J.-P. FRANÇOISE

Systèmes intégrables à *m*-corps sur la droite

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 46 (1991), p. 111-122
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__111_0>

SYSTEMES INTEGRABLES A m-CORPS SUR LA DROITE

J.-P. Francoise

Actes du colloque " Analyse globale et Physique mathématique "
dédié à la mémoire d'Edmond Combet.

Décembre 1989.

Dans un article précédent ([F1]) , j'ai montré l'existence d'une action symplectique du tore associée au modèle de Calogero-Moser avec potentiel extérieur quadratique. Il était alors possible d'en déduire une preuve entièrement classique d'une formule obtenue par Gallavotti et Marchioro par des voies quantiques. Par la suite ([F-R]) , nous avons simplifié la démonstration en utilisant une réduction symplectique de flots harmoniques dûe à Kazhdan-Kostant-Sternberg ([K-K-S]) .

Le système de Calogero-Moser est un cas particulier (A_m) d' Hamiltonien associé à un système de racines :

$$H = (1/2) \Sigma_{i=1}^{m} (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + (1/2) \Sigma_{\alpha \in A+} g_\alpha^2 / \langle x, \alpha \rangle^2 \tag{1}$$

$$\omega = \Sigma_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i$$

Dans (1) A+ est mis pour l'ensemble des racines positives d'un système de racines et les g_α sont des constantes positives qui sont égales pour α, α' conjuguées par le groupe de Weyl.

Le système Hamiltonien dont il est question pour le cas (A_m) est :

$$H = (1/2) \Sigma_{i=1}^{m} (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + (1/2) \Sigma_{i \neq j} g^2 / (x_i - x_j)^2 \tag{2}$$

$$\omega = \Sigma_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i$$

Les calculs correspondants pour les systèmes de racines plus généraux sont difficiles. Je vais aborder dans cet article le cas des systèmes (BC_m) :

$$H = (1/2) \Sigma_{i=1}^{m} (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + \Sigma_{i\neq j} g^2 (1/(x_i-x_j)^2 + 1/(x_i+x_j)^2) + 2 \Sigma_i g_1^2 / x_i^2 \qquad (3)$$

$$\omega = \Sigma_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i$$

avec le :

théorème:

Le système (3) a toutes ses orbites périodiques de période $2\pi/\lambda$ (non nécessairement primitive)

On est encore loin de l'existence d'une action symplectique du tore associée au système (3) qui sera analysée en détail dans une autre publication et qui nécessite une extension non triviale des méthodes de Kazhdan-Kostant-Sternberg.

Mais on obtient à ce point la dégénérescence (au sens de la théorie des perturbations) des hamiltoniens (1) pour n'importe quel système de racines classique. Nous commençons par reprendre la démonstration du résultat de ([F1]) sous la forme développée dans ([F-R]).

I-Flots harmoniques sur U(m)

Nous utilisons les matrices

$$Z = \sqrt{-1}\, \lambda\, X+Y \ , \ Z^* = -\sqrt{-1}\, \lambda\, X+Y \ , \qquad (4)$$

où (X,Y) sont des matrices symétriques réelles, et donc

$$Z^* = {}^tZ \text{ (transposée de la conjuguée de la matrice Z).}$$

Nous étudions le système

$$H(X,Y)=(1/2)\ \mathrm{Tr}\ (\lambda^2 X^2 + Y^2),\ \omega = \mathrm{Tr}(dX \wedge dY) \tag{5}$$

Introduisons la matrice Hermitienne $P=ZZ^*$ que nous considérons comme un élément de u(m). Nous avons démontré dans ([F1]) le

Théorème 1 :

La matrice P définit une paire de Lax pour le système (5) . Les systèmes hamiltoniens correspondants aux valeurs propres de P pour la forme symplectique ω ont toutes leurs orbites périodiques de période π/λ et ils commutent deux à deux.

<u>Preuve:</u>

Nous obtenons à partir de (5) :

$H = (1/2)\ \mathrm{Tr}(P)$.

Les équations de Hamilton donnent

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \sqrt{-1}\ \lambda Y - \lambda^2 X \\ \dot{Z}^* &= -\sqrt{-1}\ \lambda Y - \lambda^2 X \end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot{P} = \dot{Z}Z^* + Z\dot{Z}^* = 0,$$

Donc P est une matrice de Lax pour le flot de H . Les valeurs propres de P sont ainsi des constantes du mouvement.

Soit Λ une des valeurs propres de P et Φ le vecteur propre correspondant . Soit T le projecteur sur le sous-espace engendré par Φ . Comme la matrice P est Hermitienne, on peut supposer que Φ est normalisée pour le produit Hermitien standard $<\ ,\ >$ sur C^m preservé par P . Il vient :

$$d\,\Lambda = < dP\,\Phi, \Phi > = \mathrm{Tr}(dPT) \tag{7}$$

Les équations de Hamilton donnent:

$$\mathrm{Tr}\,(\dot{X}dY - \dot{Y}dX) = d\,\Lambda = \mathrm{Tr}(\,dZZ^{*}T + ZdZ^{*}T\,) \tag{8}$$

et nous obtenons ainsi

$$\dot{X} = Z^{*}T + TZ$$

$$\dot{Y} = -\sqrt{-1}\lambda(\,Z^{*}T - TZ\,) \tag{9}$$

puis,

$$\dot{P} = \dot{Z}Z^{*} + Z\dot{Z}^{*} = [P,T] = 0,$$

L'équation (9) implique alors que :

$$\dot{Z} = \sqrt{-1}\lambda\ \{Z,T\}$$

$$\dot{Z}^{*} = -\sqrt{-1}\lambda\ \{Z^{*},T\}$$

qui conduit immédiatement au fait que les orbites du flot Hamiltonien défini par Λ sont périodiques de période π/λ.

II - INTEGRABILITE COMPLETE DU SYSTEME DE CALOGERO-MOSER AVEC POTENTIEL EXTERIEUR QUADRATIQUE.

Soit U l'espace vectoriel des matrices Hermitiennes mxm. L'espace cotangent $T^{*}U$ peut être identifié à $U \times U^{*} \cong U \times U$. Comme fibré cotangent, il porte une structure symplectique que l'on peut écrire ([K.K.S]) :

$$\omega = \mathrm{Tr}\, dX \wedge dY\ ,\ (X,Y) \in U \times U\,.$$

Nous introduisons sur $T^{*}U$ le flot harmonique par l'Hamiltonien :

$$H = (1/2)\mathrm{Tr}(\,\lambda^{2}\, X^{2} + Y^{2}\,)\,.$$

Le groupe G = U(m) agit sur U par l'action adjointe. Cette action se reléve en une action Hamiltonienne sur le cotangent T^*U. L'application moment correspondante est

$$T^*U \cong U\times U \ni (X,Y) \to \sqrt{-1}\,[X,Y] \in U \cong U^* \qquad (10)$$

L'Hamiltonien H est invariant sous cette action. Suivant([K.K.S.]) on procéde à une réduction symplectique de T^*U par l'action symplectique de G . En utilisant l'identification (10), une fibre de l'application moment peut être paramétrée par

$\{ (X,Y) : [X,Y] = \sqrt{-1}gC \}$.

On choisit pour C l'élément ($C_{ij}= 1-\partial_{ij}$) . Soit G_C le sous-groupe d'isotropie de C . La variété réduite

$X_C = \{ (X,Y) : [X,Y] = \sqrt{-1}gC \}/ G_C$

est paramétrée (voir ([K.K.S.])) par:

$$X_{ij}= x_i\partial_{ij}$$

$$Y_{ij}= y_i\partial_{ij}+\sqrt{-1}\; g/(x_i-x_j)\,(1- \partial_{ij}) \qquad (g>0),$$

et s'dentifie à T^*W, $W = \{ x= (x_1,\ldots, x_m) \varepsilon R^m / x_i- x_j\neq 0, i\neq j \}$, équipée de la forme symplectique standard.

Aprés la réduction l'Hamiltonien $H = (1/2)\mathrm{Tr}(\lambda^2 X^2+Y^2)$ devient la fonction

$$H = (1/2) \Sigma_{i=1}{}^m y_i^2 + g^2 \Sigma_{i,j;i<j} (x_i-x_j)^{-2} + (1/2) \Sigma_{i=1}{}^m (\lambda x_i)^2. \qquad (11)$$

Ce qui est le système de Calogero-Moser avec un potentiel extérieur quadratique.

Dans ([F2]) on a démontré à partir de l'existence de l'action symplectique du tore que les action-angles du système (2) sont globales et que l'Hamiltonien s'ecrit :

$$H = g\lambda m(m-1)/2 + \Sigma_{i=1}{}^{m}\ i p_i \tag{12}$$

dans les coordonnées actions.

III- Etude du modèle correspondant aux systèmes (BC_m).

Nous considérons donc dans ce paragraphe le système

$$H = (1/2)\ \Sigma_{i=1}{}^{m}\ (y_i{}^2 + \lambda^2\ x_i{}^2) + \Sigma_{i\neq j}\ g^2\ (1/(x_i-x_j)^2 + 1\ /(x_i+x_j)^2\ ) + 2\ \Sigma_i\ g_1{}^2\ /x_i{}^2 \tag{3}$$

$$\omega = \Sigma_{i=1}{}^{m}\ dx_i \wedge dy_i$$

avec le :

théorème 2:

Le système (3) a toutes ses orbites périodiques de période $2\pi/\lambda$ (non nécessairement primitive)

Démonstration:

Nous introduisons les matrices mxm qui sont définies comme suit:

$$A_{ij} = y_i\partial_{ij} + \sqrt{-1}\ \ g/(x_i-x_j)\ \ (1-\partial_{ij})$$

$$B_{ij} = \sqrt{-2}\ \ g_1/x_i\ \partial_{ij} + \sqrt{-1}\ \ g/(x_i+x_j)\ \ (1-\partial_{ij})$$

$A'_{ij} = d_i\partial_{ij} - \sqrt{-1}\ \ g/(x_i-x_j)^2\ \ (1-\partial_{ij})$ (les d_i seront explicités en cours de preuve)

$B'_{ij} = -(\sqrt{-1}\ g_1 / \sqrt{2} x_i^2)\partial_{ij} - \sqrt{-1}\ g/(x_i+x_j)^2\ (1-\partial_{ij})$

$\underline{X}_{ij} = x_i \partial_{ij}$

et les matrices 2mx2m :

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & -A \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \underline{X} & \\ & -\underline{X} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} B' & A' \\ A' & B' \end{bmatrix}$$

On remarque que l'Hamiltonien $H = (1/4)\mathrm{Tr}(\lambda^2 X^2 + L^2)$. On considère le flot défini par (H, ω) :

$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i = y_i$
$\dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i$

La dérivée de la matrice X le long du flot de H est alors donnée par la formule :

$$\dot{X} = [X,M] + L \tag{13}$$

En effet, la comparaison des termes diagonaux de (13) conduit à :

$\dot{X}_{ii} = L_{ii}$ qui est équivalent à $\dot{x}_i = y_i$

La comparaison des termes non diagonaux passe par le calcul du crochet :

$$[X,M] = \begin{bmatrix} [X,A'] & \{B',X\} \\ -\{B',X\} & -[X,A'] \end{bmatrix}$$

Il s'agit alors de vérifier que :

$$\dot{X} = [X,A'] + A'$$

et

$$0 = \{B',X\} + B$$

ce qui se fait élémentairement.

La dérivée de L par rapport au flot de H est donnée par

$$\dot{L} = [L,M] - \lambda^2 X \tag{14}$$

La vérification de cette formule passe par le calcul du crochet:

$$[L,M] = \begin{bmatrix} [A,A']+\{B,B'\} & \{A,B'\}+[B,A'] \\ -\{A,B'\}-[B,A'] & -[A,A']-\{B,B'\} \end{bmatrix}$$

D'où la nécessité de vérifier :

$$\dot{A} = [A,A'] + \{B,B'\} - \lambda^2 X \tag{15}$$

$$\dot{B} = \{A,B'\} + [B,A'] \tag{16}$$

Commençons avec (16). La comparaison des termes diagonaux conduit à

$$-\sqrt{-2}\ g_1 y_i/x_i^2 = 2A_{ii}B'_{ii}$$

car:

$\Sigma_{i\neq j}$ ($B_{ij}A'_{ji} - B_{ji}A'_{ij}$) = 0 (B et A' sont symétriques)

$\Sigma_{i\neq j}$ ($A_{ij}B'_{ji} + A_{ji}B'_{ij}$) = 0 ($A_{ij} = -A_{ji}$ et B' est symétrique)

La comparaison des termes non diagonaux dans (16) conduit à :

$$-\sqrt{-1}\ \ g(y_i+y_j)/(x_i+x_j)^2 = \Sigma_{k\neq i,j}\ (\ B_{ik}A'_{kj} - B_{kj}A'_{ik} + A_{ik}B'_{kj} + A_{kj}B'_{ik}\ )$$

$$+ (B_{ii}-B_{jj})A'_{ij} + B_{ij}(A'_{jj}-A'_{ii})$$

$$+ (A_{ii}+A_{jj})B'_{ij} + A_{ij}(B'_{jj}+B'_{ii})$$

On vérifie que l'égalité est satisfaite avec :

$$d_i = (\sqrt{-1}\ g_1/\ \sqrt{2}x_i^2\ )+\sqrt{-1}\ g\ \Sigma_{k\neq i}\ (\ 1/(x_i+x_k)^2\ +1/(x_i-x_k)^2\ ).$$

Une fois compris les mécanismes de simplification qui conduisent à établir (16), on procéde sans peine à la vérification de (15).

Nous avons donc à ce point obtenu que les équations de Hamilton impliquent:

$$\dot{X} = [X,M] + L$$

$$\dot{L} = [L,M] -\lambda^2 X\ .$$

On introduit alors la solution du problème de Cauchy :

$\dot{U}$ =[U,M] , U(0) = 1 et les nouvelles matrices

$\mathcal{X} = UXU^{-1}$,
$\mathcal{L} = ULU^{-1}$.

Les équations (13) et (14) conduisent à l'équation du second ordre :

$$\ddot{\mathcal{X}} = -\lambda^2 \mathcal{X}$$

qui s'intégre élémentairement. On en déduit que les valeurs propres de X qui ne sont autres que les positions x_i sont des fonctions périodiques du temps, de période $2\pi/\lambda$. Ce qui démontre le théorème.

Notons pour terminer que les équations (13) et (14) conduisent de suite à l'existence d'une paire de Lax pour le système (3). En effet, si nous introduisons les matrices

$$Z = \sqrt{-1}\lambda X+L \ , \ Z^{*} = -\sqrt{-1}\lambda X+L \ , \tag{17}$$

nous trouvons que (13) et (14) se réécrivent:

$$\dot{Z} = [Z,M]+ \sqrt{-1}\lambda Z$$

$$\dot{Z}^{*} = [Z^{*},M]- \sqrt{-1}\lambda Z^{*}.$$

Il en résulte que si $P = ZZ^{*}$, $\dot{P} = [P,M]$.

IV- UN ARGUMENT DE SYMETRIE.

Les matrices 2mx2m introduites au paragraphe précédent peuvent paraître étranges au lecteur. Nous allons présenter un argument de symétrie connu des spécialistes qui permet d'en deviner l'aspect.

Considérons le système (2) correspondant à 2m particules. On observe que si les particules sont placées symétriquement par rapport à l'origine à l'instant initial, elles restent en positions symétriques au cours du temps. Par réduction, on obtient ainsi un nouveau système Hamiltonien représenté par la fonction:

$$H = (1/2)\ \Sigma_{i=1}{}^{m}\ (y_i{}^2 + \lambda^2\ x_i{}^2) + \ \Sigma_{i\neq j}\ g^2\ (1/(x_i - x_j)^2 + 1\ /(x_i + x_j)^2\ ) \\ + (1/4)\ \Sigma_{i}\ g^2\ /x_i{}^2 \tag{18}$$

qui est un cas particulier $g = 2\sqrt{2}g_1$ du système (3).

A partir du paragraphe I, on voit que le système (18) a avec les matrices 2mx2m :

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & -A \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} \underline{X} & \\ & -\underline{X} \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} B' & A' \\ A' & B' \end{bmatrix}$$

et

$$A_{ij}= y_i\partial_{ij}+\sqrt{-1}\ g/(x_i-x_j)\ (1-\partial_{ij})$$

$$B_{ij}= \sqrt{-}\ g_1/2x_i\ \partial_{ij}+\sqrt{-1}\ \ g/(x_i+x_j)\ \ (1-\partial_{ij})$$

$$A'_{ij}= d_i\partial_{ij}-\sqrt{-1}\ \ g/(x_i-x_j)^2\ \ (1-\partial_{ij})$$

$$B'_{ij}= -(\sqrt{-1}\ \ g/\ 4x_i^2\ )\partial_{ij}-\sqrt{-1}\ \ g/(x_i+x_j)^2\ \ (1-\partial_{ij})$$

$$\underline{X}_{ij}= x_i\partial_{ij}$$

pour équations du flot :

$$\dot{X} = [X,M] + L$$

$$\dot{L} = [L,M] -\lambda^2X \quad .$$

On obtient alors de suite la périodicité dans ce cas, à partir des résultats antérieurs pour le système (Am).

REFERENCES

([A]) M. ADLER
"Some Finite Dimensional Integrable Systems and Their Scattering Behavior" Commun. Math. Phys. 55 (1977) pp.195-230

([C]) F. CALOGERO,
"Solution of the one-dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials", J. of Math. Phys. 12 (1973), pp.419-436.

([F1]) J.P. FRANCOISE
"Canonical Partition Functions of Hamiltonian Systems and the Stationary Phase Formula"Comm. Math. Physics vol.117,1 (1988) pp.37-47.

([F2]) J.P. FRANCOISE
" Symplectic geometry and integrable m-body problems on the line "
J. Math.Phys. 29(5) (1988) pp.1150-1153.

([F-R]) J.P. FRANCOISE-O.RAGNISCO
"Matrix second-order differential equations and Hamiltonian systems of quartic type"
Annales de l'Institut H. Poincaré vol.49, n°3, 1989, pp369-375.

([K.K.S]) J. KAZHDAN-B. KOSTANT-S.STERNBERG
"Hamiltonian Group Actions and Dynamical Systems of Calogero type"
Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) pp.481-508.

([M1]) J. MOSER
"Various aspects of integrable Hamiltonian systems"
Proc. CIME conf. held in Bressanone, (1978).

([M2]) J. MOSER
" Geometry of quadrics and spectral theory, Berkeley 1979, Springer-Verlag, 1980, pp.147-188.