)$ de la queue d'aronde T (restreinte à un voisinage de l'origine).

Preuve. Considérons D et P comme dans le corollaire 2.6. Pour chaque x_0 de D la proposition 2.4 montre que l'application :

$$(u', \lambda) \in P \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (h_1(x_0, u'), h_2(x_0, u'), x_3, \ldots, x_n;$$

$$\lambda g_0(x_0,u'),\lambda,\lambda z,\lambda g_3(x_0,u'),\ldots,\lambda g_n(x_0,u'))$$

définit un plongement. Comme $g_0(x_0,u') = \xi_j(x_0,h_1(x_0,u'),h_2(x_0,u'),x_3,\ldots,x_n;1,z,g_3(x_0,u'),\ldots,g_n(x_0,u'))$ avec $u'=(z,x_3,\ldots,x_n)$ il est clair que pour chaque $x_0\in D$ l'application du corollaire 2.6 définit un plongement. Ainsi les $\Lambda_j(x_0)$ sont des sous-variétés lisses coniques de dimension n de $T^*\mathbb{C}^n\backslash 0$. Comme la 1-forme $\xi_0dx_0+\xi_1dx_1+\ldots\xi_ndx_n$ s'annule sur la lagrangienne conique Λ_j il est clair que $\forall x_0\in D$ la 1-forme $\xi_1dx_1+\ldots+\xi_ndx_n$ s'annule sur $\Lambda_j(x_0)$. Le corollaire 2.6 est alors une conséquence facile de la proposition 2.4.

Maintenant nous munissons $\mathbb{C}^{2n-1}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n;p_2,\ldots,p_n)\}$ de la structure de contact standard définie par la 1-forme $\omega = dx_1-p_2dx_2\ldots - p_ndx_n$ et nous introduisons les sous-variétés legendriennes suivantes :

Définition 2.7. (Avec les notations du corollaire 2.6). Pour tout $x_0\in D$ nous posons

$$\mathcal{L}(x_0)=\{(x';p_2,\ldots,p_n)\ /\ (x';1,-p_2,\ldots,-p_n)\in\Lambda_j(x_0)\}$$

$\mathcal{L}(x_0)$ définit une legendrienne holomorphe lisse de $\mathbb{C}^{2n-1}$ et est l'image du plongement suivant :

$$u'=(z,x_3,\ldots,x_n)\in P\longrightarrow(h_1(x_0,u'),h_2(x_0,u'),x_3,\ldots,x_n;$$

$$-z,-g_3(x_0,u'),\ldots,-g_n(x_0,u'))$$

Notons que $\mathcal{L}(0)$ correspond à la queue d'aronde T et est paramétrée par :

$$u'=(z,x_3,\ldots,x_n)\rightarrow(h_1(0,u'),h_2(0,u'),x_3,\ldots,x_n;$$

$$-z,,-z^2,\ldots,-z^{k-1},0,\ldots,0)$$

où

$$h_1(0,u')=-kz^{k+1}+(k-2)x_kz^{k-1}+(k-3)x_{k-1}z^{k-2}+\ldots+x_3z^2$$

$$h_2(0,u')=(k+1)z^k-(k-1)x_kz^{k-2}-(k-2)x_{k-1}z^{k-3}\ldots-2x_3z$$

Par conséquent, dans le système de coordonnées $(x_1,x_2,\ldots,x_n;p_2,\ldots,p_n)$, $\mathcal{L}(0)$ est paramétrée par la fonction phase $S(z,x_3,\ldots,x_n)=z^{k+1}-x_kz^{k-1}\ldots - x_3z^2$:

$$\mathcal{L}(0)=\left\{\left(S-z\,\frac{\partial S}{\partial z},\frac{\partial S}{\partial z},x_3,\ldots,x_n;-z,\frac{\partial S}{\partial x_3},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)\right\}.$$

Le théorème suivant montre que nous pouvons paramétrer les legendriennes $\mathcal{L}(x_0)$ par des fonctions phases $S(x_0,\cdot)$ constituant une déformation de S.

Théorème 2.8 (Avec les notations du corollaire 2.6). La fonction $S(x_0,z,x_3,\ldots,x_n)=(h_1+zh_2)(x_0,z,x_3,\ldots,x_n)$ est holomorphe sur $D\times P$ et vérifie les relations $\frac{\partial S}{\partial x_\ell}=-g_\ell$ $(3\leq \ell\leq n)$, $\frac{\partial S}{\partial z}=h_2$ de sorte que pour tout x_0 de D on a :

$$\mathcal{L}(x_0)=\{(S(x_0,u')-z\frac{\partial S}{\partial z}(x_0,u'),\frac{\partial S}{\partial z}(x_0,u'),x_3,\ldots,x_n;$$
$$-z,\frac{\partial S}{\partial x_3}(x_0,u'),\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}(x_0,u'))/u'=(z,x_3,\ldots,x_n)\in P\}$$

en outre $S(0,z,x_3,\ldots,x_n)=z^{k+1}-x_kz^{k-1}\ldots-x_3z^2$.

Preuve. Soit $x_0\in D$. Comme la 1-forme $dx_1-\sum_2^n p_\ell dx_\ell$ est nulle sur $\mathcal{L}(x_0)$, la 1-forme $d(x_1-p_2x_2)-\sum_3^n p_\ell dx_\ell+x_2dp_2$ est nulle sur $\mathcal{L}(x_0)$. D'après la définition 2.7 $\mathcal{L}(x_0)$ est paramétrée par :

$$x_1=h_1(x_0,u'),x_2=h_2(x_0,u'),\ p_2=-z,\ p_\ell=-g_\ell(x_0,u')\ (3\leq\ell\leq n)$$

où $u'=(z,x_3,\ldots,x_n)$ décrit le polydisque P. Par conséquent, x_0 étant fixé, la 1-forme suivante est identiquement nulle sur le *polydisque ouvert* P :

$$d(h_1+zh_2)+\sum_3^n g_\ell dx_\ell-h_2dz\equiv 0$$

La fonction $S(x_0,\cdot)$ définie par $S(x_0,z,x_3,\ldots,x_n)=(h_1+zh_2)(x_0,z,x_3,\ldots,x_n)$ est alors holomorphe sur P et vérifie :

$$\frac{\partial S}{\partial x_\ell}=-g_\ell\ \ (3\leq\ell\leq n),\ \ \frac{\partial S}{\partial z}=h_2$$

On obtient alors $x_1=h_1=S-z\,\frac{\partial S}{\partial z}$, $x_2=h_2=\frac{\partial S}{\partial z}$, $\mathcal{L}(x_0)$ est donc bien paramétrée comme indiqué dans le théorème. Enfin, dans le système de coordonnées $(x_1,x_2,\ldots,x_n;p_2,\ldots,p_n)$, il n'existe qu'une seule fonction phase des variables $(z,x_3,\ldots,x_n)$ paramétrant $\mathcal{L}(0)$ comme indiqué dans le théorème. Par conséquent on a : $S(0,z,x_3,\ldots,x_n)=z^{k+1}-x_kz^{k-1}\ldots-x_3z^2$. Ceci prouve le théorème 2.8.

Nous admettons provisoirement le théorème suivant (qui sera une conséquence du théorème 2.11) et montrerons comment - via le corollaire 2.10 - il entraîne le 1°) du théorème 0.1.

Théorème 2.9. Posons $x'' = (x_2, \ldots, x_n)$. Il existe des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$: $(x_0, z, x'') \longmapsto Z(x_0, z, x'')$, $(x_0, x'') \longmapsto X_j(x_0, x'')$ $(1 \le j \le n)$ telles que sur un voisinage de l'origine on ait identiquement :

$$\begin{cases} Z(0, z, x'') = z \\ X_j(0, x'') = x_j, \ 2 \le j \le n \\ X_1(0, x'') = 0 \end{cases}$$

et

$$S(x_0, z, x_3, \ldots, x_n) - zx_2 = Z^{k+1}(x_0, z, x'') - X_k(x_0, x'')Z^{k-1}(x_0, z, x'') \ldots$$

$$-X_2(x_0, x'')Z(x_0, z, x'') - X_1(x_0, x'').$$

Dans le corollaire suivant nous noterons $\pi(x_1, \ldots, x_n;\ p_2, \ldots, p_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ la projection usuelle.

Théorème 2.10. (Avec les notations de la définition 2.7 et du théorème 2.9). Si le disque $D(\subset \mathbb{C})$ du corollaire 2.6 est choisi suffisamment petit alors on peut trouver un voisinage ouvert connexe V de $0 \in \mathbb{C}^n = \{x' = (x_1, x'')\}$ de sorte que les fonctions $(x_0, x') \to X_j(x_0, x'')$ $(1 \le j \le n)$ soient holomorphes sur $D \times V$ et que pour tout x_0 de D on ait :

$$\pi(\mathcal{L}(x_0)) \cap V = \{(x_1, x'') \in V \ / \ D(x_1 + X_1(x_0, x''), X_2(x_0; x''), \ldots,$$

$$X_k(x_0, x'')) = 0\} = \pi(\Lambda_j(x_0)) \cap V.$$

où $D(X_1, \ldots, X_k)$ désigne le discriminant de l'équation :

$$Z^{k+1} - X_k Z^{k-1} \ldots - X_2 Z - X_1 = 0.$$

Preuve du corollaire (à partir du théorème 2.9). Pour $R > 0$ nous noterons $V^p(R)$ le polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^p$ et de rayon $R > 0$; comme $Z(0, z, x'') \equiv z$ le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe deux disques ouverts $\tilde{\Delta}, \Delta$ de centre $0 \in \mathbb{C}$ de sorte que si $R > 0$ et le disque D du corollaire 2.6 sont suffisamment petits alors $Z(x_0, z, x'')$ [resp. chaque $X_j(x_0, x'')$] est holomorphe sur $D \times \Delta \times V^{n-1}(R)$ [resp. $D \times V^{n-1}(R)$], $\partial_z Z(x_0, z, x'')$ ne s'annule pas sur $D \times \Delta \times V^{n-1}(R)$] et :

$$\text{(2.6)} \qquad \forall Z \in \tilde{\Delta}, \ \forall (x_0, x'') \in D \times V^{n-1}(R), \exists! z \in \Delta, \ Z(x_0, z, x'') = Z.$$

et $\underline{\Delta \times V^{n-2}(R)}$ est *inclus* dans le polydisque $\underline{P}$ du corollaire 2.6. Nous *fixons* ainsi $\tilde{\Delta}$ et Δ.

Le 2°) de la proposition 2.4 montre que - quitte à diminuer encore $R > 0$ et D - les z utilisés pour paramétrer $\mathcal{L}(x_0) \cap \pi^{-1}(V^n(R))$ comme indiqué dans le théorème 2.8 (où $x_0 \in D$) appartiennent nécessairement à Δ. De plus comme les $X_\ell(0,0)$ sont nuls (voir thm 2.9) nous pouvons supposer R et D tels que pour chaque $(x_0, x') \in D \times V^n(R)$, tous les nombres complexes Z vérifiant les deux équations suivantes : $(x' = (x_1, x''))$

$$x_1 + X_1(x_0, x'') = -kZ^{k+1} + (k-2)X_k(x_0, x'')Z^{k-1} + \ldots + X_3(x_0, x'')Z^2$$

(2.7)

$$X_2(x_0, x'') = (k+1)Z^k - (k-1)X_k(x_0, x'')Z^{k-2} \ldots - 2X_3(x_0, x'')Z$$

appartiennent au disque $\tilde{\Delta}$ de l'assertion (2.6). Nous *fixons* ainsi $\underline{R > 0}$ et D. Maintenant posons $X = (X_1, \ldots, X_k)$ et

$$F(X, Z) = Z^{k+1} - X_k Z^{k-1} \ldots - X_2 Z - X_1.$$

Soit $x_0 \in D$. Considérons un point $x' = (x_1, x'')$ de $V^n(R) \cap \pi(\mathcal{L}(x_0))$ et montrons que x' vérifie l'équation :

$$D(x_1 + X_1(x_0, x''), X_2(x_0, x''), \ldots, X_k(x_0, x'')) = 0.$$

D'après le choix de (R, D) et le théorème 2.8 il existe $z \in \Delta$ tel que $x_1 = (S - z\partial_z S)\ (x_0, z, x_3, \ldots, x_n)$ et $x_2 = \partial_z S(x_0, z, x_3, \ldots, x_n)$. Par ailleurs le théorème 2.9 montre que par définition on a :

$$(2.8). \qquad S(x_0, z, x_3, \ldots, x_n) - zx_2 = F(X(x_0, x''), Z(x_0, z, x''))$$

Comme $x_2 = \partial_z S$ et que $\partial_z Z(x_0, z, x'') \neq 0$ ($\partial_z Z$ ne s'annule pas sur $D \times \Delta \times V^{n-1}(R)$) on vérifie aisément que :

$$\partial_Z F(X(x_0, x''), Z(x_0, z, x'')) = 0$$

On en déduit alors que $X_2(x_0, x'') =$

$$(k+1)Z^k(x_0, z, x'') - (k-1)X_k(x_0, x'')Z^{k-2}(x_0, z, x'') \ldots$$

$$-2X_3(x_0, x'')Z(x_0, z, x'').$$

Rappelons que $x_1 + X_1(x_0, x'') =$

$$S - z\partial_z S + X_1(x_0, x'') = F(X(x_0, x''), Z(x_0, z, x'')) + X_1(x_0, x'').$$

En remplaçant $X_2(x_0, x'')$ par la valeur précédemment trouvée on obtient $x_1 + X_1(x_0, x'') =$

$$-kZ^{k+1}(x_0, z, x'') + (k-2)X_k(x_0, x'')Z^{k-1}(x_0, z, x'') + \dots$$
$$+X_3(x_0, x'')Z^2(x_0, z, x'').$$

On peut alors affirmer que (voir Proposition 8.4) :

$$D(x_1 + X_1(x_0, x''), X_2(x_0, x''), \dots, X_k(x_0, x'')) = 0.$$

Réciproquement considérons $(x_0, x') \in D \times V^n(R)$ vérifiant l'équation précédente. L'étude effectuée dans l'appendice §8 sur la queue d'aronde montre alors qu'il existe $Z \in \mathbb{C}$ tel que les deux relations (2.7) soient vérifiées. D'après le choix de (R, D) un tel Z appartient à $\tilde{\Delta}$. D'après l'assertion (2.6) il existe alors $z \in \Delta$ tel que $Z = Z(x_0, z, x'')$. Rappelons que d'après le choix de (R, D), $\Delta \times V^{n-2}(R)$ est inclus dans le polydisque P du théorème 2.8. Comme $0 = (\partial_Z F)(X(x_0, x''), Z(x_0, z, x''))$, la relation (2.8) (conséquence du théorème 2.9) permet de voir que $x_2 = (\partial_z S)(x_0, z, x_3, \dots, x_n)$. En ajoutant à la première des relations (2.7) le produit de Z et de la deuxième de ces relations - avec $Z = Z(x_0, z, x'')$ - on vérifie alors aisément que :

$$x_1 = F(X(x_0, x''); Z(x_0, z, x'')) = S(x_0, z, x_3, \dots, x_n) - x_2 z$$
$$= S(x_0, z, x_3, \dots, x_n) - z\partial_z S.$$

Comme $(z, x_3, \dots, x_n) \in \Delta \times V^{n-2}(R) \subset P$, le théorème 2.8 montre que x' appartient alors à $\pi(\mathcal{L}(x_0)) \cap V^n(R)$. D'après la définition 2.7 on a $\pi(\mathcal{L}(x_0)) = \pi(\Lambda_j(x_0))$, on obtient alors immédiatement le corollaire 2.10 en prenant $V = V^n(R)$.

Preuve du 1°) du théorème 0.1. La lagrangienne Λ_j a été construite dans le théorème 2.2, voir aussi la remarque 2.3. Fixons un disque ouvert D de centre $0 \in \mathbb{C}$ et un voisinage ouvert V de $0 \in \mathbb{C}^n$ de sorte qu'on puisse appliquer les corollaires 2.10 et 2.6. Le corollaire 2.6 permet de voir qu'il existe un voisinage ouvert conique V_1' de $(0, \dots, 0; \lambda_1, 1, 0, \dots, 0)$ tel que :

$$\pi(\Lambda_j \cap V_1') = \{(x_0, x') \ / \ x_0 \in D, \ x' \in \pi(\Lambda_j(x_0)) \cap V\}.$$

Posons $g_1^j(x) = x_1 + X_1(x_0, x_2, \ldots, x_n)$ et $g_\ell^j(x) = X_\ell(x_0, x_2, \ldots, x_n)$ pour $2 \leq \ell \leq k$. D'après le théorème 2.9 on a $g_\ell^j(0, x') = x_\ell$ pour $1 \leq \ell \leq k$ (sur $D \times V$). Le corollaire 2.10 montre alors que

$$\pi(\Lambda_j \cap V_1') = \{(x_0, x') \in D \times V \ / \ D(g_1^j(x_0, x'), \ldots, g_k^j(x_0, x')) = 0\}.$$

D'après le 3°) du théorème 2.2 il existe un voisinage ouvert Ω inclus dans $D \times V$ de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap \pi(\Lambda_j) = \Omega \cap \pi(V_1' \cap \Lambda_j)$. Il est alors clair que $K^j = \pi(\Lambda_j) \cap \Omega$ est une queue d'aronde de sommet 0 définie par l'équation $D(g_1^j(x), \ldots, g_k^j(x)) = 0\}$. Montrons que K^j est caractéristique pour $a(x; D)$. Par construction (cf. thm 2.2) la restriction de $a_m(x; \xi)$ à Λ_j est identiquement nulle, comme la lagrangienne homogène lisse Λ_j contient le conormal de la partie *lisse* de sa projection (i.e. $\pi(\Lambda_j)$) sur la base il est alors clair que K^j est caractéristique. Maintenant prouvons que $N(K^j)$ et Λ_j coïncident au-dessus d'un petit voisinage ouvert de l'origine. Comme $D(g_1^j, \ldots, g_k^j)(0, x') = D(x_1, \ldots, x_k)$, le 2°) du théorème 8.9 permet de voir que tout point lisse de $S \cap \Omega \cap T$ est un point lisse de K^j. Comme $N(K^j)$ et Λ^j coïncident *au-dessus de* K^j_{reg}, on vérifie alors aisément - avec les notations du 2°) du théorème 2.2 - qu'il existe un voisinage ouvert W_2' (inclus dans W_2) de $(0 \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) \in \{(x'; \xi')\}$ tel que

$$\{(0, x'; \xi_j(0, x'; \xi'), \xi') \ / \ (x'; \xi') \in W_2' \cap N(T)\} \subset N(K^j).$$

Donc $(0 \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0 \ldots, 0) \in N(K^j)$. Comme $N(K^j) \backslash 0$ est une lagrangienne lisse homogène *caractéristique*, elle est invariante sous l'action du flot hamiltonien Φ de $a_m(x; \xi)$. Quitte à réduire W_2', le 2°) du théorème 2.2 montre qu'il existe $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$ tel que $N(K^j) \supset \Lambda_j'$ puis qu'il existe un voisinage ouvert U_1 de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $N(K^j) \cap \pi^{-1}(U_1) \supset \pi^{-1}(U_1) \cap \Lambda_j$.

Par ailleurs considérons un voisinage ouvert conique V_2 de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0 \ldots, 0)$ tel que $\Lambda_j \cap V_2$ soit *fermée* dans V_2. Comme K^j est une queue d'aronde de sommet 0, elle ne possède qu'une seule codirection au-dessus de l'origine (voir théorème 8.9) à savoir : $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0 \ldots, 0)$. Par conséquent il existe un voisinage ouvert U_2 de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\pi^{-1}(U_2) \cap N(K^j) \subset V_2$. Comme Λ_j et $N(K^j)$ coïncident au-dessus de $K^j_{\text{reg}} \cap U_2$ on voit que $N(K^j) \cap \pi^{-1}(U_2) \subset \Lambda_j \cap V_2$. On a donc prouvé que $N(K^j)$ et Λ_j coïncident au-dessus d'un petit voisinage ouvert de l'origine. Ceci prouve le 1°) du théorème 0.1.

Preuve du théorème 2.9 : Nous allons reprendre en les adaptant à notre situation les arguments utilisés dans [1] et [18] pour étudier les déploiements V-versels. Nous devons prouver le théorème suivant qui est un peu plus fort que le théorème 2.9.

Théorème 2.11. Posons $E(x_0,z,x') = S(x_0,z,x_3,\dots,x_n) - zx_2 - x_1$. Alors il existe des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$:

$$(x_0,z,x') \longmapsto Z(x_0,z,x')$$

$$(x_0,x') \longmapsto X_p(x_0,x') \;\; 1 \le p \; \le n.$$

telles que sur un voisinage de l'origine on ait

$$X_p(0,x') = x_p \;\; 1\le p \; \le n, \;\; Z(0,z,x') = z$$

et

$$E(x_0,z,x') = Z^{k+1}(x_0,z,x') - X_k(x_0,x')Z^{k-1}(x_0,z,x')\dots$$
$$-X_2(x_0,x')Z(x_0,z,x') - X_1(x_0,x').$$

Note. On obtient le théorème 2.9 en faisant $x_1 = 0$ dans l'énoncé du théorème précédent. La démonstration du théorème utilise le lemme suivant :

Lemme 2.12 (Avec les notations précédentes). Il existe un germe holomorphe en $0 \in \{(x_0,z,x')\}$ de champ de vecteurs v tel que :

1°) $\quad v = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{p=1}^{n} f_p(x_0,x')\dfrac{\partial}{\partial x_p} + g(x_0,z,x')\dfrac{\partial}{\partial z}.$

2°) $\quad v.E \equiv 0.$

Preuve du lemme 2.12. D'après le théorème 2.8 on a $S(0,z,x_3,\dots,x_n) = z^{k+1} - x_k z^{k-1}\dots - x_3 z^2$, la définition de $E(x_0,z,x')$ montre alors que : $E(0,z,x') = z^{k+1} - x_k z^{k-1}\dots - x_2 z - x_1$, $\frac{\partial E}{\partial z}(0,z,0) = (k+1)z^k$. $\frac{\partial E}{\partial x_p}(0,z,x') = -z^{p-1}$ $(1 \le p \le k)$.

On vérifie alors aisément que pour tout germe holomorphe en 0 $\alpha(x_0,z,x')$ il existe des germes holomorphes en 0, $h(z)$, $\alpha_p(x_0,z,x')$ $(0 \le p \le n)$ et des constantes complexes $\xi_1,\dots,\xi_n$ telles que :

$$\alpha(x_0,z,x') = \frac{\partial E}{\partial z}(x_0,z,x')h(z) + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_p}\xi_p + x_0\alpha_0(x_0,z,x') \tag{2.9}$$
$$+\sum_{p=1}^{n} x_p\alpha_p(x_0,z,x').$$

Rappelons alors le théorème de préparation de Weierstrass.

Théorème de Weierstrass. (Voir [20] pages 10 et 14). Notons $\mathcal{O}_{x_0,z,x'}$ [resp. $\mathcal{O}_{x_0,x'}$] l'anneau des germes holomorphes en $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ [resp. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$]. Notons J l'idéal de $\mathcal{O}_{x_0,z,x'}$ engendré par x_0 et $x_1, \ldots, x_n$ et considérons l'algèbre analytique $F = \frac{\mathcal{O}_{x_0,z,x'}}{\mathcal{O}_{x_0,z,x'}\frac{\partial E}{\partial z}}$. Supposons que des éléments $e_1, \ldots e_\ell$ de F engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\frac{F}{JF}$. alors $e_1, \ldots, e_\ell$ engendrent F considéré comme $\mathcal{O}_{x_0,x'}$-module :

$$F = \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{O}_{x_0,x'} e_j.$$

Quand on réduit modulo $\mathcal{O}_{x_0,z,x'}\frac{\partial E}{\partial z}$ l'égalité numérotée (2.9) on vérifie aisément qu'on peut appliquer le théorème de Weierstrass avec $\ell = n$ et $e_p = \frac{\partial E}{\partial x_p}$ $(1 \leq p \leq n)$. On obtient alors l'existence de germes holomorphes en 0 $f_p(x_0, x')$

$$(1 \leq p \leq n) \text{ et } g(x_0, z, x') \text{ tels que } E(x_0, z, x')$$

vérifie l'équation homologique suivante :

$$-\frac{\partial E}{\partial x_0} = \sum_{p=1}^{n} f_p(x_0, x')\frac{\partial E}{\partial x_p} + g(x_0, z, x')\frac{\partial E}{\partial z}.$$

Ceci prouve le lemme 2.12.

Preuve du théorème 2.11. Reprenons les notations du lemme 2.12. Le flot complexe de v est défini par les équations différentielles suivantes :

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = 1 \\ \frac{dx_p}{dt} = f_p(x_0(t), x'(t)) \quad 1 \leq p \leq n \\ \frac{dz}{dt} = g(x_0(t), z(t), x'(t)) \end{cases}$$

On observe que $t \to x_0(t)$ et $t \to x'(t)$ *ne dépendent pas* de $z(0)$. Notons $\psi(t; \cdot)$ le flot du champ v de sorte que $\psi(t; (x_0, z, x')) = (x_0(t), z(t), x'(t))$ désigne la solution des équations (2.10) vérifiant $(x_0(0), z(0), x'(0)) = (x_0, z, x')$; on note que $x_0(t) = t + x_0$. Il est alors clair qu'il existe des voisinages ouverts *connexes* D_1 de $0 \in \mathbb{C}$, U_1 de $0 \in \{(z, x')\}$ et U_2 de $0 \in \{(x_0, z, x')\}$ tels que l'application induite par le flot :

$$H \left| \begin{array}{l} D_1 \times U_1 \longrightarrow U_2 \\ [t; (z, x')] \longrightarrow \psi(t; (0, z, x')) = (t, z(t), x'(t)) \end{array} \right.$$

soit un difféomorphisme holomorphe. En outre son inverse H^{-1} est de la forme :

$$H^{-1}(x_0, z, x') = [x_0; (Z(x_0, z, x'), X'(x_0, x'))]$$

où $X'(x_0, x') = (X_1(x_0, x'), \ldots, X_n(x_0, x'))$, et comme $\psi(0, \cdot) =$ identité on a $Z(0, z, x') \equiv z$ et $X'(0, x') \equiv x'$.

On peut évidemment supposer $E(x_0, z, x')$ holomorphe sur $D_1 \times U_1$ et U_2. D'après le 2°) du lemme 2.12 on a $v.E \equiv 0$, par conséquent $E(x_0, z, x')$ est constante sur les courbes intégrales de $v : x_0 \to \psi(x_0; (0, Z, X'))$. On peut donc écrire, pour tout (x_0, z, x') de U_2 :

$$E(x_0, z, x') = E(H \circ H^{-1}(x_0, z, x')) = E[\psi(x_0; (0, Z(x_0, z, x'), X'(x_0, x')))] =$$

$$E[0, Z(x_0, z, x'), X'(x_0, x')] = Z^{k+1}(x_0, z, x') - X_k(x_0, x')Z^{k-1}(x_0, z, x') \ldots$$
$$-X_2(x_0, x')Z(x_0, z, x') - X_1(x_0, x')$$

où la dernière égalité résulte de la définition de E et de l'identité $S(0, z, x_3, \ldots, x_n) = z^{k+1} - x_k z^{k-1} \ldots - x_3 z^2$ (voir thm 2.8). Ceci prouve le théorème 2.11.

Preuve du 2°) du théorème 0.1.

Pour $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ nous poserons $\|\xi\|^2 = \sum_{\ell=0}^{n} \xi_\ell \bar{\xi}_\ell$ et $\|\xi' = \xi_1, \ldots, \xi_n)\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell \bar{\xi}_\ell$. Considérons donc une hypersurface $\mathbb{C}$-analytique $\mathcal{A}$ (définie dans un voisinage de l'origine) caractéristique pour $a(x; D)$ et telle que $\mathcal{A} \cap S = T$ et $\mathcal{A}$ induise un germe *irréductible* en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Il existe alors (voir [7]) un système fondamental $\mathcal{F}$ de voisinages ouverts connexes de 0 tel que $\forall V \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A} \cap V$ est un sous-ensemble $\mathbb{C}$-analytique fermé *irréductible* de V, $\mathcal{A} \cap V \cap S = T \cap V$ et de plus les $\pi(\Lambda_j) \cap V$ $(1 \leq j \leq m)$ sont des sous-ensembles $\mathbb{C}$-analytiques fermés de V. Dans la suite de cette section §2 nous fixons un $V \in \mathcal{F}$ de sorte que $a_m(x; 1, 0, \ldots, 0)$ ne s'annule pas sur V. La preuve est composée de plusieurs propositions.

Proposition 2.13 (Verdier [24]). Il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique de Whitney $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $\mathcal{A} \cap V$ telle que pour chaque α de I ou bien $A_\alpha \subset S$ ou bien $\mathcal{A}_\alpha \cap S = \phi$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{A} \cap V = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ et $A_\alpha \cap A_\beta = \phi$ pour $\alpha \neq \beta$. Chaque A_α est une sous-variété holomorphe lisse *connexe* localement fermée de V, telle que $\bar{A}_\alpha$ et $\bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha$ soient des sous-ensembles $\mathbb{C}$-analytiques fermés et $\dim_{\mathbb{C}} \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha \leq -1 + \dim A_\alpha$.

2) La famille (A_α) est localement finie.

3) Si $\bar{A}_\alpha \cap A_\beta \neq \phi$ alors $\bar{A}_\alpha \supset A_\beta$.

4) Si $\bar{A}_\alpha \supset A_\beta$ et $\alpha \neq \beta$ alors (A_α, A_β) vérifie la condition a) de Whitney suivante : soit x un point quelconque de A_β, alors pour toute suite $(x_p)_p$ de points de A_α convergeant vers x et telle que la suite des espaces tangents $(T_{x_p}A_\alpha)_p$ admette une limite $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ contient $T_x A_\beta$.

Note. Quitte à diminuer V, nous supposerons (ce qui est loisible d'après le 2)) que I est fini. Jusqu'à la fin de cette section §2 nous fixons une telle stratification (A_α).

Preuve. Prouvons d'abord que $\overline{(\mathcal{A} \cap V)\backslash S} = \mathcal{A} \cap V$. Soit x un point de $\mathcal{A} \cap V \cap S \subset T \cap V$, si x n'adhérait pas à $(\mathcal{A} \cap V)\backslash S$ alors il existerait un voisinage ouvert Z (dans $\mathbb{C}^{n+1}$) de x tel que $Z \cap \mathcal{A} \cap V = Z \cap T$ ce qui contredirait le fait que $\mathcal{A} \cap V$ est irréductible et donc de dimension pure $= n$ (voir [25], p. 169) y compris en x. Donc $\overline{\mathcal{A} \cap V)\backslash S} = \mathcal{A} \cap V$. Posons alors $Y_1 = \mathcal{A} \cap V \cap S$ et $Y_2 = (\mathcal{A} \cap V)\backslash S$. Il est clair que les $\bar{Y}_i$ et $\bar{Y}_i \backslash Y_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ sont des fermés $\mathbb{C}$-analytiques de $X = \mathcal{A} \cap V$. Comme la condition w) de Verdier entraîne la condition a) (voir [24] p 299) les résultats de [24] page 300 montrent qu'il existe une stratification $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $\mathcal{A} \cap V$ vérifiant toutes les assertions de la prop. 2.13 sauf peut-être le fait que $\dim_{\mathbb{C}}(\bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha) \leq -1 + \dim A_\alpha$. Raisonnons par l'absurde et considérons $\alpha \in I$ tel que $\dim_{\mathbb{C}} \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha = d \geq \dim_{\mathbb{C}} A_\alpha$. Considérons (ce qui est loisible) une composante irréductible $\underline{C \text{ de } \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha}$ de dimension d (cf [25]). Considérons la décomposition de $\bar{A}_\alpha$ en composantes *irréductibles* (fermées) : $\bar{A}_\alpha = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, cette réunion est localement finie et $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow I_\lambda \not\subset I_{\lambda'}$ (cf. [25]). Si, pour un $\lambda \in \Lambda$, I_λ rencontre A_α (localement fermé) en un point x alors $(\dim I_\lambda)_x \leq \dim A_\alpha$. On vérifie alors aisément que $d = \dim \bar{A}_\alpha = \dim C$. Comme C est iréductible $(\subset \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha)$, C est inclus dans l'un des I_λ (irréductibles) et lui est égal pour une raison de dimension. Par conséquent la réunion localement finie de fermés $\bigcup_{\substack{\lambda \\ I_\lambda \neq C}} I_\lambda$ ne contient pas C (sinon C serait l'un de ces I_λ). Comme A_α est inclus dans le fermé $\bigcup_{I_\lambda \neq C} I_\lambda$ il est alors clair que C n'est pas inclus dans $\bar{A}_\alpha$ ce qui est absurde. Ceci prouve la prop. 2.13.

Définitions géométriques 2.14. Comme $T \cap V = \bigcup_{A_\alpha \subset S} \bar{A}_\alpha$, on peut trouver parmi les $A_\alpha \subset S$ une strate σ de dimension (complexe) $n-1$ telle que $0 \in \bar{\sigma}$. Si $A_\alpha \subset S$ est une strate différente de σ alors $\sigma \cap \bar{A}_\alpha = \phi$, en effet si $\sigma \cap \bar{A}_\alpha$ n'était pas vide alors les points 1) et 3) de la proposition 2.13 entraîneraient que $\sigma \subset \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha$, or , comme $\dim_{\mathbb{C}} \bar{A}_\alpha \backslash A_\alpha \leq -1 + \dim A_\alpha \leq n-2$, ceci est absurde. Comme le nombre de strates est fini, σ est donc un ouvert de T

inclus dans T_{reg}. Par ailleurs comme $\mathcal{A} \cap V$ est irréductible (de dimension pure n) on peut trouver parmi les strates $A_\alpha \subset V \backslash S$ une strate Σ de dimension (complexe) n telle que $\bar{\Sigma} \cap \sigma \neq \phi$ et donc $\sigma \subset \bar{\Sigma}$. Il est clair que Σ est un ouvert de $\mathcal{A} \cap V$ inclus dans $\mathcal{A}_{\text{reg}} \cap V$. Dans la suite *nous fixons*de tels σ et Σ.

Nous pouvons supposer que - dans la proposition 2.2 toutes les lagrangiennes $\Lambda_j (1 \leq j \leq m)$ sont définies à l'aide du même voisinage W_2 de $(0,,\ldots,0;1,0,\ldots,0)$ et du même réel $\epsilon_1 > 0$.

Proposition 2.15. Il existe une constante $C > 0$ et un voisinage ouvert (dans S) X de $0 \in \mathbb{C}^n$ tels que $X \subset S \cap V$ et pour tout $(x';\xi')$ du conormal $N(\sigma)$ de σ vérifiant $x' \in X$ et $\|\xi'\| = 1$ on a :

1) $(x';\xi') \in N(T) \cap W_2$

2) Pour chaque solution $\xi_0 \in \mathbb{C}$ de l'équation $a_m(0,x';\xi_0,\xi') = 0$ il existe $j \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\xi_0 = \xi_j(0,x';\xi')$ (cf. prop. 2.2) et :

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(0,x';\xi_0,\xi')\right| \geq C > 0.$$

Preuve. Rappelons que (par hypothèse) les racines de l'équation (0.5) $a_m(0,\ldots,0;\xi_0,1,0,\ldots,0) = 0$ sont simples, que 0 adhère à $\sigma \subset T_{\text{reg}}$ et que $N(T)$ n'a qu'une seule codirection (à savoir $(1,0,\ldots,0)$, cf. thm 8.9). La proposition 2.15 est alors une conséquence facile de la définition des Λ_j (cf. prop. 2.2) et du théorème des fonctions implicites.

Dans la suite nous *fixons* de tel $\underline{C \text{ et } X}$ et un point $\underline{x'^0 \in \sigma \cap X}$. Le principe de la preuve consiste à établir l'existence d'un voisinage Ω de $(0,x'^0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $(y;\eta)$ de $N\Sigma$ vérifiant $y \in \Omega$ et $\|\eta\| = 1$, la bicaractéristique de a_m passant par $(y;\eta)$ rencontre (au-dessus de S) $\overset{m}{\underset{1}{\cup}} \Lambda_j$. Ceci prouvera que $\Sigma \cap \Omega$ est inclus dans $\overset{m}{\underset{1}{\cup}} \pi(\Lambda_j)$ et on concluera par un argument d'irréductibilité.

Proposition 2.16. Il existe une constante $C' > 0$ et un voisinage ouvert $U(\subset V)$ de $(0,x'^0)$ tels que $S \cap U \subset X$ (cf. Prop. 2.15) et pour chaque $(x;\xi)$ de $N(\Sigma)\backslash 0$ vérifiant $x \in U$ on a :

$$\left|\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(x;\xi)\right| \geq C'\|\xi\|^{m-1}.$$

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Comme $\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}$ est homogène de degré $m-1$ en ξ, il existe alors une suite $(x^p;\xi^p)_{p\in\mathbf{N}}$ de points de $N\Sigma$ telle que $\forall p\in\mathbf{N}$, $\|\xi^p\|=1$, $\lim\limits_{p\to+\infty} x^p = (0,x'^0)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(x^p;\xi^p)=0$. Quitte à considérer une suite extraite on peut supposer que la suite $(x^p;\xi^p)_p$ converge vers un point $(0,x'^0;\xi)$. Comme $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ est caractéristique pour a_m et que Σ est un ouvert de $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ les $(x^p;\xi^p)$ annulent a_m. Par conséquent on a :

$$a_m(0,x'^0;\xi)=0 \text{ et } \frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(0,x'^0;\xi)=0. \tag{2.11}$$

Posons $\xi=(\xi_0,\xi')$. Comme $\|\xi\|=1$ et que $a_m(0,x'^0;1,0,\ldots,0)\neq 0$ (cf. choix de V), ξ' *est non nul.* Comme $(0,x'^0;\xi)$ est limite d'une suite de points de $N\Sigma\backslash 0$ la condition a) pour (Σ,σ) (cf. 4) prop. 2.13) montre alors que $(x'^0;\xi')\in N\sigma\backslash 0$. Le 2°) de la proposition 2.15 contredit alors l'assertion (2.11) précédente. Ceci prouve la proposition 2.16.

Proposition 2.17. On peut choisir U suffisamment petit dans la proposition 2.16 de sorte que $U\cap\partial\Sigma\subset\sigma\cap X$ (cf. prop. 2.15). Nous fixons un tel U jusqu'à la fin de cette section §2.

Preuve. D'après les points 1) et 3) de la proposition 2.13, $\partial\Sigma=\bar{\Sigma}\backslash\Sigma$ est une réunion finie de strates deux à deux disjointes : $\bar{\Sigma}\backslash\Sigma=\sigma\cup(\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha)$ de sorte que $\forall\alpha\in J$ $\dim_{\mathbf{C}} A_\alpha\leq\dim_{\mathbf{C}}(\bar{\Sigma}\backslash\Sigma)\leq n-1$. On peut supposer J non vide sinon le résultat est trivial. Soit $\alpha\in J$, si on avait $\bar{A}_\alpha\cap\sigma\neq\phi$ alors on aurait (d'après la prop. 2.13) $\sigma\subset\bar{A}_\alpha\backslash A_\alpha$ et $\dim_{\mathbf{C}}\sigma\leq\dim(\bar{A}_\alpha\backslash A_\alpha)\leq(\dim A_\alpha)-1\leq n-2$ ce qui est absurde. Donc σ ne rencontre pas les $\bar{A}_\alpha$ $(\alpha\in J)$ et il existe un voisinage ouvert U de $(0,x'^0)$ tel que $U\cap\partial\Sigma\subset\sigma\cap X$; ceci prouve la prop. 2.17.

Nous pouvons supposer que - dans la proposition 2.2 - toutes les lagrangiennes Λ_j $(1\leq j\leq m)$ sont définies à l'aide du même réel $\epsilon_1>0$. Rappelons que Φ désigne le flot hamiltonien de $a_m(x;\xi)$ et que la constante C' a été introduite dans la proposition 2.16.

Proposition 2.18. (Avec les notations précédentes). 1°) On peut trouver un réel $\rho\in]0,\ 2^{1-m}\epsilon_1[$ et un polydisque ouvert P inclus dans U (cf. Prop. 2.17) de centre $(0,x'^0)$ de sorte que si on pose

$$E=\left\{(0,x';\xi)\in T^*P\ /\ 0{,}5\leq\|\xi\|\leq 2,\ \left|\frac{\partial a_m}{\partial\xi_0}(0,x';\xi)\right|>\frac{c'}{2}\|\xi\|^{m-1}\right\}$$

alors pour chaque $(0, x'; \xi)$ de E la courbe $t \to \Phi(t,(0,x';\xi))$ est définie pour $t \in D(0,\rho)$, est tracée dans T^*U (i.e. au-dessus de U), et ne rencontre plus S si $t \in D(0,\rho)\backslash\{0\}$.

2) E et ρ étant fixés comme dans le 1°), il existe un polydisque ouvert Ω de centre $(0, x'^0)$ tel que pour tout $(y;\eta)$ de $N\Sigma$ vérifiant $\|\eta\| = 1$ et $y \in \Omega$ on peut trouver $t \in D(0,\rho)$ et $(0,x';\xi) \in E$ de sorte que $\Phi(t,(0,x';\xi)) = (y;\eta)$.

Preuve 1°) (Esquisse). On observe que $(t, x';\xi) \to \Phi(t,(0,x';\xi))$ définit un germe de difféomorphisme local en chaque point de E. En raisonnant par l'absurde et en utilisant des suites on obtient alors aisément le 1°). Prouvons le 2°) en raisonnant par l'absurde. Il existe alors une suite $(y^p;\eta^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de $N\Sigma$ telle que $\lim_{p\to+\infty} y^p = (0, x'^0)$, pour chaque p de $\mathbb{N}$ $\|\eta^p\| = 1$ et $(y^p;\eta^p)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\Phi(t,(0,x';\xi))$ avec $|t| < \rho$ et $(0,x';\xi) \in E$. Quitte à considérer une suite extraite nous pouvons supposer que $(y^p;\eta^p)$ converge vers un point $(0,x'^0;\eta)$ où $\|\eta\| = 1$. Comme les $(y^p;\eta^p)$ appartiennent à $N\Sigma\backslash 0$ la proposition 2.16 montre que pour p assez grand on a $\left|\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(y^p;\eta^p)\right| \geq C'$, d'où $\left|\frac{\partial a_m}{\partial \xi_0}(0,x'^0;\eta)\right| \geq C'$. Comme $(t,x';\xi) \to \Phi(t,(0,x';\xi))$ induit un germe de difféomorphisme au point $(0,x'^0;\eta)$ et que $\|\eta\| = 1$ on vérifie aisément que pour p assez grand chaque $(y^p;\eta^p)$ est de la forme $\Phi(t,(0,x';\xi))$ avec $|t| < \rho$ et $(0,x';\xi) \in E$; ceci constitue une contradiction. La proposition 2.18 est donc prouvée.

Preuve du 2°) du théorème 0.1.

Rappelons que $(0,x'^0)$ adhère à Σ de sorte que $\Sigma \cap \Omega \neq \phi$ (cf. Prop. 2.18, 2°)). Nous allons prouver que $\Sigma \cap \Omega$ est inclus dans $\bigcup_{i=1}^{m} \pi(\Lambda_i)$. Comme $\Sigma \cap \Omega$ est un ouvert non vide de $\mathcal{A}_{\text{reg}} \cap V$ (cf. def. géométriques 2.14) et $\mathcal{A} \cap V$ est *irréductible*, ceci entraînera d'abord que $\mathcal{A} \cap V \subset \bigcup_{i=1}^{m} \pi(\Lambda_i)$ (voir [25] page 170) puisqu'il existe $j \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\mathcal{A} \cap V \subset \pi(\Lambda_j) \cap V$. D'après le 1°) du théorème 0.1 et la proposition S.11 la queue d'aronde de sommet 0, $\pi(\Lambda_j)$ induit un germe en l'origine irréductible, par conséquent $\mathcal{A}$ et $\pi(\Lambda_j)$ coïncideront dans un petit voisinage de l'origine ce qui prouvera le 2°) du théorème 0.1.

Considérons donc un point y de $\Sigma \cap \Omega$ et un covecteur η tel que $(y;\eta) \in N\Sigma$ et $\|\eta\| = 1$. D'après le 2) de la proposition 2.18 il existe $t \in D(0,\rho)$ et $(0,x';\xi) \in E$ tels que $(y;\eta) = \Phi(t,(0,x';\xi))$. Pour s(réel)$\in [0,1]$ posons $g(s) = \Phi(\text{st},(0,x';\xi))$ et notons :

$$s_0 = \inf\{s_1 \in [0,1]/\forall s \in [s_1,1]\ g(s) \in N\Sigma\}$$

Comme $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ est *caractéristique* pour $a(x;D)$ et que Σ est un ouvert de $\mathcal{A}_{\text{reg}}$, la lagrangienne lisse $N\Sigma$ est invariante sous l'action du flot hamiltonien Φ, par conséquent les $g(s)$ annulent a_m et $\pi(g(s_0)) \in \partial\Sigma$. D'après le 1) de la prop. 2.18 les $\pi(g(s))$ - et donc $\pi(g(s_0))$ - appartiennent à U. D'après la prop. 2.17 on a $U \cap \partial\Sigma \subset \sigma \cap X \subset S$. Donc $\pi(g(s_0)) \in S$, d'après le 1°) de la prop. 2.18 on a nécessairement $s_0 = 0$ de sorte que $g(0) = (0, x'; \xi)$ et $x' \in \sigma \cap X$. Par ailleurs $(0, x'; \xi)$ appartient à E (cf. prop. 2.18) et *annule* a_m, d'après le choix de V $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est nécessairement non nul. De plus $(0, x'; \xi)$ est limite d'une suite de points de $N\Sigma$, la condition a) pour (Σ, σ) (cf. 4) prop. 2.13) montre alors que $\underline{(x'; \xi') \in N\sigma}$. Comme $x' \in \sigma \cap X$ la proposition 2.15 montre alors que :

$$(x'; \frac{\xi'}{\|\xi'\|}) \in N(T) \cap W_2, \ (0, x'; \frac{\xi}{\|\xi'\|}) \in \bigcup_1^m \Lambda_j$$

Comme $(0, x'; \xi) \in E$ on a $\|\xi'\| \leq \|\xi\| \leq 2$. D'après la proposition 2.18 on a $|t|2^{m-1} \leq \rho 2^{m-1} < \epsilon_1$. Par conséquent, en invoquant la proposition 2.2 et l'homogénéité de $a_m(x;\xi)$ on peut écrire :

$$(y;\eta) = \Phi\left(t, (0, x'; \|\xi'\| \frac{\xi}{\|\xi'\|})\right) = \|\xi'\| . \Phi\left(t\|\xi'\|^{m-1}, (0, x'; \frac{\xi}{\|\xi'\|})\right)$$

où par définition le membre de droite de la dernière égalité appartient à $\bigcup_1^m \Lambda_j$. Par conséquent $\bigcup_1^m \pi(\Lambda_j)$ contient tout point y de $\Sigma \cap \Omega$. Ceci prouve le 2°) du théorème 0.1.

§3. POINT DE VUE TOPOLOGIQUE

Dans cette section ainsi que dans les sections §4,5,6,7 et 8 nous travaillerons avec les variables $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{C}^k$ et étudierons les solutions z de l'équation (3.1) définies par

$$F(y,z) = z^{k+1} - y_k z^{k-1} - y_{k-1} z^{k-2} \dots - y_2 z - y_1 = 0. \tag{3.1}$$

Ainsi, nous remplaçons dans l'équation (0.1) $(x_1, \dots, x_k)$ par $(y_1, \dots, y_k)$ pour éviter ultérieurement des confusions de notation. Nous posons en outre :

$$\partial_z F(y,z) = \Delta(y,z) = (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} - (k-2)y_{k-1} z^{k-3} \dots - y_2.$$

La queue d'aronde T (voir §8) est l'ensemble des $y = (y_1, \dots, y_k)$ tels que $\exists z \in \mathbb{C},\ \Delta(y,z) = F(y,z) = 0$.

Dans cette section nous montrons que la solution z de l'équation (3.1) définit une fonction holomorphe ramifiée autour de T (voir thm 3.2) et que le groupe fondamental $\pi_1(P(R)\backslash T)$ opère transitivement sur l'ensemble des racines (voir thm 3.5). Dans le théorème 3.6 nous construisons des fonctions algébriques $e_\ell = z^\ell - N_\ell(g)$ $1 \le \ell \le k$ dont la somme aux $k+1$ racines est nulle. Dans §4 nous utiliserons beaucoup le concept de somme aux $k+1$ racines. Dans cette section nous donnons de ce concept une définition (et interprétation) géométrique intrinsèque (voir thm 3.11 et prop 3.12) après avoir construit le revêtement uniformisant z (voir def 3.9). Nous pourrons ainsi expliquer le fait apparamment miraculeux que si la somme aux $k+1$ racines d'une fonction algébrique f est identiquement nulle alors il en est de même des $\partial_{y_j} f$, $1 \le j \le k$. (Voir thm 3.11). Nous pensons que cette interprétation géométrique indique la marche à suivre pour essayer de généraliser le théorème 0.2 aux autres types D_k, E_k de singularités stables (voir [1], [2]).

Considérons un point $q_0 = (y_1^0, \dots, y_k^0) \in \mathbb{C}^k \backslash T$; notons z_j^0 $(1 \le j \le k+1)$ les $k+1$ racines *simples* de l'équation (3.1) : $F(q_0, z) = 0$.

Definition 3.1. Pour chaque $j \in \{1, \dots, k+1\}$ nous notons $z_j(q_0, y)$ le germe en q_0 holomorphe vérifiant $z_j(q_0, q_0) = z_j^0$ et $F(y, z_j(q_0, y)) \equiv 0$. L'existence et l'unicité de ce germe holomorphe sont assurées par le théorème des fonctions implicites.

Théorème 3.2. (Avec les notations précédentes). Pour chaque $j \in \{1, \dots, k+1\}$ le germe holomorphe $z_j(q_0, y)$ est prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de q_0 et tracé dans $\mathbb{C}^k \backslash T$.

Preuve (esquisse). Considérons un chemin $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^k \backslash T$ joignant $q_0 = \Gamma(0)$ à $\Gamma(1)$. Posons alors :

$$B = \{t \in [0,1] / \text{ on peut prolonger } z_j(q_0, y)$$

$$\text{holomorphiquement le long de } \Gamma|[0,t]\}.$$

Il est clair que $\sup B > 0$. Pour $t \in [0, \sup B[$ nous noterons $z_j(q_0, \Gamma(t))$ la valeur en $\Gamma(t)$ du prolongement ramifié de $z_j(q_0, y)$ suivant $\Gamma|[0,t]\}$.

Comme $t \mapsto \Gamma(t)$ est bornée sur $[0,1]$ on vérifie aisément que les solutions en z de l'équation $F(\Gamma(t), z) = 0$ restent dans un compact de $\mathbb{C}$. Il existe donc une suite (t_p) de points de $[0, \sup B[$ telle que la suite $(z_j(q_0, \Gamma(t_p)))_p$ converge vers un nombre complexe z_j. On a alors $F(\Gamma(\sup B), z_j) = 0$ et $\partial_z F(\Gamma(\sup B), z_j) \neq 0$ En utilisant le théorème des fonctions implicites on vérifie alors aisément que $\sup B \in B$ puis que $\sup B = 1$ et donc que $B = [0,1]$. Ceci prouve le théorème.

Definition 3.3. Nous notons $\sigma_{k+1}(z_1(q_0,\cdot), \ldots, z_{k+1}(q_0,\cdot))$ l'ensemble des permutations de $\{(z_1(q_0,\cdot), \ldots, z_{k+1}(q_0,\cdot\}$ (voir def 3.1).

Remarque 3.4. Soit Γ un chemin tracé dans $\mathbb{C}^k \backslash T$, d'origine et d'extrémité q_0 (Γ est un lacet). Pour $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ nous notons $\Gamma.z_i(q_0, y)$ le germe holomorphe en q_0 obtenu en prolongeant holomorphiquement $z_i(q_0, y)$ le long de Γ. Comme les racines de l'équation (3.1) $F(q_0, z) = 0$ sont simples on vérifie alors - à l'aide du théorème des fonctions implicites - que l'application:

$$z_j(q_0,\cdot) \longrightarrow \Gamma z_1(q_0,\cdot)$$

définit un élément de $\sigma_{k+1}(z_1(q_0,\cdot), \ldots, z_{k+1}(q_0,\cdot))$.

Théorème 3.5 (avec les notations précédentes). Soit $R > 0$ et $P(R)$ le polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ de rayon $R > 0$. alors :

$$\pi_1(P(R)\backslash T, q_0) \longrightarrow \sigma_{k+1}(z_1(q_0,\cdot), \ldots, z_{k+1}(q_0,\cdot))$$

$$\Gamma \longrightarrow (z_j(q_0,\cdot) \to \Gamma z_j(q_0,\cdot))$$

définit un morphisme surjectif de groupes; π_1 désignant le groupe fondamental.

Preuve. Le théorème de monodromie montre que si Γ et Γ' sont deux lacets de base q_0 homotopes dans $\pi_1(P(R)\backslash T$ alors $\Gamma z_j(q_0,\cdot) = \Gamma' z_j(q_0,\cdot)$ pour j variant de 1 à $k+1$. La remarque 3.4 montre alors que l'application du théorème 3.5 est bien définie et est un morphisme de groupes. Prouvons qu'il est surjectif. Posons :

$$E = \{(z_1, \dots, z_{k+1}) \ / \ \sum_{i=1}^{k+1} z_i = 0, \ z_i - z_j \neq \ \text{pour } i \neq j\}.$$

E est homogène. E est un hyperplan de $\mathbb{C}^{k+1}$ privé d'un sous-ensemble analytique fermé de codimension complexe 1 donc E est connexe par arcs. Considérons alors une permutation σ de $\{1, 2, \dots, k+1\}$. Il existe un chemin $t \to Z(t) = (z_1(t), \dots, z_{k+1}(t))$ tracé dans E et vérifiant, avec les notations de la définition 3.1 :

$$Z(0) = (z_1^0, \dots, z_{k+1}^0), \ Z(1) = (z_{\sigma(1)}^0, \dots, z_{\sigma(k+1)}^0)$$

Vu la définition de E, on peut écrire :

$$\prod_{j=1}^{k+1} (z - z_j(t)) = z^{k+1} - y_k(t) z^{k-1} \dots - y_2(t) z - y_1(t)$$

$t \to \Gamma(t) = (y_1(t), \dots, y_k(t))$ est un chemin tracé dans $\mathbb{C}^k \backslash T$. D'après la définition des z_i^0 on a $\Lambda(0) = \Lambda(1) = q_0$.

Comme E est *homogène* on peut supposer - quitte à multiplier les $z_j(t)$ par une même fonction continue positive convenable - que le chemin Γ est tracé dans $P(R) \backslash T$. Considérons $j \in \{1, \dots, k+1\}$ et notons (pour $0 \leq t \leq 1$) $\Gamma_t \cdot z_j$ le germe holomorphe en $\Gamma(t)$ obtenu en prolongeant $z_j(q_0, \cdot)$ le long de la restriction de Γ à $[0, t]$. Il est clair que $t \to (\Gamma_t z_j)(\Gamma(t))$ définit une fonction continue sur $[0, t]$ prenant en $t = 0$ la valeur $z_j^0 = z_j(0)$. Comme (par définition de $Z(t)$) $F(\Gamma(t), z_j(t)) \equiv 0$, le théorème des fonctions implicites permet de voir pour tout t de $[0, t]$, $(\Gamma_t z_j)(\Gamma(t)) = z_j(t)$. Comme (par définition) $z_j(1) = z_{\sigma(j)}^0$ on en déduit aisément que $\Gamma z_j(q_0, \cdot)$ est égal à $z_{\sigma(j)}(q_0, \cdot)$. Ceci prouve la surjectivité du morphisme du théorème 3.5.

Le théorème suivant donne k exemples - fondamentaux pour notre objet - de fonctions dont la somme suivant les $k+1$ racines de l'équation (3.1) est nulle.

Théorème 3.6. Pour chaque ℓ de $\{1, \dots, k\}$ posons :

$$N_\ell(y_2, \dots, y_k) = \frac{\ell}{k+1} \sum_{k\alpha_2 + (k-1)\alpha_3 + \dots + 2\alpha_k = \ell} y_2^{\alpha_2} \times \dots$$

$$\times y_k^{\alpha_k} \frac{(\alpha_2 + \ldots + \alpha_k - 1)!}{\alpha_2! \ldots \alpha_k!}$$

(par convention $N_1 \equiv 0$) et

$$e_\ell = e_\ell(y_2, \ldots, y_k, z) = z^\ell - N_\ell(y_2, \ldots, y_k).$$

Alors pour tout $(y_1, \ldots, y_k)$ de $\mathbb{C}^k$ la somme de e_ℓ suivant les $k+1$ racines $z_1, \ldots, z_{k+1}$ de l'équation (3.1) est nulle $\sum_{j=1}^{k+1} e_\ell(y_2, \ldots, y_k, z_j) = 0$

Exemples : $e_1 = z$, $e_2 = z^2 - \frac{2}{k+1}\, y_k$, $e_3 = z^3 - \frac{3}{k+1}\, y_{k-1}$, $e_4 = z^4 - \frac{2}{k+1}\, (y_k^2 + 2y_{k-2})$.

Preuve. Rappelons que :

$$\prod_{j=1}^{k+1} (Z - z_j) = Z^{k+1} - y_k Z^{k-1} \ldots - y_2 Z - y_1.$$

Nous allons reprendre - en la précisant un peu - la preuve des formules de Waring qui relient les $X_\ell = \sum_{j=1}^{k+1} z_j^\ell$ $(\ell \geq 1)$ aux $y_1, y_2, \ldots, y_k$. On a :

$$\prod_{j=1}^{k+1} (1 - Zz_j) = Z^{k+1} \prod_{j=1}^{k+1} (\frac{1}{Z} - z_j) = Z^{k+1} \left[\frac{1}{Z^{k+1}} - \frac{y_k}{Z^{k+1}} \cdots - \frac{y_2}{Z} - y_1 \right] =$$

$$1 - Z^2 y_k \ldots - Z^k y_2 - Z^{k+1} y_1.$$

En utilisant la formule $\log(1-u) = -\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{u^\ell}{\ell}$ on obtient les égalités suivantes, entre séries formelles en Z :

$$\text{(3.2)} \qquad \log \prod_{j=1}^{k+1} (1 - Zz_j) = \sum_{j=1}^{k+1} \log(1 - Zz_j) = -\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell}\, X_\ell Z^\ell =$$

$$\log[1 - (Z^2 y_k + \ldots + Z^k y_2 + Z^{k+1} y_1)] = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} (Z^2 y_k + \ldots + Z^k y_2 + Z^{k+1} y_1)^j.$$

En utilisant la formule du multinôme on voit que le second membre de l'égalité précédente est égal à :

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = j} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_k^{\alpha_k} \frac{(j-1!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!}\, Z^{(k+1)\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_k}.$$

En regroupant - pour chaque ℓ de $\mathbf{N}^*$ - les termes en Z^ℓ et en identifiant avec le coefficient de Z^ℓ dans (3.2) on obtient :

$$\frac{1}{\ell}\, X_\ell = \frac{1}{\ell}\sum_{j=1}^{k+1} z_j^\ell = \sum_{(k+1)\alpha_1+\ldots+2\alpha_k=\ell} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}\ldots y_k^{\alpha_k}\,\frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_k-1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}.$$

Si ℓ est inférieur ou égal à k alors α_1 est nul. De plus pour $\ell = 1$ X_1 est nul par hypothèse. On obtient alors immédiatement le théorème 3.6.

Maintenant nous allons construire le revêtement uniformisant (voir def 3.9) la solution z de l'équation (3.1) et dégager la signification topologique (voir thm 3.11) du concept de la somme aux $k+1$ racines. Jusqu'à la fin de cette section nous fixons un polydisque $P(R)$ comme dans le théorème 3.5. La théorie des revêtements nous permet d'énoncer la définition suivante :

Définition 3.7. Notons $\mathcal{R} \xrightarrow{p} P(R)\backslash T$ de revêtement universel de $P(R)\backslash T$. Soit $\tilde{q}_0 \in \mathcal{R}$ tel que $p(\tilde{q}_0) = q_0$. Chaque lacet de base q_0 de $P(R)\backslash T$ se relève par p en un chemin de $\mathcal{R}$ joignant $\tilde{q}_0$ à un point $\tilde{q}$ de $p^{-1}(q_0)$. Par ailleurs il existe un et un seul élément du groupe G des automorphismes de p envoyant $\tilde{q}_0$ sur un point donné de $p^{-1}(q_0)$. G s'identifie ainsi à $\pi_1(P(R)\backslash T, q_0)$. En outre G opère de manière proprement discontinue et sans point fixe sur $\mathcal{R}$, l'espace des orbites $\mathcal{R}/G$ s'identifie à $P(R)\backslash T$.

Pour chaque $j \in \{1,\ldots,k+1\}$ le germe $z_j(q_0,\cdot)$ permet de définir une unique fonction holomorphe (uniforme) $\tilde{z}_j$ sur $\mathcal{R}$ telle que $\tilde{z}_j(\tilde{q}_0) = z_j(q_0,q_0) = z_j^0$ et que les restrictions de $\tilde{z}_j$ et $z_j(q_0,\cdot)\circ p$ à un voisinage suffisamment petit de $\tilde{q}_0$ coincident. Il est clair que l'ensemble $\{\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{k+1}\}$ ne dépend pas du choix des points q_0 et $\tilde{q}_0$.

Pour chaque g de G, le théorème 3.5 et la définition 3.3 montrent que l'application $\tilde{z}_i \to \tilde{z}_i \circ g$ définit un élément de l'ensemble $\sigma_{k+1}\{\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{k+1}\}$ des permutations de $\{\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{k+1}\}$.

Le théorème suivant est alors une conséquence du théorème 3.5.

Théorème 3.8 (Avec les notations précédentes). Notons G^0 le groupe opposé à G (voir def 3.7). L'application suivante :

$$G^0 \longrightarrow \sigma_{k+1}(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{k+1})$$

$$g \longmapsto (\tilde{z}_j \to \tilde{z}_j \circ g)$$

définit un morphisme surjectif de groupes. Le noyau H est égal à $\{g \in G/\tilde{z}_j = \tilde{z}_j \circ g,\ j$ variant de 1 à $k+1\}$, il ne dépend pas du choix des points q_0 et $\tilde{q}_0$.

La théorie des revêtements permet alors de prouver ce que nous allons écrire. Comme H est un sous-groupe distingué de G, le groupe quotient G/H opère sur l'espace des orbites $\mathcal{R}/H$ de la manière suivante : si $gH \in G/H$ et $q \in \mathcal{R}$, $H.q = \{h(q)/h \in H\} \in \mathcal{R}/H$ alors on pose :

$$(gH).(H.q) = H.g(q)$$

L'application suivante :

$$\mathcal{R}/H \xrightarrow{p'} \mathcal{R}/G \simeq P(R)\backslash T$$

$$H.q \longrightarrow G.q = \{g(q)/g \in G\}$$

définit un revêtement galoisien, le groupe des automorphismes de p' s'identifie à $G/H \simeq \sigma_{k+1}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{k+1})$ et opère de manière simplement transitive sur chaque fibre de p'. Une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}$ invariante sous l'action de H induit une fonction holomorphe (*uniforme*) sur $\mathcal{R}/H$, et réciproquement. Il est donc naturel de donner la définition suivante :

Définition 3.9.

$$\mathcal{R}/H \xrightarrow{p'} P(R)\backslash T$$

est appelé le revêtement *uniformisant* de la solution z de l'équation (3.1) $F(y,z) = 0$, et z définit une fonction uniforme sur $\mathcal{R}/H$.

Remarque 3.10. Si $f(y,\theta)$ est une fonction holomorphe sur $P(R) \times \mathbb{C}\backslash\{(y,\theta) \ / \ \partial_\theta F(y,\theta) = \Delta(y,\theta) = 0\}$ alors $f(y,z)$ définit une fonction uniforme $\mathcal{R}/H$.

Soit $j \in \{1, \dots, k+1\}$. Comme ∂_{y_j} définit un opérateur différentiel sur $\mathcal{R}$ invariant sous l'action de G, il définit aussi un opérateur différentiel sur $\mathcal{R}/H$ invariant sous l'action de $G/H \simeq \sigma_{k+1}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{k+1})$.

Avec ces notations nous pouvons maintenant énoncer l'un des résultats centraux de cette section :

Théorème 3.11. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}/H$, posons :

$$\pi f = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{g \in G/H} f \circ g$$

où g parcourt la liste des automorphismes du revêtement p' uniformisant z (voir def. 3.9). Alors :

1°) πf définit une fonction holomorphe sur $P(R)\backslash T$, $\pi \circ \pi f = \pi$. De plus f se décompose de manière unique en $f = f_1 + f_2$ où f_1 définit une fonction holomorphe sur $P(R)\backslash T$ et $\pi f_2 \equiv 0$.

2°) Pour chaque j de $\{1, \ldots, k+1\}$ on a $\partial_{y_j} \pi f = \partial_{y_j} f$. De plus si $\pi f \equiv 0$ alors $\pi \partial_{y_j} f \equiv 0$.

Preuve 1°) On vérifie aisément que πf est une fonction sur $\mathcal{R}/H$ invariante sous l'action de G/H, le groupe des automorphismes du revêtement galoisien p'. Donc πf est constant sur chaque fibre de p' et définit une fonction sur $P(R)\backslash T$. Il est clair que $\pi \circ \pi = \pi$. On obtient alors immédiatement le 1°) en posant $f_1 = \pi f$ et $f_2 = f - \pi f$. Comme ∂_{y_j} est invariant sous l'action de G/H on obtient immédiatement le 2°).

La proposition suivante donne une expression concrète de πf dans un cas particulier mais significatif.

Proposition 3.12 (Avec les notations de la remarque 3.10 et du théorème 3.11). Soit $f(y, \theta)$ une fonction holomorphe sur $P(R) \times \mathbb{C} \backslash \{(y, \theta) \,/\, \partial_\theta F(y, \theta) = \Delta(y, \theta) = 0\}$. Alors on a :

$$(\pi f)(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} f(y, z_i)$$

où $z_1, \ldots, z_{k+1}$ est la liste des racines de l'équation (3.1) : $F(y; z) = 0$.

Preuve (esquisse). D'après les théorèmes 3.5 et 3.8 G/H s'identifie au groupe de permutation $\sigma_{k+1}(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{k+1})$. Le résultat est alors immédiat.

§4. ETUDE GEOMETRIQUE DE L'ALGEBRE $\mathcal{O}_Y[z]$

Les résultats centraux de cette section sont essentiellement les suivants. Dans le théorème 4.12 nous montrons qu'il existe un opérateur noté D^{-1} de primitivation par rapport à y_1 opérant sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_Y[z]$ dont la somme aux $k+1$ racines est nulle. Nous posons $e_\ell^h = D_\ell^{-h}$ (voir def 4.24) et montrons qu'il existe une importante matrice $P(y)$ permettant d'exprimer le vecteur colonne $(e_\ell^{h+1})_{1\leq \ell\leq k}$ en fonction de $(e_\ell^h)_{1\leq \ell\leq k}$ (cf. thm 4.27). Nous établissons (cf. thm 4.32) des inégalités du type $h!|e_\ell^h| \leq C^{h+1}$. Dans le théorème 4.36 nous effectuons le calcul de $\partial_y^\alpha |e_\ell^{h+|\alpha|}$. Dans le théorème 4.37 nous montrons que si $c(y; D_y)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\underline{m}$ caractéristique pour T alors les $c(y; D_y)e_\ell^{m-1}$ s'expriment en fonction des e_j (et non pas de leurs dérivées).

Considérons l'application H suivante :

$$(4.1)\qquad \left| \begin{array}{l} Z \longrightarrow Y = \{(y_1, y_2, \ldots, y_k)\} \\ (p_2, \ldots, p_k, z) \longmapsto H(p_2, \ldots, p_k, z) = (y_1 = z^{k+1} - p_k z^{k-1} \ldots \\ -p_3 z^2 - p_2 z, y_2 = p_2, y_3 = p_3, \ldots, y_k = p_k) \end{array} \right.$$

Le déterminant jacobien de H vaut $\Delta(z, p_2, \ldots, p_k) = (k+1)z^k - (k-1)p_k z^{k-2} \ldots - 2p_3 z - p_2$. La queue d'aronde T est l'image par H de $\Delta^{-1}(0)$. Comme H est une application finie on a le :

Théorème 4.1. Notons $\mathcal{O}_Z$ [resp. $\mathcal{O}_Y$] l'algèbre des germes $g(p_2, \ldots, p_k, z)$ [resp. $c(y_1, \ldots, y_k)$] en l'origine holomorphes. Alors l'application H induit un isomorphisme naturel $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_Y[z]$ où z est solution de l'équation (3.1) : $z^{k+1} = y_k z^{k-1} + \ldots + y_2 z + y_1$. Nous poserons $A = \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y[z]$, ainsi un élément de A pourra - indifféremment - s'écrire sous la forme $g(p_2, \ldots, p_k, z)$ ou sous la forme $\sum_{\ell=0}^k z^\ell c_\ell(y_1, \ldots, y_k)$.

Preuve. Notons I_H l'idéal de $\mathcal{O}_Y$ engendré par les composantes $H_1, \ldots, H_k$ de H (on a posé $H(p_2, \ldots, p_k, z) = (H_1, \ldots, H_k)$). Il est clair que $1, z, \ldots, z^k$ constituent une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}_Y/I_H$. L'application H est alors de multiplicité finie $k+1$ (voir [1] page 65). Le théorème de préparation de Weierstrass (voir [1] page 66) affirme alors que pour tout $g(p_2, \ldots, p_k, z) \in \mathcal{O}_Z$ il existe des germes holomorphes $c_\ell(y_1, \ldots, y_k)$ $(0 \leq \ell \leq k)$ appartenant à $\mathcal{O}_Y$ tels que :

$$g(p_2, \ldots, p_k, z) = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell(H(p_2, \ldots, p_k, z))z^\ell.$$

Ceci prouve le théorème.

Dans cet article nous adopterons la convention suivante :

Convention 4.2. Soient V un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^k$ et $u(p_2, \ldots, p_k, z)$ une fonction holomorphe sur $V \backslash \Delta^{-1}(0)$. Nous lui associerons une fonction holomorphe ramifiée de la manière suivante. Soit $P(R)$ un polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ tels que pour tout $y \in P(R)$ et tout z solution de l'équation (3.1) $F(y; z) = 0$ on a $(y_2, \ldots, y_k, z) \in V$. Soit $q_0 = (y_1^0, \ldots, y_k^0) \in P(R) \backslash T$, considérons (avec les notations de la définition 3.1) z_j^0 l'une des $k+1$ racines solutions de l'équation (3.1) $F(q_0, z) = 0$. Reprenons le germe $z_j(q_0, y)$ holomorphe en q_0 vérifiant $z_j(q_0, q_0) = z_k^0$ et $F(y; z_j(q_0, y)) \equiv 0$. Alors $y \mapsto u(y_2, \ldots, y_k, z_j(q_0, y))$ est un germe en q_0 holomorphiquement prolongeable le long de tout chemin issu de q_0 et tracé dans $P(R) \backslash T$ (voir théorèmes 3.2 et 3.5). Ce germe définit une fonction holomorphe ramifiée "associé" à $u(p_2, \ldots, p_k, z)$.

Cela dit, en différentiant l'équation (3.1) : $z_j^{k+1}(q_0, y) - y_k z_j^{k-1}(q_0, y) \ldots - y_2 z_j(q_0, y) - y_1 = 0$ on obtient les relations suivantes :

$$\partial_{y_\ell} z_j(q_0, y) = \frac{z_j^{\ell-1}(q_0, y)}{\Delta(y, z_j(q_0, y))} \quad 1 \leq \ell \leq k, \tag{4.2}$$

naturellement si $q_0 \in T$ et si z_j^0 est racine *simple* de l'équation (3.1) : $F(q_0, z) = 0$, alors $z_j(q_0, y)$ vérifie encore les relation (4.2).

La proposition suivante explicite alors les relations existant entre les dérivations en $(p_2, \ldots, p_k, z)$ et les dérivations en $(y_1, \ldots, y_k)$.

Proposition 4.3. Soit $g(p_2, \ldots, p_k, z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert V ne rencontrant pas $\Delta^{-1}(0)$. Considérons un point noté $(y_2^0, \ldots, y_k^0, z_j^0)$ de V : $\Delta(y_2^0, \ldots, y_k^0, z_j^0) \neq 0$. L'application H (notée (4.1)) induit alors un difféomorphisme local d'un voisinage de $(y_2^0, \ldots, y_k^0, z_j^0)$ sur un voisinage de $q_0 = H(y_2^0, \ldots, y_k^0, z_j^0)$ dont l'inverse est noté $H^{-1}(y_1, \ldots, y_k)$. On a alors :

$$\partial_{y_1} \left[g \circ H^{-1}(y_1, \ldots, y_k) \right] = \left(\frac{1}{\Delta} \, \partial_z g \right) \circ H^{-1} \tag{4.3}$$

$$\partial_{y_\ell} \left[g \circ H^{-1}(y_1, \ldots, y_k) \right] = \left(\partial_{p_\ell} g + \frac{z^{\ell-1}}{\Delta} \, \partial_z g \right) \circ H^{-1} \quad (2 \leq \ell \leq k). \tag{4.4}$$

Preuve. Posons $H(y_2^0, \ldots, y_k^0, z_j^0) = (y_1^0, \ldots, y_k^0) = q_0$ et considérons le germe en q_0 holomorphe $z_j(q_0, y)$ tel que $z_j(q_0, q_0) = z_j^0$ et $F(y, z_j(q_0, y)) \equiv 0$. On vérifie alors aisément que $H^{-1}(y_1,\ldots,y_k) = (y_2,\ldots,y_k,z_j(q_0,y))$. La proposition 4.3 découle alors des relations (4.2).

Ceci motive la définition suivante :

Définition 4.4. Soit $u(p_2,\ldots,p_k,z)$ comme dans la proposition 4.3.
1°). On pose alors, (pour $\Delta(p_2,\ldots,p_k,z) \neq 0$) :

$$\partial_{y_1} u = \frac{1}{\Delta(p_2,\ldots,p_k,z)}\,\partial_z u, \tag{4.5}$$

$$\partial_{y_\ell} u = \partial_{p_\ell} u + \frac{z^{\ell-1}}{\Delta(p_2,\ldots,p_k,z)}\,\partial_z u \quad 2 \leq \ell \leq k. \tag{4.6}$$

La proposition 4.3 permet de voir que ces opérateurs ∂_{y_i} commutent. Si $u \in \mathcal{O}_Y$ on retrouve bien les dérivations usuelles.

2°). Soit $p \in \mathbb{N}$, on note A^{-p} le $\mathcal{O}_Y$-module engendré par les $\partial_y^\alpha u$ où α décrit les multi-indices de $\mathbb{N}^k$ de longueur $\leq p$ et u parcourt A. Les élements de A^{-1} sont des germes en 0 définis par des fonctions de $(p_2,\ldots,p_k,z)$ holomorphes sur le complémentaire de $\Delta^{-1}(O)$ dans un petit voisinage de l'origine.

3°). Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $A^p = \{u \in A \ / \ \partial_y^\alpha u \in A$ pour tout multi-indice α de longueur $\leq p\}$.

Remarque 4.5. Reprenons la fonction holomorphe ramifiée $u(y_2,\ldots,y_k, z_j(q_0,y))$ de la convention 4.2. Pour tout multi-indice α de $\mathbb{N}^k$ la proposition 4.3 et la définition 4.4 permettent de voir que :

$$\partial_y^\alpha\,[y \to u(y_2,\ldots,y_k,z_j(q_0,y))] = (\partial_y^\alpha u)(y_2,\ldots,y_k,z_j(q_0,y)).$$

Proposition 4.6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $u \in A^{-p}$

1°). Supposons que $\partial_{y_1} u \equiv 0$, alors u définit un germe holomorphe $u(y_2,\ldots,y_k)$ en l'origine.

2°). Soit $N \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\partial_{y_1}^N u \equiv 0$, alors u définit un germe $u(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ holomorphe en l'origine.

Preuve. 1°). On peut trouver un polydisque ouvert P de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ et une fonction $u(p_2,\ldots,p_k,z)$ holomorphe sur $P\backslash\Delta^{-1}(0)$ qui induise en 0 le germe u. D'après la définition 4.4 on a $\partial_z u(p_2,\ldots,p_k,z) \equiv 0$, donc u ne dépend pas de z. Comme pour tout $(p_2,\ldots,p_k,0) \in P$ il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$(p_2, \dots, p_k, z) \in P \backslash \Delta^{-1}(0)$ on obtient immédiatement le 1°). Le 2°) est une conséquence facile du 1°).

Nous définissons maintenant pour les *éléments de* $A = \mathcal{O}_Y[z]$ l'opérateur $\partial_{y_1}^{-1}$ de primitivation par rapport à y_1, il joue un rôle crucial car le conormal à la queue d'aronde T ne contient qu'une seule co-direction au-dessus de l'origine (voir thm 8.9) : celle conormale à y_1.

Définition 4.7. Soit $u = u(p_2, \dots, p_k, z) \in \mathcal{O}_Y[z] = A$ [resp. A^{-1}, cf. def 4.4], on pose alors $\partial_{y_1}^{-1} u = \int_0^z ((k+1)\theta^k - (k-1)p_k\theta^{k-2} \dots - 2p_3\theta - p_2) u(p_2, \dots, p_k, \theta) d\theta$, c'est un élément de $\mathcal{O}_Y[z]$. $\partial_{y_1}(\partial_{y_1}^{-1} u) = u$.

Note. La convention 4.2 montre que $\partial_{y_1}^{-1} u$ permet de définir une fonction *uniforme* sur le revêtement uniformisant $\mathcal{R}/H$ de la définition 3.8 associé à un $P(R) \backslash T$ suffisamment petit. Par contre une fonction holomorphe *quelconque* sur $\mathcal{R}/H$ (i.e. ne provenant pas de A ou A^{-1}) ne possèdera pas en général de primitive par rapport à y_1 qui soit *uniforme* sur $\mathcal{R}/H$.

Maintenant nous traduisons dans un cadre algébrique le concept (géométrique) de la "somme aux $k+1$ racines" introduit dans le théorème 3.10.

Définition 4.8. Soit $u(y, z) \in \mathcal{O}_Y[z] = A$ [resp. A^{-p} pour $p \in \mathbb{N}^*$], on pose :

$$(\pi u)(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} u(y, z_j), \ y \notin T$$

où $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$ est la liste des racines de l'équation (3.1) : $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1 = 0$. Elles tendent vers 0 si $y \to 0$. Nous verrons dans le théorème 4.11 que πu définit un germe holomorphe en 0 et *n'a pas de singularités sur* T (pour $u \in A^{-p}$).

Définition 4.9. Nous posons $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{O}_Y[z] \ / \ \pi u \equiv 0\}$. Rappelons que dans le théorème 3.6 nous avons construit des éléments $e_\ell(p_2, \dots, p_k, z) = z^\ell - N_\ell(p_2, \dots, p_k)$ $(1 \leq \ell \leq k)$ qui par définition appartiennent à $\mathcal{S}$. (Les $N_\ell(p_2, \dots, p_k)$ sont des polynômes).

Proposition 4.10 1°) Entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (et θ_Y-modules) on a : $\mathcal{O}_Y[z] = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y e_k$ et $\mathcal{S} = \mathcal{O}_Y e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y e_k$. De plus π est $\mathcal{O}_Y$-linéaire.

2°) Soit $u \in \mathcal{O}_Y[z]$ alors $\pi u \in \mathcal{O}_Y$, $\pi \circ \pi u = \pi u$ et $u - \pi u \in \mathcal{S}$. De plus, $u = \pi u$ si et seulement si $u \in \mathcal{O}_Y$.

Preuve. Comme $z^{k+1} = y_k z^{k-1} + \ldots + y_2 z + y_1$ et $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y_2, \ldots, y_k)$ pour $1 \leq \ell \leq k$, il est clair que $\mathcal{O}_Y[z] = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y e_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_Y e_k$. Considérons alors un élément u de A, $u = a_0(y) + a_1(y)e_1 + \ldots + a_k(y)e_k$ où les $a_i(y) \in \mathcal{O}_Y$. Il est clair que π est $\mathcal{O}_Y$-linéaire. Par construction des e_ℓ on $\pi e_\ell \equiv 0$. Donc $\pi u = a_0(y)$ et appartient à $\mathcal{O}_Y$. On obtient alors aisément la proposition 4.10.

Théorème 4.11. Soient $u \in \mathcal{O}_Y[z]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^k$ alors on a :

$$\partial_y^\alpha(\pi u) = \pi(\partial_y^\alpha u) \in \mathcal{O}_Y.$$

De plus si $u \in \mathcal{S}$ (voir def 4.9) alors $\pi(\partial_y^\alpha u) \equiv 0$. Enfin soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $v \in A^{-p}$ (voir def 4.4) alors πv définit un élément de $\mathcal{O}_Y$.

Preuve (esquisse). Ecrivons $u = a_0(y) + a_1(y)e_1 + \ldots + a_k(y)e_k$ où les $a_j(y) \in \mathcal{O}_Y$ comme dans la preuve de la proposition 4.10. On a $\pi u = a_0(y)$, pour établir que $\partial_y^\alpha(\pi u) = \pi(\partial_y^\alpha u)$ il nous suffira de prouver que pour tout multi-indice β $\pi(\partial_y^\beta e_\ell) \equiv 0$ pour $1 \leq \ell \leq k$. Commenç ons par le cas où $\partial_y^\beta = \partial_{y_i}$ où (pour fixer les idées) $i \in \{2, \ldots, k\}$. D'après les définitions 4.4 et 4.8 on a :

$$\pi(\partial_{y_i} e_\ell)(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \left(\left[\partial_{p_i} + \frac{z_j^\ell}{\Delta(p_2, \ldots, p_k, z)} \, \partial_z \right] e_\ell \right) \ (y_2, \ldots, y_k, z_j).$$

Considérons $q_0 = (y_1^0, \ldots, y_k^0) \in \mathbb{C}^k \backslash T$ et reprenons les notations de la définition 3.1 et de la convention 4.2. On a alors, pour y dans un petit voisinage de q_0 :

$$0 = \partial_{y_i} \pi(e_\ell)(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \left(\left[\partial_{p_i} + \frac{z_j^\ell(q_0, y)}{\Delta(p_2, \ldots, p_k, z_j(q_0, y))} \, \partial_z \right] e_\ell \right)$$

$$(y_2, \ldots, y_k, z_j(q_0, y))$$

Il est alors clair que $\pi(\partial_{y_i} e_\ell)(y)$ est nulle dans un petit voisinage de q_0. En utilisant la remarque 4.5 on vérifie alors aisément par récurrence sur $|\beta|$ que pour tout multi-indice β $\pi(\partial_y^\beta e_\ell)(y)$ est nul sur $\mathbb{C}^k \backslash T$. On en déduit que $\partial_y^\alpha \pi u = \pi(\partial_y^\alpha u) \in \mathcal{O}_Y$. Enfin si $v \in A^{-p}$ alors la proposition 4.10 permet de voir que $v = a + b$ où $a \in \mathcal{O}_Y$ et b est somme finie de termes du type $P(y; D)w$ où $w \in \mathcal{S}$ et $P(y; D)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq p$ à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$. Comme les $\pi(\partial_y^\beta e_\ell)$ sont nuls on vérifie aisément que $\pi(P(y; D)w) \equiv 0$ et $\pi v = \pi a = a$ appartient à $\mathcal{O}_Y$. Ceci prouve le théorème 4.11.

Le théorème suivant montre qu'il existe - pour les éléments de $\mathcal{S}$ - une primitive naturelle.

Théorème 4.12. Soit $u \in \mathcal{S}$ (voir def 4.9) alors il existe un et un seul v dans $\mathcal{S}$ tel que $u = \partial_{y_1} v$. On posera $v = D^{-1}u$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on posera $D^{-p} = D^{-1} \circ \ldots \circ D^{-1}$ (p fois) c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

Preuve. Considérons l'opérateur $\partial_{y_1}^{-1}$ introduit dans la définition 4.7. Posons $v = \partial_{y_1}^{-1} u - \pi \partial_{y_1}^{-1} u$. D'après la proposition 4.10 $\pi \circ \pi = \pi$ et $v \in \mathcal{S}$. Comme $u \in \mathcal{S}$ le théorème montre 4.11 que $\partial_{y_1} v = u - \partial_{y_1} \pi \partial_{y_1}^{-1} u = u - \pi u = u$. Prouvons la clause relative à l'unicité. Soit $v' \in \mathcal{S}$ tel que $\partial_{y_1} v' = u$ alors $v - v' \in \mathcal{S}$ et $\partial_{y_1}(v - v') = 0$. D'après la proposition 4.6 $v - v'$ est alors un germe holomorphe en 0 fonction de $y_2, \ldots, y_k$. On a donc $\pi(v - v') = v - v'$, $v - v' \in \mathcal{S}$ donc $v - v' = 0$. Ceci prouve le théorème 4.12.

Le lemme suivant montre - "en gros" - que $\partial_{y_1}^{-1}$ "commute" avec les ∂_{y_j} $(1 \le j \le k)$.

4.13. Soit $j \in \{2, \ldots, k\}$, pour tout $u(p_2, \ldots, p_k, z)$ de $A = \mathcal{O}_Y[z]$ on peut écrire :

$$\partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-1} u = \int_0^z \theta^{j-1} \partial_z u(p_2, \ldots, p_k, \theta) d\theta + \partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_{p_j} u(p_2, \ldots, p_k, z)$$

$$\partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-2} u = \partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-1} u.$$

Preuve. Comme $\Delta = (k+1)z^k - (k-1)p_k z^{k-2} \ldots - p_2$ on obtient $\partial_{p_j} \Delta = -(j-1)z^{j-2}$. Rappelons que (cf. def 4.4) :

$$\partial_{y_j} = \partial_{p_j} + \frac{z^{j-1}}{\Delta} \partial_z. \tag{4.7}$$

On a alors :

$$\partial_{y_j} \left[\int_0^z \Delta(p_2, \ldots, p_k, \theta) u(p_2, \ldots, p_k, \theta) d\theta \right] = \int_0^z \left[\partial_{p_j} \Delta) u + \Delta \partial_{p_j} u \right] d\theta + z^{j-1} u$$

$$= \partial_{y_1}^{-1}(\partial_{p_j} u) - (j-1) \int_0^z \theta^{j-1} u d\theta + z^{j-1} u.$$

En intégrant par parties on constate que :

$$-(j-1) \int_0^z \theta^{j-2} u \, d\theta + z^{j-1} u = \int_0^z \theta^{j-1} \partial_z u \, d\theta.$$

On obtient alors immédiatement la première égalité du lemme 4.13. Rappelons que $\partial_{y_1}^{-1}$ est également défini pour les éléments de A^{-1}. En utilisant l'égalité (4.7) on obtient aisément que $\partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-1} u = \partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_{y_j} u$. Ceci prouve le lemme 4.13.

La proposition suivante nous permettra d'analyser les termes du type $\partial_y^\alpha \circ D^{-p} e_\ell$ (voir thm 4.34).

Proposition 4.14. 1°). Soient $(p,h) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de N^k de longueur p. Alors $\partial_y^\alpha \circ D^{-p}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et $\partial_y^\alpha \circ D^{-p-h} = D^{-h} \circ \partial_y^\alpha \circ D^{-p}$.
2°). Soient $u \in \mathcal{S}$ et $(y_2, \ldots, y_k) \to a(y_2, \ldots, y_k)$ un germe holomorphe $\in \mathcal{O}_Y$ indépendant de y_1. Alors $D^{-1}(au) = aD^{-1}u$.

Preuve 1°). Si $|\alpha| = p = 0$ il n'y a rien à prouver. Supposons d'abord que $p = |\alpha| = 1$, on pose alors $\partial_y^\alpha = \partial_{y_j}$. Considérons $u \in \mathcal{S}$, d'après la proposition 4.6 on peut écrire $D^{-1}u = \partial_{y_1}^{-1} u + b(y_2, \ldots, y_k)$ où $b(y_2, \ldots, y_k) \in \mathcal{O}_Y$. D'après le lemme 4.13 $\partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-1} u \in A$, donc $\partial_{y_j} \circ D^{-1} u \in A$. D'après les théorèmes 4.11 et 4.12, on a $\pi(\partial_{y_j} D^{-1} u) \equiv 0$ et $\pi(D^{-1}u) = \partial_{y_j} \pi(D^{-1}u) \equiv 0$. Donc - par définition - $\partial_{y_j} \circ D^{-1} u \in \mathcal{S}$.

Maintenant prouvons par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$ que $\partial_{y_j} \circ D^{-1-h} = D^{-h} \circ \partial_{y_j} \circ D^{-1}$. Pour $h = 0$ c'est vrai. Soit $h \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai au rang h. Soit $u \in \mathcal{S}$, d'après ce qui précède $\partial_{y_j} \circ D^{-2} u \in \mathcal{S}$; par ailleurs $\partial_{y_1} \circ \partial_{y_j} \circ D^{-2} u = \partial_{y_j} \circ D^{-1} u \in \mathcal{S}$. Le théorème 4.12 affirme alors que $\partial_{y_j} \circ D^{-2} u = D^{-1} \circ \partial_{y_j} \circ D^{-1} u$. Cela dit l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire :

$$\partial_{y_j} \circ D^{-1-h}(D^{-1}u) = D^{-h}(\partial_{y_j} \circ D^{-2}u) = D^{-1-h}(\partial_{y_j} \circ D^{-1}u).$$

Ceci prouve le 1°) dans le cas $p = |\alpha| = 1$. Nous allons prouver le 1°) par récurrence sur p. Soir $p \geq 1$, supposons l'assertion vraie au rang p. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^k$ un multi-indice de longueur $p+1$. Considérons alors un indice $j \in \{1, \ldots, k\}$ et un multi-indice β de longueur p tels que $\partial_{y_j} \circ \partial_y^\beta = \partial_y^\alpha$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire :

$$(4.8) \qquad \partial_y^\alpha \circ D^{-p-1} = \partial_{y_j} \circ (\partial_y^\beta \circ \partial^{-p-1}) = \partial_{y_j} \circ D^{-1} \circ (\partial_y^\beta \circ D^{-p})$$

or $\partial_{y_j} \circ D^{-1}$ et $\partial_y^\beta \circ D^{-p}$ envoient $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, par conséquent $\partial_y^\alpha \circ D^{-p-1}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. On a vu précédemment que $D^{-1} \circ \partial_{y_j} \circ D^{-1} = \partial_{y_j} \circ D^{-2}$, par conséquent en utilisant successivement (4.8), l'hypothèse de récurrence, le cas $p = 1$, l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\partial_y^\alpha \circ D^{-p-1} \circ D^{-h} = \partial_{y_j} \circ D^{-1} \circ (\partial_y^\beta \circ D^{-p}) \circ D^{-h} = \partial_{y_j} \circ D^{-h-1} \circ \partial_y^\beta \circ D^{-p} =$$

$$D^{-h}\circ\partial_{y_j}\circ(D^{-1}\circ\partial_y^\beta\circ D^{-p})=D^{-h}\circ\partial_{y_j}\circ\partial_y^\beta\circ D^{-p-1}=D^{-h}\circ\partial_y^\alpha\circ D^{-p-1}$$

ceci prouve le 1°). Prouvons le 2°) Il est clair que $a\times u\in\mathcal{S}$ et que $\partial_{y_1}(aD^{-1}u)$ $=au$. D'après le théorème 4.12 on a alors $aD^{-1}u=D^{-1}(au)$.

Le théorème suivant nous permettra de prouver (cf; thm 4.37) que si $c(y;D)$ est un opérateur différentiel d'order $\underline{m}$ caractéristique pour $N(T)$ alors les $c(y;D)$ $(D^{-m+1}e_j)$ $1\le j\le k$ s'expriment en fonctions des $e_1,e_2,\dots,e_k$.

Théorème 4.15. Soient $p\in\mathbb{N}$ et $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k$ un multi-indice de longueur p, posons $b=\sum_{j=1}^k(j-1)\alpha_j$. Alors pour tout $u(p_2,\dots,p_k,z)\in A$ il existe $v\in A^1$ (voir def 4.4) tel que : $(p=|\alpha|)$

$$(\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p}u)(p_2,\dots,p_k,z)=\int_0^z\theta^b\partial_z u(p_2,\dots,p_k,\theta)d\theta+v$$

en outre, $\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p}u\in A$ et $\partial_{y_1}^{-1}\circ\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p}u=\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p-1}u$.

Note : $\partial_{y_1}^{-1}\circ\partial_{y_1}^2$ n'est pas défini en général.

Preuve. Nous allons prouver le théorème en raisonnant par récurrence sur la longueur p de α. Prouvons l'assertion dans le cas $p=0$. On a :

$$u=\int_0^z\partial_z u(p_2,\dots,p_k,\theta)d\theta+u(p_2,\dots,p_k,0)$$

comme $u(p_2,\dots,p_k,0)\in A^1$ l'assertion est prouvée. Soit maintenant $p\in\mathbb{N}$ et supposons l'assertion prouvée au rang p. Considérons un multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^k$ de longeur $p+1$, on peut supposer $\alpha\neq(p+1,0,\dots,0)$ sinon le résultat est trivial. Il existe alors un multi-indice β de longueur p et $j\in\{2,\dots,k\}$ tels que $\partial_y^\alpha=\partial_{y_j}\circ\partial_y^\beta$. Rappelons que d'après le lemme 4.13 on a $\partial_{y_j}\circ\ \partial_{y_1}^{-2}=$ $\partial_{y_1}^{-1}\circ\partial_{y_j}\circ\partial_{y_1}^{-1}$ et :

$$\partial_{y_j}\circ\partial_{y_1}^{-1}u=\int_0^z\theta^{j-1}\partial_z u\ d\theta+\partial_{y_1}^{-1}(\partial_{p_j}u).\tag{4.9}$$

Comme $\partial_{y_j}\circ\partial_{y_1}^{-1}$ envoie A dans A l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire :

$$\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p-1}u=\partial_{y_j}\left[\partial_y^\beta\circ\partial_{y_1}^{-p-1}u\right]=\partial_{y_j}\circ\partial_{y_1}^{-1}\left[\partial_y^\beta\circ\partial_{y_1}^{-p}u\right]\in A\tag{4.10}$$

Appliquons l'égalité (4.10) en remplaçant u par $\partial_{y_1}^{-1}u$, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme 4.13 on obtient :

$$\partial_y^\alpha\circ\partial_{y_1}^{-p-2}u=\partial_{y_j}\left[\partial_y^\beta\circ\partial_{y_1}^{-p-2}u\right]=\partial_{y_j}\circ\partial_{y_1}^{-2}\left[\partial_y^\beta\circ\partial_{y_1}^{-p}u\right]=$$

$$\partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_{y_j} \circ \left(\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u\right) = \partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_{y_j} \circ \left(\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p-1} u\right) = \partial_{y_1}^{-1} \circ \partial_y^\alpha \circ \partial_{y_1}^{-p-1} u.$$

En utilisant les égalités (4.10) et (4.9) on peut alors écrire :

$$(4.11) \qquad \partial_y^\alpha \circ \partial_{y_1}^{-p-1} u = \partial_{y_j} \circ \partial_{y_1}^{-1} \left[\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u\right] =$$

$$\int_0^z \theta^{j-1} \left(\partial_z \left(\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u\right)\right) d\theta + \partial_{y_1}^{-1} \left(\partial_{p_j} \left(\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u\right)\right).$$

Rappelons que d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u = \int_0^z \theta^b \partial_z u \, d\theta + v$$

où $v \in A^1$ et $b = \sum_1^b (j-1)\beta_j$.

Comme $\partial_z = \Delta \partial_{p_j}$ (cf. def 4.4) on constate alors que :

$$\partial_z \left[\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p} u\right] = z^b \partial_z u + \Delta \partial_{y_1} v$$

En utilisant l'égalité (4.11) on obtient alors :

$$\partial_y^\alpha \circ \partial_{y_1}^{-p-1} u = \int_0^z \theta^{b+j-1} \partial_z u d\theta + \partial_{y_1}^{-1} K$$

où $K = z^{j-1} \partial_{y_1} v + \partial_{p_j} \left(\partial_y^\beta \circ \partial_{y_1}^{-p}\right) u$ appartient à A. Ceci prouve le théorème 4.15.

Corollaire 4.16 (Avec les notations de la def 4.4). Soit $p \in \mathbb{N}$, alors $A^p = \{u \in A \ / \ \partial_{y_1}^p u \in A\}$. De plus D^{-1} induit une bijection de $A^p \cap \mathcal{S}$ sur $A^{p+1} \cap \mathcal{S}$.

Preuve (esquisse). Soit $u \in A$ tel que $\partial_{y_1}^p u \in A$. Comme $\partial_{y_1}^p \left[u - \partial_{y_1}^{-p}(\partial_{y_1}^p u)\right] \equiv 0$ la proposition 4.6 permet d'crire :

$$(4.12) \qquad u = \partial_{y_1}^{-p}[\partial_{y_1}^p u] + H(y_1, \ldots, y_k)$$

où $H(y_1, \ldots, y_k) \in \mathcal{O}_Y$. Considérons un multi-indice α de $\mathbb{N}^k$ de longueur $\leq p$. Le théorème 4.15 et l'égalité (4.12) montrent alors que $\partial_y^\alpha u \in A$. Le théorème 4.12 permet alors d'obtenir immédiatement le corollaire 4.16.

Notation 4.17. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, on pose :

$$\varphi(\alpha) = (k+1)\alpha_1 + k\alpha_2 + (k-1)\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_k.$$

Le concept de polynôme quasi-homogène introduit ci-après nous aidera à obtenir et à formuler une expression concrète des primitives itérées $D^{-h}e_\ell$, $h \in \mathbb{N}$, $1 \le \ell \le k$.

Definition 4.18. Soit $p \in \mathbb{N}$, on dit que $Q(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_k]$ est un polynôme quasi-homogène de poids p si on peut écrire :

$$Q(y_1, \ldots, y_k) = \sum_\alpha A_\alpha y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k}$$

où les A_α sont des constantes complexes nulles si $\varphi(\alpha) \neq p$ (cf. not. 4.17). Ceci équivaut à dire que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$Q(\lambda^{k+1} y_1, \lambda^k y_2, \ldots, \lambda^2 y_k) = \lambda^p Q(y_1, \ldots, y_k).$$

Remarque 4.19. En quelque sorte z est affecté du poids 1, y_1 du poids $k+1$, y_j du poids $k+2-j$. Ceci "rend homogène" l'équation (3.1) :

$$z^{k+1} = y_k z^{k-1} + y_{k-1} z^{k-2} + \ldots + y_2 z + y_1$$

On obtient aisément le lemme suivant :

Lemme 4.20. 1°). Soient $j \in \{1, \ldots, k\}$ et Q un polynôme quasi-homogène de poids p. Alors $\partial_{y_j} Q$ est quasi-homogène de poids $p - k - 2 + j$.

2°). Le produit de deux polynômes quasi-homogènes de poids p_1 et p_2 est quasi-homogène de poids $p_1 + p_2$.

Théorème 4.21. Soit $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, on peut écrire : ($z$ étant solution de l'équation (3.1))

$$z^{k+j+1} = \sum_{\ell=0}^{k} z^\ell P_{j,\ell}(y_1, \ldots, y_k)$$

où pour chaque $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ $P_{j,\ell}$ est un polynôme quasi-homogène (voir def 4.18) de poids $k + j + 1 - \ell$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. De plus $P_{j,j}$ est de la forme $P_{j,j}(y_1, \ldots, y_k) = y_1 + T_j(y_2, \ldots, y_k)$ où T_j est un polynôme indépendant de y_1. Enfin pour $\ell > j$ $P_{j,\ell}$ ne dépend pas de y_1.

Preuve. Nous prouvons le théorème par récurrence sur $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. L'équation (3.1) $z^{k+1} = y_1 + y_2 z + \ldots + y_k z^{k-1}$ montre que l'assertion est vérifiée pour $j = 0$. soit $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, supposons l'assertion prouvée au rang j. En utilisant l'hypothèse de récurrence et l'équation (3.1) on vérifie aisément que :

$$z \times z^{k+j+1} = y_1 P_{j,k} + \sum_{\ell=1}^{k-1} z^\ell (P_{j,\ell-1} + y_{\ell+1} P_{j,k}) + z^k P_{j,k-1}.$$

Posons alors :

$$\begin{cases} P_{j+1,0} = y_1 P_{j,k} & \\ P_{j+1,\ell} = P_{j,\ell-1} + y_{\ell+1} P_{j,k} & 1 \leq \ell \leq k-1 \\ P_{j+1,k} = P_{j,k-1} & \end{cases}$$

Comme $j \leq k-1$ $P_{j,k}$ est, d'après l'hypothèse de récurrence, indépendant de y_1. En considérant séparément les cas $j < k-1$ et $j = k-1$ on vérifie aisément que $P_{j+1,j+1}(y_1, \ldots, y_k) = y_1 + R(y_2, \ldots, y_k)$. Enfin si $\ell > j+1$ alors $\ell - 1 > j$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence et les formules définissant $P_{j+1,\ell}$ on vérifie aisément que $P_{j+1,\ell}$ ne dépend pas de y_1. Ceci prouve le théorème 4.21.

Remarque fondamentale 4.22. Pour chaque ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ on a défini dans le théorème 3.6 $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y_2, \ldots, y_k)$ où $N_\ell(y_2, \ldots, y_k)$ est un polynôme *quasi-homogène de poids* ℓ indépendant de y_1.

Théorème 4.23 (Avec les notations du thm 3.6). Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$, on peut écrire :

$$D^{-1} e_j = \sum_{\ell=1}^{k} e_\ell R_{j,\ell}(y_1, \ldots, y_k)$$

où pour chaque ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ $R_{j,\ell}$ est un polynôme quasi-homogène de poids $k+1+j-\ell$. En outre $R_{j,j}$ est de la forme $R_{j,j}(y_1, \ldots, y_k) = \frac{k+1}{k+j+1}\, y_1 + T_j(y_2, \ldots, y_k)$, où T_j est un polynôme indépendant de y_1. Enfin pour $\ell > j$ $R_{j,\ell}$ ne dépend pas de y_1.

Preuve. Il est clair que $y_1 = \int_0^z \Delta(y_2, \ldots, y_k, \theta) d\theta$. Comme $e_j = z^j - N_j$ où N_j ne dépend pas de y_1 on peut alors écrire :

$$\partial_{y_1}^{-1} e_j = \int_0^z (\theta^j - N_j) \left[(k+1)\theta^k - (k-1) y_k \theta^{k-2} \ldots - y_2 \right] d\theta$$

$$= \frac{k+1}{k+j+1} z^{j+k+1} - \sum_{h=k+2-j}^{k} \frac{h-1}{j+h-1}\, y_h z^{j+h-1}$$

$$-\sum_{h=2}^{k+1-j}\frac{h-1}{j+h-1}\,y_h z^{j+h-1}-N_j y_1.$$

$j+h-1$ est supérieur ou égal à $k+1$ si et seulement si $h\geq k+2-j$. En utilisant le théorème 4.21 on vérifie alors aisément que :

$$\partial_{y_1}^{-1}e_j=\sum_{\ell=0}^{k}z^\ell\left[\frac{k+1}{k+j+1}\,P_{j,\ell}-\sum_{h=k+2-j}^{k}\frac{h-1}{j+h-1}\,y_h\,P_{j+h-2-k,\ell}\right]$$

$$-\sum_{\ell=j+1}^{k}\frac{\ell-j}{\ell}\,y_{\ell+1-j}z^\ell-N_j y_1.$$

Posons alors pour $1\leq\ell\leq j$:

$$R_{j,\ell}=\frac{k+1}{k+j+1}P_{j,\ell}-\sum_{h=k+2-j}^{k}\frac{h-1}{j+h-1}y_hP_{j+h-2-k,\ell}.$$

Posons également pour $j+1\leq\ell\leq k$:

$$R_{j,\ell}=\frac{k+1}{k+j+1}\,P_{j,\ell}-\sum_{h=k+2-j}^{k}\frac{h-1}{j+h-1}\,y_h\,P_{j+h-2-k,\ell}-\frac{\ell-j}{\ell}\,y_{\ell+1-j}.$$

Comme les e_ℓ sont de la forme $z^\ell-N_\ell$ on déduit alors aisément de ce qui précède que :

$$\partial_{y_1}^{-1}e_j=\sum_{\ell=1}^{k}R_{j,\ell}e_\ell+T(y_1,\ldots,y_k)\tag{4.13}$$

où T est un certain polynôme en y. Appliquons l'opérateur $\pi\circ\partial_{y_1}$ à l'égalité (4.13) (voir théorème 4.11). comme les πe_ℓ et $\pi\partial_{y_1}e_\ell$ sont nuls on constate que $\pi\partial_{y_1}T=\partial_{y_1}T\equiv0$, donc T ne dépend pas de y_1. La définition de D^{-1} (voir théorème 4.12) montre alors que :

$$D^{-1}e_j=\sum_{\ell=1}^{k}R_{j,\ell}e_\ell.$$

D'après le théorème 4.21, $P_{j,j}=y_1+T_j(y_2,\ldots,y_k)$ et pour $\ell>j$ $P_{j,\ell}$ ne dépend pas de y_1. Si h est compris entre $k+2-j$ et k alors $j+h-2-k\leq j-2$.

En utilisant la définition des $R_{j,\ell}$ on vérifie alors aisément que pour $\ell > j$ $R_{j,\ell}$ ne dépend pas de y_1 et que :

$$R_{j,j} = \frac{k+1}{k+j+1}\, y_1 + T_j(y_2,\dots,y_k)$$

où T_j est un polynôme quasi-homogène de poids $k+1+j-j$.

Montrons maintenant que les $R_{j,\ell}$ sont quasi-homogènes de poids $k+1+j-\ell$. Si $1 \leq \ell \leq j$, ceci résulte de ce que $P_{j+h-2-k,\ell}$ [resp. y_h] est quasi-homogène de poids $k+1+(j+h-2-k)-\ell$ [resp. $k+2-h$] et de ce que : $k+1+(j+h-2-k)-\ell+k+2-h) = k+1+j-\ell$. Si $j+1 \leq \ell \leq k$, ceci résulte de ce que $y_{\ell+1-j}$ est quasi-homogène de poids $k+2-(\ell+1-j) = k+1+j-\ell$. Ceci prouve le théorème 4.23.

Définition 4.24. Soit $\ell \in \{1,2,\dots,k\}$, nous poserons $e_\ell^1 = D^{-1}e_\ell$. Plus généralement pour $h \in \mathbb{N}$ nous poserons $e_\ell^h = D^{-h}e_\ell$ et $e_\ell^{-h} = \partial_{y_1}^h e_\ell$. Si $q \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$e_\ell^{h+q} = D^{-q}e_\ell^h, e_\ell^{-q\pm h} = \partial_{y_1}^q e_\ell^{\pm h}.$$

Enfin si h appartient à $\mathbb{Z}$ nous noterons e^h le vecteur colonne :

$$e^h = \begin{bmatrix} e_1^h \\ e_2^h \\ \vdots \\ e_k^h \end{bmatrix} \qquad e^0 = e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Définition 4.25 (Avec les notations du théorème 4.23). Nous notons $P(y_1,\dots,y_k)$ la matrice carrée d'ordre k définie par $P(y) = (R_{j,\ell})_{1\leq j,\ell\leq k}$. Le théorème 4.23 affirme alors que $Pe = e^1$.

La proposition suivante rassemble des résultats auxilliaires que nous permettront de majorer les $|e^h|$.

Proposition 4.26. Posons $K(y) = (K_{j,\ell}(y))_{1\leq j,\ell\leq k} = \partial_{y_1}P(y)$, c'est une matrice carrée d'ordre k. Alors :

1°). $K(y)$ est une matrice triangulaire inférieure : $K_{j,\ell}$ est nul pour $\ell > j$ et $K_{j,j} = \frac{k+1}{k+j+1}$. $K(y)$ est indépendante de y_1 et est inversible pour tout y de $\mathbb{C}^k$.

2°). Pour tout h de $\mathbb{Z}$ et tout y, $\mathrm{Id} + hK(y)$ est inversible (Id = matrice identité).

3°). Pour tout h de $\mathbb{Z}^*$ notons $L_{j,\ell}(h)$ le coefficient d'indice (j,ℓ) de $\left(\frac{\mathrm{Id}}{h}+K(y)\right)^{-1}$. Si $\ell > j$ alors $L_{j,\ell}(h) \equiv 0$. Si $\ell \leq j$ alors $L_{j,\ell}(h)$ est un polynôme quasi-homogène d'ordre $j-\ell$ (cf. def 4.18) indépendant de y_1; en outre quand $|h| \to +\infty$, $L_{j,\ell}(h)$ converge dans l'espace des polynômes de degré $\leq j-\ell$ vers le coefficient d'indice $(j-\ell)$ de $(K(y))^{-1}$.

Preuve. Le 1°) est une conséquence immédiate du théorème 4.23. Prouvons le 2°). Soit $h \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Id}+hK(y)$ est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux valent $1+\frac{h(k+1)}{k+j+1}$. Comme $j \leq k$ (= ordre de la matrice) on constate que $-\left(\frac{k+j+1}{k+1}\right)$ n'appartient jamais à $\mathbb{Z}$, donc les éléments diagonaux de $\mathrm{Id}+hK(y)$ ne s'annulent jamais. Ceci prouve le 2°). Prouvons le 3°). Notons D_h la matrice *diagonale* carrée d'ordre k dont l'élément diagonal d'indice (j,j) vaut $\frac{1}{h}+\frac{k+1}{k+j+1}$ $(1 \leq j \leq k)$. Alors on peut écrire :

$$D_h^{-1}\left(\frac{\mathrm{Id}}{h}+K(y)\right) = \mathrm{Id}-T(h)$$

où $T(h) = (T_{j,\ell}(h))$ est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont nuls et telle que pour $j > \ell$ $T_{j,\ell}(h)$ est un polynôme quasi-homogène de poids $j-\ell$ (et donc de degré $\leq j-\ell$) convergeant vers une limite quand $|h| \to +\infty$. On a donc :

$$(\mathrm{Id}-T(h))^{-1} = \sum_{p=0}^{k} T^p(h).$$

Le coefficient d'indice (j,ℓ) de $T^{p+1}(h)$ (où $1 \leq p \leq k-1$) est donné par :

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p} T_{j,i_1}\, T_{i_1,i_2} \ldots T_{i_p,\ell}$$

s'il n'est pas nul, c'est une polynôme quasi-homogène d'ordre $j-\ell$. On obtient alors aisément le 3°).

Le théorème suivant montre qu'il existe des relations matricielles agréables entre les vecteurs colonnes e^{h+1} et e^h.

Théorème 4.27. Reprenons les notations de la définition 4.25 et de la proposition 4.26. Alors :

1°) $\forall h \in \mathbb{N}$ on a : $e^{h+1} = (\mathrm{Id}+hK)^{-1}Pe^h$

2°) $\forall h \in \mathbb{N}$ on a : $e^{-h+1} = (\mathrm{Id}-hK)^{-1}Pe^{-h}$

Note. D'après la proposition 4.26, $\mathrm{Id} + hK(y)$ est inversible pour tout y de $\mathbb{C}^k$ et h de $\mathbb{Z}$. Un argument de prolongement analytique montre les identités de 1°) [resp. 2°)] entre fonctions de $(y_2, \ldots, y_k, z)$ sont valable *globalement* dans $\mathbb{C}^k$ [resp. $\mathbb{C}^k \backslash \Delta^{-1}(0)$].

Preuve. Prouvons le 1°) par récurrence sur h. Le théorème 4.23 et la définition 4.25 montrent que le résultat est vrai pour $h = 0$. Soit $h \in \mathbb{N}$, supposons le résultat prouvé au rang h. Comme $K = \partial_{y_1} P$ ne dépend pas de y_1 on a :

$$\partial_{y_1} \left[(\mathrm{Id} + (h+1)K)^{-1} P e^{h+1} \right] = (\mathrm{Id} + (h+1)K)^{-1} (P e^h + K e^{h+1}), \tag{4.14}$$

or l'hypothèse de récurrence assure que $P e^h = (\mathrm{Id} + hK) e^{h+1}$, les deux membres de l'égalité (4.14) sont donc égaux à :

$$(\mathrm{Id} + (h+1)K)^{-1} ((\mathrm{Id} + hK) e^{h+1} + K e^{h+1}) = e^{h+1}.$$

Comme les composantes du vecteur colonne $(\mathrm{Id} + (h+1)K)^{-1} P e^{h+1}$ appartiennent à $\mathcal{S}$, le théorème 4.12 et la définition 4.24 montrent alors que :

$$e^{h+2} = (\mathrm{Id} + (h+1)K)^{-1} P e^{h+1}.$$

Ceci prouve le 1°). Prouvons le 2°) par récurrence sur h. Le résultat est vrai pour $h = 0$. Soit $h \in \mathbb{N}$ supposons le résultat vrai au rang h. L'hypothèse de récurrence assure donc que :

$$e^{-h+1} = (\mathrm{Id} - hK)^{-1} P e^{-h}.$$

En dérivant cette relation par rapport y_1, on obtient :

$$e^{-h} = (\mathrm{Id} - hK)^{-1} (K e^{-h} + P e^{-h-1})$$

d'où

$$(\mathrm{Id} - hK) e^{-h} = K e^{-h} + P e^{-h-1}$$

d'où

$$(\mathrm{Id} - (h+1)K) e^{-h} = P e^{-h-1}$$

d'où

$$e^{-h} = (\mathrm{Id} - (h+1)K)^{-1} P e^{-h-1}.$$

Ceci prouve le 2°).

Maintenant nous allons introduire des polynômes qui nous permettront de majorer les e_j^h , $1 \leq j \leq k$ lorsque h est grand.

Définition 4.28. Soit p un entier $\in \{0,1,\ldots,2k+1\}$. Nous notons $H(p)$ le polynôme égal à la somme de tous les monômes $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_k^{\alpha_k}$ (sans répétition) quasi-homogènes de poids p (cf. def 4.18). Ainsi $H(0) = 1$. En outre nous poserons, pour $q < 0$, $H(q) = 0$.

Définition 4.29. Considérons deux polynômes de $\mathbb{C}[y_1,\ldots,y_k]$ $\sum a_\alpha y^\alpha$ et $\sum b_\alpha y^\alpha$, les b_α étant ≥ 0. Nous écrirons $\sum a_\alpha y^\alpha \ll \sum b_\alpha y^\beta$ si et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^k$ $|a_\alpha| \leq b_\alpha$.

Avec les deux définitions précédentes on prouve aisément la proposition suivante :

Proposition 4.30. Il existe une constante $C_1 \geq 1$ telle que pour tous $j,\ell \in \{1,2,\ldots,k\}$ et tout h de $\mathbb{Z}$ le coefficient $R_{j,\ell}(y)$ de la matrice $P(y)$ (cf. Thm 4.23) et le coefficient $L_{j,\ell}(h)$ de la matrice $\left(\frac{\mathrm{Id}}{h} + K(y)\right)^{-1}$ (cf. proposition 4.26) vérifient les inégalités suivantes :

$$R_{j,\ell} \ll C_1 H(k+1+j-\ell)$$

$$L_{j,\ell}(h) \ll C_1 H(j-\ell) \quad \text{(cf. def 4.28)}$$

On prouve aisément le lemme suivant :

Lemme 4.31. Il existe une constante $C_2 \geq 1$ telle que pour tout $p \in \{1,2,\ldots,k+1\}$ et tout $r \in]0,1]$ on a :

$$\sup_{|y_1|\leq r,\ldots,|y_k|\leq r} |H(p)(y)| \leq C_2 r \leq C_2$$

On a évidemment $H(0) = 1 \leq C_2$.

Le théorème suivant fournit une majoration des $e_j^h(y)$.

Théorème 4.32. Soient $j \in \{1,\ldots,k\}$ et $h \in \mathbb{N}^*$. Alors pour chaque $i \in \{1,\ldots,k\}$ il existe un polynôme $a_i(j,h)(y)$ quasi-homogène de poids $h(k+1)+j-i$ tel que :

$$e_j^h = a_1(j,h)e_1 + \ldots + a_k(j,h)e_k$$

et vérifiant pour tout $r \in]0,1]$

$$\sup_{|y_1|\leq r,\ldots,|y_k|\leq r} |a_i(j,h)(y)| \leq \frac{2^h r^h}{h!} C_1^{2h}\, C_2^{2h}\, k^{2h}.$$

Preuve. D'après le théorème 4.27 les deux relations suivantes - entre vecteurs colonnes - sont vérifiées :

$$e^1 = Pe^0, \ e^{h+1} = (\mathrm{Id} + hK)^{-1} Pe^h, \ h \in \mathbb{N}.$$

On vérifie alors aisément que :

$$(h-1)!e^h = (\frac{Id}{h-1} + K)^{-1} P (\frac{Id}{h-2} + K)^{-1} P \dots (\frac{Id}{1} + K)^{-1} PPe^0.$$

Dans l'égalité précédente P intervient h fois. En effectuant les produits matriciels et en reprenant les notations de la proposition 4.30 on obtient :

$$(h-1)! \ a_i(j,h) = \sum L_{j,\ell_h}(h-1) R_{\ell_h,\ell_{h-1}} L_{\ell_{h-1},\ell_{h-2}}(h-2) \dots R_{\ell_2,\ell_1} R_{\ell_1,i}.$$

Cette somme comprend au plus k^{2h-1} termes produits. En utilisant la proposition 4.30 on obtient l'inégalité suivante :

$$(h-1)! \ a_i(j,h) \ll C_1^{2h-1} \sum H(j-\ell_h) H(k+1+\ell_h-\ell_{h-1}) \times .$$

$$H(\ell_{h-1}-\ell_{h-2}) \times \dots \times H(k+1+\ell_2-\ell_1) H(k+1+\ell_1-i)$$

Cette somme comprend au plus k^{2h-1} termes produits. Considérons maintenant $r \in]0,1]$ et supposons que toutes les composantes de $y = (y_1, \dots, y_k)$ sont de module inférieur à r. Comme $r \leq 1$ le lemme 4.31 permet alors de voir que :

$$(h-1)! \ |a_i(j,h)(y)| \leq C_1^{2h-1} C_2^{2h-1} r^h k^{2h-1}.$$

En utilisant l'inégalité $h \leq 2^h$ et le fait que k, C_1, C_2 sont supérieurs ou égaux à 1 on obtient alors immédiatement le théorème 4.32.

Le théorème suivant (et sa démonstration) éclaire un peu les liens existant entre la géométrie de $\mathcal{O}_Y[z]$ et la queue d'aronde T.

Théorème 4.33 (Avec les notations du thm 4.27). Soit $y^0 = (y_1^0, \dots, y_k^0)$ un point de $\mathbb{C}^k$. Alors la matrice $P(y^0)$ est inversible si et seulement si y^0 n'appartient pas à la queue d'aronde T.

Note. En utilisant des résultats de Teissier [21] on pourrait décrire pour chaque $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ l'ensemble des y tels que $\mathrm{rang} P(y) = j$.

Preuve. Supposons que $y^0 \notin T$ et prouvons que $P(y^0)$ est inversible. Raisonnons par l'absurde, si $P(y^0)$ n'était pas inversible alors il existerait un vecteur ligne $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k \backslash 0$ tel que $\Lambda(\mathrm{Id} - K(y^0))^{-1} P(y^0) = 0$. D'après le 2°) du théorème 4.27 on a $e = (\mathrm{Id} - K)^{-1} P e^{-1}$. Comme on a $e_j(y_2, \ldots, y_k, z) = z^j - N_j(y_2, \ldots, y_k)$ pour chaque j de $\{1, \ldots, k\}$ (voir thm 3.6) on vérifie aisément par un argument de prolongement analytique que le polynôme $P(Z) = \lambda_1(Z - N_1(y^0)) + \lambda_2(Z^2 - N_2(y^0)) + \ldots + \lambda_k(Z^k - N_k(y^0))$ est non nul et annule les $k+1$ racines (deux à deux distinctes car $y^0 \notin T$) du polynôme $z^{k+1} - y_k^0 z^{k-1} \ldots - y_2^0 z - y_1^0$. Ceci est absurde car $d^0 P(Z) \leq k$. Donc $P(y^0)$ est inversible. Maintenant supposons que $y^0 \in T$, raisonnons par l'absurde et supposons $\underline{P(y^0) \text{ inversible}}$. Il existe alors un voisinage ouvert connexe V de y^0 tel que $\forall y \in V$ $P(y)$ est inversible. Pour chaque $y = (y_1, \ldots, y_k)$ de $V \backslash T$ et tout z vérifiant $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z - y_1 = 0$, le 2°) du théorème 4.27 permet alors d'écrire :

$$e^{-1}(y_2, \ldots, y_k, z) = P^{-1} \times (\mathrm{Id} - K(y)) e(y_2, \ldots, y_k, z). \tag{4.15}$$

Comme $y^0 \in T$, on peut écrire :

$$z^{k+1} - y_k^0 z^{k-1} \ldots - y_1^0 = \prod_{j=1}^{k+1} (z - z_j^0) \tag{4.16}$$

où $z_1^0 = z_2^0$ est une racine multiple. Comme

$$E = \{(z_1, \ldots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \ / \ \sum_1^{k+1} z_i = 0, \ z_i \neq z_j \,\text{pour}\, i \neq j\}$$

est une partie dense de l'hyperplan d'équation $\sum z_i = 0$ et est connexe par arcs, on vérifie aisément qu'il existe un chemin continu $t \in [0,1] \to c(t) = (z_1(t), \ldots, z_{k+1}(t))$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

a) $\forall t \in [0,1[$ $c(t) \in E$ et $c(1) = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{k+1}^0)$.

b) $\prod_1^{k+1}(z - z_j(t)) = z^{k+1} - y_k(t) z^{k-1} - \ldots - y_2(t) z - y_1(t)$ où $t \to \Gamma(t) = (y_1(t), \ldots, y_k(t))$ est un chemin tracé dans le voisinage V de y^0, $\forall t \in [0,1[$ $\Gamma(t) \notin T$ et $\Gamma(1) = y^0$.

En choisissant la racine (simple) $z = z_1(0)$ de l'équation

$$z^{k+1} - y_k(0) z^{k-1} \ldots - y_1(0) = 0$$

on définit deux germes en $\Gamma(0)$ de vecteurs colonnes holomorphes : $e(y)$, $e^{-1}(y)$. D'après le théorème 3.2 on peut prolonger holomorphiquement ces deux germes le long du chemin Γ privé de son extrémité $\Gamma(1) = y^0$ et on définit ainsi deux fonctions : $t \to e(\Gamma(t))$, $t \to e^{-1}(\Gamma(t))$. Dans les expressions de ces deux fonctions z a pour valeur $z_1(t)$. En utilisant les relations (4.5) on vérifie aisément que (voir def 4.4) :

$$e^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \\ \frac{2z}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{kz^{k-1}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Comme $z_1^0 = z_1(1)$ est racine multiple de l'équation (4.16) et que $\Gamma(1) = y^0$, on vérifie que $\Delta(y_2(t), \ldots, y_k(t), z_1(t))$ tend vers 0 quand t tend vers 1^-. Donc $e^{-1}(\Gamma(t))$ n'est pas borné quand $t \to 1^-$. Or la relation (4.15) et le fait que $e(\Gamma(t))$ reste borné montrent que $e^{-1}(\Gamma(t))$ doit rester borné. C'est absurde. Ceci prouve le théorème 4.33.

Théorème 4.34. Soient j et $\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Alors pour chaque $1 \leq i \leq k$ il existe deux polynômes quasi-homogènes *indépendants de* y_1 $V_0(j, \ell, i)$ de poids $j + \ell - 1 - i$, $V_1(j, \ell, i)$ de poids $j + \ell - 1 - i - k - 1$ tels que :

$$\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell = \sum_{i=1}^{k} V_0(j, \ell, i) e_i + \sum_{i=1}^{k} V_1(j, \ell, i) e_i^1.$$

Par convention un polynôme quasi-homogène de poids < 0 est nul. Si $j + \ell - 1 \leq k$ alors $\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell = \frac{\ell}{j+\ell-1} e_{j+\ell-1}$; tous les polynômes $V_1(\ldots)$ sont nuls ainsi que les $V_0(j, \ell, i)$ pour $i \neq j + \ell - 1$.

Note. Heuristiquement D^{-1} augmente le poids de $k+1$ unités, ∂_{y_j} le diminue de $k + 2 - j$ unités, e_i est de poids i, e_i^1 est de poids $k + 1 + i$, $\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell$ est de poids $j + \ell - 1$. La relation du théorème 4.34 est donc homogène.

Preuve. On peut supposer $j \geq 2$ sinon le résultat est trivial. Dans un premier temps supposons avoir prouvé que :

$$(*) \qquad \partial_{y_j} e_\ell = \sum_{i=1}^{k} V_0(j, \ell, i) e_i^{-1} + \sum_{i=1}^{k} V_1(j, \ell, i) e_i$$

où les $V_0(j, \ell, i)$, $V_1(j, \ell, i)$ sont des polynômes quasi-homogènes *indépendants de* y_1 et vérifiant toutes les assertions du théorème 4.34. On constate alors que $\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell$ et

$$u = \sum_{i=1}^{k} V_0(j, \ell, i) e_i + \sum_{i=1}^{k} V_1(j, \ell, i) e_i^1$$

ont même dérivée par rapport à y_1, d'après la proposition 4.6 $u - \partial_{y_j} D^{-1} e_\ell$ appartient alors $\mathcal{O}_Y$. D'après le théorème 4.11 on a $\pi u = \pi(\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell) \equiv 0$. Donc d'après la proposition 4.10 on a $\pi(u - \partial_{y_j} D^{-1} e_\ell) = u - (\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell) \equiv 0$ et le théorème 4.34 est prouvé. Maintenant nous prouvons la formule (*). Rappelons (voir thm 3.6) que $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y_2, \dots, y_k)$. Donc $\partial_z e_\ell = \ell z^{\ell-1}$. La relation (4.6) de la définition 4.4 montre alors que :

$$(**) \qquad \partial_{y_j} e_\ell = -\partial_{p_j} N_\ell + \frac{\ell z^{j+\ell-2}}{\Delta(p_2, \dots, p_k, z)}.$$

Nous distinguons alors deux cas :

Premier cas : $j + \ell - 2 \leq k - 1$. Comme $N_{j+\ell-1}$ ne dépend pas de y_1 et que $\partial_{y_1} = \frac{1}{\Delta}\partial_z$ on a :

$$\frac{\ell z^{j+\ell-2}}{\Delta} = \frac{\ell}{j+\ell-1}\, \partial_{y_1}(e_{j+\ell-1}).$$

Par conséquent (**) montre que :

$$\partial_{y_j} e_\ell = -\partial_{p_j} N_\ell + \frac{\ell}{j+\ell-1}\, \partial_{y_1} e_{j+\ell-1}.$$

D'après le théorème 4.11, π annule $\partial_{y_j} e_\ell$ et $\partial_{y_1} e_{j+\ell-1}$, la fonction holomorphe $-\partial_{p_j} N_\ell$ est donc nulle. Par conséquent $\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell$ et $\frac{\ell}{j+\ell-1}\, e_{j+\ell-1}$ ont même dérivée par rapport à y_1, comme ils sont tous deux annulés par π les propositions 4.6 et 4.10 montrent que $\partial_{y_j} D^{-1} e_\ell = \frac{\ell}{j+\ell-1} \partial_{y_1} e_{j+\ell-1}$.

Deuxième cas : $j + \ell - 2 \geq k$. On peut faire - dans $(\mathbb{C}[y_2, \dots, y_k])[z]$ - la division euclidienne de $\ell z^{j+\ell-2}$ par $\Delta = (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} \dots - y_2$, comme $j + \ell - 2 \leq 2k - 1$ on obtient :

$$\ell z^{j+\ell-2} = \Delta(y_2, \dots, y_k, z)\left(\sum_{i=0}^{k} V_1(j,\ell,i) z^i\right) + \sum_{i=1}^{k} V_0(j,\ell,i)\, i z^{i-1}$$

où les $V_1(j,\ell,i)$, $V_0(j,\ell,i)$ appartiennent à $\mathbb{C}[y_2, \dots, y_k]$ et donc ne dépendent pas de y_1. Dans cette égalité de division euclidienne remplaçons z par λz et chaque y_p par $\lambda^{k+2-p} y_p$ $(2 \leq p \leq k)$, λ décrivant $\mathbb{C}^*$. Divisons les deux membres de l'égalité obtenue par $\lambda^{j+\ell-2}$, comme $\Delta(\lambda^{k+2-2} y_2, \dots, \lambda^{k+2-k} y_k, \lambda z) = \lambda^k \Delta(y_2, \dots, y_k, z)$ on obtient :

$$\ell z^{j+\ell-2} = \Delta(y_2, \dots, y_k, z) \sum_{i=0}^{k} V_1(j,\ell,i)(\lambda^k y_2, \dots, \lambda^2 y_k)\lambda^{k+i-j-\ell+2} z^i$$

$$+\sum_{i=0}^{k} V_0(j,\ell,i)(\lambda^k y_2,\ldots,\lambda^2 y_k)\lambda^{i-j-\ell+1} i z^{i-1}$$

L'unicité du dividende et du reste de la division euclidienne montre alors que les $V_1(j,\ell,i)$ [resp. $V_0(j,\ell,i)$] sont quasi-homogènes (voir def 4.18) de poids $j+\ell-2-i-k$ [resp. $j+\ell-i-1$]. L'égalité de division euclidienne et les égalités (**), $z^i = e_i + N_i(y_2,\ldots,y_k)$, $\partial_{y_1} e_i = e_i^{-1} = \frac{iz^{i-1}}{\Delta}$ $(1 \leq i \leq k)$ permettent alors d'écrire que :

$$\partial_{y_j} e_\ell = \sum_{i=1}^{k} V_1(j,\ell,i)e_i + \sum_{i=1}^{k} V_0(j,\ell,i)e_i^{-1} + w(y_1,\ldots,y_k).$$

où $w(y_1,\ldots,y_k)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^k$. Comme π annule $\partial_{y_j} e_\ell$, les e_i et les e_i^{-1}, $(1 \leq i \leq k)$ la proposition 4.10 permet de voir que $\pi w = w \equiv 0$. Ceci prouve la formule (*) et le théorème 4.34.

Corollaire 4.35. Reprenons les notations et hypothèses du théorème 4.34. Pour tout h de $\mathbb{Z}$ on a :

$$\partial_{y_j} e_\ell^{h+1} = \sum_{i=1}^{k} V_0(j,\ell,i)e_i^h + \sum_{i=1}^{k} V_1(j,\ell,i)e_i^{h+1}$$

Preuve. Supposons d'abord $h = -q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Par définition on a $e_i^h = \partial_{y_1}^q e_i$, $e_i^{h+1} = \partial_{y_1}^q e_i^1$. Comme les $V_0(\ldots)$ et les $V_1(\ldots)$ *ne dépendent pas* de y_1 on obtient immédiatement le résultat en appliquant $\partial_{y_1}^q$ à la relation du théorème 4.34. Supposons maintenant que $h \in \mathbb{N}$. D'après le 1°) de la proposition 4.14 on a $D^{-h}\partial_{y_j} \circ D^{-1} = \partial_{y_j} \circ D^{-1-h}$. Comme $e_i^h = D^{-h}e_i$, $e^{h+1} = D^{-h}e_i^1$ et que les V_0, V_1 ne dépendent pas de y_1, on obtient immédiatement le corollaire 4.35 en appliquant D^{-h} à la relation du théorème 4.34.

Théorème 4.36. Soit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathbb{N}^k \backslash 0$ un multi-indice de longueur $|\alpha|$ et $\ell \in \{1,\ldots,k\}$. Il existe alors des polynômes indépendants de y_1 $V_q(\alpha,\ell,i)$ quasi-homogènes de poids $\ell - q(k+1) - i + \sum_{s=1}^{k}(s-1)\alpha_s$, i variant de 1 à k, q variant de 0 à $|\alpha|$, tels que pour tout h de $\mathbb{Z}$ on a :

$$\partial_y^\alpha e_\ell^{h+|\alpha|} = \sum_{q=0}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{k} V_q(\alpha,\ell,i)e_i^{q+h}.$$

Si $\alpha = (|\alpha|,0,\ldots,0)$ alors $V_0(\alpha,\ell,\ell) = 1$ et tous les autres $V_q(\alpha,\ell,i)$ sont nuls.

Note. e_ℓ est de poids ℓ, $D^{-|\alpha|}$ augmente le poids de $|\alpha|(k+1)$ unités, ∂_y^α le diminue de $\sum(k+2-j)\alpha_j$ unités (voir lemme 4.20). Donc $\partial_y^\alpha e_\ell^{|\alpha|}$ est de poids $\ell+|\alpha|(k+1)-\sum(k+2-j)\alpha_j$. Par ailleurs e_i^q est de poids $i+q(k+1)$. On vérifie alors aisément que la relation du théorème 4.36 est homogène.

Preuve. Nous allons prouver le théorème en raisonnant par récurrence sur $p=|\alpha|$. Si $p=|\alpha|=1$, le résultat est une conséquence immédiate du corollaire 4.35. Considérons maintenant $p\in\mathbb{N}^*$ et supposons le résultat prouvé pour tous les multi-indices de longueur p. Soit α un multi-indice de longueur $p+1$ et $\ell\in\{1,\ldots,k\}$. Soient $j\in\{1,\ldots,k\}$ et un multi-indice β de longueur p tels que $\partial_y^\alpha=\partial_{y_j}\circ\partial_y^\beta$. nous allons dériver par rapport à y_j la relation de récurrence écrite ave $\underline{h=1}$ et β à la place de α, on obtient donc :

$$\partial_{y_j}\partial_y^\beta e_\ell^{1+|\beta|}=\sum_{q=0}^{|\beta|}\sum_{i=1}^{k}\partial_{y_j}V_q(\beta,\ell,i)e_i^{q+1} \tag{4.17}$$

$$+\sum_{q=0}^{|\beta|}\sum_{d=1}^{k}V_q(\beta,\ell,d)\partial_{y_j}e_d^{q+1}.$$

Or, d'après le corollaire 4.35 on a :

$$\partial_{y_j}e_d^{q+1}=\sum_{i=1}^{k}V_0(j,d,i)\ e_i^q+\sum_{i=1}^{k}V_1(j,d,i)e_i^{q+1} \tag{4.18}$$

Posons alors pour q variant de 0 à $|\alpha|=1+|\beta|$:

$$V_q(\alpha,\ell,i)=\partial_{y_j}V_{q-1}(\beta,\ell,i)+\sum_{d=1}^{k}V_{q-1}(\beta,\ell,d)V_1(j,d,i)$$

$$+\sum_{j=1}^{k}V_0(j,d,i)V_q(\beta,\ell,d)$$

où, par convention, on a posé $V_{|\alpha|}(\beta,\ell,\cdot)\equiv 0$ et $V_{-1}(\beta,\ell,\cdot)\equiv 0$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence et le corollaire 4.35 on constate que $V_q(\alpha,\ell,i)$ est un polynôme indépendant de y_1 et on vérifie immédiatement les trois faits suivants :

a) s'il n'est pas nul, $\partial_{y_j}V_{q-1}(\beta,\ell,i)$ est quasi-homogène de poids :

$$\ell-(q-1)(k+1)-i+\sum_{s=1}^{k}(s-1)\beta_s-(k+2)+j=\ell-q(k+1)-i+\sum_{s=1}^{k}(s-1)\alpha_s$$

b) s'il n'est pas nul, le produit $V_{q-1}(\beta,\ell,d)V_1(j,d,i)$ est quasi-homogène de poids :

$$\ell-(q-1)(k+1)-d+\sum_1^k(s-1)\beta_s+d+j-i-1-k-1$$

$$=\ell-q(k+1)-i+\sum_1^k(s-1)\alpha_s$$

c) s'il n'est pas nul, le produit $V_0(j,d,i)\ V_q(\beta,\ell,d)$ est quasi-homogène de poids :

$$j+d-1-i+\ell-q(k+1)-d+\sum_1^k(s-1)\beta_s=\ell-q(k+1)-i+\sum_1^k(s-1)\alpha_s.$$

Par conséquent $V_q(\alpha,\ell,i)$ est quasi-homogène avec le poids indiqué dans l'énoncé du théorème 4.36. En outre si on remplace dans la formule (4.17) $\partial_{y_j}e_d^{q+1}$ par le second membre de l'égalité (4.18) alors on obtient :

$$\partial_y^\alpha e_\ell^{|\alpha|}=\sum_{q=0}^{|\alpha|}\sum_{i=1}^{k}V_q(\alpha,\ell,i)e_i^q.$$

Rappelons que les polynômes $V_q(\alpha,\ell,i)$ que nous venons de construire ne dépendent pas de y_1. Si h est un entier relatif strictement négatif alors on obtient la relation du théorème 4.36 en appliquant $\partial_{y_1}^{-h}$ à la relation précédente. Si h est un entier naturel >0 alors on obtient la relation du théorème 4.36 en appliquant D^{-h} à la relation précédente, en utilisant l'identité $D^{-h}\partial_y^\alpha D^{-|\alpha|}=\partial_y^\alpha D^{-h-|\alpha|}$ (voir proposition 4.14) et les égalités $D^{-h}e_i^q=e_i^{q+h}$. Ceci prouve le théorème 4.36.

Maintenant nous devons - pour les besoins de la section §7 - *rajouter* à $y=(y_1,\dots,y_k)$ des variables $y_0,y_{k+1},\dots,y_n$ qui - "moralement" - ne joueront *aucun rôle* vis à vis de la queue d'aronde T. Nous notons alors $\tilde{y}=(y_0,y_1,\dots,y_k,y_{k+1},\dots,y_n)$ le point courant de $\mathbb{C}^{n+1}$ et nous considérons:

$$c(\tilde{y},D)=\sum_{|\alpha|\le m}c_\alpha(\tilde{y})\partial_{\tilde{y}}^\alpha$$

un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients $c_\alpha(\tilde{y})$ holomorphes sur un voisinage ouvert de $0\in\mathbb{C}^{n+1}$. Dans l'expression définissant $c(\tilde{y},D)$ $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)$ est un multi-indice.

Nous poserons $T = \{\tilde{y} \in \mathbb{C}^{n+1} \ / \ D(y_1, \ldots, y_k) = 0\}$ où $D(y_1, \ldots, y_k)$ est le discriminant de l'équation $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z - y_1 = 0$. Il est clair que les fonctions e_ℓ^h définies dans la def 4.24 ne dépendent pas de $y_0, y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n$. Par abus de notations nous noterons $A = \mathcal{O}_{\tilde{y}}[z]$ où $\mathcal{O}_{\tilde{y}}$ désigne l'algèbre des germes holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et nous noterons (encore) $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_{\tilde{y}}[z]$ dont la somme aux $k+1$ racines est nulle.

En utilisant l'expression que le théorème 4.36 fournit pour chaque $\partial_y^\alpha e_\ell^{h+m-1}$ (h est donc remplacé par $h + m - 1 - |\alpha|$) on obtient :

$$(4.19) \qquad c(\tilde{y}, D) e_\ell^{h+m-1} = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(\tilde{y}) \sum_{q=0}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{k} V_q(\alpha, \ell, i) \, e_i^{q+h+m-1-|\alpha|},$$

on peut supposer que $V_q(\alpha, \ell, \cdot) \equiv 0$ si $\alpha_0 + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n \geq 1$.

Le théorème suivant jouera un rôle crucial dans la section §7.

Théorème 4.37 (avec les notations précédentes). Supposons que l'opérateur d'ordre m $c(\tilde{y}, D)$ soit caractéristique pour T (voir def 0.0). Alors :

1°). Pour chaque ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ $c(\tilde{y}, D) e_\ell^{m-1}$ appartient à $A \cap \mathcal{S}$.

2°). Il existe une matrice carrée d'ordre k $B(\tilde{y})$ à coefficients holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que :

$$\left(\sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(\tilde{y}) V_o(\alpha, \ell, i) \right)_{1 \le \ell, i \le k} = B(\tilde{y}) (\mathrm{Id} - K(y))^{-1} \ P(y),$$

les coefficients matriciels du membre de gauche sont indexés par (ℓ, i); $P(y)$ et $K(y)$ ont été définis dans la proposition 4.26.

3°). Il existe pour chaque (ℓ, i) de $\{1, \ldots, k\}^2$ des fonctions $c_{\ell,i}(\tilde{y})$, $\tilde{c}_{\ell,i}(\tilde{y})$ holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ de sorte qu'on ait :

$$c(\tilde{y}, D) e_\ell^{h+m-1} = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(\tilde{y}) \sum_{\substack{q \ge |\alpha| + 1 - m \\ q \ge 0}}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{k} V_q(\alpha, \ell, i) e_i^{q+h+m-1-|\alpha|}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (c_{\ell,i}(\tilde{y}) + h \ \tilde{c}_{\ell,i}(\tilde{y})) e_i^h$$

Preuve. Prouvons le 1°). Par définition, $e_\ell^{m-1} = D^{-(m-1)}e_\ell$. D'après la proposition il suffit de prouver que :

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y})\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_\ell^{m-1} \in A \cap S$$

Regardons e_ℓ^{m-1} comme fonction de $(y_2,\ldots,y_k,z)$. la proposition 4.6 permet d'écrire que :

$$D^{-(m-1)}e_\ell = e_\ell^{m-1} = \partial_{y_1}^{-m+1}e_\ell + u_\ell(y)$$

où $u_\ell(y) \in \mathcal{O}_Y$ est un germe en 0 holomorphe. Considérons maintenant $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$ de longueur m figurant dans l'expression $c(\tilde{y},D)$, on peut supposer que $\alpha_0 = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ sinon $\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_\ell^{m-1}$ est nul. Il existe alors $j \in \{1,\ldots,k\}$ et un multi-indice β de longueur $m-1$ tels que $\partial_y^\alpha = \partial_{y_j} \circ \partial_y^\beta$. D'après le théorème 4.15 on peut écrire :

$$\partial_y^\beta \partial_{y_1}^{-m+1}e_\ell = \int_0^z \theta^b \partial_z e_\ell d\theta + v$$

où $v \in A^1$ (voir def 4.4) et $b = \sum_{s=1}^k (s-1)\beta_s$. Rappelons (voir def 4.4) que $\partial_{y_1} = \frac{1}{\Delta}\partial_z$ et que si $j \geq 2$ alors $\partial_{y_j} = \partial_{p_j} + \frac{z^{j-1}}{\Delta}\partial_z$. En utilisant ce qui précède on vérifie alors aisément que :

$$\partial_y^\alpha e_\ell^{m-1} = \partial_{y_j} \circ \partial_y^\beta e_\ell^{m-1} = \frac{1}{\Delta} z^{b(\alpha)}\partial_z e_\ell + v_\alpha$$

où $v_\alpha \in A$ et $b(\alpha) = \sum_{i=1}^k (i-1)\alpha_i$.

Il est alors clair qu'il existe $w \in A$ tel que :

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y})\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_\ell^{m-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=m} c_\alpha(\tilde{y})z^{b(\alpha)}\right)\partial_z e_\ell + w$$

et dans cette égalité y_1 est regardée comme fonction de $(y_2,\ldots,y_k,z)$:

$$(*) \qquad y_1 = z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z.$$

Rappelons que par hypothèse l'opérateur d'ordre m $c(\tilde{y},D)$ est caractéristique pour la queue d'aronde T. Ceci signifie que le symbole principal $c_m(\tilde{y},\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y})\xi^\alpha$ s'annule sur le conormal (voir def 0.0) de T. Rappelons (voir thm 8.9) que le conormal de T est paramétré par :

$$\begin{cases} y_1 = -kz^{k+1} + (k-2)y_k z^{k-1} + \ldots + y_3 z^2 \\ y_2 = (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} \ldots - 2y_3 z \\ y_0, y_3, \ldots, y_k, \ldots, y_n \text{ étant quelconques} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda \\ \xi_2 = z\lambda \qquad\qquad \xi_0 = \xi_{k+1} = \ldots = \xi_n = 0 \\ \xi_k = z^{k-1}\lambda \end{cases}$$

Rappelons (voir §8) que les deux relations définissant y_1 et y_2 sont équivalentes à la conjection des relations (*) et $\Delta = 0$. Par conséquent les relations (*) et $\Delta = 0$ entraînent que :

$$\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=m} c_\alpha(\tilde{y}) z^{b(\alpha)} = 0.$$

Or la différentielle en 0 de Δ n'est pas nulle. On vérifie alors aisément que :

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=m} c_\alpha(\tilde{y}) z^{b(\alpha)} \in A.$$

En utilisant ce qui précède on vérifie immédiatement que

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y})\, \partial_{\tilde{y}}^\alpha e_\ell^{m-1} \in A.$$

En invoquant le théorème 4.36 et le théorème 4.11 on vérifie que cette fonction appartient aussi à $\mathcal{S}$. Ceci prouve le 1°).

Prouvons le 2°) . En examinant l'expression (4.19) de $c(\tilde{y}, D)e_\ell^{m-1}$ écrite (avec $h = 0$) juste avant l'énoncé du théorème 4.37 et en utilisant le 1°) du théorème 4.37 on vérifie immédiatement que :

$$u_\ell = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y}) V_0(\alpha, \ell, i) e_i^{-1} \text{ appartient à } \mathcal{S}.$$

D'après la proposition 4.10 il existe alors des fonctions $b_{\ell,i}(\tilde{y})$ holomorphes sur un voisinage ouvert de l'origine (ℓ et i variant de 1 à k) telles que :

$$u_\ell = b_{\ell,1}(\tilde{y})e_1 + \ldots + b_{\ell,k}(\tilde{y})e_k. \tag{4.20}$$

Notons $W(\tilde{y})$ la matrice carrée d'ordre k dont le coefficient d'indice (ℓ, i) $W_{\ell,i}(\tilde{y})$ vaut :

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(\tilde{y}) V_0(\alpha, \ell, i) = W_{\ell,i}(\tilde{y}). \tag{4.21}$$

Considérons la matrice $B(\tilde{y}) = (b_{\ell,i}(\tilde{y})_{1\leq \ell,i \leq k}$. Les relations (4.20) signifient que $W(\tilde{y})e^{-1} = B(\tilde{y})e$. Rappelons que (voir théorème 4.27) : $e = (\mathrm{Id} - K(y))^{-1}P(y)e^{-1}$. Par conséquent on a :

$$W(\tilde{y})e^{-1} = B(\tilde{y})(\mathrm{Id} - K(y))^{-1}P(y)e^{-1}. \tag{4.22}$$

Rappelons que le vecteur colonne e^{-1} est égal à :

$$e^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \\ \frac{2z}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{kz^{k-1}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Si $\tilde{y} \notin T$ est suffisamment proche de 0 alors l'argument de prolongement analytique du théorème 3.5 montre qu'on peut donner à z dans l'expression de e^{-1} figurant dans la formule (4.22) les $k+1$ valeurs deux à deux distinctes solutions de l'équation (3.1). On en déduit alors que les matrices $W(\tilde{y})$ et $B(\mathrm{Id} - K)^{-1}P(\tilde{y})$ coincident lorsque $\tilde{y}$ appartient à un petit voisinage de l'origine. Ceci prouve le 2°).

Prouvons le 3°). Soit $h \in \mathbb{Z}$. La relation établie au 2°) montre que : ($W(\tilde{y})$ a été définie par les relations (4.21))

$$W(\tilde{y})e^{-1+h} = B(\tilde{y})(\mathrm{Id} - K)^{-1}(\mathrm{Id} + (h-1)K)(\mathrm{Id} + (h-1)K)^{-1}Pe^{-1+h}.$$

Rappelons (voir théorème 4.27) que :

$$e^h = (\mathrm{Id} + (h-1)K)^{-1}Pe^{-1+h}.$$

Par conséquent on a :

$$B(\mathrm{Id} - K)^{-1}(\mathrm{Id} + (h-1)K)e^h = W(\tilde{y})e^{-1+h}. \tag{4.23}$$

Il est clair qu'il existe des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine $c_{\ell,i}(\tilde{y}), \tilde{c}_{\ell,i}(\tilde{y})$, ℓ et i variant de 1 à k telles que le coefficient d'indice (ℓ, i) de la matrice $B(\mathrm{Id} - K)^{-1}(\mathrm{Id} + (h-1)K)$ soit égal à :

$$c_{\ell,i}(\tilde{y}) + h\ \tilde{c}_{\ell,i}(\tilde{y}).$$

En outre l'égalité matricielle (4.23) et les relations (4.21) montrent que pour tout ℓ de $\{1,,\dots,k\}$ on a :

$$\sum_{i=1}^{k}(c_{\ell,i}(\tilde{y})+h\tilde{c}_{\ell,i}(\tilde{y}))e_i^h=\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha(\tilde{y})V_0(\alpha,\ell,i)e_i^{h-1}.$$

En reprenant l'expression (4.19) de $c(\tilde{y},D)\ e_\ell^{h+m-1}$ écrite juste avant l'énoncé du théorème 4.37 on vérifie que :

$$c(\tilde{y},D)e_\ell^{h+m-1}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha(\tilde{y})V_0(\alpha,\ell,i)e_i^{h-1}$$

$$+\sum_{|\alpha|\leq m}c_\alpha(y)\sum_{\substack{q\geq|\alpha|+1-m\\ q\geq 0}}\sum_{i=1}^{k}V_q(\alpha,\ell,i)e_i^{q+h+m-1-|\alpha|},$$

en effet, comme $|\alpha|\leq m$ l'inégalité $0\leq q<|\alpha|+1-m$ équivaut à $q=0$ et $|\alpha|=m$. On obtient alors immédiatement le théorème 4.37.

§5. NORMES ET FONCTIONS MAJORANTES

Définition 5.1. Soient $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} u_\alpha x^\alpha = u(x)$ et $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} v_\alpha x^\alpha = v(x)$ deux séries formelles à coefficients complexes. Nous écrirons $u(x) \ll v(x)$ pour exprimer que $\forall\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $v_\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|u_\alpha| \leq v_\alpha$.

Nous allons rappeler les définitions et propriétés de fonctions majorantes définies dans [22].

Définition 5.2. Soient $R > 0$, $\rho > 1$ et $h \in \mathbb{N}$. On pose

$$\varphi_h^R(x) = \frac{h!}{(1 - \frac{\rho x_0}{R} - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{R})^{h+1}}$$

Les résultats de la proposition suivante sont essentiellement prouvés dans [22].

Proposition 5.3.. Avec les notations précédentes, on a :

1°) $\varphi_h^R(x) \ll \varphi_{h+1}^R(x)$, $D_{x_0}\varphi_h^R = \frac{\rho}{R}\,\varphi_{h+1}^R$, $D_{x_j}\varphi_h^R = \frac{1}{R}\,\varphi_{h+1}^R$ $1 \leq j \leq n$

2°) Soit $x \mapsto b(x)$ une fonction holomorphe bornée par M sur le polydisque $D(R)$ ouvert de centre 0 et de rayon $R > 0$. alors on a :

$$b(x) \ll M\ \varphi_0^R(x)$$

3°) Soient $R_0 \geq 2R$ et $x \to a(x)$ une fonction holomorphe bornée par M sur le polydisque $D(R_0)$. Considérons $h \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et $u(x)$ une série formelle. Alors on peut affirmer que :

$$u(x) \ll C\varphi_h^R \Rightarrow a(x)u(x) \ll 2MC\ \varphi_h^R(x).$$

Note. Le 3°) de la proposition 5.3 nous permettra de majorer l'action des coefficients des opérateurs par des constantes multiplicatives.

Preuve. Nous allons - en gros - reproduire une démonstration de [22]. On obtient immédiatement le 1°). Prouvons le 2°). Les inégalités de Cauchy montrent que :

$$b(x) \ll M\prod_{j=0}^n \frac{1}{(1-\frac{x_j}{R})} \ll M\frac{1}{1-\frac{1}{R}(x_0+\ldots+x_n)} \ll M\ \varphi_0^R(x).$$

Ceci prouve le 2°). Prouvons le 3°). Pour alléger les notations, nous poserons $X = \rho x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. On a :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\ \varphi_h^R(x) - \frac{1}{1-\frac{X}{2R}}\ \varphi_h^R(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{X}{2R}} \times \frac{h!}{(1-\frac{X}{R})^h} \gg 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{1-\frac{X}{2R}}\ \varphi_h^R(x) \ll 2\varphi_h^R(x).$$

Comme $2R \leq R_0$ le 2°) montre que :

$$a(x) \ll \frac{M}{1-\frac{X}{2R}},$$

on obtient alors immédiatement le 3°).

On obtient immédiatement le lemme suivant :

Lemme 5.4. Soient $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_p$ des constantes réelles ≥ 0. Si $U(x)$ est une série formelle vérifiant :

$$D_{x_0} U(x) \ll A_1 D_{x_0}\ \varphi_{h_1}^R + \ldots + A_p D_{x_0}\ \varphi_{h_p}^R$$

$$U(0,x') \ll B_1\ \varphi_{j_1}^R + \ldots + B_p\ \varphi_{j_p}^R$$

alors on a :

$$U(x) \ll A_1\ \varphi_{h_1}^R + \ldots + A_p\ \varphi_{h_p}^R + B_1\ \varphi_{j_1}^R + \ldots + B_p\ \varphi_{j_p}^R.$$

Maintenant nous définissons les espaces de séries formelles qui nous permettront de prouver le théorème 0.2. Notons $\mathcal{O}_x$ l'anneau des germes holomorphes $b(x)$ en l'origine.

Définition 5.5. Considérons $w \in \mathbb{Z}$ et des réels $\rho > 1$, $R \in]0,1[$, $\epsilon > 0$. Nous notons $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ le $\mathcal{O}_x$-module des séries formelles de la forme :

$$u = u(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq -m+w+1} b_\ell^h(x) e_\ell^{h+m-1}(y)$$

où les $e_\ell^{h+m-1}(y)$ sont regardés comme des indéterminées linéairement indépendantes sur $\mathcal{O}_x$, où les $b_\ell^h(x)$ sont des germes en 0 holomorphes tels que si on désigne par C_ℓ^h les plus petites constantes $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant :

$$b_\ell^h(x) \ll C_\ell^h\ \varphi_{h+m-w}^R(x)$$

alors la quantité suivante est finie :

$$\|u\|_w = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq -m+w+1} C_\ell^h \epsilon^h < +\infty.$$

Note 1°) $h+m-w \in \mathbb{N}$ et ρ figure dans l'expression de φ^R_{h+m-w}. Pour démontrer - dans la section §7 - le théorème 0.2 nous choisirons les paramètres dans l'ordre suivant : $R \ll 1$ puis $\rho \gg \frac{1}{R}$ puis $\epsilon \ll \frac{R}{\rho}$.

2°). Nous avons désigné par les mêmes notations - à savoir $e_\ell^{h+m-1}(y)$ - les indéterminées de la définition 5.5 et les fonctions introduites dans la définition 4.24. Cet abus de notation est naturel (vu notre objet).

Théorème 5.6 (Avec les notations précédentes). $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ muni de l'application $u \to \|u\|_w$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de Banach.

Preuve (esquisse). Il est clair que $u \to \|u\|_w$ définit une norme. Nous allons utiliser le lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 5.7. Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour chaque série formelle $f(x)$ notons $N_q(f)$ la plus petite constante $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant :

$$f(x) \ll N_q(f)\varphi_q^R(x).$$

Alors l'espace $E_q = \{f(x) \setminus N_q(f) < +\infty\}$ muni de la norme N_q est un Banach.

Considérons une suite de Cauchy $(u^p(x;y))_{p\geq 0}$ de $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$:

$$u^p(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq -m+w+1} b_\ell^h(p)(x) e_\ell^{h+m-1}(y).$$

Il est clair que $\forall p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|u^p\|_w = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq -m+w+1} N_{h+m-w}(b_\ell^h(p))\epsilon^h.$$

On constate alors que pour tous h et ℓ la suite $(b_\ell^h(p))_p$ est de Cauchy dans l'espace de Banach E_{h+m-w} du lemme 5.7. Par conséquent elle converge dans E_{h+m-w} vers un élément noté (b_ℓ^h). On vérifie alors aisément que $u(x;y) =$

$\sum_\ell \sum_h b^h_\ell(x)\ e^{h+m-1}_\ell(y)$ appartient à $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ et que $(u^p)_p$ converge vers u. Ceci prouve le théorème 5.6.

Rappelons que nous avons également noté $e^{h+m-1}_\ell(y)$ les fonctions introduites dans la définition 4.24 et associées à la solution z de l'équation $z^{k+1} = y_k z^{k-1} + \ldots + y_2 z + y_1$. Le théorème suivant associe à chaque série formelle appartenant à $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ une fonction holomorphe ramifiée et un domaine géométrique de convergence.

Théorème 5.8 (Avec les notations du théorème 4.32). Considérons trois réels strictement positifs R, $\rho(>1)$, et ϵ. Fixons alors un réel $r\in]0,1[$ vérifiant :

$$r \le \frac{R}{2\rho(n+1)},\quad r \le \frac{\epsilon}{2}(4C_1^2 C_2^2 k^2)^{-1}$$

où les constantes C_1 et C_2 sont introduites dans le théorème 4.32. On note $D_1(r)$ [resp. $D_2(r)$] le polydisque ouvert de rayon r de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1} = \{x\}$ [resp. $\mathbb{C}^k = \{y\}$]. Alors pour tout entier relatif w et tout élément :

$$u(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\ge -m+w+1} b^h_\ell(x) e^{h+m-1}_\ell(y)$$

de $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ la série de fonctions multiformes :

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\ge -m+1+\max(0,w)} b^h_\ell(x)\ e^{h+m-1}_\ell(y) \tag{5.1}$$

est normalement sommable sur le polydisque $D_1(r)\times D_2(r)$ de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^k = \{(x;y)\}$ et de rayon r, et sa somme est de la forme $\sum_{\ell=1}^k a_\ell(x;y)$ $e_\ell(y)$ où les fonctions $a_\ell(x;y)$ sont holomorphes sur $D_1(r)\times D_2(r)$. De plus considérons un point y^0 de $D_2(r)\backslash T$ et un germe holomorphe en y^0 $z(y)$ solution de l'équation :

$$z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z - y_1 = 0.$$

Notons (par abus) $e^{h+m-1}_\ell(y)$ les germes holomorphes en y^0 définis par e^{h+m-1}_ℓ (voir def 4.24) et correspondant au choix de cette racine $z(y)$. alors pour tout x^0 de $D_1(r)$, $u(x;y)$ définit un germe holomorphe $(x^0;y^0)$ prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(x^0;y^0)$ et tracé dans $D_1(r)\times(D_2(r)\backslash T)$. On notera (par abus) $u(x;y)$ la fonction holomorphe ramifiée ainsi définie.

Preuve. Par hypothèse on a, avec les notations de la def 5.5 :

$$\|u\|_w = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq -m+w+1} C_\ell^h \epsilon^h < +\infty.$$

Par conséquent il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $h \geq -m + w + 1$ et ℓ de $\{1,\dots,k\}$ on a :

$$C_\ell^h \leq M\epsilon^{-h}. \tag{5.2}$$

D'après le théorème 4.32 on peut écrire (pour $h + m - 1 \geq 0$) :

$$e_\ell^{h+m-1} = a_1(\ell, h+m-1)e_1 + \ldots + a_k(\ell, h+m-1)e_k$$

où pour tout y de $D_2(r)$ et j de $\{1,\dots,k\}$ on a :

$$|a_j(\ell, h+m-1)(y)| \leq (2r\ C_1^2\ C_2^2\ k^2)\frac{h+m-1}{(h+m-1)!}. \tag{5.3}$$

Considérons un entier $h \geq -m + 1 + \max(0, w)$ et un point x de $D_1(r)$. En utilisant la définition 5.2 et le fait que $r \leq \frac{R}{2\rho(n+1)}$ et que $\rho \geq 1$ on vérifie aisément que

$$\varphi^R_{h+m-w}(x) \leq (h+m-w)!\ 2^{h+m-w+1}.$$

Comme par hypothèse on a $b_\ell^h \ll C_\ell^h\ \varphi^R_{h+m-w}$ l'inégalité (5.2) montre alors que

$$|b_\ell^h(x)| \leq M\epsilon^{-h}(h+m-w)!2^{h+m-w+1} \tag{5.4}$$

Pour tout j de $\{1,\dots,k\}$ et tout $(x;y)$ de $D_1(r) \times D_2(r)$ les inégalités (5.3) et (5.4) montrent alors que :

$$\left|a_j(\ell, h+m-1)(y)\ b_\ell^h(x)\right| \leq$$

$$\epsilon^{m-1}2^{-w+2}M\frac{(h+m-w)!}{(h+m-1)!}(r\epsilon^{-1}4\ C_1^2\ C_2^2\ k^2)^{h+m-1}.$$

Distinguons alors deux cas suivant la valeur de w

Premier cas : $w \geq 1$. Alors on a $(h+m-w) \leq h+m-1$ pour tout h

Deuxième cas : $w < 1$. On a alors

$$\sum_{h\geq 1-m} \frac{(h+m-w)!}{(h+m-1)!} X^{h+m-1} = \frac{(1-w)!}{(1-X)^{2-w}}.$$

Par hypothèse on a :

$$r\epsilon^{-1}4\; C_1^2\; C_2^2\; k^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs quand y décrit $D_2(r)$ la solution z de l'équation (3.1) reste bornée ainsi que les fonctions (multiformes) $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y)$ (voir thm 3.6). On vérifie alors aisément que la série (5.1) de fonctions multiformes est normalement sommable sur $D_1(r) \times D_2(r)$ et que sa somme est de la forme $\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell(x;y)\; e_\ell(y)$ où les $a_\ell(x;y)$ sont holomorphes sur $D_1(r) \times D_2(r)$. Le théorème 5.8 est alors une conséquence facile du théorème 3.2.

§6. REPRESENTATION DES DONNÉES DU PROBLÈME (0.1)

Dans cette section nous allons donner une représentation - en termes des espaces $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ - des données de Cauchy et du second membre du problème (0.1).

Reprenons les notations du théorème 0.1. Pour chaque j de $\{1,2,\dots,m\}$ l'application $G_j : x \to \tilde{y} = G_j(x)$ définie comme suit :

$$x = (x_0,\dots,x_n) \to (y_0 = x_0, y_1 = g_1^j(x),\dots,y_k = g_k^j(x), y_{k+1} = x_{k+1},\dots,y_n = x_n)$$

vérifie $G_j((0,x')) = (0,x')$. Pour rendre homogène les notations nous poserons:

$$g_0^j(x) = x_0,\ g_{k+1}^j(x) = x_{k+1},\dots,g_n^j(x) = x_n \tag{6.1}$$

de sorte que $G_j = (g_0^j,\dots,g_n^j)$.

Par ailleurs le théorème d'inversion locale montre qu'il existe deux voisinages ouverts connexes U_j et V_j de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ de sorte que G_j induit un difféomorphisme holomorphe de U_j sur V_j et (d'après le théorème 0.1) que $G_j(K^j) = T$.

Reprenons les notations du théorème 0.2. Quitte à diminuer le voisinage U de $O \in \mathbb{C}^{n+1}$ on peut supposer que $U \subset \bigcap_{j=1}^{m} U_j$ de sorte que chaque G_j soit défini sur U. Considérons comme dans le théorème 0.2 un point $x^0 = (0,x'^0)$ de $(U \cap S)\backslash T$ et un germe holomorphe en x'^0 $x' \to z(x')$ solution de l'équation (0.2). Posons $x'^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$ et $y^0 = (x_1^0,\dots,x_k^0)$; pour chaque j de $\{1,\dots,m\}$ on a $G_j(x^0) = x^0$. Considérons l'application $F : x' \mapsto y = F(x') = (x_1,\dots,x_k)$ et *le* germe holomorphe en y^0 $z(y)$ solution de l'équation $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1 = 0$ tel que le germe (composé) en x'^0 $z(F(x'))$ coïncide avec le germe $z(x')$ précédent. Notons $e_\ell^{h+m-1}(y)$ le germe en y^0 défini par e_ℓ^{h+m-1} (voir def 4.24) et le choix de la racine $z(y)$. Par abus le germe en x'^0 $e_\ell^{h+m-1}(F(x'))$ [resp. $z(F(x'))$] sera noté $e_\ell^{h+m-1}(x')$ [resp. $z(x')$].

Alors pour chaque $j \in \{1,\dots,m\}$ le germe en $x^0 = G_j(x^0)$ $z \circ G_j(x) = z(g_1^j(x),\dots,g_k^j(x))$ vérifie l'équation :

$$(z\circ G_j)^{k+1} = g_k^j(x)(z\circ G_j)^{k-1} + \dots + g_2^j(x)(z\circ G_j) + g_1^j(x);$$

et les théorèmes 3.2 et 4.32 permettent de voir que les germes en $x^0 = G_j(x^0) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))$ sont prolongeables holomorphiquement le long de tout chemin issu de x^0 et tracé dans $U_j \backslash K^j$. Par ailleurs rappelons (voir Thm 3.6) que pour chaque ℓ de $\{1,\dots,k\}$ et j de $\{1,\dots,m\}$ on a :

$$e_\ell(x') = z^\ell(x') - N_\ell(x_2,\dots,x_k), \; e_\ell \circ G_j = z^\ell \circ G_j - N_\ell \circ G_j$$

Reprenons l'entier naturel $(-w)$ du théorème 0.2. Soit $s \in \{0,1,\dots,m-1\}$, comme chaque $P_{s,\ell}(x'; D'_x)$ est d'ordre au plus $s-w$ le théorème 4.36 permet d'écrire la donnée de Cauchy $u_s(x')$ du problème (0.1) sous la forme :

$$u_s(x') = \sum_{\ell=1}^{k} P_{s,\ell}(x'; D'_x) e_\ell(x') + \sum_{\ell=1}^{k} P_{s,\ell}(x'; D'_x) N_\ell(x_2,\dots,x_k) +$$

$$P_{s,0}(x'; D'_x)(1) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h=w-s}^{0} \tilde{u}^h_{s,\ell}(x') e^h_\ell(x') + F_s(x')$$

où les fonctions $F_s(x')$ et $\tilde{u}^h_{s,\ell}(x')$ sont holomorphes sur le voisinage W du théorème 0.2. Par ailleurs comme chaque $Q_{j,\ell}(x; D_x)$ est d'ordre au plus $-w+m-1$ le théorème 4.36 permet d'écrire le second membre $v(x)$ du problème (0.1) (voir (0.8)) sous la forme :

$$v(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_{j,0}(x; D_x)(1) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} [Q_{j,\ell}(x; D_x)(e_\ell \circ G_j(x)) +$$

$$Q_{j,\ell}(x; D_x) N_\ell(G_j(x))] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h=w-m+1}^{0} \tilde{v}^h_{j,\ell}(x) \; e^h_\ell \circ G_j(x) + w(x)$$

où les fonctions $w(x)$ et $\tilde{v}^h_{j,\ell}$ sont holomorphes sur U (nous avons supposé, quitte à diminuer U, que chaque G_j est holomorphe sur U). Le théorème linéaire de Cauchy-Kovaleska montre alors que pour prouver le théorème 0.2 on peut remplacer $v(x)$ par $v(x) - w(x)$ et chaque $u_s(x')$ par $u_s(x') - F_s(x')$, *ce que nous ferons désormais*. La proposition suivante nous permettra d'exprimer les données du problème (0.1) en termes des espaces $\tilde{A}^m[R,\rho,\epsilon]$.

Proposition 6.1. Avec les notations précédentes. Fixons un réel $R_0 > 0$ tel que le polydisque $D(2R_0)$ ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ [resp. $\mathbb{C}^n$] soit inclus dans U [resp. W]. Alors pour *tout* $R \in]0, R_0]$, pour *tous* réels $\rho > 1$ et $\epsilon > 0$, la série suivante indexée par $s \in \{0,1,\dots,m-1\}$:

$$u_s(x; y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h=w-s}^{0} \tilde{u}^h_{s,\ell}(x') e^h_\ell(y)$$

appartient à l'espace $\tilde{A}^{w-s}[R,\rho,\epsilon]$ (voir def 5.5) et la série suivante indexée par $j \in \{1,\ldots,m\}$

$$v_j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h=w-m+1}^{0} \tilde{v}^h_{s,\ell}(x)\; e^h_\ell(y)$$

appartient à l'espace $\tilde{A}^{w-m+1}[R,\rho,\epsilon]$.

Preuve. Les fonctions $\tilde{u}^h_{s,\ell}(x')$, $\tilde{v}^h_{s,\ell}(x)$ sont toutes bornées par une même constante $M > 0$ sur $D(R_0)$. Le 2°) de la proposition 5.3 montre alors que pour tout $R \in]0, R_0]$ on a :

$$\tilde{u}^h_{s,\ell}(x') \ll M\varphi^R_0(x),\ \tilde{v}^h_{s,\ell}(x) \ll M\varphi^R_0(x).$$

La proposition découle alors du 1°) de la propostion 5.3.

Dans la suite nous travaillerons avec des données de Cauchy et un second membre définis - plus généralement - de la manière suivante. Pour chaque j de $\{1,\ldots,m\}$ nous travaillerons avec un élément $v_j(x;y)$ de $\tilde{A}^{w-m+1}[R,\rho,\epsilon]$ de la forme :

$$v_j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w+1-m} v^{h-m+1}_{j,\ell}(x) e^h_\ell(y). \tag{6.2}$$

Pour chaque s de $\{0,\ldots,m-1\}$ nous travaillerons avec un élément $u_s(x';y)$ de $\tilde{A}^{w-s}[R,\rho,\epsilon]$ de la forme :

$$u_s(x';y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-m+1-s} u^h_{s,\ell}(x') e^{h+m-1}_\ell(y) \tag{6.3}$$

où les $u^h_{s,\ell}(x')$ ne dépendent pas de x_0 et où les réels $R \in]0, R_0]$, ρ et ϵ seront précisés ultérieurement (juste après le théorème 7.18). Nous considérerons alors un point $x'^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n)$ suffisamment proche de 0 et tel que $y^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_k) \notin T$. Nous choisirons alors un germe en y^0 $z(y)$ solution de l'équation (3.1) et nous supposerons que chaque donnée de Cauchy $u_s(x')$ est la forme $u_s(x';x')$ où $u_s(x';y)$ désigne par abus le germe au point $(x'^0;y^0)$ défini comme indiqué dans le théorème 5.8 par l'élément (6.3) de $\tilde{A}^{w-s}[R,\rho,\epsilon]$ et le choix du germe en y^0 de racine $z(y)$. Par ailleurs nous supposerons que le second membre $v(x)$ du problème (0.1) est de la forme :

$$v(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x; G_j(x)) \tag{6.4}$$

où $v_j(x;y)$ désigne par abus le germe holomorphe en $(0, x'^0; y^0)$ défini comme indiqué dans le théorème 5.8 par l'élément (6.2) de $\tilde{A}^{w-m+1}[R,\rho,\epsilon]$ et le choix de $z(y)$.

§7. PREUVE DU THÉORÈME 0.2.

Compte tenu de la forme (6.3) [resp. (6.4)] des données de Cauchy [resp. du second membre $v(x)$] nous chercherons - a priori - la solution du problème (0.1) sous la forme :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,\ell}^{h}(x)\ e_{\ell}^{h+m-1}(G_j(x)) \tag{7.1}$$

où pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,\ell}^{h}(x)\ e_{\ell}^{h+m-1}(y) \in \tilde{A}^{w}[R, \rho, \epsilon]$$

et où les réels R, ρ, ϵ seront déterminés ultérieurement.

Pour que l'on ait $a(x, D)u(x) = v(x)$ il suffit que pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$ on ait :

$$\begin{aligned} & a(x, D) \left(\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,\ell}^{h}(x)\ e_{\ell}^{h+m-1}(G_j(x)) \right) \\ & = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} v_{j,\ell}^{h-m+1}(x)\ e_{\ell}^{h}(G_j(x)) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Nous allons introduire l'opérateur $c_j(\tilde{y}; D)$ obtenu en conjuguant $a(x, D)$ par le difféomorphisme $G_j : x \to \tilde{y} = G_j(x)$.

Définition 7.1. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, m\}$ on note $c_j(\tilde{y}; D)$ l'opérateur différentiel d'ordre m défni par :

$$[c_j(\tilde{y}; D) f(\tilde{y})] \circ G_j(x) = a(x, D)\, [f \circ G_j(x)]$$

On peut supposer que les coefficients de $c_j(\tilde{y}; D)$ sont définis et holomorphes sur le voisinage ouvert V_j de 0 défini au début de §6.

Le théorème suivant rassemble quelques propriétés importantes des opérateurs $c_j(\tilde{y}; D)$.

Théorème 7.2. Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$. Alors $c_j(\tilde{y}; D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m caractéristique pour la queue d'aronde T (i.e. son symbole principal $c_{j,m}(\tilde{y};\eta)$ s'annule sur l'adhérence $N(T)$ dans $T^*V_j\backslash 0$ du conormal à la partie lisse de T). En outre $\partial_{x_0} g_1^j(0,\ldots,0) = \lambda_j$ (voir l'équation (0.5)), $\partial_{x_1} g_1^j(0) = 1$ et $\partial_{x_i} g_1^j(0) = 0$ pour $i \geq 2$.

Preuve. Le difféomorphisme G_j induit le difféomorphisme χ_j entre fibrés cotangents :

$$\chi_j = \left| \begin{array}{l} T^*V_j \longrightarrow T^*U_j \\ (\tilde{y};\eta) \longrightarrow (G_j^{-1}(\tilde{y});{}^t G_j'(G_j^{-1}(\tilde{y})).\eta) \end{array} \right.$$

Il est alors bien connu que le symbole principal de $c_j(\tilde{y};D)$ est donné par $c_{j,m}(\tilde{y};\eta) = a_m(\chi_j(\tilde{y};\eta))$. Rappelons que d'après le 1°) du théorème 0.1 et la définition de G_j on a $G_j(K^j) = T$. Il est alors clair que :

$$N(T) = \{(\tilde{y};\eta) \;/\; \chi_j(\tilde{y};\eta) \in N(K^j)\} \tag{7.3}$$

Comme K^j est (par construction) caractéristique pour $a(x;D)$ on en déduit que T est caractéristique pour $c_j(\tilde{y};D)$.

Maintenant prouvons que $\lambda_j = \partial_{x_0} g_1^j(0)$. Rappelons - avec les notations du théorème 0.1 - que $\Lambda_j = N(K^j)$ et $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0) \in \Lambda_j$. Par ailleurs le théorème 8.9 montre que $N(T)$ ne possède qu'une seule codirection - à savoir $\mathbb{C}(0,1,0,\ldots,0)$ au-dessus de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Comme $G_j(0) = 0$ l'égalité (7.3) permet alors d'affirmer que $\mathbb{C}(\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ est la seule codirection de $N(K^j)$ située au-dessus de l'origine et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$${}^tG_j'(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons que $G_j(x) = (x_0, g_1^j(x),\ldots,g_k^j(x), x_{k+1},\ldots,x_n)$ et que $g_\ell^j(0,x') = x_\ell$ pour $1 \leq \ell \leq k$. Par conséquent la matrice (transposée) ${}^tG_j'(0)$ est donné par :

$$
{}^tG'_j(0) = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \partial_{x_0} g_1^j(0) & & \cdots & & \partial_{x_0} g_k^j(0) & & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
0 & & 1 & & 0 & & \cdots & & & & 0 \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & \ddots & & 0 & & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \\
0 \ \cdots & & & & 0 & & 1 & & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & & \ddots & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & & \ddots & \\
0 \ \cdots & & & & & & & & 0 & & 1
\end{array}\right)
$$

Par conséquent on a :

$$\partial_{x_0} g_1^j(0) = \lambda\lambda_j, \ \lambda = \partial_{x_1} g_1^j(0) \neq 1, \ \partial_{x_i} g_1^j(0) = 0 \ \text{pour } i \geq 2.$$

Ceci prouve le théorème 7.2.

Les trois théorèmes 7.5, 7.7 et 7.10 suivants joueront un rôle clef lors de la construction de la solution du problème (0.1) par la méthode de l'optique géométrique. Pour énoncer ces théorèmes il est commode de donner les deux définitions suivantes :

Définition 7.3. Soit $w \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. On note $\tilde{A}^w[G_j]$ le module, sur l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes $b(x)$ holomorphes en l'origine, des séries formelles du type :

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_\ell^h(x) \, e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))$$

où $e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))$ sont regardées comme les indéterminées linéairement indépendantes sur $\mathcal{O}_x$, où pour chaque ℓ de $\{1, \dots, k\}$ et chaque $h \geq w + 1 - m$, $b_\ell^h(x)$ est un germe en 0 holomorphe. En dérivant terme en terme, en appliquant les règles usuelles du calcul différentiel et les formules du théorème 4.36 qui expriment $\partial_y^\alpha \, e_\ell^{h+m-1}$, on fait agir de manière naturelle les opérateurs différentiels sur $\tilde{A}^w[G_j]$. Par exemple ∂_{x_i} envoie $\tilde{A}^w[G_j]$ dans $\tilde{A}^{w-1}[G_j]$.

Définition et convention 7.4. Pour alléger l'écriture nous désignerons dans la suite par $x \mapsto \tilde{y} = G(x)$ *l'un des* G_j, $1 \leq j \leq m$. D'après le théorème 7.2

on a donc : $G(x) = (g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x))$, $G(0, x') = (0, x')$, $\partial_{x_0} g_1(0) = \lambda$ est l'une des racines λ_j de l'équation (0.5), $\partial_{x_1} g_1(0) = 1, \partial_{x_i} g_1(0) = 0$ pour $i \geq 2$. On a vu au début de la section §6 que G induit un difféomorphisme de $U(\ni 0)$ sur $G(U)$. Nous pouvons supposer que les coefficients de $a(x; D)$ sont holomorphes sur U.

Les formules de dérivation (formelle) dans les espaces $\tilde{A}^w[G_j]$ ne sont pas évidentes (cf. thm 4.36), aussi nous aurons besoin du théorème suivant qui indique quand on peut associer à un élément de $\tilde{A}^w[G_j]$ une fonction holomorphe ramifiée de sorte que ces opérations de dérivations formelles coïncident avec les dérivations holomorphes usuelles.

Théorème 7.5 (Avec les notations précédentes). Considérons $w \in \mathbb{Z}$ et des réels $\rho > 1$, $R \in]0, 1[$, $\epsilon > 0$, de sorte que U contienne le polydisque ouvert $D_1(3R)$ de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et de rayon $3R$. Soit $P(x; D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre p dont les coefficients sont holomorphes sur $D_1(3R)$. Soient

$$u(x; y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_\ell^h(x)\, e_\ell^{h+m-1}(y)$$

un élément de $\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon]$ (voir def 5.5) et

$$v(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-p+1-m} v_i^h(x)\, e_i^{h+m-1}(G(x))$$

un élément de $\tilde{A}^{w-p}[G]$ tels que dans $\tilde{A}^{w-p}[G]$ on ait $P(x; D)\, (u(x; G(x))) = v(x)$ (au sens des séries formelles). Alors :

1°).

$$v(x; y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-p+1-m} v_i^h(x)\, e_i^{h+m-1}(y)$$

appartient à $\tilde{A}^{w-p}[R, \rho, \epsilon]$.

2°). Considérons un réel r vérifiant les deux inégalités du théorème 5.8. Soit V un voisinage ouvert connexe $\subset D_1(r) \cap U$ de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall x \in V$, $G(x) \in D_1(r)$. Soit $(0, x'^0)$ un point de $(S \cap V) \backslash T$ avec $x'^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et posons $y^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Choisissons un germe $z(y)$ holomorphe en y^0 solution de l'équation (3.1) et notons par abus $e_\ell^{h+m-1}(y)$ le germe holomorphe en y^0 défini par ce choix de $z(y)$. Alors les deux germes holomorphes en $(0, x'^0) = G(0, x'^0)$, $u(x; G(x))$ et $v(x; G(x))$ (définis comme indiqué dans le théorème 5.8) définissent des fonctions holomorphes ramifiées sur $V\backslash G^{-1}(T)$ et on a $P(x;D)\ (u(x;G(x))) \equiv v(x;G(x))$.

Preuve. Nous prouverons le théorème dans le cas où $P(x;D)$ est d'ordre 1 et de la forme $f(x)\partial_{x_q}$. On prouvera alors facilement le cas général en raisonnant par récurrence sur l'ordre de $P(x;D)$. Soient donc $f(x)$ une fonction holomorphe sur $D_1(3R)$ et $q \in \{0,\dots,n\}$. Rappelons que $G=(g_0,g_1,\dots,g_n)$.

Lemme 7.6. On peut écrire : $f(x)\partial_{x_q}\ (u(x;G(x))) =$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{h\geq w-m} v_i^h(x)\ e_i^{h+m-1}(G_j(x)) \text{ (au sens de } \tilde{A}^{w-1}[G])$$

où pour chaque (h,i) on a :

$$v_i^h(x) = f(x)\Bigg[\partial_{x_q} b_i^h + \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_\ell^{h+1} \times \partial_{x_q} g_j(x)$$

$$\times V_0(j,\ell,i)\circ G(x) + \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_\ell^h \times \partial_{x_q} g_j(x) \times V_1(j,\ell,i)\circ G(x)\Bigg]$$

où les polynômes quasi-homogènes $V_0(j,\ell,i)$, $V_1(j,\ell,i)$ sont introduits dans le théorème 4.34. On pose $b_\ell^{w-m}\equiv 0$.

Preuve du lemme 7.6. En utilisant l'expression que le corollaire 4.35 fournit pour chaque $\partial_{y_j} e_\ell^{h+m-1}$ on obtient que

$$\text{(7.4)}\quad \partial_{x_q}\left(b_\ell^h \times e_\ell^{h+m-1}(G)\right) = \left(\partial_{x_q} b_\ell^h\right) \times e_\ell^{h+m-1}(G) + b_\ell^h \times \sum_{j=1}^{k}(\partial_{x_q} g_j)\times$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} V_0(j,\ell,i) e_i^{h+m-2} + \sum_{i=1}^{k} V_1(j,\ell,i) e_i^{h+m-1}\right](G)$$

On obtient alors aisément le lemme 7.6.

Comme par hypothèse $u(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{h\geq w-m+1} b_\ell^h(x)\ e_\ell^{h+m-1}$ appartient à $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ la définition 5.5 montre que :

$$\text{(7.5)}\qquad b_\ell^h(x) \ll C_\ell^h\ \varphi_{h+m-w}^R(x)$$

$$\|u\|_w = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} C_\ell^h \epsilon^h < +\infty. \tag{7.6}$$

Maintenant considérons une constante $M > 0$ telle que les fonctions suivantes:

$$f(x) \times \partial_{x_q} g_j \times V_s(j,\ell,i)(G(x)),\ f(x)$$

(où $s \in \{0,1\}$ et j, ℓ, i varient de 1 à k), soient bornées par M sur le polydisque $D_1(2R)$.

Comme $\rho > 1$ la proposition 5.3 et l'inégalité (7.5) montrent que :

$$f(x)\partial_{x_q} b_i^h \ll 2M\frac{\rho}{R}\ C_i^h\ \varphi_{h+m-w+1}^R(x)$$

La finitude de la quantité (7.6) montre alors que :

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} f(x)\partial_{x_q} b_i^h e_i^{h+m-1}(y) \tag{7.7}$$

appartient à $\tilde{A}^{w-1}[R,\rho,\epsilon]$. *Fixons* provisoirement (j,ℓ) dans $\{1,\ldots,k\}^2$. La proposition 5.3 et l'inégalité (7.5) permettent de voir que pour chaque i de $\{1,\ldots,k\}$ on a :

$$f(x)\partial_{x_q} g_j \times V_0(j,\ell,i)(G(x))b_\ell^{h+1} \ll 2MC_\ell^{h+1}\varphi_{h+m-w+1}^R.$$

$$f(x)\partial_{x_q} g_j \times V_1(j,\ell,i)(G(x))b_\ell^h \ll 2MC_\ell^h\varphi_{h+m-w+1}^R(x)$$

La finitude de la quantité (7.6) entraîne facilement la finitude des deux quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-m} 2MC_\ell^{h+1}\epsilon^h, \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} 2MC_\ell^h\epsilon^h$$

Par conséquent, (j,ℓ) étant fixé, les deux séries formelles suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k} f(x)\partial_{x_q} g_j(x) \sum_{h \geq w-m} V_0(j,\ell,i)(G)b_\ell^{h+1} e_i^{h+m-1}(y) \tag{7.8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f(x)\partial_{x_q} g_j(x) \sum_{h \geq w-m+1} V_1(j,\ell,i)(G)b_\ell^h e_i^{h+m-1}(y) \tag{7.9}$$

appartiennent à $\tilde{A}^{w-1}[R,\rho,\epsilon]$. Posons $N = 2k^2+1$ et notons E l'ensemble des N séries formelles définies par les expressions (7.7), (7.8), (7.9) j et ℓ variant de 1 à k. Le lemme 7.6 permet alors de voir que $f(x)\partial_{x_q}(u(x;G(x)))$ s'écrit sous la forme $v(x) = \sum_{H(x;y)\in E} H(x;G(x))$. Comme $\underline{E \subset \tilde{A}^{w-1}[R,\rho,\epsilon]}$ on obtient immédiatement le 1°) en posant :

$$v(x;y) = \sum_{H\in E} H(x;y).$$

Prouvons alors 2°). Le théorème 5.8 appliqué à $u(x;y)$, le fait que $G(V) \subset D_1(r)$ et le théorème de Weierstrass montrent que le germe holomorphe en $(0,x'^0) = G(0,x'^0)f(x) \times \partial_{x_q}(u(x;G(x)))$ est égal à :

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-m+1} f(x)\partial_{x_q}\left[b_\ell^h(x)\, e_\ell^{h+m-1}(G(x))\right] \tag{7.10}$$

cette série étant normalement sommable sur un voisinage de $(0,x'^0)$. En utilisant l'expression de $\partial_{x_q}\left(b_\ell^h \times e_\ell^{h+m-1}(G)\right)$ fournie par l'identité (7.4) et en appliquant le théorème 5.8 aux éléments $H(x;y)$ de $E \subset \tilde{A}^{w-1}[R,\rho,\epsilon]$ on vérifie aisément que le germe (7.10) en $(0,x'^0)$ est de la forme :

$$v(x;G(x)) = \sum_{H\in E} H(x;G(x)).$$

Le théorème 5.8 montre en outre que $u(x;G(x))$ et $v(x;G(x))$ définissent des fonctions holomorphes ramifiées sur $V\backslash G^{-1}(T)$. Ceci prouve le théorème 7.5.

Théorème 7.7. Avec les notations de la convention 7.4. Soit $w \in \mathbb{Z}$. On peut trouver pour chaque d de $\{0,\ldots,m-1\}$ et (ℓ,p) de $\{1,\ldots,k\}^2$ une fonction $x \to \tilde{d}_{\ell,p}(x)$ holomorphe sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et un opérateur différentiel d'ordre $\leq d+1$, $Q(d+1,\ell,p)$ dont les coefficients sont des fonctions de x holomorphes sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\underline{Q(1,\ell,p)}$ ne contenant pas $\underline{\partial_{x_0}}$. De plus il existe pour chaque multi-indice α de $\mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $|\alpha| = m-1$ une fonction $t_\alpha(x)$ holomorphe sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, de telle sorte que pour tout $u(x) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{h\geq w-m+1} b_p^h(x)\, e_p^{h+m-1}(G)$ appartenant à $\tilde{A}^w[G]$ on peut affirmer que $a(x;D)u(x)$ appartient $\tilde{A}^{w-m+1}[G]$ et est de la forme :

$$a(x;D)u = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-m+1} v_\ell^{h-m+1}(x)\, e_\ell^h(G)$$

où pour chaque $h \geq w - m + 1$ et ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ on a :

$$v_\ell^{h-m+1}(x) = \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{p=1}^{k} Q(d+1, \ell, p) b_p^{h-d} + h \sum_{p=1}^{k} \tilde{d}_{\ell,p}(x) b_p^h(x) +$$

$$\sum_{|\alpha|=m-1} t_\alpha(x) \sum_{p=1}^{k} V_0(\alpha, p, \ell)[G(x)] \partial_{x_0} b_p^h.$$

Les $V_0(\alpha, p, \ell)$ ont été définis dans le théorème 4.36; $\partial_{x_0} b_\ell^h$ n'apparait que dans la dernière sommation. En outre le coefficient - noté $B_\ell(x)$ - de $\partial_{x_0} b_\ell^h$ dans l'expression de $v_\ell^{h-m+1}(x)$ est égal à :

$$B_\ell(x) = \sum_{|\alpha|=m-1} t_\alpha(x) V_0(\alpha, \ell, \ell)[G(x)]$$

et *ne s'annule pas à l'origine.*

Preuve. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 7.8. Posons $\beta^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ et $\alpha^1 = (0, m-1, 0, \ldots, 0)$ de sorte que $\partial_x^{\beta^0} = \partial_{x_0}$ et $\partial_{\tilde{y}}^{\alpha^1} = \partial_{y_1}^{m-1}$. Alors pour chaque couple (β, α) de multi-indices de $\mathbb{N}^{n+1}$ vérifiant $|\beta| + |\alpha| \leq m$ on peut trouver des fonctions $x \to t_{\beta,\alpha}(x)$ holomorphes sur le voisinage U de 0 de la convention 7.4 de telle sorte que pour toute fonction $w(x)$ [resp. $f(\tilde{y})$] holomorphe sur un ouvert U_1 [resp. V_1] inclus dans U [resp. $G(U)$] on peut écrire : $\forall x \in U_1 \cap G^{-1}(V_1)$,

$$a(x; D)[w(x) \times f \circ G(x)] = w(x)\ a(x; D)[f \circ G(x)] +$$

$$\sum_{\substack{|\beta| \geq 1 \\ |\alpha|+|\beta| \leq m}} t_{\beta,\alpha}(x)\ \partial_x^\beta w(x) (\partial_{\tilde{y}}^\alpha f)(G(x));$$

en outre le coefficient $t_{\beta^0,\alpha^1}(x)$ de $\partial_{x_0} w \partial_{y_1}^{m-1} f$ *ne s'annule pas en* 0.

Preuve. Rappelons (voir §1) que :

$$a(x; D) = \sum_{|\delta| \leq m} a_\delta(x) D_x^\delta.$$

La formule de Leibnitz permet alors d'écrire :

$$a(x; D)[w(x) \times f \circ G(x)] = w(x) a(x; D)[f \circ G(x)]$$

$$+\sum_{|\delta|\leq m} a_\delta(x) \sum_{\substack{\beta+\mu=\delta \\ |\beta|\geq 1}} \frac{\delta!}{\beta!\mu!} \partial_x^\beta w(x) \times \partial_x^\mu [f \circ G(x)].$$

Comme pour chaque $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ il existe un opérateur différentiel $P_\mu(\tilde{y}; D)$ d'ordre $|\mu|$ tel que :

$$\partial_x^\mu [f \circ G(x)] = [P_\mu(\tilde{y}; D)f][G(x)],$$

on obtient aisément les fonctions holomorphes $x \to t_{\beta,\alpha}(x)$ permettant de décomposer $a(x; D)[w \times f \circ G]$ comme indiqué dans l'énoncé. Calculons alors $t_{\beta^0,\alpha^1}(x)$ et montrons que cette fonction ne s'annule pas en 0. Au point $\tilde{y} = G(x)$ le symbole principal (d'ordre $|\mu|$) de $P_\mu(\tilde{y}; D)$ est défini par :

$$\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_n) \longrightarrow \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{n} \partial_{x_i} g_p(x) \eta_p \right)^{\mu_i}.$$

Dans l'énoncé du lemme 7.8 le coefficient de $\partial_{x_0} \partial_{y_1}^{m-1}$ est alors égal à :

$$t_{\beta^0,\alpha^1}(x) = \sum_{|\mu|=m-1} \frac{(\mu + \beta^0)!}{\mu!} a_{\mu+\beta^0}(x) \prod_{i=0}^{n} (\partial_{x_i} g_1(x))^{\mu_i}.$$

Rappelons (voir convention 7.4) que :

$$\partial_{x_0} g_1(0) = \lambda, \ \partial_{x_1} g_1(0) = 1, \ \partial_{x_i} g_1(0) = 0 \text{ pour } i \geq 2.$$

Par conséquent on a :

$$t_{\beta^0,\alpha^1}(0) = \sum_{\mu=(\mu_0, m-1-\mu^0, 0, \ldots, 0)} (\mu_0 + 1)\, a_{\mu+\beta^0}(0) \lambda^{\mu_0}.$$

Rappelons que - par hypothèse (voir les sections §0 ou §1) - toutes les racines de l'équation (0.5) suivante sont simples :

$$a_m(0, \ldots, 0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0) = p(\xi_0) = 0.$$

Il est clair alors que $t_{\beta^0,\alpha^1}(x) = \partial_{\xi_0} p(\lambda) \neq 0$. Ceci prouve le lemme 7.8.

Lemme 7.9 (Avec les notations du théorème 4.37). Notons $c(\tilde{y}; D) = \sum_{|\delta|\leq m} c_\delta(\tilde{y}) D_{\tilde{y}}^\delta$ l'opérateur défini par $a(x; D)[f \circ G] = [c(\tilde{y}; D)f](G)$. alors pour chaque (p, i) de $\{1, \ldots, k\}^2$ on peut trouver des fonctions $c_{p,i}(\tilde{y})$, $\tilde{c}_{p,i}(\tilde{y})$

holomorphes sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ de telle sorte que pour tout (h,d) de $\mathbb{Z}^2$ et tout germe holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ noté $b_p^{h-d}(x)$ on peut écrire :

$$a(x;D)\left[b_p^{h-d}(x)\ e_p^{h-d+m-1}(G(x))\right] = I + J + K$$

avec :

$$I = b_p^{h-d}(x)\left[\sum_{|\delta|\leq m} c_\delta(G(x)) \sum_{\substack{q\geq|\delta|+1-m\\ q\geq 0}}^{|\delta|} \sum_{i=1}^{k}(V_q(\delta,p,i)\times e^{h-d+m-1+q-|\delta|}) \right.$$

$$\left.(G(x)) + \sum_{i=1}^{k}(c_{p,i}+(h-d)\tilde{c}_{p,i})[G]\times e_i^{h-d}[G]\right]$$

$$J = \sum_{\substack{|\beta|\geq 1\\ |\alpha|+|\beta|\leq m}} t_{\beta,\alpha}(x)\ \partial_x^\beta b_p^{h-d}(x) \sum_{\substack{q=|\alpha|+|\beta|+1-m\\ q\geq 0}}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{k}$$

$$\left[V_q(\alpha,p,i)\times e_i^{h-d+m-1+q-|\alpha|}\right][G(x)]$$

En conséquent dans l'expression de J on se limite aux entiers naturels q vérifiant $q+m-1-|\alpha| \geq |\beta|$. Comme q est ≥ 0 , la condition $q+m-1-|\alpha| < |\beta|$ équivaut à $q = 0$ et $|\alpha|+|\beta| = m$. Dans l'expression de J on a nécessairement $|\alpha| \leq m-1$.

$$K = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leq m\\ |\beta|\geq 1}} t_{\beta,\alpha}(x)\ \partial_x^\beta b_p^{h-d}(x) \sum_{i=1}^{k}\left[V_0(\alpha,p,i)e_i^{h-d+m-1-|\alpha|}\right](G(x)).$$

Preuve. Vu la définition de $c(\tilde{y};D)$ le lemme 7.8 permet d'écrire :

$$a(x;D)\left[b_p^{h-d}(x)\ e_p^{h-d+m-1}(G(x))\right] = b_p^{h-d}(x)[c(\tilde{y};D)(e_p^{h-d+m-1})](G)+$$

$$\sum_{\substack{|\beta|\geq 1\\ |\alpha|+|\beta|\leq m}} t_{\beta,\alpha}(x)\ \partial_x^\beta b_p^{h-d}(x)\times(\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_p^{h-d+m-1})(G). \tag{7.11}$$

Rappelons que G est l'un des difféomorphismes G_j, donc l'opérateur $c(\tilde{y};D)$ est l'un des opérateurs $c_j(\tilde{y};D)$ introduits dans la définition 7.4. D'après le théorème 7.2 $c(\tilde{y};D)$ est caractéristique pour la queue d'aronde T. Le 3°) du théorème 4.37 assure alors l'existence de fonctions $c_{p,i}(\tilde{y})$, $\tilde{c}_{p,i}(\tilde{y})$ holomorphes sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telles que :

$$b_p^{h-d}(x)\left[c(\tilde{y};D)(e_p^{h-d+m-1})\right](G(x)) = I$$

où I est défini dans le lemme 7.9. Par ailleurs le théorème 4.36 (avec p à la place de ℓ et $h-d+m-1-|\alpha|$ à la place de h) montre que :

$$(\partial_{\tilde{y}}^{\alpha} e_p^{h-d+m-1})(G) = \sum_{q=0}^{|\alpha|}\sum_{i=1}^{k}\left[V_q(\alpha,p,i)e_i^{h-d+m-1+q-|\alpha|}\right](G).$$

En remplaçant - dans l'égalité (7.11) - $(\partial_{\tilde{y}}^{\alpha} e_p^{h-d+m-1})(G)$ par le membre de droite de l'égalité précédente et en regroupant les termes dont les indices vérifient $q \geq 0$ et $q \geq |\alpha|+|\beta|+1-m$, on obtient le terme J. En regroupant les termes dont les indices vérifient $q \geq 0$ et $q < |\alpha|+|\beta|+1-m$ (i.e. $q=0$ et $|\alpha|+|\beta| = m$) on obtient le terme K.

Ceci prouve le lemme 7.9.

Preuve du théorème 7.7 à partir du lemme 7.9. Fixons deux entiers $h \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \{1,\dots,k\}$. Considérons alors deux autres entiers $d \in \mathbb{Z}$ et $p \in \{1,\dots,k\}$ tels que $h-d \geq w-m+1$. D'après le lemme 7.9 on peut écrire:

$$a(x;D)\left[b_p^{h-d}(x)\ e_p^{h-d+m-1}(G(x))\right] = I+J+K.$$

Nous allons étudier *séparément* les expressions de I,J,K pour déterminer dans chacune d'elles le coefficient de chaque terme du type $(\partial_x^{\beta}\ b_p^{h-d})e_\ell^h(G)$. Nous vérifierons *à chaque fois* que si le coefficient de $(\partial_x^{\beta}\ b_p^{h-d})e_\ell^h(G)$ n'est pas identiquement nul alors on a nécessairement $\underline{|\beta| \leq d+1}$ et $\underline{0 \leq d \leq m-1}$. De plus, comme par hypothèse on a $h-d \geq w-m+1$ ceci entraînera que $h \geq w-m+1$ puis que tous les termes I,J,K (et donc aussi $a(x;D)u$) appartiennent à $\tilde{A}^{w-m+1}[G]$. Nous obtiendrons alors aisément l'expression annoncée pour $v_\ell^{h-m+1}(x)$.

Etude de I (cf. lemme 7.9). Dans l'expression de I on a clairement $0 \leq q-|\delta|+m-1 \leq m-1$, donc si $d \notin \{0,1,\dots,m-1\}$ alors le coefficient de $e_\ell^h(G)$ dans I est nul. Si $d=0$ alors le coefficient de $e_\ell^h(G)$ dans I est égal à : (avec $q=|\delta|+1-m$)

$$b_p^h(x)\left[\sum_{m-1\leq|\delta|\leq m}(c_\delta \times V_{|\delta|+1-m}(\delta,p,\ell))(G(x)) + (c_{p,\ell}+(h-d)\tilde{c}_{p,\ell})(G(x))\right]$$

comme $q = |\delta| + 1 - m$ est ≥ 0 on a $|\delta| = m$ ou $|\delta| = m - 1$. Nous poserons $\tilde{d}_{p,\ell}(x) = \tilde{c}_{p,\ell}(G(x))$.

Si $d \in \{1, \ldots, m-1\}$ alors le coefficient de $e_\ell^h(G)$ dans I est égal à : (avec $q = d + |\delta| + 1 - m$)

$$b_p^{h-d}(x) \left[\sum_{|\delta| \leq m} (c_\delta \times V_{d+|\delta|+1-m}(\delta, p, \ell))(G(x)) \right].$$

Etude de J. Considérons dans l'expression de J un indice fixé $\beta \neq 0$. Comme dans l'expression de J on a $|\alpha| + |\beta| + 1 - m \leq q \leq |\alpha|$, on peut écrire les deux inégalités suivantes :

$$q + m - 1 - |\alpha| \geq (|\alpha| + |\beta| + 1 - m) + m - 1 - |\alpha| = |\beta|$$

$$q + m - 1 - |\alpha| \leq |\alpha| + (m - 1 - |\alpha|) = m - 1.$$

Par conséquent si d n'appartient pas à $[|\beta|, m-1]$ alors le coefficient de $(\partial_x^\beta\ b_p^{h-d}) \times e_\ell^h(G)$ dans J est nul. $\beta \neq 0$ étant toujours fixé, supposons que $d \in [|\beta|, m-1]$ (alors $d \geq |\beta| \geq 1$), le coefficient de $(\partial_x^\beta\ b_p^{h-d})\ e_\ell^h(G)$ dans J est alors égal à : (avec $q = |\alpha| + d + 1 - m$)

$$\sum_{|\alpha| \leq m - |\beta|} t_{\beta,\alpha}(x) V_{|\alpha|+d+1-m}(\alpha, p, \ell)(G(x))$$

Etude de K. Considérons l'expression de K un indice fixé β ($|\beta| \geq 1$). Comme $|\alpha| = m - |\beta|$ on a $m - 1 - |\alpha| = |\beta| - 1$. Par conséquent si $d \neq |\beta| - 1$ alors le coefficient de $(\partial_x^\beta\ b_p^{h-d})\ e_\ell^h(G)$ dans K est nul. Supposons donc que $d = |\beta| - 1 \in \{0, \ldots, m-1\}$. Le coefficient de $(\partial_x^\beta\ b_p^{h-|\beta|+1})\ e_\ell^h(G)$ dans l'expression de K est alors égal à :

$$\sum_{|\alpha| = m - |\beta|} t_{\beta,\alpha}(x) V_0(\alpha, p, \ell)(G(x)).$$

Dans le cas où $\beta = \beta^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ on pose $t_\alpha(x) = t_{\beta^0,\alpha}(x)$ pour tout multi-indice α de longueur $m - 1$. Les trois études précédentes montrent que $a(x; D)u(x)$ appartient à $\tilde{A}^{w-m+1}[G]$ et qu'il existe des opérateurs $Q(d + 1, \ell, p)$ permettant d'exprimer $v_\ell^{h-m+1}(x)$ comme indiqué dans le théorème

7.7. Il est clair que dans l'expression de $v_\ell^{h-m+1}(x)$ le coefficient de $\partial_{x_0} b_p^h$ est égal à :

$$B_\ell(x) = \sum_{|\alpha|=m-1} t_\alpha(x) V_0(\alpha,\ell,\ell)(G(x))$$

Rappelons (voir juste avant le thm 4.37) que si $\alpha_0+\alpha_{k+1}+\ldots+\alpha_n \geq 1$ alors $V_0(\alpha,\ell,\ell)\equiv 0$. Si $\alpha_1+\ldots+\alpha_k = |\alpha|$ $(=m-1)$ alors le théorème 4.36 affirme que $V_0(\alpha,\ell,\ell)$ est un polynôme quasi-homogène de poids $\sum_{i=1}^k (i-1)\alpha_i$. Si $\alpha \neq \alpha^1 = (0,m-1,0,\ldots,0)$ alors ce polynôme s'annule en $0 = G(0)$. Si $\alpha = \alpha^1 = (0,m-1,0,\ldots,0)$ alors $V_0(\alpha,\ell,\ell)\equiv 1$ (voir Thm 4.36), de plus le lemme 7.8 montre que $t_{\beta^0,\alpha^1}(x)$ égal par définition à $t_{\alpha^1}(x)$ ne s'annule pas à l'origine. Donc $B_\ell(0)\neq 0$. Ceci prouve le théorème 7.7.

Le théorème suivant est une conséquence facile du théorème 7.7, il jouera un rôle clef dans la construction de la solution du problème (0.1) par la méthode de l'optique géométrique.

Théorème 7.10. (Avec les notations du thm 7.7). Soit $w \in \mathbb{Z}$. On peut trouver pour chaque $d \in \{0,\ldots,m-1\}$ et (ℓ,p) de $\{1,\ldots,k\}^2$ deux fonctions $I_{\ell,p}(x)$ et $\tilde f_{\ell,p}(x)$ holomorphes sur un voisinage de $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ et un opérateur différentiel d'ordre $\leq d+1$ $P(d+1,\ell,p)$ dont les coefficients sont holomorphes (en x) sur un voisinage de $0\in\mathbb{C}^{n+1}$, $\underline{P(1,\ell,p)\text{ ne contenant pas }\partial_{x_0}}$, de telle sorte que pour tous $v(x) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{h\geq w-2m+2} v_\ell^h(x) e_\ell^{h+m-1}(G)$ appartenant à $\tilde A^{w-m+1}[G]$ et $u(x) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{h\geq w-m+1} b_\ell^h(x) e_\ell^{h+m-1}(G)$ appartenant à $\tilde A^w[G]$, $a(x;D)u(x)$ est égal à $v(x)$ dans $\tilde A^{w-m+1}[G]$ si et seulement si pour tout ℓ de $\{1,\ldots,k\}$ et tout $h\geq w-m+1$ on peut écrire :

$$\partial_{x_0} b_\ell^h(x) = \sum_{p=1}^k I_{\ell,p}(x)\, v_p^{h-m+1}(x) + h\sum_{p=1}^k \tilde f_{\ell,p}(x)\, b_p^h(x)$$

$$+\sum_{d=0}^{m-1}\sum_{p=1}^k P(d+1,\ell,p) b_p^{h-d}(x) \tag{7.12}$$

Preuve. Reprenons les notations du théorème 7.7 et posons :

$$B_{\ell,p}(x) = \sum_{|\alpha|=m-1} t_\alpha(x) V_0(\alpha,p,\ell)[G(x)] \quad 1\leq \ell,p\leq k.$$

D'après le théorème 7.7 on a $a(x;D)u = v$ dans $\tilde{A}^{w-m+1}[G]$ si et seulement si pour chaque $h \geq w - m + 1$ et ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ on a :

$$\sum_{p=1}^{k} B_{\ell,p}(x)\partial_{x_0} b_p^h = v_p^{h-m+1}(x) - \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{p=1}^{k} Q(d+1, \ell, p) b_p^{h-d}$$

$$(*) \qquad -h \sum_{p=1}^{k} \tilde{d}_{\ell,p}(x) b_p^h$$

Rappelons (voir théorème 4.36) que pour $p > \ell$, $V_0(\alpha, p, \ell)(y)$ est un polynôme quasi-homogène de poids $\geq p - \ell \geq 1$ et s'annule donc en l'origine. D'après le théorème 7.7 pour chaque ℓ de $\{1, \ldots, k\}$, $B_{\ell,\ell}(0)$ est *non* nul, par conséquent la matrice $(B_{\ell,p}(0))_{1 \leq \ell, p \leq k}$ est inversible. La matrice $(B_{\ell,p}(x))_{1 \leq \ell, p \leq k}$ est encore inversible si x est dans un voisinage suffisamment petit de l'origine; En appliquant $(B_{\ell,p}(x))^{-1}$ aux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^\ell$ définis par les relations (*) on obtient alors aisément le théorème 7.10.

Maintenant notre objectif est d'expliciter en termes des algèbres $\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon]$ (voir def 5.5) les conditions de Cauchy $D^s_{x_0} u(x)|_S = u_s(x')$ $0 \leq s \leq m - 1$ du Problème (0.1). Rappelons que les $u_s(x')$ sont définies à partir des relations (6.3) et que nous recherchons $u(x)$ sous la forme a priori (7.1) :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x)\, e_\ell^{h+m-1}(G_j(x)). \tag{7.13}$$

Les difféomorphismes locaux $G_j = (g_0^j, g_1^j, \ldots, g_n^j)$ ont été définis au début de la section §6. Le théorème suivant constitue alors une étape importante pour exprimer les conditions $D^s_{x_0} u(x)|_S = u_s(x')$.

Théorème 7.11. Considérons $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ et $j \in \{1, \ldots, m\}$. Alors pour chaque d de $\{1, \ldots, s\}$ et (i, ℓ) de $\{1, \ldots, k\}^2$ on peut trouver un opérateur différentiel en x d'ordre $\leq d$, $B^j_s(d, \ell, i)$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ de telle sorte que pour tout h de $\mathbb{Z}$ et tout germe $b^h_{j,i}(x)$ en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ holomorphe on peut écrire :

$$\partial^s_{x_0} \left[b^h_{j,i}(x) e_i^{h+m-1}(G_j(x)) \right] =$$

$$\sum_{d=1}^{s} \sum_{\ell=1}^{k} B^j_s(d, \ell, i). b^h_{j,i}(x) \times e_\ell^{h+m-1-s+d}(G_j(x)) +$$

$$\sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha_0!\ldots\alpha_n!}\left(\prod_{p=0}^{n}(\partial_{x_0}g_p^j)^{\alpha_p}(x)\right) b_{j,i}^h(x)[V_0(\alpha,i,\ell)e_\ell^{h+m-1-s}](G_j)$$

où dans la dernière sommation $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Nous poserons $B_s^j(d,\ell,i) = 0$ pour $d > s$.

Preuve. Nous aurons besoin du lemme auxilliaire suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 7.12. Soit $s \in \{1,\ldots,m-1\}$. Il existe des fonctions holomorphes sur le voisinage U de 0 de la convention 7.4 $x \to L_j(s,\alpha)(x)$ (α décrivant les multi-indices de $\mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $\le s-1$) de telle sorte que pour toute fonction $f(\tilde{y})$ holomorphe sur un ouvert V' inclus dans $G_j(U)$ on ait : $\forall x \in G_j^{-1}(V')$,

$$\partial_{x_0}^s[f(G_j(x))] = \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha_0!\ldots\alpha_n!}(\partial_{\tilde{y}}^\alpha f)\circ G_j(x)\prod_{p=0}^{n}(\partial_{x_0}g_p^j)^{\alpha_p}(x))$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le s-1} L_j(s,\alpha)(x)(\partial_{\tilde{y}}^\alpha f)\circ G_j(x).$$

Cela dit, en appliquant la formule de Leibnitz on obtient :

$$\partial_{x_0}^s\left[b_{j,i}^h(x)\times e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))\right] = \tag{7.14}$$

$$\sum_{s_1=0}^{s} \partial_{x_0}^{s-s_1} b_{j,i}^h \times \partial_{x_0}^{s_1}(e_i^{h+m-1}(G_j))\,\frac{s!}{s_1!(s-s_1)!}$$

si $s_1 \ge 1$ le lemme 7.12 montre que :

$$\partial_{x_0}^{s_1}(e_i^{h+m-1}(G_j(x))) = \sum_{|\alpha|=s_1}\frac{s!}{\alpha_0!\ldots\alpha_n!}\,(\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_i^{h+m-1})(G_j) \tag{7.15}$$

$$\times\prod_{p=0}^{n}(\partial_{x_0}g_p^j)^{\alpha_p}(x) + \sum_{|\alpha|\le s_1-1} L_j(s_1,\alpha)(x)(\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_i^{h+m-1})(G_j)$$

Le théorème 4.36 (où l'on remplace $h+|\alpha|$ par $h+m-1$ et on échange les indices i et ℓ) montre que :

$$\partial_{\tilde{y}}^\alpha e_i^{h+m-1}(y) = \sum_{q=0}^{|\alpha|}\sum_{\ell=1}^{k} V_q(\alpha,i,\ell)\; e_\ell^{q+h+m-1-|\alpha|}(y) \tag{7.16}$$

(si $\alpha_0 + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n \geq 1$ alors les $V_q(\alpha, i, \ell)$ sont tous nuls).

Pour terminer la preuve du théorème 7.11 nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 7.13. (Avec les indices s_1, β, α, q des égalités (7.14), (7.15) et (7.16)). Définissons l'entier relatif d par l'égalité $q+h+m-1-|\alpha| = h+m-1-s+d$. Alors on a $s \geq d \geq |\beta|$ en outre, d est nul si et seulement si $q = 0$ et $s = s_1 = |\alpha|$ et $|\beta| = 0$.

Preuve. Par définition on a $d = q - |\alpha| + s$ et $|\alpha| \leq s_1$. D'où $d \geq q + s - s_1 \geq s - s_1$. Comme $|\beta| \leq s - s_1$ on a bien $d \geq |\beta|$. En outre comme $q \leq |\alpha|$ on a bien $d \leq s$. Par ailleurs si $q = 0$ et $s = s_1 = |\alpha|$, d est clairement nul. Supposons maintenant que $d = 0 = s - |\alpha| + q$. Comme q et $s - |\alpha|$ sont ≥ 0 ceci entraîne $q = 0$ et $s = |\alpha| = s_1$.

Preuve du théorème 7.11. On remplace dans l'égalité (7.15) $\partial_y^\alpha e_i^{h+m-1}(y)$ par le second membre de l'égalité (7.16). On reporte l'expression ainsi trouvée de $\partial_{x_0}^{s_1}(e_i^{h+m-1}(G_j(x)))$ dans le second membre de l'égalité (7.14). Pour chaque entier relatif d et chaque ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ on regroupe alors dans l'expression ainsi trouvée de $\partial_{x_0}^s[b_{j,i}^h(x) e_i^{h+m-1}(G_j(x))]$ tous les termes de la forme :

$$(\partial_x^\beta b_{j,i}^h(x)) \times e_\ell^{h+m-1-s+d}(G_j(x)). \tag{7.17}$$

Si le coefficient du terme (7.17) n'est pas identiquement nul alors le lemme 7.13 montre que nécessairement d est de la forme $d = q - |\alpha| + s$ et que $|\beta| \leq d \leq s$. En outre en utilisant le lemme 7.13 avec $d = 0$ et les égalités (7.14) et (7.15) avec $s_1 = s$ on vérifie aisément que le coefficient de $b_{j,i}^h(x)) \times e_\ell^{h+m-1-s}(G_j(x))$ est bien celui indiqué dans le théorème 7.11. Enfin on obtient aisément les opérateurs $B_s^j(d, \ell, i)$ permettant d'écrire l'égalité du théorème 7.11. Ceci prouve le résultat.

Pour alléger l'écriture nous introduisons la notation suivante :

Notations 7.14. On note $b_{\bullet,i}^h(x)$ le vecteur *colonne* de $\mathbb{C}^m$ de composantes les fonctions holomorphes $b_{j,i}^h(x)$ où j varie de 1 à m.

Convention. Rappelons que pour chaque $1 \leq j \leq m$ $G_j(0, x') = (0, x')$. Par conséquent quand on restreint $x = (x_0, x')$ à l'hyperplan S d'équation $x_0 = 0$ les éléments de chaque $\tilde{A}^w[G_j]$ (voir def 7.3) s'identifient de manière naturelle à des éléments de l'espace $\tilde{A}^w[(x')]$. Dans l'énoncé du théorème suivant nous ferons cette identification.

Théorème 7.15. (Avec les notations du théorème 7.11). Pour chaque d de $\{1,\ldots,m-1\}$ et (ℓ,i) de $\{1,\ldots,k\}^2$ notons $N(d,\ell,i)$ [resp. $N(\ell,i)$] la matrice carrée d'ordre m dont le coefficient d'indice (s,j) avec $0 \leq s \leq m-1$ et $1 \leq j \leq m$ est l'opérateur différentiel en x d'ordre $\leq d$ [resp. la fonction holomorphe de x'] :

$$B_s^j(d,\ell,i) \left[\text{resp.} \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha_0! \ldots \alpha_n!} V_0(\alpha,i,\ell) \circ G_j(0,x') \times \prod_{p=0}^{n} (\partial_{x_0} g_p^j)^{\alpha_p}(0,x') \right]$$

Alors en dérivant formellement s fois terrmes à termes (pour chaque s de $\{0,\ldots,m-1\}$) la série suivante puis en faisant $x_0 = 0$ on peut écrire l'identité suivante, dans $\tilde{A}^{w-s}[(x')]$:

$$\partial_{x_0}^s \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,i}^h(x)\ e_i^{h+m-1}(G_j(x)) \right]_{|s} =$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} u_{s,\ell}^{h-s}(x')\ e_\ell^{h+m-1-s}(x_1,\ldots,x_k)$$

où pour chaque ℓ de $\{1,\ldots,k\}$ et $h \geq w-m+1$ le vecteur colonne de $\mathbb{C}^m$

$$U_\ell^h(x') = (u_{s,\ell}^{h-s}(x'))_{0 \leq s \leq m-1} \text{ est égal à :}$$

$$(7.18) \quad U_\ell^h(x') = \sum_{d=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{k} (N(d,\ell,i) b_{\bullet,i}^{h-d})(0,x') + \sum_{i=1}^{k} N(\ell,i)(x') b_{\bullet,i}^h)(0,x').$$

En outre la matrice $N(\ell,\ell)(0)$ coïncide avec la matrice de Vandermonde dont le coefficient d'indice (s,j) est λ_j^s. Enfin pour $i > \ell$ $N(\ell,i)(0)$ est nulle.

Preuve. Prouvons l'égalité matricielle (7.18) exprimant $U_\ell^h(x')$. Pour chaque s de $\{1,\ldots,m-1\}$ on applique le théorème 7.11 et on somme par rapport à $j \in \{1,\ldots,m\}$. Pour obtenir le coefficient - noté $u_{s,\ell}^{h-s}(x')$ - de $e_\ell^{h+m-1-s}$ on remplace - dans l'énoncé du théorème 7.11 - $h+d$ par h et on somme par rapport à $i \in \{1,\ldots,k\}$. On obtient alors aisément l'égalité matricielle (7.18) exprimant $U_\ell^h(x')$. Par ailleurs comme $G_j(0) = 0$ le coefficient d'indice (s,j) de la matrice $N(\ell,\ell)(0)$ est égal à :

$$(7.19) \qquad \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha_0! \ldots \alpha_n!} V_0(\alpha,\ell,\ell)(0) \prod_{p=0}^{n} (\partial_{x_0} g_p^j)^{\alpha_p}(0).$$

D'après le théorème 4.36 $V_0(\alpha,\ell,\ell)$ (où $|\alpha| = s$) est un polynôme quasi-homogène de poids $\sum_{p=1}^{k}(p-1)\alpha_p$ s'annulant en 0 si $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ est différent de $(0,s,0,\ldots,0)$; si $\alpha = (0,s,0,\ldots,0)$ alors $V_0(\alpha,\ell,\ell) \equiv 1$. Or d'après le théorème 7.2 on a $\partial_{x_0} g_1^j(0) = \lambda_j$, il est alors clair que le terme (7.19) vaut λ_j^s et que $N(\ell,\ell)(0)$ coïncide avec la matrice de Vandermonde. Enfin pour $i > \ell$ le théorème 4.36 affirme que $V_0(\alpha,i,\ell)$ est un polynôme quasi-homogène de poids $\geq \sum_{p=1}^{k}(p-1)\alpha_p + i - \ell > 0$, il s'annule donc à l'origine. On en déduit aisément que pour $i > \ell$ $N(\ell,i)(0)$ est la matrice nulle. Ceci prouve le théorème 7.15.

On a vu à la fin de la section §6 qu'on pouvait représenter les données de Cauchy du problème (0.1) par : $(0 \leq s \leq m-1)$

$$u_s(x') = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1-s} u_{s,\ell}^h(x')\ e_\ell^{h+m-1}(x_1,\ldots,x_k).$$

Le théorème suivant fournit un système d'équations qui explicite totalement les conditions de Cauchy $D_{x_0}^s u_{|S} = u_s(x')$ du problème (0.1).

Théorème 7.16. On peut trouver pour chaque d de $\{1,\ldots,m-1\}$ et (ℓ,i) de $\{1,\ldots,k\}^2$ une matrice carrée d'ordre m $M(d,\ell,i)$ [resp. $A_{\ell,i}(x')$] dont chaque coefficient est un opérateur différentiel en x d'ordre $\leq d$ [resp. une fonction de x' holomorphe sur un voisinage de 0] dont les coefficients sont holomorphes sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, de telle sorte que pour chaque ℓ de $\{1,\ldots,k\}$ et chaque $h \geq w-m+1$ l'égalité matricielle (7.18) du théorème 7.15 est équivalente à la relation suivante, entre vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^m$:

$$(7.20)\quad b_{\bullet,\ell}^h)(0,x') = \sum_{i=1}^{k} A_{\ell,i}(x')U_i^h(x') + \sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{m-1} (M(d,\ell,i)b_{\bullet,i}^{h-d})(0,x').$$

Preuve. Pour chaque ℓ de $\{1,\ldots,k\}$ et $h \geq w-m+1$ la relation (7.18) du théorème 7.15 est équivalente à la relation :

$$(*)_\ell\quad U_\ell^h(x') - \sum_{d=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{k} (N(d,\ell,i)b_{\bullet,i}^{h-d})(0,x') = \sum_{i=1}^{k} N(\ell,i)(x')b_{\bullet,i}^h(0,x').$$

Notons alors $R(x')$ la matrice carrée d'ordre km constituée des blocs matriciels carrés (d'ordre m) $N(\ell,i)(x')$ où ℓ [resp. i] $\in \{1,\ldots,k\}$ est l'indice des lignes [resp. colonnes]. D'après le théorème 7.15 $N(\ell,i)(0)$ est nulle pour $i > \ell$ et pour chaque $\ell N(\ell,\ell)(0)$ est la matrice de Vandermonde des $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

Par conséquent $R(0)$ est inversible et $R(x')$ sera encore inversible si x' est dans un voisinage suffisamment petit de 0. En appliquant $R^{-1}(x')$ au vecteur de $\mathbb{C}^{km}$ constitué par les membres gauche des relations $(*)_\ell$ $(1 \leq \ell \leq k)$ on obtient alors aisément le théorème 7.16.

Notations 7.17. Soit $j \in \{1,\dots,m\}$. On applique le théorème 7.10 en remplaçant G par le difféomorphisme G_j (cf. Convention 7.4). Le théorème 7.10 définit alors des fonctions $I^j_{\ell,p}(x)$, $\tilde{f}^j_{\ell,p}(x)$ et des opérateurs différentiels $P^j(d+1,\ell,p)$ permettant d'écrire l'égalité (7.12) du théorème 7.10 dans le cas où $G = G_j$.

Le théorème suivant s'appuie sur les théorèmes 7.10 et 7.16 et entraînera facilement le théorème 0.2.

Théorème 7.18. Avec les notations de la définition 5.5 et du théorème 7.16. Soit $w \in \mathbb{Z}$. Alors on peut trouver des réels strictement positifs $R_1, \rho_1 (> 1)$ et ϵ_1 de telle sorte que pour tout $R \in]0, R_1]$, $\rho = \left(\frac{R}{R_1}\right)^{-1} \rho_1$, $\epsilon = \epsilon_1 \left(\frac{R}{R_1}\right)^2$ et pour tous :

$$v_j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} v^{h-m+1}_{j,\ell}(x) \ e^h_\ell(y) \quad (1 \leq j \leq m)$$

appartenant à $\tilde{A}^{w-m+1}[R,\rho,\epsilon]$ et pour tous

$$u_s(x';y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-s+1-m} u^h_{s,\ell}(x') \ e^{h+m-1}_\ell(y)$$

appartenant à $\tilde{A}^{w-s}[R,\rho,\epsilon]$ s variant de 0 à $m-1$; il existe une et une seule solution $\left(u^j(x;y) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x) \ e^{h+m-1}_\ell(y)\right)_{1 \leq j \leq m}$ dans $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$ du système d'équations suivant : pour tout $h \geq w+1-m$, tout ℓ de $\{1,\dots,k\}$ et tout j de $\{1,\dots,m\}$

$$\partial_{x_0} b^h_{j,\ell}(x) = \sum_{p=1}^{k} I_{\ell,p}(x) v^{h-m+1}_{j,p}(x) + h \sum_{p=1}^{k} \tilde{f}^j_{\ell,p}(x) b^h_{j,p}(x)$$

$$+ \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{p=1}^{k} P^j(d+1,\ell,p) \ b^{h-d}_{j,p}(x) \tag{7.21}$$

$$b^h_{\bullet,\ell})(0,x') = \sum_{i=1}^{k} A_{\ell,i}(x')U_i^h(x') + \sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{m-1} (M(d,\ell,i)b^{h-d}_{\bullet,i})(0,x')$$

où $U_i^h(x')$ est le vecteur colonne de $\mathbf{C}^m$ de composantes $u^{h-s}_{s,i}(x')$ $0 \leq s \leq m-1$.

Preuve du théorème 0.2 à partir du théorème 7.18. On se donne donc $-w \in \mathbf{N}$, W et U comme dans l'énoncé du théorème 0.2. On peut supposer (voir convention 7.4) que chaque G_j est défini sur U $(1 \leq j \leq m)$. Considérons un réel $R_0 > 0$ comme dans la proposition 6.1 et *fixons* un *triplet* (R,ρ,ϵ) vérifiant les *assertions du théorème 7.18* avec $R < \min(R_0, R_1)$. L'espace $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ étant ainsi donné fixons un réel $r > 0$ vérifiant les deux inégalités du théorème 5.8. Nous considérons alors un voisinage ouvert $V(\subset U)$ connexe de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que $V \cap S \subset W$ et :

$$(7.22) \qquad x \in V \text{ entraîne } : x \in U, \ \sup_{0\leq i\leq n} |x_i| < r, \ \sup_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq \ell\leq k}} |g_\ell^j(x)| < r.$$

Soit $x^0 = (0, x'^0)$ un point de $(V \cap S)\backslash T$ où $x'^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $y^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Nous avons vu dans la section §6 qu'on pouvait trouver pour chaque s de $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ un élément

$$(7.23) \qquad u_s(x';y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-s+1-m} u^h_{s,\ell}(x') \ e_\ell^{h+m-1}(y)$$

de $\tilde{A}^{w-s}[R,\rho,\epsilon]$ et pour chaque j de $\{1,\ldots,m\}$ un élément

$$(7.24) \qquad v_j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-m+1} v^{h-m+1}_{j,\ell}(x) \ e^h_\ell(y)$$

de $\tilde{A}^{w-m+1}[R,\rho,\epsilon]$, de telle sorte que si on note (encore) $u_s(x';y)$ et $v_j(x;y)$ les germes holomorphes en (x'^0, y^0) et (x^0, y^0) définis comme expliqué dans le théorème 5.8 par les éléments (7.23), (7.24) et le *choix* d'un germe holomorphe $z(y)$ en y^0 solution de $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \ldots - y_2 z - y_1 = 0$ alors les données de notre problème (0.1) sont définies par les germes $u_s(x') = u_s(x';x')$ $(0 \leq s \leq m-1)$, et $v(x) = \sum_{j=1}^m v_j(x; G_j(x))$. L'assertion (7.22) montre que $v_j(x;G_j(x))$ définit bien un germe holomorphe en $x^0 = G_j^{-1}(x^0)$ $(1 \leq j \leq m)$.

Le théorème 7.18 fournit alors une *solution* $(u^1(x;y), \ldots, u^m(x;y))$ du système d'équations (7.21) associé aux données (7.23) et (7.24) et, pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$:

$$(7.25) \qquad u^j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w+1-m} b^h_{j,\ell}(x) \ e_\ell^{h+m-1}(y)$$

appartient à $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$. Notons - par abus - $u^j(x;y)$ $(1 \leq j \leq m)$ les germes holomorphes en $(x^0;y^0)$ définis comme indiqué dans le théorème 5.8 à l'aide des termes (7.25) et du germe de racine en $y^0 z(y)$ déjà choisi. L'assertion (7.22) montre alors que pour chaque $j \in \{1,,\dots,m\}$ $u^j(x;G_j(x))$ définit bien un germe holomorphe en x^0. Rappelons qu'avec ces notations le problème (0.1) s'écrit :

$$(0.1) \qquad \begin{cases} a(x;D)\, u(x) = \sum_{j=1}^m \, v_j(x;G_j(x)) = v(x) \\ D^s_{x^0} u_{|S} = u_s(x';x') = u_s(x') \quad 0 \leq s \leq m-1 \end{cases}$$

Le théorème 0.2 est alors une conséquence immédiate du théorème suivant où V vérifie l'assertion (7.22).

Théorème 7.19. 1°) Le germe holomorphe en $(0,x'^0)$ $u(x) = \sum_{j=1}^m u^j(x;G_j(x))$ est prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(0,x'^0)$ et tracé dans $V \setminus \cup_{j=1}^m K^j$. De plus il existe des opérateurs différentiels $R_{j,\ell}(x;D)$ $(1 \leq j \leq m, 0 \leq \ell \leq k)$ d'ordre $-w$ à coefficients holomorphes sur V de sorte que :

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^k R_{j,\ell}(x;D)(z^\ell(G_j(x)))$$

2°). $u(x)$ est solution du problème (0.1).

Preuve. 1°). Le théorème 5.8 affirme que pour chaque j le germe holomorphe en $(x^0;y^0)$ $u^j(x;y)$ (défini par (7.25) et le choix du germe en $y^0 z(y)$) est prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(x^0;y^0)$ et tracé dans $D_1(r)\times(D_2(r)\setminus T)$. Comme $G_j(K^j) = T$ pour chaque j la propriété de prolongement analytique du germe $u(x)$ découle alors de l'assertion (7.22). De plus le théorème 5.8 permet d'écrire pour chaque j de $\{1,\dots,m\}$:

$$\sum_{\ell=1}^k \sum_{h\geq 1-m} b^h_{j,\ell}(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x)) = \sum_{\ell=1}^k a_{j,\ell}(x;G_j(x)) e_\ell(G_j(x))$$

où les fonctions $a_{j,\ell}(x;y)$ sont holomorphes sur $D_1(r)\times D_2(r)$. Rappelons que (voir thm 3.6) $e_\ell = z^\ell - N_\ell(y_2,\dots,y_k)$ pour $1 \leq \ell \leq k$. On introduit alors les opérateurs différentiels en x suivants :

$$R_{j,0}(x;D) = -\sum_{\ell=1}^k a_{j,\ell}(x;G_j(x)) N_\ell(G_j(x))$$

$$R_{j,\ell}(x;D) = a_{j,\ell}(x;G_j(x)) + \sum_{p=1}^{-w} b_{j,\ell}^{1-m-p}(x)\ G_j^*(\partial_{y_1}^p)$$

où $G_j^*(\partial_{y_1}^p)$ désigne le transmué de $\partial_{y_1}^p$ par le difféomorphisme G_j. Comme $\partial_{y_1}^p e_\ell = e_\ell^{-p}$ $(1 \leq \ell \leq k)$ on vérifie alors aisément que les $R_{j,\ell}(x;D)$ permettent d'exprimer le germe $u(x)$ comme indiqué dans le 1°). Prouvons maintenant le 2°). Soit $j \in \{1,\dots,m\}$. Le théorème 7.10, les notations 7.17 et le théorème 7.18 montrent que l'égalité suivante : $(1 \leq j \leq m)$

$$a(x;D)(u^j(x;G_j)) = v^j(x;G_j)$$

a lieu au sens des séries formelles de $\tilde{A}^{w-m+1}[G_j]$ (voir def 7.3) et donc de $\tilde{A}^{w-m}[G_j]$. Le théorème 7.5 montre alors que les deux germes holomorphes en $(0,x'^0)$ $a(x;D)(u^j(x;G_j))$ et $v^j(x;G_j)$ sont égaux. Par conséquent les deux germes holomorphes en $(0,x'^0)$ $a(x;D)u(x)$ et $v(x)$ sont égaux.

Soit maintenant $s \in \{0,\dots,m-1\}$, les théorèmes 7.18, 7.16 et 7.15 montrent que l'égalité suivante :

$$D_{x^0}^s \left(\sum_{j=1}^m u^j(x;G_j) \right)_{|S} = u_s(x';x')$$

a lieu au sens des séries formelles de $\tilde{A}^{w-s}[(x')]$. Les théorèmes 7.5 et 7.15 montrent alors que les deux germes holomorphes en x'^0 $D_{x^0}^s\ (\sum_j^m u^j(x;G_j))_{|S}$ et $u_s(x';x')$ sont égaux. par conséquent le germe $u(x)$ est solution du problème (0.1).

Le théorème 7.18 sera une conséquence facile des théorèmes 7.22 et 7.26. Avant de les énoncer nous devons préciser quelques notations et constantes géométriques.

Définition 7.20. Reprenons les notations du théorème 7.18. Nous fixons $-w \in \mathbb{N}$ et deux constantes > 0 R_2 et C telles que toutes les fonctions suivantes sont holomorphes et bornées par C sur le polydisque $D(0,R_2)$ de centre l'origine : $I_{\ell,p}(x)$, $f_{\ell,p}^j(x)$, les coefficients des opérateurs différentiels $P^j(d+1,\ell,p)$, les coefficients des matrices $A_{\ell,i}(x')$, les fonctions coefficients des opérateurs qui sont coefficients des matrices $M(d,\ell,i)$.

Définition 7.21. Soit $U(x;y) = (\sum_{\ell=1}^k \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,\ell}^h(x)\ e_\ell^{h+m-1}(y))_{1\leq j\leq m}$ un m-uple de séries formelles, les $b_{j,\ell}^h$ étant tous des germes en 0 holomorphes. Reprenons les notations du théorème 7.18 et pour chaque

$h \geq w - m + 1$, j de $\{1, \ldots, m\}$, ℓ de $\{1, \ldots, k\}$ considérons le germe en 0 holomorphe $b'^h_{j,\ell}$ défini par les deux égalités suivantes :

$$\partial_{x_0} b'^h_{j,\ell} = h \sum_{p=1}^{k} \tilde{f}^j_{\ell,p}(x) b^h_{j,p}(x) + \sum_{d=0}^{m-1} \sum_{p=1}^{k} P^j(d+1, \ell, p)\, b^{h-d}_{j,p}(x)$$

$$(b'^h_{\bullet,\ell})(0, x') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{d=1}^{m-1} (M(d, \ell, i) b^{h-d}_{\bullet,i})(0, x')$$

où $b'^h_{\bullet,\ell}$ désigne le vecteur colonne de composantes $b'^h_{j,\ell}$ $1 \leq j \leq m$. On pose alors $\mathcal{R}U(x; y) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b'^h_{j,\ell}(x)\;\; e^{h+m-1}_{\ell}(y)\right)_{1 \leq j \leq m}$.

Théorème 7.22. Munissons $(\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon])^m$ - où $0 < R < \min(1, \frac{R_2}{4})$ - de la norme suivante :

$$\|(u^1(x; y), \ldots, u^m(x; y))\|_w = \sum_{j=1}^{m} \|u^j(x, y)\|_w \quad \text{(voir def 5.5)}$$

Alors $\mathcal{R}$ définit un endomorphisme de $(\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon])^m$ et on peut trouver des réels strictement positifs R_1 ($< \min(1, \frac{R_2}{4})$), $\rho_1 (> 1)$ et ϵ_1 tels que si pour R quelconque dans $]0, R_1]$ on pose $\rho = (\frac{R}{R_1})^{-1} \rho_1$, $\epsilon = (\frac{R}{R_1})^2 \epsilon_1$ alors $\mathcal{R}$ est de norme $\leq \frac{1}{2}$: $\forall U \in (\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon])^m, \|\mathcal{R}U\|_w \leq \frac{1}{2}\|U\|_w$.

Preuve. Considérons pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$, $u^j(x; y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x) e^{h+m-1}_{\ell}(y)$ un élément de $\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon]$ et considérons les plus petites constantes ≥ 0 $C^h_{j,\ell}$ telles que

(7.26) $$b^h_{j,\ell}(x) \ll C^h_{j,\ell}\; \varphi^R_{h+m-w}(x).$$

Nous aurons alors besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 7.23. Notons N le nombre de monômes ∂^β_x vérifiant $|\beta| \leq m$. Reprenons les notations des définitions 7.20 et 7.21. Alors pour tout $h \geq w - m + 1$ et (j, ℓ) de $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, k\}$ on a :

1°) $\partial_{x_0} b'^h_{j,\ell} \ll 2C(D_{x_0}\varphi^R_{h+m-w})[\rho^{-1}(N + R(1 + |w - m - 1|)) \sum_{p=1}^{k} C^h_{j,p}$
$+ N \sum_{d=1}^{m-1} \sum_{p=1}^{k} (\frac{\rho}{R})^d\, C^{h-d}_{j,p}]$

2°) $b'^h_{j,\ell}(0, x') \ll 2C\varphi^R_{h+m-w} \left[N \sum_{d=1}^{m-1} (\frac{\rho}{R})^d \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} C^{h-d}_{j_1,i}\right]$.

Preuve du lemme 7.23. 1°) Comme on suppose $0 < R < \frac{R_2}{4}$, les fonctions $\tilde{f}^j_{\ell,p}(x)$ sont bornées par C sur $D(0,2R)$. La proposition 5.3 et l'inégalité (7.26) permettent d'écrire les deux inégalités suivantes :

$$(h+m+1-w)\tilde{f}^j_{\ell,p}\ b^h_{j,p} \ll 2C(h+m+1-w)C^h_{j,p}\ \varphi^R_{h+m-w} \ll$$

$$2C\ C^h_{j,p}\ \varphi^R_{h+m+1-w} = 2C\ C^h_{j,p}\ \frac{R}{\rho}\ D_{x_0}\ \varphi^R_{h+m-w} \tag{7.27}$$

$$(w-m-1)\tilde{f}^j_{\ell,p}\ b^h_{j,p} \ll 2C|w-m-1|C^h_{j,p}\ \frac{R}{\rho}\ D_{x_0}\ \varphi^R_{h+m-w}. \tag{7.28}$$

L'opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 $P^j(1,\ell,p)$ comprend au plus N termes du type $a(x)\partial^\beta_x$ où $|\beta| \leq 1$, $\partial^\beta_x \neq \partial_{x_0}$ et $a(x)$ est borné par C sur $D(0,2R)$. En utilisant la proposition 5.3 on vérifie aisément que $(0 < R < 1)$:

$$a(x)\partial^\beta_x b^h_{j,p} \ll 2C\ C^h_{j,p}\ \frac{1}{\rho}\ D_{x_0}\ \varphi^R_{h+m-w}. \tag{7.29}$$

Soit $d \in \{1,\ldots,m-1\}$, $P^j(d+1,\ell,p)$ comprend au plus N termes du type $a(x)\partial^\beta_x$ où $|\beta| \leq d+1$ et $a(x)$ est borné par C sur $D(0,2R)$. Comme $R < 1 < \rho$, la proposition 5.3 et l'inégalité (7.26) permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} a(x)\partial^\beta_x\ b^{h-d}_{j,p}(x) &\ll 2C\ C^{h-d}_{j,p}\ D^{|\beta|}_{x_0}\varphi^R_{h-d+m-w} \\ &\ll 2C\ C^{h-d}_{j,p}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{|\beta|-1}D_{x_0}\ \varphi^R_{h-d+m-w+|\beta|-1} \\ &\ll 2C\ C^{h-d}_{j,p}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{d}D_{x_0}\ \varphi^R_{+m-w}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

La définition de $\partial_{x_0}b'^h_{j,\ell}$ (voir def 7.21) et la conjonction des quatre inégalités (7.27),..., (7.30) permettent alors d'obtenir immédiatement le 1°) du lemme 7.23. Maintenant prouvons le 2°). Soit $d \in \{1,\ldots,m-1\}$ chaque coefficient de la matrice carrée d'ordre m $M(d,\ell,i)$ est somme d'au plus N termes de la forme $a(x)\partial^\beta_x$ où $|\beta| \leq d$ et $a(x)$ est borné par C sur $D(0,2R)$. Comme $\rho > 1 > R$ la proposition 5.3 et l'inégalité (7.26) permettent d'écrire :

$$\partial^\beta_x\ \varphi^R_{h-d+m-w} \ll D^{|\beta|}_{x_0}\ \varphi^R_{h-d+m-w}$$

(7.31)
$$a(x)\partial^\beta_x\ b^{h-d}_{j_1,i}(x) \ll 2C\ C^{h-d}_{j_1,i}D^{|\beta|}_{x_0}\varphi^R_{h-d+m-w} \ll 2C\ C^{h-d}_{j_1,i}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^d\varphi^R_{h+m-w}.$$

La définition de $b'^h_{\bullet,\ell}(0,x')$ et l'inégalité (7.31) permettent alors d'obtenir immédiatement le 2°) du lemme 7.23.

Lemme 7.24. Avec les notations précédentes. Pour chaque j de $\{1,\dots,m\}$

$$u'^j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h\geq w-m+1} b'^h_{j,\ell}(x)\ e_\ell^{h+m-1}(y)$$

appartient à $\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon]$ et :

$$\|u'^j\|_w \leq 4C\left[\rho^{-1}(N + R(1+|w-m-1|)) + N\sum_{d=1}^{m-1}\left(\frac{\epsilon\rho}{R}\right)^d\right]\times \sum_{j_1=1}^{m} \|u^{j_1}(x;y)\|_w.$$

Preuve du lemme 7.24. Soient $j \in \{1,\dots,m\}$, $\ell \in \{1,\dots,k\}$ et $h \geq w-m+1$; notons $C'^h_{j,\ell}$ la plus petite constante $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que : $b'^h_{j,\ell}(x) \ll C'^h_{j,\ell}\ \varphi^R_{h+m-w}(x)$. Les lemmes 5.4 et 7.23 permettent alors d'écrire :

$$C'^h_{j,\ell} \ll 4C\left[\rho^{-1}(N + R(1+|w-m-1|))\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} C^h_{j_1,p} + \right.$$

$$\left. N\sum_{d=1}^{m-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^d\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} C^{h-d}_{j_1,p}\right] \tag{7.32}$$

où les $C^h_{j_1,p}$ sont définis par les inégalités (7.26) et on pose $C^{h-d}_{j_1,p} = 0$ pour $h-d < w-m+1$. Rappelons que par définition on a :

$$\|u'^j(x;y)\|_w = \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{h\geq w-m+1} C'^h_{j,\ell}\epsilon^h.$$

Le lemme 7.24 est alors une conséquence facile des inégalités (7.32).

Fin de la preuve du théorème 7.22. D'après le lemme 7.24 il est clair que $\mathcal{R}$ envoie $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$ dans lui-même et que la norme de $\mathcal{R}$ est majorée par :

$$4mC\left[\rho^{-1}(N + R(1+|w-m-1|)) + N\sum_{d=1}^{m-1}\left(\frac{\epsilon\rho}{R}\right)^d\right] \tag{7.33}$$

Il est clair qu'on peut trouver $R_1 \in]0, min(1, \frac{R_2}{4})]$ puis $\rho_1 \gg 1$ puis $0 < \epsilon_1 \ll 1$ de telle sorte que le nombre (7.33) associé à $(R_1, \rho_1, \epsilon_1)$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$. Maintenant considérons $R \in]0, R_1]$ et posons $\rho = \frac{R_1}{R}\rho_1$, $\epsilon = (\frac{R}{R_1})^2\epsilon_1$. Comme $\rho \geq \rho_1$ et $\frac{\epsilon\rho}{R} = \frac{\epsilon_1\rho_1}{R_1}$ il est clair que le nombre (7.33) associé à (R, ρ, ϵ) est inférieur à $\frac{1}{2}$. Ceci prouve le théorème 7.22.

Convention 7.25. Reprenons les notations du théorème 7.22. Jusqu'à la fin de cette section nous fixons R dans $]0, R_1]$ et posons $\rho = (\frac{R}{R_1})^{-1}\rho_1$, $\epsilon = (\frac{R}{R_1})^2\epsilon_1$.

Considérons - comme dans l'énoncé du théorème 7.18 - des éléments $v_j(x;y)$ $(1 \leq j \leq m)$ de $\tilde{A}^{w-m+1}[R, \rho, \epsilon]$ et des éléments $u_s(x';y)$ $(0 \leq s \leq m-1)$ de $\tilde{A}^{w-s}[R, \rho, \epsilon]$.

Théorème 7.26. Avec les notations du théorème 7.18. Considérons pour chaque $h \geq w+1-m$, ℓ de $\{1, \dots, k\}$, j de $\{1, \dots, m\}$ le germe en 0 holomorphe $b^h_{j,\ell}(x)$ défini par :

$$(7.34) \qquad \partial_{x_0} b^h_{j,\ell}(x) = \sum_{p=1}^{k} I_{\ell,p}(x)\, v^{h-m+1}_{j,p}(x)$$

$$b^h_{\bullet,\ell}(0, x') = \sum_{i=1}^{k} A_{\ell,i}(x') U^h_i(x')$$

où $b^h_{\bullet,\ell}(0, x')$ [resp. $U^h_i(x')$] désigne le vecteur colonne de $\mathbb{C}^m$ de composantes $b^h_{j,\ell}(0, x')$, $1 \leq j \leq m$ [resp. $u^{h-s}_{s,i}(x')$, $0 \leq s \leq m-1$]. Alors pour chaque j de $\{1, \dots, m\}$, $u^j(x;y) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x)\, e^{h+m-1}_\ell(y)$ appartient à $\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon]$. Dans la suite on posera $U_0(x;y) = (u^1(x;y), \dots, u^m(x;y))$, $U_0(x;y)$ appartient à $\tilde{A}^w[R, \rho, \epsilon]^m$.

Preuve. Comme $v_j(x;y) \in \tilde{A}^{w-m+1}[R, \rho, \epsilon]$ et $(h-m+1)+m-(w-m+1) = h+m-w$ la définition 5.5 permet d'écrire :

$$(7.35). \quad v^{h-m+1}_{j,p}(x) \ll D^{h-m+1}_{j,p}\, \varphi^R_{h+m-w}, \quad \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} D^{h-m+1}_{j,p}\epsilon^h < +\infty$$

Comme $u_s(x';y) \in \tilde{A}^{w-s}[R, \rho, \epsilon]$ et $(h-s)+m-(w-s) = h+m-w$ la définition 5.5 permet d'écrire : $(h \geq w-m+1)$

$$(7.36) \qquad u^{h-s}_{s,i}(x') \ll C^{h-s}_{s,i}\, \varphi^R_{h+m-w}, \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} C^{h-s}_{s,i}\epsilon^h < +\infty.$$

Rappelons que (voir def 7.20) les $I_{\ell,p}(x)$ et les coefficients des matrices $A_{\ell,i}(x')$ sont holomorphes et bornés par C sur $D(0,2R)$ (où $R \leq \frac{1}{4}R_2$). De plus d'après la proposition 5.3 on a $\varphi^R_{h+m-w} \ll D_{x_0}\varphi^R_{h+m-w}$. Par conséquent, les égalités (7.34), les inégalités (7.35) et (7.36), et la proposition 5.3 entraînent que :

$$\partial_{x_0} b^h_{j,\ell} \ll 2C\left(\sum_{p=1}^{k} D^{h-m+1}_{j,p}\right) D_{x_0}\varphi^R_{h+m-w}$$

$$b^h_{j,\ell}(0,x') \ll 2C\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=0}^{m-1} C^{h-s}_{s,i}\right)\varphi^R_{h+m-w}.$$

Le lemme 5.4 entraîne alors que

$$b^h_{j,\ell}(x) \ll 2C\left(\sum_{p=1}^{k} D^{h-m+1}_{j,p} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=0}^{m-1} C^{h-s}_{s,i}\right)\varphi^R_{h+m-w}.$$

Les inégalités (7.35) et (7.36) permettent alors d'obtenir immédiatement le théorème 7.26.

Preuve du théorème 7.18. Reprenons l'élément $U_0(x;y)$ de $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$ défini dans le théorème 7.26. La définition 7.21 de l'opérateur $\mathcal{R}$ montre qu'un élément $U(x;y) = (u^1(x;y),\ldots,u^m(x;y))$ de $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$ vérifie le système d'équations du théorème 7.18 si et seulement si on a : $U - U_0 = \mathcal{R}U$. D'après la convention 7.25, les théorèmes 7.22 et 5.6, $\mathcal{R}$ définit un endomorphisme de l'espace de *Banach* $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$ et $\|\mathcal{R}\| \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent l'équation $U = U_0 + \mathcal{R}U$ possède une et une seule solution dans $(\tilde{A}^w[R,\rho,\epsilon])^m$, à savoir: $U = \sum_{q\geq 0}\mathcal{R}^q U_0$. Ceci prouve le théorème 7.18.

§8. ETUDE GÉOMÉTRIQUE DE LA QUEUE D'ARONDE T ET DE SON CONORMAL

Pour alléger l'écriture nous poserons - dans cette section - $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{C}^k$ et $y' = (y_3, \dots, y_k)$. Notons $z_1, \dots, z_{k+1}$ les racines complexes du polynôme en z : $z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1$. Les relations entre coefficients et racines permettent alors d'écrire que :

$$z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1 = \prod_{j=1}^{k+1} (z - z_j) \tag{8.1}$$

$z_1 + \dots + z_{k+1} = 0$, et pour ℓ variant de 0 à $k-1$:

$$y_{\ell+1} = -(-1)^{k+1-\ell} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1-\ell} \leq k+1} z_{j_1} \dots z_{j_{k+1-\ell}}. \tag{8.2}$$

En écrivant que l'équation (8.1) possède une racine multiple nous obtiendrons (voir prop 8.4) une paramétrisation - notée Φ - de T. L'usage de Φ nous permettra (voir thm 8.9) d'obtenir une paramétrisation agréable de $\bar{N}(T_{\text{reg}}) = N(T)$ et de montrer que la partie lisse T_{reg} est l'ensemble des y tels que l'équation (8.1) associée possède une racine double et $k-1$ racines simples. Enfin nous montrons (voir thm 8.12) que le discriminant D [resp. T] induit en l'origine un germe de fonction holomorphe [resp. d'ensemble $\mathbb{C}$-analytique] irréductible. Certains résultats de cette section sont probablement connus des géomètres mais n'étaient pas (semble-t-il) énoncés sous une forme adaptée à nos besoins spécifiques.

Définition 8.1. Le polynôme $\prod_{i \neq j}(z_i - z_j)$ est symétrique en les variables $z_1, \dots, z_{k+1}$. Sa restriction à l'hyperplan d'équation : $z_1 + \dots + z_{k+1} = 0$ est un polynôme $D(y_1, \dots, y_k)$ en les variables $y_1, \dots, y_k$ définies par les relations (8.2). Ce polynôme est appelé discriminant de l'équation (8.1).

Définition 8.2. On appelle queue d'aronde l'ensemble T des points $y = (y_1, \dots, y_k)$ de $\mathbb{C}^k$ tels que l'équation (8.1) possède au moins une racine double. T est un sous-ensemble $\mathbb{C}$-analytique défini par l'équation $D(y_1, \dots, y_k) = 0$

Proposition 8.3. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des points $(y_1, \dots, y_k)$ tels que l'équation associée (8.1) possède une racine double et $k-1$ racines simples. Alors $\mathcal{L}$ est une partie ouverte dense de T.

Preuve. Prouvons que $\mathcal{L}$ est dense dans T. Considérons un point $(y_1^0, \dots, y_k^0)$ de T et notons $z_1^0, \dots, z_{k+1}^0$ les racines de l'équation (8.1) associée, on peut supposer $z_1^0 = z_2^0$. On construit alors aisément une suite $(z_1^p, \dots, z_{k+1}^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{C}^{k+1}$ convergeant vers $(z_1^0, \dots, z_{k+1}^0)$ et telle que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on ait :

$$(z_1^p + \dots + z_{k+1}^p = 0, z_1^p = z_2^p,\ z_i^p = z_j^p \text{ pour } i \neq j,\ i \text{ et } j \geq 2.$$

Pour chaque p de $\mathbb{N}^*$ considérons le point $(y_1^p, \dots, y_k^p)$ défini par :

$$z^{k+1} - y_k^p z^{k-1} \dots - y_2^p z - y_1^p = \prod_{j=1}^{k+1}(z - z_j^p).$$

Les relations (8.2) permettent alors de voir que $(y_1^p, \dots, y_k^p)$ est une suite de points de $\mathcal{L}$ convergeant vers $(y_1^0, \dots, y_k^0) \in T$. Prouvons que $\mathcal{L}$ est ouverte dans T. Soit $(y_1^0, \dots, y_k^0)$ un point de $\mathcal{L}$, notons $(z_1^0, \dots, z_{k+1}^0)$ les racines de l'équation (8.1)- associée, on peut supposer $z_1^0 = z_2^0$. Posons $F(y; z) = z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1$. En appliquant le théorème des résidus à $z \to \frac{\partial_z F(y,z)}{F(y,z)}$ et en utilisant des lacets entourant respectivement $z_1^0 = z_2^0, z_3^0, \dots, z_{k+1}^0$ on prouve facilement que si $(y_1, \dots, y_k) \in T$ est suffisamment proche de $(y_1^0, \dots, y_k^0)$ alors l'équation (8.1) associée possède une racine double et $k-1$ racines simples. Ceci prouve la proposition 8.3.

La proposition suivante fournit une paramétrisation de T.

Proposition 8.4. La queue d'aronde T est exactement l'image de $\mathbb{C}^{k-2} \times \mathbb{C}$ par l'application $\Phi : (y_3, \dots, y_k, z) \longrightarrow \Phi(y_3, \dots, y_k, z) = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ où

$$\begin{aligned}
\Phi_1(y_3, \dots, y_k, z) &= -kz^{k+1} + (k-2)y_k z^{k-1} + \dots + 2y_4 z^3 + y_3 z^2 (= y_1)\\
\Phi_2(y_3, \dots, y_k, z) &= (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} \dots - 2y_3 z = y_2\\
\Phi_\ell(y_3, \dots, y_k, z) &= y_\ell \text{ pour } \ell \in \{3, \dots, k\}.
\end{aligned}$$

Nous poserons $y' = (y_3, \dots, y_k)$.

Preuve. Un point $y = (y_1, \dots, y_k)$ de $\mathbb{C}^k$ appartient à T si et seulement si l'équation (8.1) possède au moins une racine double z, ce qui équivaut à l'existence d'un $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$F(y, z) = z^{k+1} - y_k z^{k-1} \dots - y_2 z - y_1 = 0. \tag{8.3}$$

$$\partial_z F = (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} \dots - 2y_3 z - y_2 = 0$$

En reportant dans l'équation $F = 0$ la valeur de y_2 fournie par l'équation $\partial_z F = 0$ on obtient immédiatement la proposition 8.4.

La matrice de la différentielle de Φ a $k-1$ colonnes et est donnée par :

$$
\text{(8.4)} \qquad \begin{bmatrix}
z^2 & 2z^3 & \dots & & (k-2)z^{k-1} & \partial_z\Phi_1 \\
-2z & -3z^2 & \dots & & -(k-1)z^{k-2} & \partial_z\Phi_2 \\
1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Théorème 8.5. 1°) On a : $\partial_z\Phi_1(y',z) = -z\partial_z\Phi_2(y',z)$. De plus $\partial_z\Phi_2(y',z)$ est non nul si et seulement si z est racine d'ordre exactement deux de l'équation en z_1 : $z_1^{k+1} - \Phi_k(y',z)z_1^{k-1} \dots - \Phi_2(y',z)z_1 - \Phi_1(y',z) = 0$.

2°). Soit $(y_1^0,\dots,y_k^0)$ un point de T tel que l'équation (8.1) associée possède une racine triple et $k-2$ racines simples. Alors $(y_1^0,\dots,y_k^0)$ n'appartient pas à la partie lisse T_{reg} de T.

3°). Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des points de T tels que l'équation (8.1) possède une racine double et $k-1$ racines simples . Alors $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ est ouvert dans $\mathbb{C}^{k-2}\times\mathbb{C}$, la différentielle de Φ est injective en tout point de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ est inclus dans la partie lisse T_{reg} de T et Φ induit un homéomorphisme (et même un difféomorphisme holomorphe) de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{L}$.

Note. Nous verrons plus loin que $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$.

Preuve. 1°). L'égalité $\partial_z\Phi_1 = -z\partial_z\Phi_2$ résulte d'un calcul immédiat. Posons $F(z_1) = z_1^{k+1} - \Phi_k(y',z)z_1^{k-1} \dots - \Phi_2(y',z)z_1 - \Phi_1(y',z)$. Vu la définition des Φ_ℓ on a clairement $\partial^2_{z_1}F(z_1) = \partial_z\Phi_2(z_1)$. Par construction z est une racine multiple de l'équation $F(z_1) = 0$. On obtient alors immédiatement le 1°). Prouvons le 2°). Considérons $(y_1^0,\dots,y_k^0) \in T$ tel que l'équation (8.1) associée possède une racine triple $z_1^0 = z_2^0 = z_3^0$ et $k-2$ racines simples $z_4^0,\dots,z_{k+1}^0$. En utilisant le théorème des résidus on vérifie aisément qu'il existe un polydisque ouvert P de centre $(y_1^0,\dots,y_k^0)$ et des disques ouverts de $\mathbb{C}$ deux à deux disjoints $D_1, D_4,\dots,D_{k+1}$ respectivement de centre $z_1^0, z_4^0,\dots,z_{k+1}^0$ tels que : si $y \in P\cap T$ alors l'équation (8.1) asociée possède trois racines (dont une au moins double) dans D_1 et une racine simple dans chaque $D_4,\dots,D_{k+1}$. Comme $\Phi(y_3^0,\dots,y_k^0,z_1^0)$ est égal à $(y_1^0,\dots,y_k^0)$ il existe un voisinage ouvert V de $(y_3^0,\dots,y_k^0,z_1^0)$ tel que $(y_3,\dots,y_k,z) \in V$ entraîne $z \in D_1$ et $\Phi(y_3,\dots,y_k,z) \in P$. Considérons un tel V :

On vérifie alors aisément que la restriction de Φ à V est injective. Comme z_1^0 est racine *triple* le 1°) montre que $\partial_z\Phi_1(y_3^0,\ldots,y_k^0,z_1^0)$ et $\partial_z\Phi_2(y_3^0,\ldots,y_k^0,z_1^0)$ sont nuls. Par conséquent $d\Phi(y_3^0,\ldots,y_k^0,z_1^0)$ est au plus de rang $k-2$. Si $(y_1^0,\ldots,y_k^0)$ était un point lisse de T alors T serait dans un voisinage de $(y_1^0,\ldots,y_k^0)$ une hypersurface *lisse* de dimension $\underline{k-1=\dim V}$. Comme la restriction de Φ à V est injective, $d\Phi$ devrait être de rang $k-1$ (voir Griffiths-Harris [6] page 19) ce qui est absurde. Ceci prouve le 2°). Maintenant prouvons le 3°). D'après la proposition 8.3 $\mathcal{L}$ est ouvert dans T = image de Φ, donc $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ est ouvert. Si $\Phi(y_3,\ldots,y_k,z)=(y_1,\ldots,y_k)$ appartient à $\mathcal{L}$ alors z est l'*unique* racine *multiple* de l'équation (8.1) associé à $(y_1,\ldots,y_k)$. On vérifie alors aisément que $\Phi(\Phi^{-1}(\mathcal{L}))=\mathcal{L}$, que la restriction de Φ à $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ est injective. Le 1°) du théorème 8.5 montre qu'en chaque point de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ $\partial_z\Phi_2$ n'est pas nul et $d\Phi$ est injective. Prouvons que Φ induit un homéomorphisme de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{L}$. Considérons $m_0=(y',z)$ un point de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ et U un voisinage ouvert de m_0. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Phi(U)$ ne soit pas un voisinage de $\Phi(m_0)$ dans T. Il existe alors une suite (y'^p,z^p) de points de $\mathbb{C}^{k-2}\times\mathbb{C}$ telle que $\forall p\in\mathbb{N}$ $\Phi(y'^p,z^p)\notin\Phi(U)$ et la suite $\Phi(y'^p,z^p)$ converge vers $\Phi(m_0)$. Il est clair (vu la définition de Φ) que $\lim_{p\to\infty} y'^p=y'$. Comme $\Phi(y'^p,z^p)$ est une suite bornée de T les racines des équations associées (8.1) restent dans un compact de $\mathbb{C}$. Quitte à prendre une suite extraite nous pouvons supposer que $z^p\to\tilde z\in\mathbb{C}$. On a donc $\Phi(y',\tilde z)=\Phi(m_0)$ et $\tilde z$ est une racine *double* de l'équation associée à $\Phi(m_0)$. On a donc forcément $z=\tilde z$ donc (y'^p,z^p) *appartient à* U pour p assez grand. Ceci est *absurde*. Donc Φ induit un homéomorphisme de $\Phi^{-1}(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{L}$. Vu l'injectivité de $d\Phi$ il est alors clair que T_{reg} contient $\mathcal{L}$ et on obtient immédiatement le 3°). Le résultat suivant est probablement connu des géomètres analytiques.

Proposition 8.6. La différentielle du discriminant $D(y_1,\ldots,y_k)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{L}$.

Preuve (esquisse). Soit $m^0=(y_1^0,\ldots,y_k^0)$ un point de $\mathcal{L}$, notons $z_1^0,z_2^0,z_3^0,\ldots,z_{k+1}^0$ les racines de l'équation (8.1) associée. On peut supposer $z_1^0=z_2^0$ et que les autres racines sont simples. D'après le 3°) du théorème 8.5 m^0 est un point lisse de T donc il existe une fonction $f(y)$ holomorphe sur un voisinage ouvert V de m^0 telle que $df(m^0)\neq 0$ et $V\cap T=f^{-1}(0)$. Notons H l'hyperplan de $\mathbb{C}^{k+1}$ d'équation : $z_1+z_2+\ldots+z_{k+1}=0$. Notons A l'application qui à $(z_1,\ldots,z_{k+1})\in H$ associe $A(z_1,\ldots,z_{k+1})=(y_1,\ldots,y_k)$ défini par :

$$\prod_{j=1}^{k+1}(z-z_j)=z^{k+1}-y_kz^{k-1}\ldots-y_2z-y_1.$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 8.5 on vérifie aisément qu'il existe dans H un voisinage ouvert P de $(z_1^0, \dots, z_{k+1}^0) \in H$ tel que $A(P) \subset V$, $A(P)$ est un voisinage de m^0, les fonctions $z_1 - z_j$ et $z_2 - z_j$ ne s'annulent pas sur P pour $j \geq 3$, P est stable par la symétrie qui échange z_1 et z_2. Comme f est nulle sur $V \cap T$, $f \circ A(z_1, z_2, \dots, z_{k+1})$ est nulle sur $P \cap \{z_1 - z_2 = 0\}$. Il existe alors une fonction $g(z_1, , \dots, z_{k+1})$ holomorphe sur P telle que :

$$f \circ A(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) = (z_1 - z_2)\, g(z_1, z_2, z_3, \dots, z_k)$$

$$f \circ A(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) = (z_2 - z_1)\, g(z_2, z_1, z_3, \dots, z_k).$$

Les deux égalités précédentes contraignent g à s'annuler aux points de P de la forme $(z_1, z_1, z_3, \dots, z_k)$. Donc g est divisible par $z_2 - z_1$ et $f \circ A$ est divisible par $(z_1 - z_2)^2$. Rappelons (voir def 8.2) que le discriminant est donné par :

$$\prod_{i \neq j} (z_i - z_j) = D(y_1, \dots, y_k)$$

comme les fonctions $z_1 - z_j$ et $z_2 - z_j$ ne s'annulent pas sur P pour $j \geq 3$ on vérifie alors aisément qu'il existe un germe en m^0 holomorphe $u(y)$ tel que $f(y) = u(y)D(y)$. Comme $df(m^0) \neq 0$ et $D(m^0) = 0$ on a forcément $dD(m^0) \neq 0$. Ceci prouve la proposition 8.6.

Proposition 8.7. 1°) Soit $(y_3, \dots, y_k, z) \in \Phi^{-1}(\mathcal{L})$ alors $\operatorname{Im} d\Phi(y_3, \dots, y_k, z)$ est le noyau de la forme linéaire $\in T^*_{\Phi(y',z)}\mathbb{C}^k$ définie - dans les coordonnées duales - par $(1, z, z^2, \dots, z^{k-1})$.

2°) $\{(y_1, \dots, y_k;\ \lambda, z\lambda, \dots, z^{k-1}\lambda) \ / \ (y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{L},\ z$ est l'*unique* racine *multiple* de l'équation (8.1) associée, $\lambda \in \mathbb{C}\} \subset T^*\mathbb{C}^k$ est exactement le conormal $N(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}(\subset T_{\text{reg}})$.

Preuve. 1°). La définition de $\mathcal{L}$ (cf. Prop. 8.3) et le 1°) du théorème 8.5 montrent que $\partial_z \Phi_2(y', z) \neq 0$ de sorte que la différentielle $d\Phi(y', z)$ donnée par l'expression (8.4) est de rang (maximum) $k - 1$. Nous allons prouver que le déterminant suivant d'ordre k :

$$(8.5) \qquad \begin{bmatrix} z^2 & 2z^3 & \dots & & (k-2)z^{k-1} & \partial_z\Phi_1 & u_1 \\ -2z & -3z^2 & \dots & & -(k-1)z^{k-2} & \partial_z\Phi_2 & u_2 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & u_3 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & u_k \end{bmatrix}$$

est égal à :

$$-\partial_z\Phi_2(u_1 + zu_2 + \ldots + z^{k-1}u_k)$$

ceci prouvera le 1°). Développons le déterminant (8.5) par rapport à la dernière colonne et calculons le coefficient de chaque u_i. Comme $\partial_z\Phi_1 = -z\partial_z\Phi_2$ (voir Thm 8.5, 1°)) on vérifie aisément que le coefficient de u_1 [resp. u_2] est égal à $-\partial_z\Phi_2$ [resp. $-z\partial_z\Phi_2$]. Considérons maintenant $j \in \{3,\ldots,k\}$, le coefficient de u_j est égal au déterminant :

$$(-1)^{k+j}\left[\begin{array}{cccccccccc}
z^2 & \cdots & & & & (j-2)z^{j-1} & & & & \partial_z\Phi_1 \\
-2z & \cdots & & & & -(j-1)z^{j-2} & & & & \partial_z\Phi_2 \\
1 & & & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & & \vdots & & & \\
0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & 0 & 1 & & & 0 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & \\
0 & \cdots & & & & & & & 1 & 0
\end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow k-j \\ \text{termes} \end{array}$$

En développant ce déterminant suivant la dernière ligne et en raisonnant par récurrence on constate qu'il est égal au déterminant suivant :

$$(-1)^{k+j+k-j}\left[\begin{array}{ccccccc}
z^2 & \cdots & & & & (j-2)z^{j-1} & \partial_z\Phi_1 \\
-2z & \cdots & & & & -(j-1)z^{j-2} & \partial_z\Phi_2 \\
1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Comme $\partial_z\Phi_1 = -z\partial_z\Phi_2$ (voir Thm 3.5) il est clair que ce déterminant est égal :

$$\begin{bmatrix} (j-2)z^{j-1} & \partial_z\Phi_1 \\ -(j-1)z^{j-2} & \partial_z\Phi_2 \end{bmatrix} = z^{j-2}((j-2)z\partial_z\Phi_2 + (j-1)\partial_z\Phi_1) = -z^{j-1}\partial_z\Phi_2.$$

Ceci prouve le 1°). Le 2°) est alors une simple conséquence du 3°) du théorème 8.5.

Définition 8.8. On appelle conormal de T l'adhérence $N(T)$ du conormal $N(T_{\text{reg}})$ de la partie lisse T_{reg} de T.

Théorème 8.9. 1°) $N(T)$ est l'ensemble des points $(y;\xi)$ de $T^*\mathbb{C}^k$ de la forme :

$$(8.6)\qquad \begin{cases} y_1 = -kz^{k+1} + (k-2)y_k z^{k-1} + \ldots + y_3 z^2 & \xi_1 = \lambda \\ y_2 = (k+1)z^k - (k-1)y_k z^{k-2} \ldots - 2y_3 z & \xi_2 = z\lambda \\ y_3 = y_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y_k = y_k & \xi_k = z^{k-1}\lambda \end{cases}$$

où $(y_3, \ldots, y_k, z, \lambda)$ parcourt $\mathbb{C}^{k-2} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Hors de la section nulle c'est une lagrangienne holomorphe homogène lisse difféomorphe à $\mathbb{C}^{k-2} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

2°). $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$, $T_{\text{reg}} = \{y \in \mathbb{C}^k \ / \ D(y) = 0 \text{ et } dD(y) \neq 0\}$.

Corollaire 8.10. Pour tout voisinage conique V de $(0, \ldots, 0; 1, 0, \ldots, 0)$ il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^k$ tel que $\pi^{-1}(U) \cap N(T)\backslash 0$ est inclus dans V.

Preuve. Il est clair que $\forall \epsilon > 0$ il existe un polydisque ouvert P de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ tel que $\forall (y_3, \ldots, y_k, z) \in \mathbb{C}^{k-2} \times \mathbb{C}$, $\Phi(y_3, \ldots, y_k, z) \in P$ entraîne $|z| < \epsilon$. On obtient alors immédiatement le corollaire 8.10.

Preuve du théorème 8.9. 1°) Rappelons que d'après le 3°) du théorème 8.5 $\mathcal{L} \subset T_{\text{reg}}$. Dans un premier temps nous allons montrer que $\bar{N}(\mathcal{L})$ coïncide avec le sous-ensemble de $T^*\mathbb{C}^k$ défini par la paramétrisation (8.6) du 1°). Considérons un point de $T^*\mathbb{C}^k$ paramétré par (8.6) et donc de la forme $(\Phi(y', z); \lambda, \lambda z, \ldots, \lambda z^{k-1})$. En reprenant la preuve de la proposition 8.3 on construit aisément une suite (y'^p, z_p) convergeant vers (y', z) telle que $\forall p \in \mathbb{N}$ $\Phi(y'^p, z_p) \in \mathcal{L}$. D'après le 2°) de la proposition 8.7 $(\Phi(y'^p, z_p); \lambda, \lambda z_p, \ldots, l z_p^{k-1})$ est une suite de points de $N(\mathcal{L})$ convergeant vers $(\Phi(y', z); \lambda, \ldots, \lambda z^{k-1})$. Réciproquement considérons une suite $(\Phi(y'^p, z_p); \lambda_p, \lambda_p z_p, \ldots, \lambda_p z_p^{k-1})$ de points de $N(\mathcal{L})$ convergeant vers $(y; \xi) \in T^*\mathbb{C}^{k+1}$. Alors (y'^p) converge vers y' (où $y = (y_1, y_2, y')$), (λ_p) converge vers ξ_1 et (z_p) est une suite bornée. Quitte à prendre une suite extraite on peut supposer que z_p converge vers un $z \in \mathbb{C}$. On constate alors que $(y; \xi) = (\Phi(y'; z); \xi_1, \xi_1, z, \ldots, \xi_1 z^{k-1})$. Par conséquent $\bar{N}(\mathcal{L})$ coïncide avec l'ensemble paramétré par (8.6). Maintenant prouvons $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$. Considérons $y \in T_{\text{reg}}$, dans un voisinage de y T est définie par une équation $f = 0$ où $df(y) \neq 0$. Comme $\mathcal{L} \subset T_{\text{reg}} \subset \bar{\mathcal{L}}$ on vérifie aisément que :

$$\bar{N}(\mathcal{L}) \cap \pi^{-1}(\{y\}) = \{(y; \lambda df(y))/\lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Si z est une racine multiple de l'équation (8.1) associée à y alors $y = \Phi(y'; z)$ et - d'après ce qui précède - $(y; 1, z, \ldots, z^{k-1}) \in \bar{N}(\mathcal{L})$. Par conséquent l'équation (8.1) associée à y ne possède qu'une *seule* racine multiple z. Comme $y \in T_{\text{reg}}$ le 2°) du théorème 3.5 montre que z n'est pas racine d'ordre 3. Si z était racine d'ordre ≥ 4 alors on vérifierait facilement que y serait limite d'une suite (y^p) de T telle que pour chaque p l'équation (8.1) associée à y^p possède au moins deux racines multiples *distinctes*, $y \in T_{\text{reg}}$ serait donc limite d'une suite de points *non* lisses de T, c'est absurde. Par conséquent $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$ et $N(T)$ coïncide avec l'ensemble paramétré par (8.6). Enfin il est clair que $N(T)\backslash 0 = \bar{N}(T_{\text{reg}})\backslash 0$ est un lieu homogène *lisse* difféomorphe à $\mathbb{C}^{k-2} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et que la 1-forme $\sum_1^k \xi_j dy_j$ est nulle sur $N(T_{\text{reg}})$ et $N(T)$. Ceci prouve le 1°). Comme on a vu que $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$ le 2°) découle de la proposition 8.6.

Maintenant nous allons examiner les propriétés d'irréductibilité vérifiées par la queue d'Aronde T.

Proposition 8.11. 1°). Pour tout polydisque P ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^k$, $P \cap T_{\text{reg}}$ est connexe.

2°). T est un sous-ensemble analytique irréductible de $\mathbb{C}^k$ et induit un germe en l'origine d'ensemble analytique irréductible.

Preuve. 1°). Considérons $P(R)$ le polydisque ouvert de rayon $R > 0$ de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ et $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_k^0)$, $y^1 = (y_1^1, \ldots, y_k^1)$ deux points de $P(R) \cap T_{\text{reg}}$. Notons alors $z_1^0 = z_2^0, z_3^0, \ldots, z_{k+1}^0$ [resp. $z_1^1 = z_2^1, z_3^1, \ldots, z_{k+1}^1$] les $k+1$ racines de l'équation (8.1) associées à y^0 [resp. y^1]. Comme $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$ les $z_i^0 - z_j^0$ [resp. $z_i^1 - z_j^1$] ne sont pas nuls pour $2 \leq i < j \leq k+1$. Cela dit on vérifie que l'ensemble suivant :

$$\mathcal{H} = \{(z_2, \ldots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^k \ / \ 2z_2 + z_3 + z_4 + \ldots + z_{k+1} = 0,\ z_i - z_j \neq 0 \text{ pour } i \neq j\}$$

est connexe par arcs. Par conséquent il existe une application continue Z :

$$Z \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^{k+1} \\ t \mapsto Z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{k+1}(t)) \end{array} \right.$$

telle que :

$$\forall t \in [0,1],\ z_1(t) = z_2(t) \text{ et } (z_2(t), \ldots, z_{k+1}(t)) \in \mathcal{H}$$

$$Z(0) = (z_1^0, \ldots, z_{k+1}^0),\ Z(1) = (z_1^1, \ldots, z_{k+1}^1)$$

Considérons l'application $t \to y(t) = (y_1(t), \ldots, y_k(t))$ définie par :

$$\prod_{j=1}^{k+1}(z - z_j(t)) = z^{k+1} - y_k(t)z^{k-1} \ldots - y_2(t)z - y_1(t).$$

Par définition de $Z(t)$, $t \to y(t)$ définit un chemin continu tracé dans $\mathcal{L} = T_{\text{reg}}$ joignant y^0 à y^1. Les relations (8.2) entre coefficients et racines permettent de voir qu'il existe une application continue $t \to c(t) \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $c(0) = c(1) = 1$ et telle que si on remplace $Z(t)$ par $c(t)Z(t)$ alors le chemin $t \to y(t)$ associé à $c(t)Z(t)$ est tracé dans $P(R) \cap T_{\text{reg}}$. Ceci prouve le 1°). Prouvons le 2°). Comme T_{reg} est connexe T est irréductible (voir [13] page 194). Raisonnons par l'absurde et supposons que T induise en l'origine un germe T_0 d'ensemble analytique *non* irréductible. Considérons alors *la* décomposition de T_0 en germes irréductibles en 0 $I_1, \ldots, I_q$ $(q \geq 2)$: $T_0 = \cup_1^q I_j$. Il existe un voisinage ouvert V de 0 et des sous-ensembles $\mathbb{C}$-analytiqus de V notés par abus $I_1, \ldots, I_q$ induisant respectivement en 0 les germes $I_1, \ldots, I_q$. Par définition il existe alors un polydisque ouvert de centre 0 P inclus dans V tel que $P \cap I_1$ et $P \cap (I_2 \cup \ldots \cup I_q)$ soient strictement inclus dans $P \cap T$ et $P \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_q) = P \cap T$. Or d'après le 1°) $P \cap T_{\text{reg}}$ est connexe donc $T \cap P$ est irréductible dans P et on aboutit à une contradiction. Ceci prouve le 2°).

Théorème 8.12. 1°). En chaque point de T le discriminant $D = D(y_1, \ldots, y_k)$ définit un germe réduit.

2°). En l'origine D définit un germe irréductible.

Preuve. 1°). Soit $y^0 \in T$. Raisonnons par l'absurde et supposons que D induise un germe D_0 en y^0 *non* réductible. Considérons la décomposition en facteurs irréductibles $D_0 = f_1^{m_1} \times \ldots \times f_q^{m_q}$ où pour fixer les idées $m_1 \geq 2$. On peut supposer que $f_1, \ldots, f_q$ définissent des fonctions holomorphes sur un petit voisinage ouvert V de y^0 de sorte que sur V on ait $D(y) = (f_1^{m_1} \times \ldots \times f_q^{m_q})(y)$. D'après le Nullstellensatz de Hilbert-Rückert $f_1^{-1}(0) \not\subset f_2^{-1}(0) \cup \ldots \cup f_q^{-1}(0)$, donc il existe $y^0 \in V$ tel que $f_1(y^0) = 0$ et $(f_2 \times \ldots \times f_q)(y^0) \neq 0$. Il existe alors un petit voisinage ouvert W de y^0 tel que $W \cap T = W \cap D^{-1}(0) = W \cap f_1^{-1}(0)$. Comme $m_1 \geq 2$, dD s'annule en chaque point de $W \cap f_1^{-1}(0)$, ceci contredit le fait que T_{reg} est dense dans $W \cap f_1^{-1}(0)$ et que dD ne s'annule pas sur T_{reg} (voir thm 8.9. 2°). Ceci prouve le 1°). Le 2°) est alors une conséquence du 2°) de la proposition 8.11 et du Nullstellensatz.

§9. LOCALISATION DES SINGULARITÉS DE $z, z^2, \ldots, z^k$.

Le théorème suivant indique que si z désigne une solution ramifiée de l'équation (3.1) alors dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^k$ les singularités de $z, z^2, \ldots, z^k$ vivent dans $N(T)$.

Théorème 9.1. On peut trouver un polydisque P ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ et un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}$ défini sur P dont la variété caractéristique est incluse dans la réunion de $N(T)$ et de la section nulle, de sorte que le k-uple $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ de fonctions holomorphes ramifiées (cf. convention 4.2) soit solution de $\mathcal{M}$ sur $P \backslash T$.

La démonstration va utiliser plusieurs théorèmes.

Théorème 9.2. Il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^k$et des fonctions holomorphes sur $U \times \mathbb{C}^k$ $(y;\xi) \to P_q(y;\xi)$ $(1 \leq q \leq N)$ polynomiales en ξ et homogènes de degré $m_q \geq 2$ telles que :

$$\pi^{-1}(U) \cap N(T) = \{(y;\xi) \in T^*U \ / \ P_q(y;\xi) = 0 \ , \ 1 \leq q \leq N\}$$

Preuve. $N(T) = \bar{N}(T_{\text{reg}})$ est un sous-ensemble $\mathbb{C}$-analytique de $T^*\mathbb{C}^k$ (voir [12] p. 346) donc il existe un polydisque ouvert W de centre $(0,0) \in \{(y;\xi)\}$ et des fonctions $f_i(y;\xi)$ $1 \leq i \leq M$ holomorphes sur W telles que

$$N(T) \cap W = \{(y;\xi) \in W \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, M\} \ \ f_i(y;\xi) = 0\}.$$

Pour chaque i de $\{1, \ldots, M\}$ on peut écrire $f_i(y;\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,i}(y;\xi)$ où chaque $a_{p,i}(y;\xi)$ $(p \in \mathbb{N})$ est holomorphe sur W et polynomial en ξ et homogène en ξ de degré p. Comme $N(T)$ est homogène, chaque $a_{p,i}$ est nul sur $N(T) \cap W$. Soit alors K un polycylindre *fermé* de centre $(0,0)$ de rayon > 0 inclus dans W. Un théorème de Frisch ([5]) dit que l'anneau $\mathcal{O}(K)$ des germes de fonctions holomorphes sur K est noethérien, donc l'idéal de $\mathcal{O}(K)$ engendré par les $a_{p,i}(y;\xi)$ est de type fini. On obtient alors aisément le théorème 9.2.

Théorème 9.3. (Avec les notations du théorème 9.2). Il existe un polydisque ouvert P (inclus dans U) de centre $0 \in \mathbb{C}^k$ tel que pour tout q de $\{1, \ldots, N\}$ et tout (j, ℓ) de $\{1, \ldots, k\}^2$ on peut trouver un opérateur différentiel $R^q_{\ell,j}(y;D)$ à coefficients holomorphes sur P de telle sorte que :

- pour $\ell \neq j$ $\ R^q_{\ell,j}(y, D)$ est d'ordre $\leq m_q - 1$
- $R^q_{\ell,\ell}(y, D)$ est d'ordre m_q et admet $P_q(y;\xi)$ pour symbole principal.

- Pour tout (q,ℓ) de $\{1,\dots,N\}\times\{1,\dots,k\}$ on a $\sum_{j=1}^{k} R^q_{\ell,j}(y;D)e_j \equiv 0$.

Preuve (esquisse). Soit $q\in\{1,\dots,N\}$ et $\ell\in\{1,\dots,k\}$. Comme $P_q(y;\xi)$ est un polynôme en ξ homogène de degré m_q nul sur $N(T)$ le théorème 4.37 montre que $P_q(y;D)e_\ell$ est somme finie de termes du type $a_{p,j}(y)\partial^p_{y_1}e_j$ où $0\le p\le m_q-1$, $1\le j\le k$ et $a_{p,j}(y)$ est holomorphe sur un voisinage de l'origine. On obtient alors aisément le théorème 9.3.

Reprenons les notations du théorème 9.3 et notons $\mathcal{D}$ [resp. $\mathcal{D}^{(p)}$] le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes [resp. d'ordre $\le p$] sur le polydisque ouvert P. Considérons alors le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ égal au conoyau coker ϕ du morphisme suivant :

$$\mathcal{D}^{Nk} \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}^k$$

$$(Q^q_\ell)_{\substack{1\le q\le N\\ 1\le \ell\le k}} \xrightarrow{\phi} \sum_{q,\ell}(Q^q_\ell R^q_{\ell,1}, Q^q_\ell R^q_{\ell,2},\dots,Q^q_\ell R^q_{\ell,k})$$

Notons $\epsilon:\mathcal{D}^k\to\mathcal{M}=\operatorname{coker}\phi$ la projection canonique.

Preuve du théorème 9.1. D'après le théorème 9.3 $(e_1,\dots,e_k)$ définit une solution de $\mathcal{M}$ sur $P\backslash T$. Posons $\mathcal{M}_{-1}=\{0\}$ et $\mathcal{M}_p=\epsilon({\mathcal{D}^{(p)}}^k)$ pour $p\ge 0$. Les $\mathcal{M}_p$ définissent une bonne filtration de $\mathcal{M}$ (voir [19] p.7). Considérons $q\in\{1,\dots,N\}$ et $(B_1,\dots,B_k)\in\mathcal{M}_{p+1}$ (où $p\ge -1$). On vérifie alors aisément que dans $\frac{\mathcal{M}_{p+1+m_q}}{\mathcal{M}_{p+m_q}}$ on a :

$$P_q(y;\xi)\cdot(B_1,\dots,B_k)=\sum_{\ell=1}^{k} B_\ell\cdot(R^q_{\ell,1},\dots,R^q_{\ell,k})=0.$$

Donc la multiplication par $P_q(y;\xi)$ induit l'application nulle de $\frac{\mathcal{M}_{p+1}}{\mathcal{M}_p}$ dans $\frac{\mathcal{M}_{p+1+m_q}}{\mathcal{M}_{p+m_q}}$. Par conséquent la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est incluse dans $\bigcap_{q=1}^{N} P_q^{-1}(0)$. Le théorème 9.1 découle alors du théorème 9.2.

§10. SUR L'ÉQUATION DE BURGER.

Le théorème suivant montre que les fonctions algébriques étudiées dans cet article apparaissent naturellement dans certains problèmes non-linéaires. Dans cette section nous noterons (t, y_1) le point courant de $\mathbb{C}^2$.

Théorème 10.1. Il existe des fonctions $a(t, y_1)$, $g_j(t, y_1)$ $(1 \leq j \leq k)$ holomorphes sur un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $a(0, y_1) \equiv 0$, $g_j(0, y_1) \equiv 0$ pour $2 \leq j \leq k$, $g_1(0, y_1) = y_1$ de sorte que la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, y_1) - (u \times \partial_{y_1} u)(t, y_1) = 0 \\ u(0, y_1) = y_1^{\frac{1}{k+1}} \end{cases} \tag{10.1}$$

soit de la forme $u(t, y_1) = a(t, y_1) + z$ où z désigne une solution ramifiée de l'équation

$$z^{k+1} - g_k(t, y_1) z^{k-1} \ldots - g_2(t, y_1) z - g_1(t, y_1) = 0. \tag{10.2}$$

Note : Il s'agit d'un phénomène d'éclatement des singularités dû aux faits que l'équation de Burger est franchement non linéaire et que la trace $u(0, y_1)$ est "suffisamment" singulière.

Preuve (esquisse). Nous cherchons - a priori - la solution de l'équation (10.1) sous la forme $u(t, y_1) = a(t, y_1) + z$ où z est solution d'une équation du type (10.2). Après avoir différentié l'équation (10.2) on vérifie aisément que

$$\partial_t z = \sum_{j=1}^{k} \partial_t g_j \frac{z^{j-1}}{\Delta}, \Delta = (k+1) z^k - (k-1) g_k z^{k-2} \ldots - g_2.$$

En utilisant l'équation (10.2) on obtient :

$$z\Delta = \sum_{j=1}^{k} z^{j-1} (k+2-j) g_j(t, y_1). \tag{10.3}$$

L'équation $\partial_t (a+z) = (a+z) \partial_{y_1} (a+z)$ s'écrit alors :

$$\Delta \partial_t a + \sum_{j=1}^{k} \partial_t g_j z^{j-1} = (a+z) \left[\Delta \partial_{y_1} a + \sum_{j=1}^{k} \partial_{y_1} g_j \, z^{j-1} \right].$$

Posons $g_0 = 0$ et $g_{k+1} = 0$. En utilisant (10.3) on obtient alors aisément les formules suivantes :

$$(10.4)\quad \Delta\partial_t a + \sum_{j=1}^{k} \partial_t g_j \, z^{j-1} = (k+1)(\partial_t a)z^k + \sum_{j=1}^{k} \left[\partial_t g_j - j g_{j+1} \times \partial_t a\right] z^{j-1}$$

$$(10.5)\qquad (a+z)(\Delta\partial_{y_1} a + \sum_{j=1}^{k} \partial_{y_1} g_j z^{j-1}) = ((k+1)a \times \partial_{y_1} a + \partial_{y_1} g_k)\, z^k +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left[a(\partial_{y_1} g_j - j g_{j+1} \times \partial_{y_1} a) + \partial_{y_1} g_{j-1} + (k+2-j) g_j \partial_{y_1} a\right] z^{j-1}.$$

En utilisant les trois dernières formules et en identifiant les coefficients des puissances de z on vérifie aisément que si $(a(t,y_1), g_1(t,y_1), \ldots, g_k(t,y_1))$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t a(t,y_1) = a\partial_{y_1} a + \frac{1}{k+1}\partial_{y_1} g_k \\ \partial_t g_j(t,y_1) = j(a\partial_{y_1} a + \frac{1}{k+1}\partial_{y_1} g_k) g_{j+1} + a\,(\partial_{y_1} g_j - j g_{j+1} \times \partial_{y_1} a) + \\ \partial_{y_1} g_{j-1} + (k+2-j) g_j \partial_{y_1} a \qquad 1 \leq j \leq k \\ a(0,y_1) = 0 \\ g_1(0,y_1) = y_1, \;\; g_j(0,y_1) = 0 \qquad 2 \leq j \leq k \end{cases}$$

alors $a(t,y_1) + z$ est solution du problème (10.1). Le théorème 10.1 découle alors du théorème de Cauchy-Kowaleska non linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé : Singularités des applications différentiables, tome 1. Editions Mir, Moscou.

[2] D. Bennequin : Caustique mystique. Séminaire Bourbaki, Astérisque 133-134 (1986).

[3] A. D'Agnolo, P. Schapira : Problème de Cauchy Ramifié en théorie des faisceaux. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique 1991-1992.

[4] R. et A. Douady : Algèbres et théories Galoisiennes II (Cedic/Fernand Nathan).

[5] J. Frisch : Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques, Inventiones Math. 4, 2 (1967) p. 118-138.

[6] P. Griffiths, J. Harris : Principles of Algebraic Geometry (Pure and Applied Maths, Wiley-Interscience).

[7] R. Gunning, H. Rossi : Analytic Functions of Several Complex Variables (Prentice-Hall, INC)

[8] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy Ramifié, hyperbolicité partielle (J. Math. pures et appl. 1976).

[9] H. Hauser : La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 18, 1985, p.1 à 56.

[10] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators I, Springer.

[11] C. Houzel : Géométrie analytique locale, I. Séminaire Henri Cartan, 13^e année, 1960/61, n° 18.

[12] M. Kashiwara, P. Schapira : Sheaves on manifolds (Springer Verlag).

[13] L. Kaup, B. Kaup : Holomorphic Functions of Several Variables (de Gruyter Studies in Mathematics).

[14] E. Leichtnam : Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t.20, 1987, p. 137-170.

[15] E. Leichtnam : Le problème de Cauchy Ramifié; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t.23, 1990, p. 369-443.

[16] E. Leichtnam : Le Problème de Cauchy Ramifié semi-linéaire d'ordre deux, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t.24, 1991, p. 189-214.

[17] E. Leichtnam : Thèse d'habilitation à diriger des recherches (Université Paris-Sud, 1990).

[18] J. Martinet : Déploiements versels des applications différentiables et classifications des applications stables. Lecture Notes in Math. 535, p. 1-44, Springer, Berlin, 1976.

[19] Z. Mebkhout : Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. (Travaux en cours, Editions Hermann).

[20] R. Narashiman : Introduction to the Theory of Analytic Spaces. Lecture Notes in Math. 25, Heidelberg : Springer Verlag 1966.

[21] B. Teissier : The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants, Proceedings Real and Complex Singularities, Oslo 1976.

[22] C. Wagschal : Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes (J. Math. Pures et Appl., t. 53, 1974, p. 99).

[23] C. Wagschal : Sur le problème de Cauchy Ramifié (J. Math. Pures et Appl., t.53, 1974, p. 147-164).

[24] J.-L . Verdier : Stratifications de Whitney et Théorème de Bertini-Sard (Inventiones Math. 36, p. 295-312, 1976).

[25] H. Grauert, R. Remmert : Coherent Analytic Sheaves (Springer Verlag).

[26] A. D'Agnolo, P. Schapira : An inverse image theorem for sheaves with applications to the Cauchy Problem. Duke Mathematical Journal 3, 64 (1991), p. 451-472.

[27] Y. Hamada : The singularities of the solution of the Cauchy Problem, Publ. R.I.M.S., Kyoto University, 5 (1969), p. 20-40.

[28] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy Ramifié, hyperbolicité partielle, J. Math. Pures et Appl., 55 (1976), p. 297-352.

[29] M. Kashiwara, P. Schapira : Problème de Cauchy pour les systèmes micro-différentiels dans le domaine complexe, Inventiones Math. 46 (1978), p. 17-38.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

nouvelle série

1980

1. J. BRIANÇON, A. GALLIGO, M. GRANGER - Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites.
2. D. BERTRAND, M. WALDSCHMIDT - Fonctions abéliennes et nombres transcendants.
3. Y. FÉLIX - Dénombrement des types de K-Homotopie. Théorie de la déformation.
4. L. BÉGUERI - Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos.

1981

5. S. OCHANINE - Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle.
6. NGUYEN TIEN DAI, NGUYEN HUU DUC, F. PHAM - Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés. Appendice de Nguyen Tu Cuong.

1982

7. P. ELLIA - Sur les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sur P^n.

1983

8. M. GRANGER - Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.

9/10. S. HALPERIN - Lectures on minimal models.

11/12 G. HENNIART - La conjecture de Langlands locale pour GL(3).

1984

13. D. BERTRAND, M. EMSALEM, F. GRAMAIN, M. HUTTNER, M. LANGEVIN, M. LAURENT, M. MIGNOTTE, J.-C. MOREAU, P. PHILIPPON, E. REYSSAT, M. WALDSCHMIDT - Les nombres transcendants.
14. G. DLOUSSKY - Structure des surfaces de Kato.
15. M. DUFLO, P. EYMARD, G. SCHIFFMANN (éditeurs) - Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.
16. F. DELON, D. LASCAR, M. PARIGOT, G. SABBAGH (éditeurs) - Compte rendu de la table ronde de Logique, octobre 1983, Paris.
17. B. PERRIN-RIOU - Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa.

1985

18. C. BLONDEL - Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur GL(2) et leurs caractères.
19. J.-P. DEMAILLY - Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.
20. F. DIGNE, J. MICHEL - Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani.
21. M. GROS - Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.

1986

22. H. MAILLOT - Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes.
23. D. BARSKY, P. ROBBA (éditeurs) - Introductions aux cohomologies p-adiques.

24/25 B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Résonances en limite semi-classique.

1987

26. F. LESCURE - Compactifications équivariantes par des courbes.
27. M.-M. VIROTTE-DUCHARME - Une construction du groupe de Fischer Fi(24).

28/29 D. PERRIN - Courbes passant par m points généraux de P^3.

30. F. LALONDE - Homologie de Shih d'une submersion (homologies non singulières des variétés feuilletées).

1988

31. C. GÉRARD - Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes.
32. J.-Y. LE DIMET - Cobordisme d'enlacements de disques.
33. F. DELON - Idéaux et types sur les corps séparablement clos.
34. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique).
35. J. DIXMIER - Sur les sous-sommes d'une partition.

1989 36. M. FLEXOR - Images directes en cohomologie cohérente.
37. B.E. KUNYAVSKII, A.N. SKOROBOGATOV, M.A. TSFASMAN - Del Pezzo surfaces of degree four.
38. Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, mai 1987).
39. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Semi-classical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum.

1990 40. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II. Comportement semi-classique près d'un rationnel.
41/42 P. TORASSO - La formule de Poisson-Plancherel pour une classe de groupes presque algébriques.
43. B. HELFFER, P. KERDELHUÉ, J. SJÖSTRAND - Le papillon de Hofstadter revisité.

1991 44/45 A. UNTERBERGER - Quantification relativiste.
46. Analyse globale et physique mathématique - Colloque à la mémoire d'Edmond Combet
47. P. GABRIEL, M. LEMANCZYK, P. LIARDET - Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzai.

1992 48. M.- C. ARNAUD - Type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $T^n \times R^n$.
49. A. AMBROSETTI - Critical points and nonlinear variational problems - Cours de la chaire Lagrange.
50. A. ARRONDO, I. SOLS - On congruences of lines in the projective space - (Chapter 6 written in collaboration with M. Pedreira).
51. P. KERDELHUÉ - Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre six.

1993 52. L. BLASCO - Paires duales réductives en caractéristique 2
P.J. SALLY JR., M. TADIC - Induced representations for $GSp(2, F)$ and $Sp(2,F)$
53. E. LEICHTNAM - Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques.